O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI FANLAR AKADEMIYASI
V.I.ROMANOVSKIY NOMIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI

O‘ZBEKISTON MATEMATIKA JURNALI

Jurnalga 1957 yilda asos solingan (1991 yilgacha "O‘zbekiston fanlar akademiyasining axboroti. Fizika-matematika fanlari seriyasi"deb nomlangan). Yilda 4 marta chiqadi

1. 2006

УЗБЕКСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

УзМЖ

Основан в 1957 г. (до 1991 г. под названием "Известия Академии наук Узбекистана. Серия физико-математических наук"). Выходит 4 раза в год

ТАШКЕНТ. ИЗДАТЕЛЬСТВО "ФАН"АКАДЕМИИ НАУК РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН. 2006

Адрес редколлегии: 100125. Ташкент, Ф.Ходжаева, 29,
Институт математики АН РУз,
телефон: 162-75-44

Адрес редакции: 100047, Ташкент, ул. акад. Я.Гулямова, 70,
телефон: 133-41-88

Uzbek Mathematical
Journal, 2006,№1, pp.3-10

УДК 517.984

Спектр подгамильтонианов в системе $N-$ частиц на решетке [1]

Ж.И.Абдуллаев, М.Э.Муминов

Panjarada $N-$ zarrachali sistema gamiltoniani qaralgan va u mos Gilbert fazosida o'z-o'ziga qo'shma chegaralangan operator sifatida aniqlangan. Barcha qism gamiltonianlarning spektri tafsiflangan.

A Hamiltonian of $N-$ particle system is considered on a lattice. It is described as bounded self-adjoint operator on the corresponding Hilbert space. The spectrum of all subhamiltonians of $N-$ particle system are described.

Введение

В течение последних семидесяти лет наиболее популярным и традиционным объектом для математической физики служит нерелятивистская квантовая механика, точнее - оператор Шредингера. Этой области посвящено огромное число работ, наиболее полный обзор которых содержится в энциклопедии - методы современной математической физики [7, 8, 9, 10] (см также [6, 11]). В последние годы возрос интерес к нестандартным операторам Шредингера или операторам Шредингера на решетке. Операторы Шредингера $N-$ частиц в непрерывном пространстве достаточно хорошо изучены. Описан существенный спектр, доказана теорема ХВЖ о нижней грани существенного спектра, изучен спектр канальных операторов. Доказано отсутствие сингулярного непрерывного спектра в $N-$ частичной задаче для широких классов потенциалов взаимодействия. Существование бесконечного числа собственных значений (эффект Ефимова) для систем трех частиц впервые обнаружен Ефимовым [3]. Задача о существовании эффекта Ефимова для систем $N \geq 4$ частиц до сих пор была открытой. Недавно в работе [12] Ванг (X.P.Wang) решил эту проблему и доказал существование эффекта Ефимова. Спектральные свойства $N \leq 4$ частичного оператора Шредингера на решетке изучены в работах [1, 2, 4, 5].

[1] Работа финансирована грантом 65-04 ФПФИ АН РУз.

В настоящей работе рассматривается оператор Шредингера на решетке. В алгебраическом смысле дискретный оператор Шредингера аналогичен стандартному оператору Шредингера, так как типичный $N-$ частичный гамильтониан на решетке имеет вид (см (1))

$$H = -\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2m_i}\Delta_i + \sum_{i<j} V_{ij}.$$

Гамильтониан H, мы определим как ограниченный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве и выделим полный квазиимпульс системы. Опишем спектр всех подгамильтонианов, так как спектр подгамильтониана является частью спектра полного гамильтониана. Вдохновляющим стимулом при исследовании $N-$ частичного гамильтониана является возможность открытия новых эффектов, а также возникновения новых математических методов, поскольку больщая часть проблемы нескольких тел на решетке остается открытой. Кроме того, на решетке имеются много неожиданных результатов (см. [1, 2, 5]), которые не имеют аналогов в непрерывном пространстве.

Описание $N-$ частичного гамильтониана

Пусть $\mathbb{Z}^3-$ трехмерная решетка, $\ell_2((\mathbb{Z}^3)^N)-$ гильбертово пространство квадратично суммируемых функций, определенных на $(\mathbb{Z}^3)^N$.

В координатном представлении гамильтониан системы $N-$ частиц с парными потенциалами на трехмерной решетке действует в пространстве $\ell_2((\mathbb{Z}^3)^N)$ и имеет вид

$$\hat{H} = -\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2m_i}\Delta_i + \sum_{1\le i<j\le N} \hat{V}_{ij}, \tag{1}$$

Здесь m_i – масса $i-$ ой частицы,

$$\Delta_i = \overbrace{\underbrace{I\otimes I\otimes\cdots\otimes\Delta}_{i}\otimes I\cdots\otimes I}^{N}, \tag{2}$$

где $\Delta-$ решетчатый Лапласиан есть разностный оператор, описывающий перенос частицы с узла на соседний узел, т.е.

$$(\Delta\hat{\psi})(x) = \sum_{j=1}^{3}[\hat{\psi}(x+e_j) - 2\hat{\psi}(x) + \hat{\psi}(x-e_j)], \quad \hat{\psi}\in\ell_2(\mathbb{Z}^3), \tag{3}$$

где $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$ единичные орты в $\mathbb{Z}^3$. Оператор взаимодействия $\hat{V}_{ij}$ частицы i и j действует в пространстве $\ell_2((\mathbb{Z}^3)^N)$ по формуле

$$(\hat{V}_{ij}\hat{\psi})(x_1, x_2, \cdots, x_N) = \hat{v}_{ij}(x_i - x_j)\hat{\psi}(x_1, x_2, \cdots, x_N). \qquad (4)$$

Предположим, что $\hat{v}_{ij} : \mathbb{Z}^3 \to \mathbb{R}$ четная функция и удовлетворяет условию

$$\lim_{|x|\to\infty} |x|^\kappa \hat{v}_{ij}(x) = 0, \quad \kappa > 3. \qquad (5)$$

При выполнении условия (5) гамильтониан $\hat{H}$ является ограниченным самосопряженным оператором в пространстве $\ell_2((\mathbb{Z}^3)^N)$. Действительно, из равенства (3) вытекает, что

$$||\Delta\hat{\psi}|| \leq 12||\hat{\psi}||.$$

Отсюда и (2) следует ограниченность операторов $\Delta_i, i \in \{1, 2, 3, \cdots, N\}$. Из условия (5) следует ограниченность функций $\hat{v}_{ij}, i, j \in \{1, 2, 3, \cdots, N\}$. Следовательно,

$$||\hat{V}_{ij}\hat{\psi}|| \leq \sup_{x\in\mathbb{Z}^3} |\hat{v}_{ij}(x)| \; ||\hat{\psi}||.$$

Сумма ограниченных операторов есть ограниченный оператор, поэтому оператор $\hat{H}$ ограничен.

Самосопряженность оператора $\hat{V}_{ij}$ следует из вещественности и четности потенциала $\hat{v}_{ij}, i, j \in \{1, 2, 3, \cdots, N\}$. Из самосопряженности Δ следует самосопряженность $\Delta_i, i \in \{1, 2, 3, \cdots, N\}$. Отсюда и (2.1) следует самосопряженность $\hat{H}$.

Определение. *Разбиение D множества $\{1, 2, ..., N\}$ на p непересекающихся подмножеств $C_1, C_2, ..., C_p$, называется кластерным разложением.*

Пусть n_l число элементов кластера C_l и $\hat{h}_{C_l}$ гамильтониан кластера C_l. Гамильтониан $\hat{h}_{C_l}$ есть ограниченный самосопряженный оператор в $\ell_2((\mathbb{Z}^3)^{n_l})$ и имеет вид

$$\hat{h}_{C_l} = -\sum_{i\in C_l} \frac{1}{2m_i}\Delta_i + \sum_{i<j,\, i,j\in C_l} \hat{V}_{ij}.$$

Пусть $\mathbb{T}^3-$ трехмерный тор, $L_2((\mathbb{T}^3)^N)-$ гильбертово пространство квадратично-интегрируемых функций, определенных на $(\mathbb{T}^3)^N$.

В импульсном представлении гамильтониан $\mathbf{H}$ системы $N-$ частиц с парными потенциалами действует в гильбертовом пространстве $L_2((\mathbb{T}^3)^N)$ по формуле

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{V},$$

$$(\mathbf{H}_0 f)(k_1, k_2, \cdots, k_N) = \left(\sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i(k_i) \right) f(k_1, k_2, \cdots, k_N),$$

$$(\mathbf{V} f)(k_1, k_2, \cdots, k_N) \sum_{1 \leq i < j \leq N} \int\limits_{(\mathbb{T}^3)^N} \delta(k_i + k_j - k_i' - k_j')$$

$$v_{ij}\left(\frac{k_i - k_j - k_i' + k_j'}{2} \right) \prod_{s \neq i, s \neq j} \delta(k_s - k_s') f(k_1', k_2', \cdots, k_N') dk_1' dk_2' \cdots dk_N'.$$

Здесь

$$\varepsilon_i(q) = \frac{1}{m_i} \sum_{j=1}^{3} (1 - cos q_j), \quad q = (q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{T}^3.$$

$\delta(k)-$ трехмерная дельта-функция Дирака, $v_{ij}-$ есть преобразование Фурье функции $\hat{v}_{ij}$, т.е.

$$v_{ij}(q) = (\mathcal{F} \hat{v}_{ij})(q) = (2\pi)^{-3/2} \sum_{s \in ^3} \hat{v}_{ij}(s)\, e^{i(q,s)}.$$

Из предположения (5) следует, что функция $v_{ij}(q)$ есть четная, вещественнозначная, непрерывная функция на $\mathbb{T}^3$.

Лемма 1. *Гамильтониан* $\mathbf{H}$ *коммутирует с группой унитарных операторов* $U_s, s \in \mathbb{Z}^3$ *:*

$$(U_s f)(k_1, \cdots, k_N) = \exp\big(-i(s, k_1 + \cdots + k_N)\big) f(k_1, \cdots, k_N), \quad f \in L_2((\mathbb{T}^3)^N),$$

т.е. для любого $s \in \mathbb{Z}^3$ *имеет место равенство* $U_s \mathbf{H} = \mathbf{H} U_s$.

Доказательство. Покажем, что

$$U_s \mathbf{H}_0 = \mathbf{H}_0 U_s, \quad U_s \mathbf{V} = \mathbf{V} U_s.$$

Действительно для любого $f \in L_2((\mathbb{T}^3)^N)$ имеет место равенство

$$(U_s \mathbf{H}_0 f)(k_1, \cdots, k_N) = \exp\big(-i(s, k_1 + \cdots + k_N)\big) \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i(k_i) f(k_1, \cdots, k_N) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i(k_i) \exp\big(-i(s, k_1 + \cdots + k_N)\big) f(k_1, \cdots, k_N) = (\mathbf{H}_0 U_s f)(k_1, \cdots, k_N).$$

Пользуясь свойством функции $\delta(k)$, показывается равенство

$$(U_s \mathbf{V} f)(k_1, \cdots, k_N) = (\mathbf{V} U_s f)(k_1, \cdots, k_N).$$

Таким образом, имеет место равенство $U_s \mathbf{H} = \mathbf{H} U_s$.

Из леммы 1 следует, что существуют разложения пространства $L_2((\mathbb{T}^3)^N)$, операторов U_s и $\mathbf{H}$ в прямые интегралы:

$$L_2((\mathbb{T}^3)^N)=\int_{\mathbb{T}^3}\oplus L_2(F_K)dK,\quad U_s=\int_{\mathbb{T}^3}\oplus U_s(K)dK,\quad \mathbf{H}=\int_{\mathbb{T}^3}\oplus \tilde{H}(K)dK.$$

Здесь

$$F_K=\{(k_1,\cdots,k_N)\in(\mathbb{T}^3)^N:\quad k_1+\cdots+k_N=K\},\quad K\in\mathbb{T}^3,$$

$U_s(K)$ - оператор умножения на функцию $\exp(-i(s,K))$ в пространстве $L_2(F_K)$. Слойный оператор $\tilde{H}(K)$ действует в $L_2(F_K)$ и унитарно эквивалентен оператору $H(K)$, действующему в гильбертовом пространстве $L_2((\mathbb{T}^3)^{N-1})$. Оператор $H(K)$ называется оператором Шредингера и имеет вид

$$H(K)=H_0(K)+\sum_{1\le i<j\le N}V_{ij}.$$

Здесь операторы $H_0(K)$ и V_{ij} определяются по формулам

$$(H_0(K)f)(k)=\left(\sum_{i=1}^{N-1}\varepsilon_i(k_i)+\varepsilon_N(K-k_1-\cdots-k_{N-1})\right)f(k_1,\cdots,k_{N-1}),\quad (6)$$

$$(V_{iN}f)(k)=(2\pi)^{-3/2}\int_{\mathbb{T}^3}v_{iN}(k_i-k_i')f(k_1,\cdots,k_{i-1},k_i',\cdots,k_{N-1})dk_i'.\quad (7)$$

При $j<N$ оператор V_{ij} действует по формуле

$$(V_{ij}f)(k)=(2\pi)^{-3/2}\int_{\mathbb{T}^3}v_{ij}(k_i-k_i')f(\underbrace{k_1,\cdots,k_i',\cdots,k_i+k_j-k_i'}_{j},\cdots,k_{N-1})dk_i'.\quad (8)$$

Унитарность осуществляется с помощью унитарного преобразования

$$u_K: L_2(F_K)\to L_2((\mathbb{T}^3)^{N-1}),$$

$$(u_Kg)(k_1,\cdots,k_{N-1})=g(k_1,\cdots,k_{N-1},K-\sum_{i=1}^{N-1}k_i).$$

В импульсном представлении гамильтониан h_{C_l} кластера $C_l=\{i_1,i_2,...,i_{n_l}\}$ действует в гильбертовом пространстве $L_2((\mathbb{T}^3)^{n_l})$ по формуле

$$(h_{C_l}f)(k_{i_1},k_{i_2},\cdots,k_{i_{n_l}})=\sum_{s=1}^{n_l}\varepsilon_{i_s}(k_{i_s})f(k_{i_1},k_{i_2},\cdots,k_{i_{n_l}})+$$

$$+\sum_{i<j,i,j\in C_l}\int_{(\mathbb{T}^3)^{n_l}}\delta(k_i+k_j-k_i'-k_j')v_{ij}\left(\frac{k_i-k_j-k_i'+k_j'}{2}\right)\times$$

$$\times\prod_{s\neq i,s\neq j}\delta(k_s-k_s')f(k_{i_1}',k_{i_2}',\cdots,k_{i_{n_l}}')dk_{i_1}'dk_{i_2}'\cdots dk_{i_{n_l}}'.$$

Гамильтониан h_{C_l} кластера C_l коммутирует с группой унитарных операторов $U_s(C_l)$,
$s\in\mathbb{Z}^3$:

$$(U_s(C_l)f)(k)=\exp\big(-i(s,k_{C_l})\big)f(k),\quad f\in L_2((\mathbb{T}^3)^{n_l}),\quad k_{C_l}=k_{i_1}+\cdots+k_{i_l}.$$

Рассуждая как выше, получим, что оператор h_{C_l} разлагается в прямой интеграл:

$$h_{C_l}=\int_{\mathbb{T}^3}\oplus\tilde{h}_{C_l}(k_{C_l})dk_{C_l}.$$

Здесь слойный оператор $\tilde{h}_{C_l}(k_{C_l})$ унитарно эквивалентен оператору $h_{C_l}(k_{C_l})$, действующему в гильбертовом пространстве $L_2((\mathbb{T}^3)^{n_l-1})$ по правилам

$$h_{C_l}(k_{C_l})=h^0_{C_l}(k_{C_l})+\sum_{i<j,i,j\in C_l}V_{ij}.$$

Здесь операторы $h^0_{C_l}(k_{C_l})$ и V_{ij} определяются аналогичны как (6) и (7), (8).

Пусть $D:C_1\cup C_2\cup...\cup C_p=\{1,2,...,N\}-$ кластерное разложение и оператор V_D сумма всех потенциалов V_{ij}, где i и j принадлежат одним кластерам, т.е.

$$V_D=\sum_{l=1}^{p}\sum_{i<j,\,i,j\in C_l}V_{ij}.$$

Определение. *Оператор $H_D(K)=H_0(K)+V_D,\quad K\in\mathbb{T}^3$, действующий в $L_2((\mathbb{T}^3)^{N-1})$ назовем канальным оператором соответствующего кластерного разложения D.*

Например, если $C_1=\{1,2\},C_2=\{3,4,5\},C_3=\{6\},...,C_{N-3}=\{N\}$, тогда

$$H_D(K)=H_0(K)+V_{12}+V_{34}+V_{45}+V_{35}.$$

Оператор $H_D(K)$ коммутирует с группой унитарных операторов $\{U_s(C_l)\}$, $s\in\mathbb{Z}^3$ при каждом $l\in\{1,2,...,p\}$, поэтому имеет место разложение

$$H_D(K)=\int_{\mathbb{T}^3}\oplus...\oplus\int_{\mathbb{T}^3}\oplus H_D(k_{C_1},k_{C_2},...,k_{C_p})dk_{C_2}...dk_{C_p},\quad k_{C_1}=K-\sum_{i=2}^{p}k_{C_i},\tag{9}$$

где оператор $H_D(k_{C_1},...,k_{C_p})$ действует в пространстве

$$L_2((\mathbb{T}^3)^{N-p}) = L_2((\mathbb{T}^3)^{n_1-1}) \otimes ... \otimes L_2((\mathbb{T}^3)^{n_p-1})$$

по правилам

$$H_D(k_{C_1},k_{C_2},...,k_{C_p}) = \sum_{l=1}^{p} H_{C_l}(k_{C_l}) + E_D(k_{C_1},...,k_{C_p}). \tag{10}$$

Здесь $H_{C_l}(k) = \overbrace{I \otimes ... \otimes h_{C_l}(k) \otimes ... \otimes I}^{p}$, $E_D(k_{C_1},...,k_{C_p})-$ оператор умножения на число $\sum\limits_{l} \varepsilon_l(k_{C_l})$, где суммирование берется по всем кластерам, содержащих только одну частицу.

Замечание. *Если кластер C_l содержит только одну частицу, то мы пишем $h_{C_l}(k)=0$ и $L_2((\mathbb{T}^3)^{n_l-1}) = \boldsymbol{C}$ (нет внутренних координат).*

Теорема 1. *Для спектра оператора $H_D(k_{C_1},k_{C_2},...,k_{C_p})$ имеет место равенство*

$$\sigma\big(H_D(k_{C_1},k_{C_2},...,k_{C_p})\big) =$$
$$= \left\{ \sum_{l=1}^{p} \lambda_l + \epsilon : \lambda_l \in \sigma(h_{C_l}(k_{C_l})),\, \epsilon \in \sigma(E_D(k_{C_1},...,k_{C_p})) \right\}.$$

Доказательство. В силу теоремы о спектре тензорных произведений операторов [10] имеем

$$\sigma\big(\sum_{l=1}^{p} H_{C_l}(k_{C_l})\big) = \{\sum_{l=1}^{p} \lambda_l : \quad \lambda_l \in \sigma(h_{C_l}(k_{C_l}))\}.$$

Теперь из (10) получим доказательство теоремы 1.

Из теоремы 1 и из (9) получим

Теорема 2. *Справедливо равенство*

$$\sigma(H_D(K)) = \bigcup_{k_{C_2}\in\mathbb{T}^3} \cdots \bigcup_{k_{C_p}\in\mathbb{T}^3} \sigma\Big(H_D(K-k_{C_2}-...-k_{C_p},k_{C_2},...,k_{C_p})\Big).$$

Литература

1. Абдуллаев Ж.И., Лакаев С.Н. Асимптотика дискретного спектра разностного трехчастичного оператора Шредингера на решетке. Теоретическая и математическая физика. 2003. Т. 136, №2, 231-245.

2. Albeverio S., Lakaev S.N., Abdullaev J.A. On the Finiteness of the Discrete Spectrum of a Four-Particle Lattice Schrodinger Operators. Reports on Mathematical Physics, 2003. V.51, №1, 43-70.

3. Ефимов В.Н. Слабо связанные состояния трех резонансно взаимодействуюших частиц. Ядерная физика. 1970. Т.12, №5, 1080-1091.

4. Лакаев С.Н. Об эффекте Ефимова в системе трех одинаковых квантовых частиц. Функ. анал. и его прил. 1993. Т.27, Вып.3, 15-28.

5. Lakaev S.N., Muminov M.I. Essential and discrete spectra of the Three-Particle Schrodinger Operator on a lattice. Theor.and Mathem. Phys. 2003. 135, 3, 849-871

6. Меркурьев С.П., Фаддеев Л.Д. Квантовая теория рассеяния для систем нескольких частиц. М.: Наука. 1985.

7. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т.1. Функциональный анализ. М.: Мир. 1977.

8. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т.2. Гармонический анализ. Самосопряженность. М.: Мир. 1978.

9. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т.3. Теория рассеяния. М.: Мир. 1982.

10. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т.4. Анализ операторов. М.: Мир. 1982.

11. Цикон Х., Фрези Р., Кириш В., Саймон Б. Операторы Шредингера. М.: Мир. 1990.

12. Wang X.P. On the existence of the $N-$ body Efimov effect. Jour. of Func.Anal. 2004. 209, 137-161.

Самаркандский государственный
университет им. А.Навои

Дата поступления
19.04.05

Uzbek Mathematical
Journal, 2006,№1, pp.11-19

УДК 517.95/93

Решение систем линейных дифференциальных уравнений в частных производных, содержащих параметры

А.Г.Алишев

Kichik parametrga bog‘liq bo‘lgan xususiy hosilali chiziqli differensial tenglamalar sistemasining matritsalar to‘plami karrali xos qiymatlarga ega bo‘lgan hol uchun asimptotik yechimlar tuzilgan.

For the system of linear differential equations in quotient derivatives with small parameters assimptotic solution are constructed under the assumption that the bunch of matrixes corresponding system has multiple eigen value.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$\varepsilon^{h_1}\mu^{h_2}B(x,\varepsilon,\mu)Lu = A(x,\varepsilon,\mu)u, \tag{1}$$

в который $u(x,\varepsilon,\mu) - n$ - мерный неизвестный вектор $x = (x_1, ..., x_m)$ $x \in G$, G - открытая ограниченная область m - мерного пространства $R^m(m \geq 1)$; ε, μ - малые действительные параметры: $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\mu \in (0, \mu_0]$, h_1, h_2 - целые неотрицательные числа такие, что $h_1 + h_2 \geq 1, A(x,\varepsilon,\mu), B(x,\varepsilon,\mu)$ квадратные матрица порядка n, допускающие в области G равномерные асимптотические разложения при $\varepsilon, \mu \to 0$

$$A(x,\varepsilon,\mu) = \sum_{K+S\geq 0} \varepsilon^K\mu^S A_{KS}(x), B(x,\varepsilon,\mu) = \sum_{K+S\geq 0} \varepsilon^K\mu^S B_{KS}(x), \tag{2}$$

с голоморфными коэффициентами $A_{KS}(x), B_{KS}(x)$.

Для простаты считаем, что

$$L = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{3}$$

Задачу (1) будем решать при выполнении следующих условий:
1) матрицы $A_{KS}(x), B_{KS}(x), k, s = 0, 1, ...$ голоморфны в области G;
2) $\det B_{00}(x) = 0, \forall x \in G$;

3) пучок матриц $A_{00}(x) - \lambda B_{00}(x)$ регулярный и имеет постоянную Кронекереву структуру [1] области G.

Вид решений системы (1) и метод их построения существенно зависят от структуры конечных и бесконечных элементарных делителей [1] предельного пучка матриц

$$J(x,\lambda) = A_{00}(x) - \lambda B_{00}(x). \tag{4}$$

Будем предполагать, что пучок матриц $J(x,\lambda)$ имеет один конечный элементарный делитель кратности p, соответствующих собственному значению $\lambda_0(x)$ такой же кратности.

Мы здесь рассматриваем уравнение разветвления для поставленных задач.

При изучении системы вида (1) необходимо учитывать соотношениях между параметрами. При исследдовании поставленной нами задачи будем использовать метод возмущений и диаграмм Ньютона.

В данной работе рассмотрен только метод возмущений. Согласно предположению пучок матриц $J(x,\lambda)$ имеет в области G собственное значение $\lambda_0(x)$ кратности p, которому соответствует конечный элементарный делитель, такой же кратности. В этом [2] случае данному собственному значению соответствует Корданова цепочка матриц $A_{00}(x)$ относительно матриц $B_{00}(x)$ длины p, состоящая собственного вектора $\varphi_1(x)$ и $p-1$, $B_{00}(x)$ присоединенных векторов $\varphi_2(x), ..., \varphi_p(x)$, которые $\forall x \in G$ удовлетворяют соотношениям:

$$(A_{00}(x) - \lambda B_{00}(x))\,\varphi_1(x) = 0, \tag{5}$$

$$(A_{00}(x) - \lambda B_{00}(x))\,\varphi_i(x) = B_{00}(x) \cdot \varphi_{i-1}(x), i = \overline{2,p} \tag{6}$$

При этом уравнение

$$(A_{00}(x) - \lambda B_{00}(x))\,y = B_{00}(x)\varphi_p(x) \tag{7}$$

не разрешимо ни в одной точки области G.

Векторы $\varphi_i(x), i = \overline{1,p}$ из соотношений (5), (6) определяются неоднозначно. Мы устроним эту неоднозначность, определив их следующим образом. Собственный векторов $\varphi_i(x)$ определим так, чтобы он имел такую же степень гладкость, что и матрица $J(x, \lambda_0(x))$ (что всегда возможно [3]), и зафиксируем. Этот собственный вектор в дальнейшем будем обозначать через $\varphi(x)$. Присоединенные векторы определим с помощью рекуррентных формул

$$\varphi_i(x) = H(x)B_{00}(x)\varphi_{i-1}(x), \quad i = \overline{2,p} \tag{8}$$

где $H(x)$ - полуобратная матрица к матрице $J(x, \lambda_0(x))$.

Из формул (8) получим

$$\varphi_i(x) = [H(x)B_{00}(x)]^{i-1}\varphi(x), i = \overline{1,p} \tag{9}$$

Обозначим $\psi(x)$ собственный вектор матрица $J^*(x, \lambda_0(x))$ сопряженной матрице $J(x, \lambda_0(x))$.

В силу разрешимости уравнений (8) имеют место равенства

$$(B_{00}(x)\varphi_i(x), \psi(x)) \neq 0, \forall x \in G, \quad i = \overline{1, p-1}. \tag{10}$$

где (,) - скалярное произведение в унитарном пространстве n мерных вектор-функций. Поскольку уравнение (7) разрешимо, то

$$(B_{00}(x)\varphi_p(x), \psi(x)) \neq 0, \forall x \in G. \tag{11}$$

С учетом (9) соотношения (10), (11) запишутся в виде

$$\Big(B_{00}(x)\,[H(x)B_{00}(x)]^{i-1}\varphi(x), \psi(x)\Big) = 0, \forall x \in G, \quad i = \overline{1, p-1},$$

$$\Big(B_{00}(x)\,[H(x)B_{00}(x)]^{p-1}\varphi(x), \psi(x)\Big) = 0, \forall x \in G.$$

Так как вектор $\psi(x)$ определяется с точностью до произвольного скалярного множителя, то за счет этого множителя можно добиться чтобы

$$\Big(B_{00}(x)\,[H(x)B_{00}(x)]^{p-1}\varphi(x), \psi(x)\Big) = 1. \tag{12}$$

В дальнейшем будем предполагать, что вектор $\psi(x)$ определен именно таким образом, т.е. имеют место соотношения

$$\Big(B_{00}(x)\,[H(x)B_{00}(x)]^{i-1}\varphi(x), \psi(x)\Big) = \delta_{ip}, \quad i = \overline{1,p}, \tag{13}$$

где δ_{ip} -символ Кронекера.

Решения системы (1) соответствующие собственному значению $\lambda_0(x)$ пучка матриц $J(x, \lambda_0(x))$ будем строить в виде

$$\begin{gathered} u(x,\varepsilon,\mu) = \vartheta(x,\varepsilon,\mu)y \\ \varepsilon^{h_1}\mu^{h_2}Ly = (\lambda_0(x) + \lambda(x,\varepsilon,\mu))y, \end{gathered} \tag{14}$$

где $\vartheta(x,\varepsilon,\mu) - n$ - мерная вектор-функция, $\lambda(x,\varepsilon,\mu)$ - скалярная функция, подлежащая определению. Подставив вектор (14) в систему (1), получим

$$J(x, \lambda_0(x))\vartheta = [\lambda(x,\varepsilon,\mu)B(x,\varepsilon,\mu) - F(x,\varepsilon,\mu)]\,\vartheta, \tag{15}$$

где
$$F(x,\varepsilon,\mu)=\sum_{K+S\geq 1}\varepsilon^K\mu^S F_{KS}(x), \tag{16}$$
$$F_{KS}(x)=A_{KS}(x)-\lambda_0(x)B_{KS}(x)-B_{K-h_1,S-h_2}(x)L,\quad k+s\geq 1.$$

Таким образом, задача определения функций $\lambda(x,\varepsilon,\mu)$ и вектора $\vartheta(x,\varepsilon,\mu)$ свелась к задаче о возмущении собственного значения $\lambda_0(x)$ и соответствующего собственного вектора пучка операторов $J(x,\lambda)$ под воздействием возмущающих операторов $F(x,\varepsilon,\mu)$ и
$$\widetilde{B}(x,\varepsilon,\mu)=\sum_{K+S\geq 1}\varepsilon^K\mu^S B_{KS}(x).$$

Следовательно, $\lambda_0+\lambda(x,\varepsilon,\mu)$ - это собственное значение возмущенного пучка операторов, а $\vartheta(x,\varepsilon,\mu)$ - соответствующий собственный вектор.

Уравнение (15) будет разрешимо относительно $\vartheta(x,\varepsilon,\mu)$ тогда и только тогда, когда
$$((\lambda B+F)\vartheta,\psi)=0. \tag{17}$$

При выполнении этого условия будем иметь
$$\vartheta=(\lambda HB-HF)\vartheta+C\varphi,\ \text{или}\ (E-\lambda HB-HF)\vartheta-C\varphi, \tag{18}$$

где E -единичная $n\times n$ - матрица, C - произвольный скалярный множитель, для упрощения выкладок положим $C=1$. Тогда из (18) имеем
$$(E-\lambda HB-HF)\vartheta=\varphi.$$

Легко убедиться, что это уравнение формально удовлетворяется если вектор ϑ определить в виде формального ряда
$$\vartheta=\varphi+\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda HB-HF)^k\varphi. \tag{19}$$

Подставив (19) в (17), получим искомое уравнение разветвления:
$$X(\lambda,\varepsilon,\mu)=\left((\lambda B-F)\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda HB-HF)^k\varphi,\psi\right)=0. \tag{20}$$

Представим операторное выражение $X(\lambda,\varepsilon,\mu)$ в виде формального разложения
$$X(\lambda,\varepsilon,\mu)=\sum_{k+r+s\geq 0}X_{krs}[\lambda^k]\varepsilon^r\mu^S, \tag{21}$$

где k-суммарная степень функции λ, содержащейся в операторной функции $X_{krs}\lfloor\lambda^k\rfloor$.

Обозначим

$$\widetilde{X} = (\lambda B - F)\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda(HB - HF)^k.$$

Тогда

$$H\widetilde{X} = \sum_{k=0}^{\infty}(\lambda HB - HF)^k. \tag{22}$$

Рассмотрим выражение $(\lambda HB - HF)^k, k = 1, 2, ...$

Учитывая, что

$$F\lambda = \lambda F - \varepsilon^{h_1}\mu^{h_2}(L\lambda)B, \tag{23}$$

где L - оператор (3), будем иметь

$$(\lambda HB - HF)^2 = (HF)^2 - (HBHF + HFHB) + \lambda^2(HB)^2 + \varepsilon^{h_1}\mu^{h_2}(L\lambda)(HB),$$

$$(\lambda HB - HF)^3 = -(HF) + \lambda\left[HB(HF)^2 + HFHBHF + (HF)^2HB\right] -$$
$$-\lambda^2\left[(HB)^2HF + HBHFHB + HF(HB)^2 + \lambda^2(HB)^2 - \varepsilon^{h_1}\mu^{h_2}(L\lambda)\right]\bullet$$
$$\bullet(HB)^2HF + HFHBHF + HF(HB)^2 + \lambda^3(HB)^3 - \varepsilon^{h_1}\mu^{h_2}(L\lambda)\bullet$$
$$\bullet\left[(HB)^2HF + HBHFHB + HF(HB)^2\right] + \varepsilon^{h_1}\mu^{h_2}(\lambda L\lambda + L\lambda^2)(HB)^2+$$
$$+\varepsilon^{2h_1}\mu^{2h_2}(L^2\lambda)(HB)^3$$

....

Введем следующие обозначения. Сумму всевозможных произведений i множителей x и j множителей z обозначим $\sigma[(x)_i;(z)_j]$. Символом $L^i[\lambda^k]$ обозначим сумму всех возможных произведений i "множителей" L и k множителей λ. При этом последним множителем во всех слагаемых выражениях $L^i[\lambda^k]$ должен быть λ.

Например

$$L[\lambda^2] = L\lambda^2 + \lambda L\lambda = 2\lambda L\lambda + \lambda L\lambda = 3\lambda L\lambda,$$

$$L^2[\lambda^2] = L^2\lambda + L\lambda L\lambda + \lambda L^2\lambda = 3(L\lambda)^2 + L\lambda L^2\lambda$$

Используя эти обозначения, методом математической индукции легко доказывается, что в общем случае имеет место формула

$$(\lambda HB + HF)^k = (-1)^k(HF)^k + \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=0}^{k-j}(-1)^{i+j+k}\varepsilon^{ih_1}\mu^{ih_2}\bullet$$
$$\bullet L^i[\lambda^j]\sigma[(HB)_{i+j};(H\Gamma H_{k-i-j}], \quad k = 1, 2, ... \tag{24}$$

Подставив (24) в (22) , найдем

$$H\widetilde{X}=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k(H\Gamma)^k+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=0}^{k-j}(-1)^{i+j+k}\varepsilon^{ih_1}\bullet \\ \bullet\mu^{ih_2}L^i[\lambda^j]\sigma\left[(HB)_{i+j};(H\Gamma)_{k-i-j}\right]. \tag{25}$$

Учитывая разложения (2), (16), сгруппируем в этом выражении члены с одинаковыми степенями ε и μ. Изменяя одновременно порядок суммирования, первое слагаемое преобразуем к виду

$$\sigma_1=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k(H\Gamma)^k=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i+j=k}^{\infty}(-1)^k\varepsilon^i\mu^j\widetilde{P}_k^{ij}(H\Gamma)=$$

$$=\sum_{i+j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{i+j}(-1)^k\varepsilon^i\mu^j\widetilde{P}_k^{ij}(H\Gamma)=\sum_{r+s\geq 1}^{\infty}\sum_{j=1}^{r+s}(-1)^k\varepsilon^r\mu^s\widetilde{P}_j^{r,s}(H\Gamma),$$

где $\widetilde{P}_j^{r,s}(H\Gamma)$ - сумма всех возможных произведений j множителей вида $H\Gamma_{r_1S_1},H\Gamma_{r_2S_2},...,H\Gamma_{r_jS_j}$ сумма первых индексов которых равно r, а вторых - s, причем $r_i+S_i\geq 1,\quad i=\overline{1,j}$:

$$\widetilde{P}_j^{r,S}(H\Gamma)=\sum_{\substack{r_1+...+r_j=r\\ s_1+s_2+...+s_j=s}}H\Gamma_{r_1s_1}H\Gamma_{r_2s_2}...H\Gamma_{r_js_j}$$

Далее имеем

$$\sigma^2=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{k}\sum_{j=0}^{k-j}(-1)^{i+j+k}\varepsilon^{ih_1}\mu^{ih_2}L^i[\lambda^j]\sigma\left[(HB)_{i+j};(H\Gamma)_{k-i-j}\right]=$$

$$=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=i+j}^{\infty}(-1)^{i+j+k}\varepsilon^{ih_1}\mu^{ih_2}L^i[\lambda^j]\sigma\left[(HB)_{i+j};(H\Gamma)_{k-i-j}\right]=$$

$$=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\varepsilon^{ih_1}\mu^{ih_2}L^i[\lambda^j]\sigma\left[(HB)_{i+j};(H\Gamma)_k\right]=$$

$$=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=i+j}^{\infty}\sum_{r+s=j}^{\infty}(-1)^j\varepsilon^{ih_1+r}\mu^{ih_2+s}L^i[\lambda^k]\widetilde{P}_{i+k}^{r,s}(HB,H\Gamma)=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{r+s=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{r+s}(-1)^j\varepsilon^{ih_1+r}\mu^{ih_2+s}L^i[\lambda^k]\widetilde{P}_{i+k}^{r,s}(HB,H\Gamma),$$

где символом $\widetilde{P}_{ij}^{r,s}(HB,H\Gamma)$ обозначена сумма всех возможных произведений i множителей вида $HB_{m_1n_1},...,HB_{m_in_i}$ и j множителей вида $H\Gamma_{p_1q_1}$, ..., $HB_{p_jq_j}$ таких, что $m_1+m_2+...+m_i+p_1+...+p_j = r$, $n_1+...+n_i+q_1+...+q_j = s$, причем $m_k+n_k \geq 0$, $p_k+q_k \geq 1$.

$$\widetilde{P}_{ij}^{r,s}(HB,H\Gamma) = \sum_{\substack{m_1+...+m_i+p_1+...+p_j=r \\ n_1+...+n_i+q_1+...+q_j=s}} \prod_{\alpha=1}^{i}\prod_{\beta=1}^{j} HB_{m_\alpha n_\alpha} H\Gamma_{p_\beta q_\beta}.$$

Сделав замену индексов $h_1i+r=r_1$, $h_2i+s=s_1$ и изменив порядок суммирования, окончательно получим

$$\sigma = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{r_1+s_1=i(h_1+h_2)}^{\infty}\sum_{j=0}^{r_1+s_=i(h_1+h_2)}(-1)^j\varepsilon^{r_1}\mu^{s_1}L^i[\lambda^k]\bullet$$

$$\bullet P_{i+k,j}^{r_1-h_1i,s_1-h_2i}(HB,HF) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\min\left(\left[\frac{r}{h_1}\right],\left[\frac{s}{h_2}\right]\right)}\bullet$$

$$\bullet\sum_{j=0}^{r+s-i(h_1+h_2)}(-1)^j\varepsilon^r\mu^sL^i(\lambda^k)P_{i+k,j}^{r_1-h_1i,s_1-h_2i}(HB,H\Gamma),$$

где $[a]$ - обозначает целую часть a.

В результате выражение (25) преобразуется к виду

$$\begin{gathered} HX = \sigma_1+\sigma_2 = \sum_{r+s=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{r+s}(-1)^j\varepsilon^r\mu^s\widetilde{P}^{r,s}[H\Gamma]+ \\ +\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\min\left(\left[\frac{r}{h_1}\right],\left[\frac{s}{h_2}\right]\right)}\bullet \\ \bullet\sum_{j=0}^{r+s-i(h_1+h_2)}(-1)^j\varepsilon^r\mu^sL^i(\lambda^k)P_{i+k,j}^{r_1-h_1i,s_1-h_2i}(HB,H\Gamma). \end{gathered} \tag{26}$$

Следовательно,

$$X(\lambda,\varepsilon,\mu)\sum_{r+s=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{r+s}(-1)^j\varepsilon^r\mu^s(P_j^{r,s}(H\Gamma)\varphi,\psi)+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\min\left(\left[\frac{r}{h_1}\right],\left[\frac{s}{h_2}\right]\right)}\sum_{j=0}^{r+s-i(h_1+h_2)}\bullet$$

$$\bullet(-1)^j\varepsilon^r\mu^s L^i[\lambda^k](P_{i+k,j}^{r-h_1 i,s-h_2 i}(HB,H\Gamma)\varphi,\psi),$$

где выражения $P_j^{r,s}(H\Gamma)$ $P_{i+k,j}^{r-ih_1,s-ih_2}(HB,H\Gamma)$ связаны с $\widetilde{P}_j^{r,s}(H\Gamma)$, $P_{i+k,j}^{r-ih_1,s-ih_2}(HB,H\Gamma)$ соотношениями

$$HP_j^{r,s}(H\Gamma)=\widetilde{P}_j^{r,s}(H\Gamma),\ \ HP_{i+k,j}^{r-ih_1,s-ih_2}(HB,H\Gamma)=P_{i+k,j}^{r-ih_1,s-ih_2}(HB,H\Gamma)$$

Отсюда получаем следующие формулы для коэффициентов уравнения разветвления (20):

$$X_{000}=0, X_{k00}[\lambda^k]=\lambda^k(B_{00}(HB_{00})^{k-1}\varphi,\psi), k\geq 1;$$

$$X_{krs}[\lambda^K]=\sum_{i=0}^{\min\left(\left[\frac{r}{h_1}\right],\left[\frac{s}{h_2}\right]\right)}\ \sum_{j=0}^{r+s-i(h_1+h_2)}(-1)^j L^i[\lambda^k](P_{i+K,j}^{r-ih_1,s-ih_2}(HB,H\Gamma)\varphi,\psi),$$
$$k\geq 1, r+s\geq 1. \tag{27}$$

Заметим, что согласно (13)

$$X_{k00}[\lambda^k]=\lambda^k\delta_{k,p},\quad k=\overline{1,p}. \tag{28}$$

Подставив (22), (26) в (19), получим соответствующее выражения для вектора ϑ:

$$\vartheta(x,\varepsilon,\mu)=\varphi+\sum_{r+s=1}^{\infty}\varepsilon^r\mu^s\widetilde{X}_{ors}\varphi+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^r\mu^s\widetilde{X}_{krs}[\lambda^k]\varphi, \tag{29}$$

где

$$\widetilde{X}_{krs}=\sum_{j=1}^{r+s}(-1)^j\widetilde{P}_j^{r,s}(H\Gamma),\quad r+s\geq 1 \tag{30}$$

$$\widetilde{X}_{krs}[\lambda^s]=\sum_{i=0}^{\min\left(\left[\frac{r}{h_1}\right],\left[\frac{s}{h_2}\right]\right)}\ \sum_{j=0}^{r+s-i(h_1+h_2)}(-1)^j L^i[\lambda^k]P_{i+K,j}^{r-ih_1,s-ih_2}(HB,H\Gamma),$$
$$k=1,2,...,r, s=0,1,...$$

Таким образом доказано следующее утверждение.

Теорема. *Скалярная функция $\lambda(x,\varepsilon,\mu)$ является решением уравнения*

$$\lambda^p+\sum_{k=p+1}^{\infty}\lambda^k X_{k00}+\sum_{r+s=1}^{\infty}\varepsilon^r\mu^s X_{0rs}+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{r+s=1}^{\infty}\varepsilon^r\mu^s X_{krs}[\lambda^k]=0, \tag{31}$$

где операторные функции $X_{krs}[\lambda^k]$ определяются по формулам (27), а соответствующая вектор-функция $\vartheta(x,\varepsilon,\mu)$ представляется в виде разложения (29), коэффициенты которого определяются по формулам (30).

Литература

1. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц.- М.: Наука 1978.- 575 с.
2. Вэйнберг М.М., Треногин В.А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений.- М.: Наука, 1969,- 528 с.
3. Сотниченко Н.А., Фещенко С.Ф. Асимптотическое расщепление систем дифференциальных уравнений в частных производных: Препринт 78.34.- К.: Ин-т математики АН УССР, 1978, 40 с.

Джиззакский государственный
педагогический институт

Дата поступления
28.11.03

Uzbek Mathematical
Journal, 2006,№1, pp.20-27

УДК 517.968

Оптимальная скорость сходимости некоторых аппроксимационно-итеративных методов для уравнений Фредгольма II рода с гармоническими ядрами

М.Аскаров

2π davriy funksiyalar fazosida Γ_2^ρ da integral operatorli Fredgolm tenglamalar sinfi ko'rib chiqiladi. Ko'rsatilgan sinflar uchun ba'zi - bir proyeksion-iterativ va KP - metodlar variantlarining yaqinlashishi optimal tezligining aniq darajasi topilgan.

A class Fredholm equations with integral operators are considered in 2π - periodical function spaces Γ_2^ρ. For this exact order of optimal speed of convergences is found for some invariants of proection-iteractive and KR-methods.

Пусть L_2 -пространство функций $f(t)$ суммируемых в квадрате на $(0,2\pi)$ с нормой

$$\|f\|_{L_2} = \left(\int\limits_0^{2\pi} f^2(t)dt \right)^{\frac{1}{2}},$$

а Γ_2^ρ пространство 2π -периодических функций $f(t)$, представимых в виде $f(t) = u(\rho, t)$, $0 < \rho < 1$, где функция $u(r,t)$ гармонична в круге

$$\{(x,y): \ x = r\cos t, y = r\sin t, \ x^2 + y^2 < 1\}$$

Пусть $G^\rho : \Gamma_2^\rho \to L_2[0,2\pi]$ - линейной непрерывный оператор, сопоставляющий каждой $f(t) \in \Gamma_2^\rho$ функцию

$$G^\rho_{f(t)} = \frac{a}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^{-k}(a_k \cos kt + b_k \sin kt),$$

где a_k, b_k коэффициенты Фурье функции $f(t)$. Норму в Γ_2^ρ определяем равенством

$$\|f\|_{\Gamma_2^\rho} = \|f\|_{L_2} + \|G^\rho f\|_{L_2}.$$

Функции пространства Γ_2^ρ допускают представление в виде интеграла Пуассона

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \aleph_\rho(t-\tau)g(\tau)d\tau,$$

где $\aleph_\rho(z) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\rho^k \cos kz = \frac{1-\rho^2}{2(1-2\rho\cos z+\rho^2)}$ и $g(\tau) \in L_2[0,2\pi]$, $\|g\|_{L_2} \le 1$.

Обозначим через $\mathcal{H}^\rho = \mathcal{H}^\rho(\beta)$ класс операторов Фредгольма

$$Hf(t) = \int_0^{2\pi} H(t,\tau)f(\tau)d\tau$$

таких, что H и H^* являются линейными непрерывными операторами из L_2 на Γ_2^ρ и выполняются условия:

$$\left\|(I-H)^{-1}\right\|_{L_2\to L_2} \le \beta_1, \quad \|H\|_{L_2\to\Gamma_2^\rho} \le \beta_2,$$

$$\left\|(G^\rho H)^*\right\|_{L_2\to\Gamma_2^\rho} \le \beta_3, \quad \beta(\beta_1,\beta_2,\beta_3).$$

Класс интегральных уравнений Фредгольма II рода

$$z(t) = Hz(t) + f(t) \tag{1}$$

с операторами $H \in \mathcal{H}^\rho$ и $f(t) \in L_2$, $\|f\|_{L_2} \le 1$ будем обозначать через $\Psi_\rho = \Psi_\rho(\beta)$.

В последнее время для решения линейных интегральных уравнений (1) широко используются так называемые аппроксимационно-итеративные методы. Наиболее известными методами указанного типа являются проекционно-итеративный метод (ПИ-метод) [4] и КР - метод [5].

ПИ - метод является обобщением метода осреднения функциональных поправок, предложенного Ю.Д.Соколовым. Этот метод получил свое развитие в работах Л.Ю.Лучки, Н.С.Курпеля, их учеников и последователей. Применительно к уравнениям (1) рассматриваемым в гильбертовым пространстве L_2 суть ПИ - метода состоит в следующем. Пусть F_N - подпространство L_2, $\dim F_N = N$, P - проектор из L_2 на F_N, а $z_k(t)$ - приближенные решение (1), полученные на k-й итерации. Тогда

$$Z_{k+1} = f + H(Z_k + \delta_{k,n}), \tag{2}$$

где поправка $\delta_{k,n}$ определяется из уравнения с конечномерным оператором

$$\delta_{k,n} = PH\delta_{k,n} + P(f + Hz_k - z_k). \tag{3}$$

Суть КР - метода состоит в том, что

$$z_{k+1} = z_{k+1/2} + w_{k,N}, \tag{4}$$

где

$$z_{k+1/2} = Hz_k + f,\ w_{k<N} = PHw_{k<N} + PH(z_{k+1/2} - z_k) \tag{5}$$

Следуя [6.С.254] можно показать, что ПИ - метод и КР - метод эквивалентны итерационному процессу метода последовательных приближений

$$Z_{k+1} = Tz_k + \psi,\ k = 1, 2, ..., \tag{6}$$

где в случае ПИ - метода

$$T = T_{\mathrm{PI}} = \mathrm{T}_{\mathrm{PI}}(H, P) = H(I - PH)^{-1}(I - P), \tag{7}$$

а в сумме КР - метода.

$$\mathrm{T} = \mathrm{T}_{\mathrm{KP}} = \mathrm{T}_{\mathrm{KP}}(H, P) = (I - PH)^{-1}(I - P)H \tag{8}$$

(ψ - некоторый фиксированный элемент, зависящий от H, P и f).

Так как для $\mathrm{H} \in \mathcal{H}^\rho$ операторы (7) и (8) являются вполне непрерывными операторами из L_2 в L_2, то в силу утверждения из [7, с.37] (упражнения 2,5) при $\mathrm{T} = \mathrm{T}_{\mathrm{PI}}$ и $\mathrm{T} = \mathrm{T}_{\mathrm{KP}}$ метода последовательных приближений (6), а следовательно ПИ - метод и КР - метод сходятся к решению уравнения (1) со скоростью геометрических прогрессий, знаменатель $\mu_1(\mathrm{P}, \mathrm{H})$ и $\mu_2(\mathrm{P}, \mathrm{H})$ которых равен спектральным радиусам операторов (7) и (8) соответственно, т.е.

$$\mu_1(\mathrm{P}, \mathrm{H}) = \operatorname*{Lim}_{\mathrm{k}\to\infty} \left\| \mathrm{T}^{\mathrm{k}}_{\mathrm{PI}}(H, P) \right\|^{1/k}_{L_2 \to L_2}, \tag{9}$$

$$\mu_2(\mathrm{P}, \mathrm{H}) = \operatorname*{Lim}_{\mathrm{k}\to\infty} \left\| \mathrm{T}^{\mathrm{k}}_{\mathrm{KP}}(H, P) \right\|^{1/k}_{L_2 \to L_2} \tag{10}$$

в свою очередь величины

$$\mu_i(P, H^\rho) = \sup_{H \in \mathcal{H}^\rho} \mu_i(P, H), i = 1, 2, ... \tag{11}$$

определяют знаменатели геометрических прогрессий, со скоростью которых ПИ - метод и КР - метод сходятся при фиксированном проекторе P к решению любого уравнения (1) из класса Ψ_ρ.

Пусть $\mathcal{P}_{\mathrm{F_N}}$ - множество всех проекторов на фиксированное подпространство $\mathrm{F_N}, \mathrm{dimF_N} = N$, а $\mathcal{P}_N$ - множество всевозможных проекторов на произвольные (различные) подпространства размерности N.

Как и в [8], мы будем рассматривать два подхода к оптимизации скорости сходимости аппроксимационно-итеративных методов (5) - (6) и (7) - (8). Первый подход, который мы будем называть адаптивным, состоит в оптимизации скорости сходимости ПИ - методов и КР - методов в смысле величины

$$\mu_{\mathrm{i,N}}(adap, \mathcal{H}^{\rho}) = \sup_{H \in \mathcal{H}^{\rho}} \inf_{P \in \mathcal{P}_N} \mu_{\mathrm{i}}(P, H), \mathrm{i} = 1, 2 \tag{12}$$

В рамки такой оптимизации попадают методы при которых проектор P проектирует на подпространство, приспосабливаемое (адаптируемое) к оператору H из кон-кретного уравнения (1).

Вторым возможным подходом к оптимизации скорости сходимости является неадаптированный подход, при котором осуществляется оптимизация в смысле величины

$$\mu_{\mathrm{i,N}}(nonad, \mathcal{H}^{\rho}) = \inf_{\substack{F_N \subset L_2 \\ \dim \mathrm{F_N} = N}} \inf_{\mathrm{P} \in \mathcal{P}_{\mathrm{F_N}}} \mu_{\mathrm{i}}(P, \mathcal{H}^{\rho}), \mathrm{i} = 1, 2 \tag{13}$$

В этом случае всем операторам $H \in \mathcal{H}^{\rho}$ сопоставляется одно и то же подпространство F_N, и лишь потом это подпространство выбирается наилучшим образом для всего класса.

В настоящей работе будут получены результаты относящиеся к обоим подходам.

Первые результаты об оценке скорости сходимости аппроксимационно-итеративных методов решения уравнений вида (1) имеются в монографии [4] и дальнейшие последование по оптимизации скорости сходимости ПИ - методов и КР - методов для операторных уравнений II рода содержатся в работах [9], [4], [10].

Обозначим через F^T_{2m+1} подпространство тригонометрических многочленов порядка не выше m, $dimF^T_{\mathrm{2m+1}} = 2m+1$. Пусть еще S_m - оператор, сопоставляющий каждой функции $f \in L_2$ частную сумму ее ряда Фурье порядка m т.е.

$$S_m f(t) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{m} a_k(f) \cos kt + b_k(f) \sin kt.$$

Легко видеть, что S_m - ортопроектор на F^T_{2m+1}. Известно [3,с.187], что

$$\|\mathrm{S_m}\|_{L_2 \to {}^{\rho}_2} = \rho^{-m} \; \|I - S_m\|_{\Gamma^{\rho}_2 \to L_2} = \rho^m \tag{14}$$

Отметим теперь, что пространство Γ^{ρ}_2 и $\mathrm{F}^T_{\mathrm{2m+1}}$ класс операторов $\mathcal{H}^{\rho}$ удовлетворяют условиям теоремы из [10] при $i = 1, \mathrm{A}_1 = G^{\rho}\mathrm{P_m} = S_m, \mathrm{P_{m+k}} =$

S_{2m}. Из этой теоремы и соотношений (14) при $m = \left[\frac{N-1}{2}\right]$ вытекают следующие оценки

$$c_1\rho^{2m} \le \mu_{i,N}(adap, \mathcal{H}^\rho) \le \mu_{i,N}(nonad, \mathcal{H}^\rho) \le \mu_i(S_m, \mathcal{H}^\rho) \le c_2\rho^m \mathrm{i} = 1, 2, \tag{15}$$

где постоянные c_1 и c_2 зависят лишь от вектора параметров $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ участвующего в определении класса $\mathcal{H}^\rho(\beta)$.

Оценки (15) оставляют открытым вопрос о точном порядке величин (12), (13) получение ответа на этот вопрос с верхней оценкой (15) могут быть получены путем модификации соответствующих рассуждений из [8]. Кратко опишем эту модификацию.

Теорема 1. При $m = \left[\frac{N-1}{2}\right]$ $0 < \rho < 1$

$$\mu_{1,N}(adap, \mathcal{H}^\rho) = M_{1,N}(nonad, \mathcal{H}^\rho) = \mu_1(S_m, \mathcal{H}^\rho) = \rho^m.$$

Доказательство. Необходимая оценка сверху следует из (15). Для получения оценки зафиксируем N, положим $m = \left[\frac{N}{2}\right] + 1(2\mathrm{n} + 1 > \mathrm{N} + 1)$ и рассмотрим интегральный оператор

$$H_0 z(t) = \delta\rho^{2n} S_n z(t) \equiv \delta\rho^{2n} \int\limits_0^{2\pi} D_n(t-\tau) z(\tau) d\tau =$$

$$\delta\rho^{2n} \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{\ell=1}^{n} \cos \ell(t-\tau) \right) z(\tau) d\tau$$

где δ - числовой параметр, находящийся в нашем распоряжений, а $D_n(u) = \frac{1}{2} + \sum\limits_{\ell=1}^{n} \cos \ell u$ ядро Дирихле. Учитывая первое соотношения (14) и повторяя рассуждения, приведенные при доказательстве теоремы 3 из [11] устанавливаем, что при

$$\delta = \min\left\{\beta_1, \beta_2, (\beta_1 - 1)/\beta_1\right\} \mathrm{H}_0 \in \mathcal{H}^\rho.$$

Пусть теперь F_N - произвольное пространство из L_2 с базисом $\{e_1(t), e_2(t), ..., e_N(t)\}$, $\dim F_N = N$, а P - проектор на F_N. Очевидно, что $(I - PH_0)^{-1}$ представим в виде $T - \beta_N, \beta_N : L_2 \to F_N$. Тогда в силу (7)

$$T_{PI}^K(H_0, P) = \left[H_0(I - B_N)(I - P)\right]^K = \left[H_0 - S_n R_{N,0}\right]^K =$$

$$= H_0^K - S_K R_{N,K} = \delta^k \rho^{2nk} S_n - S_n R_{N,K},$$

где $R_{N,0}, R_{N,K}$ - некоторое конечномерные операторы, действующие из L_2 в F_N. Отметим, что при любом к оператор $S_n R_{N,K}$ действует в подпространство F_N^0, базисом которого является максимальная линейно независимая система из множества функций $S_n e_i(t), \mathrm{i} = 1, 2, .., \mathrm{N}$ представляющих собой частные суммы ряда Фурье элементов базиса $e_i(t)$.

Обозначим через U_2 единичный шар в L_2 с центром в нуля. Тогда

$$\left\|\mathrm{T}_{\mathrm{PI}}^{\mathrm{k}}(H_0 P)\right\|_{L_2 \to L_2} = \sup_{\varphi \in U_2} \left\|\mathrm{H}_0^{\mathrm{k}}\varphi - S_n R_{N,K}\varphi\right\| \geq \sup_{\varphi \in U_2} \inf_{g \in F_N^0} \left\|\mathrm{H}_0^{\mathrm{k}}\varphi - g\right\| \geq$$

$$\geq \inf_{\substack{F_N \in L_2 \\ \dim F_N = N}} \sup_{\varphi \in U_2} \inf_{g \in F_N^0} \left\|\mathrm{H}_0^{\mathrm{k}}\varphi - g\right\| = d_N(\mathrm{H}_0^{\mathrm{k}} U_2, L_2),$$

где $d_N(\mathrm{H}_0^{\mathrm{k}} U_2, L_2)$ есть N-й поперечных по Колмогорову образа единичного шара U_2 при действии оператора H_0^K. Если φ пробегает множества $U_2 \cap F_{2n+1}^T$, то элементы $H_0^K \varphi = \delta^k \rho^{2nk} \varphi$ в подпространстве тригонометрических полиномов F_{2n+1}^T заполняют шар радиуса $\delta^k \rho^{2nk}$. Поскольку n было выбрано так, что $\dim F_{2n+1}^T = 2n + 1 > N + 1$, то по теореме о поперечнике шара [12.c.2.58].

$$\left\|\mathrm{T}_{\mathrm{PI}}^{\mathrm{k}}(H_0 P)\right\|_{L_2 \to L_2} \geq d_N(\mathrm{H}_0^{\mathrm{k}} U_2, L_2) \geq \delta^k \rho^{2nk}. \tag{16}$$

Полученная оценка справедлива для любого N-мерного подпространства F_N и любого проектора P. Но тогда

$$\mu_{\mathrm{i,N}}(adap, \mathcal{H}^\rho) \geq \inf_{\mathrm{P} \in \mathrm{P_N}} \lim_{\mathrm{k} \to \infty} \left\|\mathrm{T}_{\mathrm{PI}}^{\mathrm{k}}(H_0 P)\right\|_{L_2 \to L_2}^{1/k} \geq \delta \rho^{2n} = \rho^{2n} = \rho^m$$

Теорема доказана.

Приведенная выше схема рассуждений может быть применена и для КР - метода. Но в этом случае из (8) имеем

$$\mathrm{T}_{\mathrm{PI}}^{\mathrm{k}}(H_0 P) = [(I - B_N)(I - P)H_0]^K =$$

$$= [H_0 - R_{N,0} H_0]^K = H_{{}_0}^K - S_n R_{N,K} - R_{N,K+1}$$

где $R_{N,0}, R_{N,K}, R_{N,K+1}$ - некоторое операторы из L_2 в F_N. Так как оператор $S_n R_{N,K} + R_{N,K+1}$ действует в подпространстве этого подпространство в общем случае равна $2N$, то для КР - методы оценка (16) примет вид

$$\left\|\mathrm{T}_{\mathrm{PI}}^{\mathrm{k}}(H_0 P)\right\|_{L_2 \to L_2} \geq d_{2N}(\mathrm{H}_0^{\mathrm{k}} U_2, L_2).$$

Теперь, чтобы воспользоваться теоремой о поперечнике шара нужно в определены оператора H_0 положить $n = N$, а это в свою очередь приведет к оценке

$$\mu_{2,\mathrm{N}}(adap, \mathcal{H}^\rho) \geq \inf_{\mathrm{P} \in \mathcal{P}_\mathrm{N}} \lim_{\mathrm{k} \to \infty} \left\|\mathrm{T}_{\mathrm{KP}}^{\mathrm{k}}(H_0 P)\right\|_{L_2 \to L_2}^{1/k} \geq \delta \rho^m = \rho^{2m},$$

которая совпадает с нижней оценкой (15).

Таким образом, приведенная выше схема рассуждений не позволяет найти точный порядок (12) в случае КР - метода. Однако для КР - методов, использующихся ортогональные проекторы P, с помощью иной конструкции, основанной на теореме двойственности, удается найти точный порядок величины, аналогичный (13), а именно, величины

$$\overline{\mu}_{\mathrm{i,N}}(nonadap, \mathcal{H}^{\rho}) = \inf_{\substack{F_N \subset L_2 \\ \dim \mathrm{F_N} = N}} \mu_{\mathrm{i}}(P_{F_N}, \mathcal{H}^{\rho}), \mathrm{i} = 1, 2,$$

где P_{F_N} - ортопроектор на F_N.

Теорема 2. При, $m = \left[\frac{N-1}{2}\right], 0 < \rho < 1$.

$$\overline{\mu}_{2,\mathrm{N}}(nonadap, \mathcal{H}^{\rho}) = \mu_2(S_m, \mathcal{H}^{\rho}) = \rho^m.$$

Доказательство. Так как S_m является ортопроектором на F^T_{2m+1}, то оценка для величины $\overline{\mu}_{2,\mathrm{N}}(nonadap, \mathcal{H}^{\rho})$ следует из (15). Оценка снизу получиться аналогично оценке снизу соответствующих величин из работы [13].

Литература

1. Ловитт У.В. Линейные интегральные уравнения. М.: Гостехиздат, 1957. 250 с.

2. Зализняк С.Н., Мельник Ю.И., Полиненко Ю.К. О приближенном решении интегральных уравнений теории потенциала. Укр. мат. журн. -1981 -33. №3, С.382-391.

3. Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теорий приближений. -М: Изд-во Мос. Уни-та, 1976. 304 с.

4. Лучка. А.Ю. Проекционно-итеративные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. -Киев: Наукова думка, 1980. 264 с.

5. Лебедев В.И. Об итерационном КР методе. Журн. вычисл. математика и мат. физика. -1967. -7. №6 -С.137-148.

6. Марчук Г.И. Лебедев В.И. Численные методы в теории переноса нейтронов. -М.: Атомиздат, 1971. 492 с.

7. Красносельский М.А. Вайнинко Г.М., Забрейко П.П., Рутицкий Я.Б., Стеценко В.Я. Приближенное решение операторных уравнений. -М.: Наука, 1969. 456 с.

8. Переверзев С.В., Синенко М.А. Об оптимальной скорости сходимости РК-метода и некоторых его обобщений. Журн.вычисл.математика и мат.физика. -1991. -31. №10. С. 1452-1460.

9. Переверзев С.В. Об оптимальном выборе базисных функции при проекционно-итеративном методе решения интегральных уравнений. Теория приближений и смежные вопросы анализа и топологии. -Киев: Ин-т математики АН УССР, 1987. С. 82-87.

10. Синенко М.А. О связи между проекционно-итеративным методом и КР-методом для уравнений II рода. Современные вопросы теорий приближения и комплексного анализа. -Киев: Ин-т математики АН УССР, 1990. С. 113-122.

11. Солодкий С.Г. Оптимизация адаптивных уравнений в гильбертовом пространстве. Укр.мат.журн.-1990. -42. №1. С. 95-101.

12. Корнейчук Н.П. Экстремальные задачи теорий приближения. -М.: Наука, 1976. 320 с.

13. Переверзев С.В., Аскаров М. Оптимальная скорость сходимости некоторых аппроксимационно-итеративных методов для уравнений Фредгольма в пространствах периодических аналитических функций. Укр. журнал. -1994. №8.

Каракалпакский государственный
университет им. Бердаха

Дата поступления
03.12.02

Uzbek Mathematical
Journal, 2006,№1, pp.28-42

УДК 517.98

Дифференцирования и автоморфизмы алгебр неограниченных операторов над кольцом измеримых функций

Ш.А.Аюпов, А.А.Заитов, Ж.Э.Рузиев

Maqolada o'lchovli funksiyalar halqasi ustidagi chegaralanmagan operatorlar algebralarining differentsiallashlari va avtomorfizmlari o'rganilgan bo'lib, L^0-chiziqli differentsiallashlar ichki va L^0-chiziqli avtomorfizmlar fazoviy bo'lishi isbotlangan.

In the present paper derivations and automorphisms of algebras of unbounded operators over the ring of measurable functions are investigated and it is shown that L^0-linear derivations are inner and L^0-linear automorphisms are spatial.

Введение

Работа посвящена исследованию дифференцирований и автоморфизмов алгебр неограниченных операторов над кольцом измеримых функций. Теория дифференцирований в операторных алгебрах в настоящее время хорошо разработана [1]. Некоторым полученным до настоящего времени результатам и новым проблемам в этом направлении была посвящена работа [2]. Один из методов исследований в этой области дан в [3], где доказано, что всякое дифференцирование стандартной алгебры ограниченных операторов нормированного пространства является внутренним, а всякий автоморфизм таких алгебр является пространственным. Существование не внутренних дифференцирований в алгебре измеримых операторов $L(M)$, присоединенных к коммутативной алгебре фон Неймана M было устанавлено в [4]. Недавно в [5] было показано, что в алгебре (классов эквивалентности) всех комплекснозначных измеримых функций над локально сепарабельным пространством с мерой имеются существенно нетривиальные комплексные дифференцирования и нерасширяющие автоморфизмы, отличные от тождественного. Пользуясь методом, предложенным в [3], в работе [6] устанавлено, что всякое дифференцирование алгебры ограниченных операторов на пространстве

Банаха-Канторовича над кольцом измеримых функций является внутренним, а автоморфизмы таких алгебр являются пространственными.

В настоящей работе изучаются L^0-линейные дифференцирования и L^0-линейные автоморфизмы стандартных алгебр неограниченных операторов и устанавливаются, что всякое L^0-линейное дифференцирование алгебры $\mathcal{L}^+(\mathcal{D})$ является внутренним, и всякий L^0-линейный автоморфизм алгебры $\mathcal{L}(\mathcal{D})$ является пространственным.

Первый параграф носит вспомогательный характер. В нем перечисляются необходимые определения и факты для дальнейшего изложения работы. Во втором параграфе вводятся варианты классических понятий таких, как замкнутого и сопряженного операторов для L^0-значного случая. Устанавливаются некоторые свойства таких операторов, которые необходимы в третьем параграфе. В третьем параграфе рассматриваются O-модули, O^*-модули, O-алгебры, O^*-алгебры над кольцом измеримых функций, которые являются основными объектами исследований данной работы. Наконец, в четвертом параграфе изложены основные результаты, где устанавливаются, что всякое L^0-линейное дифференцирование алгебры $\mathcal{L}^+(\mathcal{D})$ является внутренним и всякий автомормизм алгебры $\mathcal{L}(\mathcal{D})$ является пространственным.

1. Модули Капланского-Гильберта над кольцом измеримых функций

В этом параграфе перечислим ряд понятий и фактов, необходимые для дальнейшего изложения работы.

Пусть (Ω, Σ, μ) – пространство с полной конечной мерой, $L^0 = L^0(\Omega)$ – алгебра всех комплексных измеримых функций на (Ω, Σ, μ) (равные почти всюду функции отождествляются).

Рассмотрим векторное пространство X над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел. Отображение $\|\cdot\| : X \longrightarrow L^0$ называется L^0-значной нормой на X, если для любых $\varphi, \psi \in X, \lambda \in \mathbb{C}$ имеют место соотношения:
1)$\|\varphi\| \geq 0$;
2)$\|\varphi\| = 0 \Longleftrightarrow \varphi = 0$;
3)$\|\lambda\varphi\| = |\lambda|\|\varphi\|$;
4)$\|\varphi + \psi\| \leq \|\varphi\| + \|\psi\|$.

Пара $(X, \|\cdot\|)$ называется *решеточно-нормированным* пространством (для краткости, РНП) над L^0. Говорят, что РНП X d-разложимо, если для любого $\varphi \in X$ и для любого разложения $\|\varphi\| = e_1 + e_2$ в сумму дизъюнктных элементов найдутся такие $\varphi_1, \varphi_2 \in X$, что $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ и $\|\varphi_1\| = e_1, \|\varphi_2\| = e_2$. Разложимую норму называют также *нормой Канторовича.* Сеть $(\varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ элементов из X называется (bo)-*сходящейся* к $\varphi \in X$, если сеть $(\|\varphi_\alpha - \varphi\|)_{\alpha\in A}$ (o)-сходится к нулю в L^0 (напомним, что (o)-сходимость сети из L^0 равносильна ее сходимости почти всюду). *Пространством Банаха-Канторовича* (далее, ПБК) над L^0 называется (bo)-полное d-разложимое РНП над L^0.

Всякое ПБК X над L^0 является модулем над L^0, т. е. для всех $\lambda \in L^0$ и $\varphi \in X$ определен элемент $\lambda\varphi \in X$, при этом $\|\lambda\varphi\| = |\lambda|\|\varphi\|$ (см. [7, 8]).

Далее везде будем предполагать, что существует $e \in X$ такое, что $\|e\| = \mathbf{1}$, где $\mathbf{1}$ – единица в L^0.

Модуль E над L^0 называется *конечномерным,* если в E существует конечное число элементов $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ таких, что любое $\varphi \in E$ можно представить в виде $\varphi = \alpha_1\varphi_1 + ... + \alpha_n\varphi_n$, где $\alpha_i \in L^0, i = \overline{1,n}$. Элементы $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ называют образующими модуля E . Минимальное число образующих конечномерного модуля E обозначается через $d(E)$. Модуль E над L^0 называется *σ-конечномерным,* если существует такое разбиение $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ единицы в ∇ (∇ – булева алгебра идемпотентов в L^0), что каждый $\pi_n E$ – конечномерный модуль. Конечномерный модуль E над L^0 называется *однородным* рода n, если для всякого ненулевого $\pi \in \nabla$ верно $n = d(\pi E)$.

Элементы $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ называют ∇-*линейно независимыми,* если для любых $\pi \in \nabla$ и $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in L^0$ из $\pi \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k\varphi_k = 0$ вытекает $\pi\alpha_1 = \pi\alpha_2 = ...\pi\alpha_n = 0$ (см. [7]).

Если E – однородный рода n модуль над L^0, то существует базис $\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$ в E, состоящий из ∇-линейно независимых элементов, т. е. всякий $\varphi \in E$ можно единственным образом представить в виде $\varphi = \alpha_1\varphi_1 + ... + \alpha_n\varphi_n$, где $\alpha_i \in L^0, i = \overline{1,n}$ (см. [9], Предложение 6).

Пусть X и Y – ПБК над L^0. Оператор $a : X \to Y$ называется L^0-*линейным*, если $a(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha a(\varphi) + \beta a(\psi)$ для всех $\alpha, \beta \in L^0, \varphi, \psi \in X$. L^0-линейный оператор $a : X \to Y$ называется L^0-*ограниченным*, если существует $c \in L^0$ такое, что $\|a(\varphi)\| \le c\|\varphi\|$ для всех $\varphi \in X$. Для L^0-ограниченного оператора a положим $\|a\| = \sup\{\|a(\varphi)\| : \|\varphi\| \le \mathbf{1}\}$. L^0-линейный оператор $a : X \to Y$ называется *конечномерным* (*σ-конечномерным, однородным рода n*), если $a(X) = \{a(\varphi) : \varphi \in X\}$ конечномерный (соответственно σ-конечномерный, однородный рода n) – подмодуль в Y.

Ясно, что всякий L^0-линейный σ-конечномерный оператор $a : X \to Y$ можно представить в виде $a = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \pi_n a_n$, где $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ – разбиение единицы в ∇, а a_n – однородные операторы конечного рода, при этом, если a конечномерен, то (π_n) – конечное разбиение единицы.

Пусть $a : X \to Y$ – однородный рода n L^0-линейный оператор, $\{\psi_1, ..., \psi_n\}$

базис в $a(X)$, а X^* – пространство всех L^0-ограниченных L^0-линейных функционалов из X в L^0. Тогда существут такая система $\{f_1, ..., f_n\} \subset Y^*$, что $f_i(\psi_j) = \delta_{ij}\mathbf{1}$, где δ_{ij} – символ Кронекера (см. [9], Предложение 2). Определим $g_i \in X^*, i = \overline{1,n}$ по следующему правилу

$$g_i(\varphi) = f_i(a(\varphi)), \quad \varphi \in X.$$

Ясно, что

$$a(\varphi) = \sum_{k=1}^{n} g_k(\varphi)\psi_k, \quad \varphi \in X.$$

Эта формула дает общий вид однородного рода $n(n \in \mathbb{N})$ L^0-ограниченного L^0-линейного оператора из X в Y.

Множество всех конечномерных (σ-конечномерных) операторов $a : X \to X$ обозначим через $\mathcal{F}(X)$ (соответственно $\mathcal{F}_\sigma(X)$).

Алгебра $\mathcal{U} \subset \mathcal{L}(X)$ называется *стандартной* над L^0, если $\mathcal{F}(X) \subset \mathcal{U}$. Примерами стандартных алгебр над L^0 являются: $\mathcal{F}(X)$ – алгебра всех конечномерных L^0-линейных операторов $a : X \to X$; $\mathcal{F}_\sigma(X)$ – алгебра всех σ-конечномерных L^0-линейных операторов $a : X \to X$; $\mathcal{K}(X)$ – алгебра всех L^0-линейных циклически компактных операторов на X; $\mathcal{L}(X)$ – алгебра всех L^0-линейных операторов $a : X \to X$ (см. [6]).

Пусть $\mathcal{A}$ – модуль над L^0. Отображение $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathcal{A}\times\mathcal{A} \to L^0$ называется *L^0-значным внутренним произведением*, если для всех $\varphi, \psi, \eta \in \mathcal{A}$, $\lambda \in L^0$ имеют место следующие соотношения:
1)$\langle\varphi,\varphi\rangle \geq 0$;
2)$\langle\varphi,\varphi\rangle = 0 \Leftrightarrow \varphi = 0$;
3)$\langle\varphi,\psi\rangle = \overline{\langle\psi,\varphi\rangle}$;
4)$\langle\lambda\varphi,\psi\rangle = \lambda\langle\varphi,\psi\rangle$;
5)$\langle\varphi+\psi,\eta\rangle = \langle\varphi,\eta\rangle + \langle\psi,\eta\rangle$.

Если $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathcal{A}\times\mathcal{A} \to L^0$ есть L^0-значное внутреннее произведение, то формула

$$\|\varphi\| = \sqrt{\langle\varphi,\varphi\rangle}$$

определяет *L^0-значную норму* на $\mathcal{A}$. Пара $\langle\mathcal{A}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ называется *модулем Капланского-Гильберта* над L^0 или *L^0-гильбертовым пространством*, если $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ – ПБК над L^0 (см. [7, 8]).

Пусть X – модуль Капланского-Гильберта над L^0, и $X_0 \subset X$. Отметим, что X_0 служит *bo-замкнутым подмодулем* Капланского-Гильберта тогда и только тогда, когда X_0 – подмодуль в обычном смысле, т. е. X_0 есть множество, содержащее все суммы вида $bo\text{-}\sum\limits_{\alpha\in A} e_\alpha\varphi_\alpha$, где $(\varphi_\alpha)_{\alpha\in A}$

– ограниченное семейство в X_0 и $(e_\alpha)_{\alpha\in A}$ – разбиение единицы в ∇, и замкнутое относительно нормы модуля X.

Пусть $M \subset X$. Множества вида

$$M^\perp = \{\varphi \in X:\ \langle \varphi, \psi\rangle = 0 \text{ для всех } \psi \in M\}$$

называют *ортогональным дополнением* множества M.

Очевидно, что ортогональное дополнение произвольного непустого множества в X будет bo-замкнутым подмодулем Капланского-Гильберта.

2. Замкнутые и сопряженные операторы на модулях Капланского-Гильберта над L^0

В этом параграфе рассмотрим L^0-значные варианты некоторых понятий функционального анализа. Доказательства утверждений и свойств, относящихся к этим понятиям, проводятся аналогично классическим случаям. Установленные здесь свойства применяются в третьем параграфе. Поэтому ради полноты и замкнутости работы приведем доказательства некоторых из этих утверждений.

Пусть $X_1,\ X_2$ – модули Капланского-Гильберта над L^0. Обозначим через $X = X_1 \oplus X_2$ совокупность всех пар $\varphi = (\varphi_1,\ \varphi_2)$, где $\varphi_i \in X_i$, $i = 1,\ 2$. Определим в X сумму, произведение на элементы $L^0 \times L^0$ правилами:

$$\varphi + \psi = (\varphi_1 + \psi_1,\ \varphi_2 + \psi_2) \quad (\varphi = (\varphi_1,\ \varphi_2),\ \psi = (\psi_1,\ \psi_2) \in X);$$

$$\lambda\varphi = (\lambda_1\varphi_1,\ \lambda_2\varphi_2) \quad (\varphi = (\varphi_1,\ \varphi_2) \in X,\ \lambda = (\lambda_1,\ \lambda_2) \in L^0 \times L^0).$$

Внутреннее произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X \to L^0 \times L^0$ определим формулой

$$\langle \varphi, \psi\rangle = (\langle \varphi_1, \psi_1\rangle, \langle \varphi_2, \psi_2\rangle).$$

Тогда можно показать, что норма элемента $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in X$ находится по правилу

$$\|\varphi\| = (\|\varphi_1\|, \|\varphi_2\|).$$

При этом, легко видеть, что $\|\lambda\varphi\| = |\lambda|\|\varphi\|$. Поэтому X является модулем над $L^0 \times L^0$. Кроме того, модуль X над $L^0 \times L^0$ полон относительно этой нормы. Откуда $X = X_1 \oplus X_2$ есть ПБК над $L^0 \times L^0$. Следовательно, X – модуль Капланского-Гильберта над $L^0 \times L^0$.

Будем говорить, что $X_1 \oplus X_2$ – *прямая сумма* модулей Капланского-Гильберта X_1 и X_2.

Пусть X_1, X_2 – модули Капланского-Гильберта над L^0, пусть a – оператор из X_1 в X_2. Область определения оператора a обозначим через

$\mathcal{D}(a)$. Совокупность всех пар $(\varphi, a\varphi)$, $\varphi \in \mathcal{D}(a)$, в прямой сумме $X_1 \oplus X_2$, назовем *графиком* оператора a. График оператора a обозначим через $G(a)$. Значит, по определению

$$G(a) = \{(\varphi, a\varphi) : \ \varphi \in D(a)\}.$$

Очевидно, что операторы a и b совпадают тогда и только тогда, когда $G(a) = G(b)$.

Множество $S \subset X_1 \oplus X_2$ является графиком некоторого оператора тогда и только тогда, когда из соотношений $(\varphi, \psi) \in S$, $(\varphi, \psi') \in S$, следует $\psi = \psi'$.

Оператор $a : X_1 \to X_2$ является L^0-линейным тогда и только тогда, когда график $G(a)$ оператора a есть подмодуль в $X_1 \oplus X_2$.

Оператор $a : X_1 \to X_2$ назовем *bo-замкнутым*, если его график $G(a)$ bo-замкнут в $X_1 \oplus X_2$. Таким образом, замкнутость оператора a означает, что из соотношений $\varphi_\alpha \in \mathcal{D}(a)$, $(\varphi_\alpha, a\varphi_\alpha) \to (\varphi, \psi)$ следует соотношение $(\varphi, \psi) \in G(a)$, т.е. $\varphi \in \mathcal{D}(a)$ и $\psi = a\varphi$.

Предложение 1. *Всякий L^0-ограниченный L^0-линейный оператор, определенный во всем модуле Капланского-Гильберта X над L^0, bo-замкнут.*

Доказательство. Пусть a – L^0-линейный L^0-ограниченный оператор на модуле Капланского-Гильберта X. Тогда a bo-непрерывен на X, т.е. для любой сети $(\varphi_\alpha)_{\alpha \in A} \subset X$ из соотношения $bo\text{-}\lim\limits_{\alpha} \varphi_\alpha = 0$ следует bo-$\lim\limits_{\alpha} a\varphi_\alpha = 0$. Поэтому из соотношения $\varphi_\alpha \xrightarrow{(bo)} \varphi$ следует соотношение $a\varphi_\alpha \xrightarrow{(bo)} a\varphi$. Поэтому если $bo\text{-}\lim\limits_{\alpha} \varphi_\alpha = \psi$, то $bo\text{-}\lim\limits_{\alpha} a\varphi_\alpha = a\psi$. Предложение 1 доказано.

Легко доказываются следующие два утверждения:

Предложение 2. *Если оператор a bo-замкнут, то оператор $a - \lambda\mathbf{1}$ также bo-замкнут.*

Предложение 3. *Если оператор a bo-замкнут и оператор a^{-1} существует, то оператор a^{-1} также bo-замкнут.*

Если оператор a не bo-замкнут, то по определению его график $G(a)$ не bo-замкнут в $X_1 \oplus X_2$. Может случиться, что bo-замыкание $\overline{G(a)}$ множества $G(a)$ в $X_1 \oplus X_2$ есть также график некоторого оператора. Этот оператор обозначим через $\widetilde{a}$ и назовем *bo-замыканием* оператора a. В этом случае оператор a назовем *bo-замыкаемым* оператором. Таким образом, по определению $G(\widetilde{a}) = \overline{G(a)}$.

Отметим, что $\widetilde{a}$ есть минимальное bo-замкнутое расширение оператора a. Множество $\overline{G(a)}$, которое должно быть графиком оператора $\widetilde{a}$: $X_1 \to X_2$, состоит из элементов вида $(\varphi, a\varphi)$, $\varphi \in \mathcal{D}(a)$ и их пределов. Поэтому имеет место следующее утверждение, которое является критерием bo-замыкаемости оператора a.

Предложение 4. *Оператор $a : X_1 \to X_2$ является bo-замыкаемым тогда и только тогда, когда из соотношений*

$$\varphi_\alpha \in D(a),\ \varphi'_\alpha \in D(a),\ \varphi_\alpha \xrightarrow{(bo)} \varphi,\ \varphi'_\alpha \xrightarrow{(bo)} \varphi,\ a\varphi_\alpha \xrightarrow{(bo)} \psi,\ a\varphi'_\alpha \xrightarrow{(bo)} \psi'$$

следует, что $\psi = \psi'$. В этом случае область определения $\mathcal{D}(\widetilde{a})$ bo-замыкания оператора a состоит из тех и только тех векторов $\varphi \in X_1$, для которых существует сеть $(\varphi_\alpha)_{\alpha\in A} \subset \mathcal{D}(a)$, удовлетворяющая условиям: $\varphi_\alpha \xrightarrow{(bo)} \varphi$, $a\varphi_\alpha$ bo-сходится. При этом $\widetilde{a}\varphi = bo\text{-}\lim\limits_{\alpha} a\varphi_\alpha$.

Пусть X, Y – модули Капланского-Гильберта над L^0, а $a : X \to Y$ – L^0-линейный оператор. *Сопряженным* к оператору a называют оператор $a^* : Y \to X$, удовлетворяющий условию $\langle a\varphi, \psi\rangle = \langle\varphi, a^*\psi\rangle$ для всех $\varphi \in X$ и $\psi \in Y$.

Предложение 5. *Если оператор a имеет обратный a^{-1}, причем, если $\mathcal{D}(a)$ и $\mathcal{D}(a^{-1})$ плотны в X и Y, соответственно, то*

$$(a^{-1})^* = (a^*)^{-1}. \tag{1}$$

Доказательство. При $\varphi \in \mathcal{D}(a)$ и $\psi \in \mathcal{D}(a^{-1})$ имеем

$$\langle\varphi, \psi\rangle = \langle a^{-1}a\varphi, \psi\rangle = \langle a\varphi, (a^{-1})^*\psi\rangle.$$

Это показывает, что $(a^{-1})^*\psi \in \mathcal{D}(a^*)$ и

$$a^*(a^{-1})^*\psi = \psi. \tag{2}$$

С другой стороны, при $\varphi \in \mathcal{D}(a^{-1})$, $\psi \in \mathcal{D}(a^*)$ имеем

$$\langle\varphi, \psi\rangle = \langle aa^{-1}\varphi, \psi\rangle = \langle a^{-1}\varphi, a^*\psi\rangle,$$

откуда получим, что $a^*\psi \in \mathcal{D}((a^{-1})^*)$ и

$$(a^{-1})^*a^*\psi = \psi. \tag{3}$$

Равенства (2) и (3) в совокупности означают, что оператор $(a^{-1})^*$ является обратным к a^*, т.е. верна формула (1). Предложение 5 доказано.

Предложение 6. *Сопряженный оператор обладает следующими свойствами (при этом предполагается, что области определения всех рассматриваемых операторов плотны в соответствующих модулях Капланского-Гильберта):*
1) $(\lambda a)^* = \overline{\lambda}a^*$, где $a : X \to Y$, $\lambda \in L^0$;

2) если $a : X \to Y$, $b : X \to Y$ и $a \subset b$, то $a^* \supset b^*$;
3) если $a : X \to Y$ и $b : X \to Y$, то $(a+b)^* \supset a^* + b^*$;
4) если a, b – операторы из Y в Z и из X в Y, соответственно, то $(ab)^* \supset b^* a^*$;
5) $(a + \lambda \mathbf{1})^* = a^* + \overline{\lambda}\mathbf{1}$, где $a : X \to Y$, $\lambda \in L^0$.

Доказательство. 1) Пусть $\varphi \in \mathcal{D}(\lambda a) = \mathcal{D}(a)$, $\psi \in \mathcal{D}((\lambda a)^*) = \mathcal{D}(a^*)$. Тогда $\langle \varphi, (\lambda a)^* \psi \rangle = \langle (\lambda a)\varphi, \psi \rangle = \langle a(\lambda \varphi), \psi \rangle = \langle \lambda \varphi, a^* \psi \rangle = \langle \varphi, \overline{\lambda} a^* \psi \rangle$.

2) Пусть $\varphi \in \mathcal{D}(a)$, $\psi \in \mathcal{D}(b^*)$ – произвольные векторы. Тогда $\langle \varphi, b^* \psi \rangle = \langle b\varphi, \psi \rangle = \langle a\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, a^* \psi \rangle$. Откуда получим $\psi \in \mathcal{D}(a^*)$.

3) Пусть $\psi \in \mathcal{D}(a^* + b^*) = \mathcal{D}(a^*) \cap \mathcal{D}(b^*)$ – произвольный вектор. Тогда $\langle \varphi, (a^* + b^*)\psi \rangle = \langle \varphi, a^* \psi \rangle + \langle \varphi, b^* \psi \rangle = \langle a\varphi, \psi \rangle + \langle b\varphi, \psi \rangle = \langle (a+b)\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, (a+b)^* \psi \rangle$. Откуда получим $\psi \in \mathcal{D}((a+b)^*)$.

4) Пусть $\varphi \in \mathcal{D}(b)$, $\eta \in \mathcal{D}(b^* a^*)$ – произвольные векторы такие, что $b\varphi \in \mathcal{D}(a)$. Тогда $\langle \varphi, b^* a^* \eta \rangle = \langle b\varphi, a^* \eta \rangle = \langle ab\varphi, \eta \rangle = \langle \varphi, (ab)^* \eta \rangle$. Следовательно, $\eta \in \mathcal{D}(ab)^*$.

Доказательство пункта 5) тривиально. Предложение 6 доказано.

Сопряженный оператор можно описать при помощи графика. Определим для этого оператор u_1 из $X_1 \oplus X_2$ в $X_2 \oplus X_1$ формулой $u_1(\varphi, \psi) = (\psi, \varphi)$.

Оператор u_1 изометрически отображает $X_1 \oplus X_2$ на $X_2 \oplus X_1$. Аналогично определим оператор u_2, изометрически отображающий $X_2 \oplus X_1$ на $X_1 \oplus X_2$, формулой $u_2(\psi, \varphi) = (\varphi, \psi)$. Легко видеть, что

$$u_2 u_1 = \mathbf{1}. \tag{4}$$

Образ графика $G(a)$ оператора a при действии оператора u_1 имеет вид $\{(a\varphi, \varphi) : \varphi \in \mathcal{D}(a)\}$. Обозначим $G'(a) = \{(a\varphi, \varphi) : \varphi \in \mathcal{D}(a)\}$.

Предложение 7. *Имеет место равенство*

$$G(a^*) = G'(a)^\perp = \{\varphi \in X_2 \oplus X_1 : \langle \varphi, \psi \rangle = 0 \text{ для всех } \psi \in G'(a)\}, \tag{5}$$

т.е. график $G(a^*)$ оператора a^* в $X_2 \oplus X_1$ есть ортогональное дополнение множества $G'(a)$ в $X_2 \oplus X_1$.

Доказательство. Имеем $\langle (a\varphi, \varphi), (\eta, \xi) \rangle = 0$ для всех $(\eta, \xi) \in G'(a)^\perp$ и $(\varphi, a\varphi) \in G(a)$. Откуда $(\langle a\varphi, \eta \rangle, \langle \varphi, \xi \rangle) = 0$, следовательно, $\langle a\varphi, \eta \rangle = 0$, $\langle \varphi, \xi \rangle = 0$, и, значит, $\xi = a^* \eta$, $\eta \in \mathcal{D}(a^*)$, $(\eta, \xi) \in G(a^*)$ в силу произвольности $\varphi \in \mathcal{D}(a)$. Предложение 7 доказано.

Так как ортогональное дополнение есть bo-замкнутый подмодуль, то из (5) следует, что a^* – всегда bo-замкнутый L^0-линейный оператор.

Следующая теорема является L^0-значным вариантом классической теоремы фон Неймана о замыкании сопряженного оператора.

Теорема 1. *Если L^0-линейный оператор $a : X_1 \to X_2$ с плотной областью определения является bo-замыкаемым, т.е. если существует bo-замыкание $\widetilde{a}$ оператора a, то*

$$\widetilde{a^*} = a^*, \tag{6}$$

$\mathcal{D}(a^*)$ плотно в X_2 и

$$a^{**} = \widetilde{a}.$$

В частности, если оператор a bo-замкнут, то $a^{**} = a$.

Доказательство. Так как $G(\widetilde{a}) = \overline{G(a)}$ то $G'(\widetilde{a}) = u_1(\overline{G(a)})$, и потому

$$G(\widetilde{a^*}) = G'(\widetilde{a})^{\perp} = G'(a)^{\perp} = G(a^*).$$

Отсюда следует (6). Из $G(\widetilde{a}) = G'(a)^{\perp}$ заключаем, что

$$\overline{G'(a)} = G(a^*)^{\perp}.$$

Применим ко всем векторам в левой и правой частях последнего соотношения оператор u_2. В силу (4) он отображает $\overline{G'(a)}$ на $\overline{G(a)}$. Кроме того, по определению, u_2 отображает $G(a^*)$ на $G'(a^*)$, и потому $G(a^*)^{\perp}$ на $G'(a^*)^{\perp}$. Следовательно, получим

$$\overline{G(a)} = G'(a^*)^{\perp}. \tag{7}$$

Из (7) следует, что $\mathcal{D}(a^*)$ плотно в X_2. Действительно, в противном случае существовал бы отличный от нуля вектор $\xi \in X_2$, ортогональный к $\mathcal{D}(a^*)$, и значит, $(\xi, 0) \perp G(a^*)$, и потому $(0, \xi) \in G'(a^*)^{\perp} = \overline{G(a)}$, что невозможно при $\xi \neq 0$. Кроме того, (7) означает, что $\overline{G(a)}$ есть график оператора a^{**}. С другой стороны, $\overline{G(a)}$ как замыкание множества $G(a)$ есть график оператора $\widetilde{a}$. Следовательно, $a^{**} = \widetilde{a}$. Если оператор a замкнут, то $\widetilde{a} = a$ и $a^{**} = a$. Теорема 1 доказана.

3. O^*-алгебры над L^0

В работе [10] были рассмотрены такие понятия, как O-семейство, O-векторное пространство, O-алгебра, O^*-семейство, O^*-векторное пространство, O^*-алгебра и максимальная O^*-алгебра $\mathcal{L}^+(\mathcal{D})$, и установлено, что если $\mathcal{D}$ – унитарное пространство, то всякое дифференцирование алгебры $\mathcal{L}^+(\mathcal{D})$ является внутренним, и всякий $*$-автоморфизм алгебры $\mathcal{L}^+(\mathcal{D})$ является внутренним. В этом параграфе введем аналогичные понятия для L^0-значного случая и приведем доказательства некоторых утверждений.

Пусть X – модуль Капланского-Гильберта над L^0, $\mathcal{D} \subset X$ – всюду плотная область. Через $I_{\mathcal{D}}$ обозначим тождественное отображение $\mathcal{D}$.

Определение 1. *Множество bo-замыкаемых L^0-линейных операторов, определенных на $\mathcal{D}$, содержащее $I_{\mathcal{D}}$, называется O-семейством над L^0. При этом $\mathcal{D}$ называют областью определения этого семейства.*

Если $\mathcal{A}$ – O-семейство над L^0, то через $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ обозначим область определения этого семейства. Если $a \in \mathcal{A}$, то по определению имеем $\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \mathcal{D}(a) = \mathcal{D}$.

Определение 2. *O-модулем над L^0 называется O-семейство $\mathcal{A}$ над L^0 такое, что $\alpha a + \beta b \in \mathcal{A}$ для всех $a,\ b \in \mathcal{A}$ и $\alpha,\ \beta \in L^0$.*

Напомним, что через ab обозначается композиция операторов a и b. Если a и b – операторы на $\mathcal{D}$ и $b\mathcal{D} \subset \mathcal{D}$, то ab является оператором на $\mathcal{D}$, определяемым формулой $ab\varphi = a(b\varphi)$, $\varphi \in \mathcal{D}$.

Определение 3. *O-алгеброй над L^0 называется O-модуль над L^0 $\mathcal{A}$ такой, что $b\mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{D}(\mathcal{A})$ и $ab \in \mathcal{A}$ для любых $a,\ b \in \mathcal{A}$.*

Легко видеть, что всякая O-алгебра над L^0 со сложением, умножением на элементы L^0 и произведением, определенным как композиция операторов, является алгеброй над L^0. Заметим, что $I_{\mathcal{D}}$ является единицей этой алгебры.

Определение 4. *O^*-семейством над L^0 на $\mathcal{D}$ называется множество $\mathcal{A}$ L^0-линейных операторов с областью определения $\mathcal{D}$ такое, что $I_{\mathcal{D}} \in \mathcal{A}$, $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}(a^*)$, и $a^+ \in \mathcal{A}$ для любых $a \in \mathcal{A}$, где $a^+ = a^*|\mathcal{D}$.*

Пусть $\mathcal{A}$ – O^*-семейство над L^0 на $\mathcal{D}$. Тогда $\mathcal{A}$ является O-семейством над L^0 на $\mathcal{D}$. Действительно, всякий оператор $a \in \mathcal{A}$ является bo-замыкаемым, поскольку $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}(a^*)$ и $\mathcal{D}$ всюду плотно в X. Если $a \in \mathcal{A}$, то

$$\langle a\varphi, \psi\rangle = \langle \varphi, a^+\psi\rangle \text{ для всех } \varphi,\ \psi \in \mathcal{D} \tag{8}$$

и, следовательно, $a = (a^+)^+$. Из последнего, в частности, получим, что $a \to a^+$ биективно отображает $\mathcal{A}$ на себя.

Определение 5. *O^*-модулем над L^0 называется O-модуль над L^0, который является O^*-семейством над L^0.*

Если $\mathcal{A}$ является O^*-модулем над L^0 на $\mathcal{D}$, то отображение $a \to a^+$, $a \in \mathcal{A}$, является инволюцией $\mathcal{A}$. Множество $\mathcal{C}^+(\mathcal{D}, \mathcal{H}) = \{a \in \mathcal{C}(\mathcal{D}, \mathcal{H}) : \mathcal{D} \subset \mathcal{D}(a^*)\}$ является наибольшим O^*-семейством с областью определения $\mathcal{D}$. Оно является также O^*-модулем. Действительно, из $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}(a^*) \cap \mathcal{D}(b^*) \subset \mathcal{D}((a+b)^*)$ и $a,\ b \in \mathcal{C}^+(\mathcal{D}, \mathcal{H})$ вытекает, что $(a+b) \in \mathcal{C}^+(\mathcal{D}, \mathcal{H})$.

Определение 6. *O^*-алгеброй над L^0 называется O-алгебра над L^0, которая является O^*-семейством над L^0.*

Через $\mathcal{L}^+(\mathcal{D})$ обозначим множество всех L^0-линейных операторов a

в модуле Капланского-Гильберта X над L^0, для которых $a\mathcal{D} \subset \mathcal{D}$, $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}(a^*)$ и $a^*\mathcal{D} \subset \mathcal{D}$.

Теорема 2. *$\mathcal{L}^+(\mathcal{D})$ является наибольшей O^*-алгеброй над L^0 с областью определения $\mathcal{D}$.*

Доказательство. Проверим сперва, что $\mathcal{L}^+(\mathcal{D})$ есть O^*-семейство над L^0. Пусть $a \in \mathcal{L}^+(\mathcal{D})$. Покажем, что $a^+ = a^*|\mathcal{D} \in \mathcal{L}^+(\mathcal{D})$. Имеем $a^+\mathcal{D} = a^*\mathcal{D} \subset \mathcal{D}$, $(a^+)^* = (a^*|\mathcal{D})^* \supset a^{**} \supset a$, и, следовательно, $(a^+)^*\mathcal{D} = a\mathcal{D} \subset \mathcal{D}$. Откуда получим требуемое.

Теперь покажем, что $\mathcal{L}^+(\mathcal{D})$ – O-алгебра над L^0. Пусть $a, b \in \mathcal{L}^+(\mathcal{D})$. Легко видеть, что, $\lambda a \in \mathcal{L}^+(\mathcal{D})$, если $\lambda \in L^0$. Из $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}(a^*) \cap \mathcal{D}(b^*) \subset \mathcal{D}((a+b)^*)$ и $(a+b)^*\mathcal{D} = (a^* + b^*)\mathcal{D}$ вытекает, что $(a+b) \in \mathcal{L}^+(\mathcal{D})$.

Покажем, что $ab \in \mathcal{L}^+(\mathcal{D})$. Пусть $\varphi \in \mathcal{D}$ и $\psi \in \mathcal{D}$. Согласно (8) имеем $\langle ab\varphi, \psi\rangle = \langle b\varphi, a^+\psi\rangle$. В силу $a^+\mathcal{D} \subset \mathcal{D}$, применяя еще раз (8), получим $\langle ab\varphi, \psi\rangle = \langle \varphi, b^+a^+\psi\rangle$. Кроме того, $b^+a^+ \subset (ab)^*$, из которого следуют $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}((ab)^*)$, $(ab)^*\mathcal{D} = b^+a^+\mathcal{D} \subset \mathcal{D}$. Таким образом, $ab \in \mathcal{L}^+(\mathcal{D})$.

Из проведенных рассуждений ясно, что $\mathcal{L}^+(\mathcal{D})$ является O^*-алгеброй над L^0. Кроме того, $b^+a^+ = (ab)^*|\mathcal{D} = (ab)^+$.

Пусть теперь $\mathcal{A}$ – произвольная O^*-алгебра над L^0 с областью определения $\mathcal{D}$, и $a \in \mathcal{A}$. Согласно определению 3 имеем $a\mathcal{D} \subset \mathcal{D}$, так как $\mathcal{A}$ есть O-алгебра. Из определения 4 вытекает, что $a^+ \in \mathcal{A}$, так как $\mathcal{A}$ является O^*-семейством. Следовательно, $a^*\mathcal{D} = a^+\mathcal{D} \subset \mathcal{D}$. Это доказывает, что $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}^+(\mathcal{D})$. Теорема 2 доказана.

Следствие 1. *Пусть $\mathcal{A}$ – O^*-алгебра над L^0. С поточечными операциями сложения, умножения на элементы L^0, умножением L^0-линейных операторов из $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ как композиция этих операторов и инволюцией $a \to a^+$, $a \in \mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ является $*$-алгеброй над L^0 с единицей $I = I_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}$, более того, $\mathcal{A}$ является $*$-подалгеброй алгебры $\mathcal{L}^+(\mathcal{D})$.*

4. Дифференцирования и авторморфизмы O^*-алгебр над L^0

Пусть X – модуль Капланского-Гильберта над L^0, $\mathcal{D} \subset X$ – bo-плотный подмодуль. Символом $\mathcal{L}(\mathcal{D})$ обозначим алгебру всех L^0-линейных операторов $a : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$. Пусть $\mathcal{U}$ – стандартная алгебра в $\mathcal{L}(\mathcal{D})$. Напомним, что линейный оператор $\delta : \mathcal{U} \to \mathcal{L}(\mathcal{D})$ называется *дифференцированием*, если $\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b)$ при всех $a, b \in \mathcal{U}$.

Теорема 3. *Пусть $\delta : \mathcal{U} \to \mathcal{L}(\mathcal{D})$ – L^0-линейное дифференцирование стандартной алгебры $\mathcal{U}$. Тогда существует $x \in \mathcal{L}(\mathcal{D})$ такой, что*

$$\delta(a) = xa - ax \tag{9}$$

для всех $a \in \mathcal{U}$.

Доказательство. Сначала рассмотрим случай $\mathcal{U} = \mathcal{F}(\mathcal{D})$, где $\mathcal{F}(\mathcal{D})$ – алгебра конечномерных операторов $a : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$

Зафиксируем вектор $e \in \mathcal{D}$ и функционал $f : \mathcal{D} \to L^0$ такие, что $\|e\| = \mathbf{1}$, $f(e) = \mathbf{1}$. Проектор $p \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$ определим по формуле

$$p(\varphi) = f(\varphi)e, \quad \varphi \in \mathcal{D}.$$

Поскольку $p^2 = p$, то $\delta(p) = p\delta(p) + \delta(p)p$, и поэтому $p\delta(p)p = 0$. Положим $\psi = p\delta(p) - \delta(p)p$. Тогда $p\psi - \psi p = p\delta(p) + \delta(p)p = \delta(p)$.

Положив $\delta'(a) = \delta(a) - (a\psi - \psi a)$ получим $\delta'(p) = 0$. Таким образом, изначально можем предполагать, что $\delta(p) = 0$. Тогда имеем

$$\delta(ap) = a\delta(p) + \delta(a)p = \delta(a)p. \tag{10}$$

Рассмотрим вектор $\varphi \in \mathcal{D}$ и оператор $a \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$ такие, что $a(e) = \varphi$. Определим оператор $x : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ по формуле

$$x(\varphi) = \delta(a)e.$$

Оператор x определен корректно. Действительно, пусть $\varphi \in \mathcal{D}$, $a_1,\ a_2 \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$ такие, что $a_1(e) = a_2(e) = \varphi$. Для всякого $\eta \in \mathcal{D}$ имеем $(a_i p)\eta = f(\eta)a_i(e)$, $i = 1,\ 2$, т.е. $a_1 p = a_2 p$. Поэтому в силу (10) имеем $\delta(a_1)(e) = (\delta(a_1)p)(e) = \delta(a_1 p)(e) = \delta(a_2 p)(e) = (\delta(a_2)p)(e) = \delta(a_2)(e)$, т.е. $\delta(a_1) = \delta(a_2)$.

Легко видеть, что оператор x является L^0-линейным.

Пусть $\varphi \in \mathcal{D}$ и $a \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$. Тогда $(xap)\varphi = x(a(p(\varphi))) = x(f(\varphi)a(e)) = f(\varphi)x(a(e)) = f(\varphi)\delta(a)(e) = \delta(a)p(\varphi) = \delta(ap)\varphi$. Таким образом, $xap = \delta(a)p$ для всех $a \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$. Поэтому для $b \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$ имеем $xabp = \delta(ab)p = a\delta(b)p + \delta(a)bp = axbp + \delta(a)bp$, т.е.

$$\delta(a)bp = xabp - axbp. \tag{11}$$

Теперь для каждого $\varphi \in \mathcal{D}$ возьмем $b \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$ такой, что $b(e) = \varphi$. Тогда $(bp)(e) = \varphi$. Следовательно, из (11) получим, что $\delta(a) = xa - ax$ для всех $a \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$.

Пусть теперь $\mathcal{U} \subset \mathcal{L}(\mathcal{D})$ – произвольная стандартная алгебра и $b \in \mathcal{U}$. Тогда $ba \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$ для всех $a \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$. Откуда

$$\delta(ba) = xba - bax. \tag{12}$$

С другой стороны, согласно определению, имеем

$$\delta(ba) = \delta(b)a + b\delta(a) = \delta(b)a + b(xa - ax). \tag{13}$$

Приравнивая (12) и (13), получим $\delta(b)a = xba - bxa = (xb - bx)a$.

Теперь для каждого $\varphi \in \mathcal{D}$ возьмем $a \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$ такой, что $a(\varphi) = \varphi$. Тогда $\delta(b)(\varphi) = \delta(b)(a(\varphi)) = (\delta(b)a)(\varphi) = ((xb - bx)a)(\varphi) = (xb - bx)(a(\varphi)) = (xb - bx)(\varphi)$, т. е. $\delta(b)(\varphi) = (xb - bx)(\varphi)$ для всех $\varphi \in \mathcal{D}$. Это означает, что $\delta(b) = xb - bx$ для всех $b \in \mathcal{U}$. Теорема 3 доказана.

Заменяя $\mathcal{F}(\mathcal{D})$ на $\mathcal{F}^+(\mathcal{D}) := \mathcal{F}(\mathcal{D}) \cap \mathcal{L}^+(\mathcal{D})$ и $\mathcal{L}(\mathcal{D})$ на $\mathcal{L}^+(\mathcal{D})$, получим

Следствие 2. *Пусть $\delta : \mathcal{U} \to \mathcal{L}^+(\mathcal{D})$ – L^0-линейное дифференцирование алгебры $\mathcal{U} \supset \mathcal{F}^+(\mathcal{D})$. Тогда существует $x \in \mathcal{L}^+(\mathcal{D})$ такой, что*

$$\delta(a) = xa - ax$$

для всех $a \in \mathcal{U}$. В частности, всякое L^0-линейное дифференцирование алгебры $\mathcal{L}^+(\mathcal{D})$ над L^0 является внутренним.

Пусть $\mathcal{D}$ – bo-плотный подмодуль Капланского-Гильберта X над L^0. Напомним, что биективный линейный оператор $\alpha : \mathcal{L}(\mathcal{D}) \to \mathcal{L}(\mathcal{D})$ называется *автоморфизмом*, если $\alpha(ab) = \alpha(a)\alpha(b)$ при всех $a, b \in \mathcal{L}(\mathcal{D})$.

Теорема 4. *Для всякого L^0-линейного автоморфизма $\alpha : \mathcal{F}(\mathcal{D}) \to \mathcal{F}(\mathcal{D})$ алгебры $\mathcal{F}(\mathcal{D})$ существует $x \in \mathcal{L}(\mathcal{D})$ такой, что $x^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{D})$ и*

$$\alpha(a) = xax^{-1}$$

для всех $a \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$.

Доказательство. Пусть $e \in \mathcal{D}$ – единичный вектор и $f : \mathcal{D} \to L^0$ – функционал такие, что $\|e\| = \mathbf{1},\ f(e) = \mathbf{1}$. Проектор $p \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$ определим по правилу

$$p(\varphi) = f(\varphi)e, \quad \varphi \in \mathcal{D}.$$

Тогда очевидно, что $p(e) = e$. Кроме того, $\alpha(p)$ – проектор ранга один, поскольку α – L^0-линейный автоморфизм. Теперь возьмем $e_1 \in \mathcal{D}$ такой, что $\|e_1\| = \mathbf{1},\ \alpha(p)(e_1) = e_1$.

Оператор $x : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ определим следующим образом: для каждого $\varphi \in \mathcal{D}$ возьмем оператор $a \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$ такой, что $a(e) = \varphi$, и положим

$$x(\varphi) = \alpha(a)(e_1), \quad \varphi \in \mathcal{D}.$$

Пусть $\varphi \in \mathcal{D}$ и $a_1, a_2 \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$ такие, что $a_1(e) = a_2(e) = \varphi$. Для всякого $\psi \in \mathcal{D}$ имеем, что $(a_i p)(\psi) = f(\psi)a_i(e),\ i = 1, 2$, т. е. $a_1 p = a_2 p$. Поэтому $\alpha(a_1)(e_1) = \alpha(a_1)\alpha(p)(e_1) = \alpha(a_1 p)(e_1) = \alpha(a_2 p)(e_1) = \alpha(a_2)\alpha(p)(e_1) = \alpha(a_2)(e_1)$. Это означает корректность определения оператора x.

Легко видеть, что оператор x является L^0-линейным.

Теперь покажем, что x – биекция. Пусть $\varphi_1,\ \varphi_2 \in \mathcal{D}$ такие, что $\varphi_1 \neq \varphi_2$. Выберем такие $a_1,\ a_2 \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$, что $a_i(e) = \varphi_i,\ i = 1,\ 2$. Тогда $a_1 \neq a_2$, и, следовательно, $a_1p \neq a_2p$. Поскольку a_ip – одномерные операторы, $i = 1, 2$, и α – автоморфизм, то $\alpha(a_1)(e_1) = \alpha(a_1)\alpha(p)(e_1) = \alpha(a_1p)(e_1) \neq \alpha(a_2p)(e_1) = \alpha(a_2)\alpha(p)(e_1) = \alpha(a_2)(e_1)$. Следовательно, $x(\varphi_1) \neq x(\varphi_2)$. Теперь возьмем $\psi \in \mathcal{D}$, и $a \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$ такие, что $a(e_1) = \psi$. Положим $b = \alpha^{-1}(a)$. Тогда для $\varphi = b(e)$ имеем, что $x(\varphi) = \alpha(b)(e_1) = \alpha(\alpha^{-1}(a))(e_1) = a(e_1) = \psi$, т. е. $x(\varphi) = \psi$.

Пусть $\varphi \in \mathcal{D}$ и $a \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$. Возьмем $b \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$ такой, что $b(e) = \varphi$. Тогда $(xa)(\varphi) = x(a(\varphi)) = x(ab(e)) = \alpha(ab)(e_1) = \alpha(a)\alpha(b)(e_1) = \alpha(a)x(\varphi)$. Таким образом, $xa = \alpha(a)x$, т. е. $\alpha(a) = xax^{-1}$ для всех $a \in \mathcal{F}(\mathcal{D})$. Теорема 4 доказана.

Следствие 3. *Для всякого L^0-линейного автоморфизма $\alpha : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ алгебры $\mathcal{U}$ существует $x \in \mathcal{L}(\mathcal{D})$ такой, что $x^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{D})$ и*

$$\alpha(a) = xax^{-1}$$

для всех $a \in \mathcal{U}$. В частности, всякий L^0-линейный автоморфизм алгебры $\mathcal{L}(\mathcal{D})$ является пространственным.

Литература

1. Sakai S. C*-algebras and W*-algebras. – Springer-Verlag. – 1971. – 256 p.

2. Ayupov Sh. A. Derivations on unbounded operators algebras //Abstracts of the international conference Operators algebras and quantum probability. – Tashkent. – 2005. – P. 38-43.

3. Chernoff P. Representation, automorpisms and derivation on some operators algebras //J. Functional Analysis. – Vol. 12. – 1973. – P. 275-289.

4. Бер Ф.А., Сукочев Ф.А., Чилин В.И. Дифференцирования в коммутативных регулярных алгебрах //Мат. заметки. – Т. 75. – 2004. – №3. – С. 453-457.

5. Кусраев Ф.Г. Дифференцирования и автоморфизмы в алгебре измеримых комплекснозначных функций //Владикавк. матем. журн. – 2005. – Т. 7. – вып. 3. – С. 45-49.

6. Ayupov Sh.A., Kudaybergenov K.K. Derivations and automorphisms of algebras of bounded operators on Banach-Kantorovich spaces over ring of measurable functions //Central Asian Journal of Mathematics. (received)

7. Кусраев А.Г. Векторная двойственность и приложения. – Новосибирск: Наука, 1985, – 256 с.

8. Кусраев А. Г. Мажорирумые операторы. – М.: Наука, 2003, – 619 с.

9. Ганиев И.Г., Кудайбергенов К.К. Конечномерные модули над кольцом измеримых функций //Узб. мат. журн. – 2004. – №4. – С. 3-9.

10. Schmüdgen K. Unbounded operator algebras and representation theory. – Bikhäuser-Verlag, Basel, 1990.

Институт математики
им. В.И.Романовского АН РУз

Дата поступления
03.02.06

Uzbek Mathematical
Journal, 2006,№1, pp.43-48

УДК 517.98

Свойства крайних элементов множества положительных линейных операторов действующих в пространствах с порядковой единицей

И.М.Жураев

Maqolada tartiblangan birlik elementli fazolarda musbat chiziqli ekstremal akslantirishlar xossalari o‘rganilgan.

Let A and B be order unit spaces. We study the extreme points of the convex set $S(A, B)$ of all identity preserving positive linear maps from A to B.

Теорию упорядоченных нормированных пространств с порядковой единицей и пространств с базовой нормой можно рассмотреть как следующий шаг в смысле обобщения после алгебр фон Неймана и йордановых банаховых алгебр при математическом обосновании квантовой механики, исследовании статистических и вероятностных аспектов квантовой теории. Если теория алгебр фон Неймана и теория JB - алгебр развиты очень глубоко и им посвящено большое количество работ, монографий, то теория пространств с порядковой единицей только начинает развиваться. Первой работой в этом направлении считают монографию Альфсена [1], в которой дается основополагающие определения и указывает роль и место теории пространств с порядковой единицей среди выше названных теорий. Книга Альфсена и Шульца [2] является можно сказать основным учебником для начинающых заниматься этой теорией. В дальнейшем исследования пространств с порядковой единицей нашли свое развитие в работах Ш.А.Аюпова, Н.Ж.Ядгорова [3, 4, 5, 6, 7] и М.А.Бердикулова [8, 9, 10], Ф.Ф.Бонсела [11] и других.

Пусть A -упорядоченное векторное пространство над полем действительных чисел $\mathbf{R}$. Положительный элемент $\mathbf{e}$ называется порядковой единицей, если для любого $a \in A$ существует $\lambda \in R^+$ такое, что $-\lambda\mathbf{e} \leq a \leq \lambda\mathbf{e}$. Порядок на A называется архимедовым, если из $na \leq \mathbf{e}$ для всех $n = 1, 2, 3, ...$ следует, что $a \leq 0$.

Архимедовость позволяет ввести порядковую норму в A:

$$\|a\| = \inf\{\lambda > 0; -\lambda\mathbf{e} \leq a \leq \lambda\mathbf{e}\} \tag{1}$$

Определение 1. *Пространством с порядковой единицей называется пара* $(A, \mathbf{e})$*, где* A*-архимедово упорядоченное векторное пространство с фиксированной порядковой единицей и порядковой нормой (1). Пусть* V*-упорядоченное векторное пространство над полем действительных чисел* $\mathbf{R}$*. Подмножество* $K \subset V$ *называется выпуклым, если для каждой пары точек* $x_1, x_2 \in K$ *отрезок, определяемый как*

$$[x_1, x_2] = \{x : x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, (0 \leq \lambda \leq 1)\}$$

содержится в K*. Подмножество* G *выпуклого множеста* K *называется гранью, если для* $x, y \in K, \lambda \in (0,1)$ *из* $\lambda x + (1-\lambda)y \in G$ *вытекает, что* $x, y \in G$*. Точка* $z \in K$ *называется экстремальной (крайней) точкой множества* K*, если одноточечное множество* z *является гранью.*

Выпуклое множество K в V называется радиально компактным, если $K \cap L$ является замкнутым, ограниченным сегментом для любой прямой L, проходящей через нулевой элемент из V. Выпуклое подмножество K гиперплоскости $H \subset V$-не проходящей через начало координат, называется базой для конуса V^+, если $V^+ = \bigcup\limits_{\lambda \geq 0} \lambda K$

Определение 2. *Пространством с базовой нормой называется пара* (V, K)*, где* V *упорядоченное векторное пространство с воспроизводящим конусом* V^+*, имеющим базу* K*, причем множество* $B = \mathrm{conv}(K \cup -K)$ *радиально компактно и в* V *введена базовая норма*

$$\|\rho\| = \inf\{\lambda \geq 0 : \rho \in \lambda B\}.$$

Здесь $\mathrm{conv}X$ *означает выпуклую оболочку множества* X *в* V*.*

Пусть $(A, \mathbf{e})$-пространство с порядковой единицей,(V, K) -пространство с базовой нормой. Будем предпологать, что эти пространства находятся в спектральной двойственности [1]. В этом случае можно определить квадрат элемента $a \in A$, равенством $a^{(2)} = \int \lambda^2 de_\lambda$, где $a = \int \lambda de_\lambda$ спектральное разложение элемента a.

Определение 3. *Множество* $Z(A) = \{a \in A : a \leftrightarrow b, \forall b \in A\}$*-элементов пространства* A *совместимых со всеми элементами из* A *называется центром* A*. Элемент* $a \in A$ *называется обратимым, если существует* $b \in A$*, совместимый с* a*, такой, что* $ab = e$*, где* $ab = \frac{1}{2}[(a+b)^{(2)} - a^{(2)} - b^{(2)}]$.

Пусть $(A_1, \mathbf{e}_1)$ и $(A_2, \mathbf{e}_2)$ пространства с порядковой единицей. Будем предполагать, что они находятся в спектральной двойственности с пространствами с базовой нормой (V_1, K_1) и (V_2, K_2) соответственно.

Пусть $L(A_1, A_2)$-действительное банахово пространство всех ограниченных линейных отображений из A_1 в A_2 . Через $S(A_1, A_2)$ - обозначим множество всех положительных линейных отображений $\varphi : A_1 \to A_2$, таких что $\varphi(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_2$. Тогда $S(A_1, A_2)$ является выпуклым подмножеством множества $L(A_1, A_2)$.

Теорема 1. *Пусть φ является крайней точкой в $S(A_1, A_2)$. Если $a \in Z(A_1)$ и $\varphi(a) \in Z(A_2)$, то $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ для всех $b \in A_1$, где $ab = \frac{1}{2}((a+b)^{(2)} - a^{(2)} - b^{(2)})$.*

Доказательство. Без ограничения общности, можно считать, что $\|a\| < \frac{1}{2}$. Поскольку φ крайняя точка, то $\|\varphi\| \equiv 1$, поэтому $\|\varphi(a)\| \leq \|\varphi\|\|a\| < \frac{1}{2}$. Из спектральной теории [2] известно, что $\frac{1}{2}e_1 - a$ и $\frac{1}{2}e_2 - \varphi(a)$ являются положительными и обратимыми в $Z(A_1)$ и $Z(A_2)$. Поэтому существует $\lambda > 0$ такое, что $\frac{1}{2}e_2 - \varphi(a) \geq \lambda e_2$.

Определим $\psi : A_1 \to A_2$ следующим образом:$\psi(b) = \varphi(b(\frac{1}{2}e_1 - a))(\frac{1}{2}e_2 - \varphi(a))^{-1}$, для всех $b \in A_1$. Очевидно, что $\psi \in S(A_1, A_2)$. Покажем, что $\lambda\psi \leq \varphi$. Пусть $c \in A_1$ и $c \geq 0$. Тогда $\lambda\psi(c) \leq (\frac{1}{2}e_2 - \varphi(a))\psi(c) = \varphi(c(\frac{1}{2}e_1 - a)) \leq \varphi(c)$. Таким образом, $\lambda\psi \leq \varphi$. Так как φ является крайней точкой, то $\psi = \varphi$. Имеем $(\frac{1}{2}e_2 - \varphi(a))\varphi(b) = \varphi(b(\frac{1}{2}e_1 - a)) = \frac{1}{2}\varphi(b) - \varphi(ab)$. Отсюда получим, что $\varphi(b) - \varphi(a)\varphi(b)$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть $(A_1, \mathbf{e}_1)$ и $(A_2, \mathbf{e}_2)$ - пространства с порядковой единицей, пусть τ положительное линейное отображение из A_1 в A_2 такое, что $\tau(e_1) \in Z(A_2)$ и $\tau \leq \varphi$. Если φ является экстремальной точкой, то $\tau = \tau(e_1)\varphi$.*

Доказательство. Не ограничивая общности можно считать, что $\|\tau(e_1)\| \leq 1$. Согласно спектральной теории элемент $(e_2 - \tau(e_1))$ является положительным и обратимым в центре A_2 и существует $\lambda > 0$ такое, что $\lambda(e_2 - \tau(e_1))^{-1} \leq e_2$.

Таким образом, если a положительный элемент в A_1 то,

$$0 \leq \lambda(e_2 - \tau(e_1))^{-1}(\varphi(a) - \tau(a)) \leq (\varphi(a) - \tau(a)) \leq \varphi(a),$$

$$\lambda(e_2 - \tau(e_2))^{-1}(\varphi - \tau) \in S(A_1, A_2, \lambda e_2).$$

Так как φ является экстремальной точкой в $S(A_1, A_2)$, то

$$(e_2 - \tau(e_1))^{-1}(\varphi - \tau) = \varphi$$

и отсюда получим, что $\tau = \tau(e_1)\varphi$. Теорема доказана.

Через $S(A_1, A_2, \lambda b)$ обозначим множество всех положительных линейных отображений φ таких, что $\varphi(e_1) = \lambda b$.

Следствие 3. *Пусть $(A_1, \mathbf{e}_1)$ и $(A_2, \mathbf{e}_2)$ - пространства с порядковой единицей и b положительный элемент в $Z(A_2)$. Если φ является экстремальной точкой $S(A_1, A_2)$, то отображение $a \to b\varphi(a)$ является экстремальной точкой в $S(A_1, A_2, \lambda b)$.*

Доказательство. Отображение $a \to b\varphi(a)$ обозначим через $b\varphi$. Если $\tau \in S(A_1, A_2, \lambda b)$ и $\tau \leq b\varphi$, то $\tau \leq \|b\|\varphi$. Поэтому по теореме 2 имеем $\tau = \tau(e_1)\varphi = \lambda b\varphi$.

Следствие 4. *Пусть $A_2 = Z(A_2)$ и φ является экстремальной точкой в $S(A_1, A_2)$. Тогда отображение $\varphi|_{Z(A_1)} : Z(A_1) \to A_2$ является экстремальной точкой в $S(Z(A_1), A_2)$.*

Следствие 5. *Пусть A_1 и A_2 пространства с порядковой единицей и $A_1' = Z(A_1)$ и $A_2' = Z(A_2)$. Тогда для каждой экстремальной точки $S(A_1', A_2')$ выполняется равенство $\varphi(a^{(2)}) = \varphi(a)^{(2)}, \forall a \in A_1'$.*

Следующий результат дает эквивалентность сохранения квадрата и экстремальности, при некоторых ограничениях.

Пусть R^n_∞ - пространство n - мерных (комплексных) векторов с базисом. $e_1 = (1, 0, ..., 0),\ e_2 = (0, 1, 0, ..., 0), ..., e_n = (0, 0, ..., 1)$.

Теорема 6. *Пусть B - пространство с порядковой единицей. Тогда для каждой экстремальной точки $S(R^2_\infty, B)$ выполняется равенство $\varphi(a^{(2)}) = \varphi(a)^{(2)}, \forall a \in R^2_\infty$.*

Доказательство. Пусть φ является экстремальной точкой $S(R^2_\infty, B)$.

Докажем, что $\varphi(a^{(2)}) = \varphi(a)^{(2)}, \forall a \in R^2_\infty$. Для этого покажем, что $\varphi(e_1')$ и $\varphi(e_2')$ является проективными единицами в B, где $e_1', e_2' \in R^2_\infty$ и $e_1' = (1, 0), e_2' = (0, 1), e_2 = \varphi(e_1) = \varphi(e_1') + \varphi(e_2')$, где e_1 и e_2 порядковые единицы R^2_∞ и B соответственно. Для того чтобы показать, что $\varphi(e_1')$ и $\varphi(e_2')$ - проективные единицы, мы покажем, что $\varphi(e_1')$ и $\varphi(e_2')$ являются экстремальными точками в положительной части единичного шара $[0, e_2] \subset B$.

Предположим, что $\varphi(e_1') = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$, где $0 \leq b, c \leq e_2$. Линейные отображения $\psi, \rho : R^2_\infty \to B$ определим следующим образом: $\psi(e_1) = b, \psi(e_2') = e_2' - b, \rho(e_1') = c$ и $\rho(e_2') = e_2 - c$. Тогда ясно, что $\psi, \rho \in S(R^2_\infty, B), \varphi = \frac{1}{2}(\psi + \rho)$. Так как φ является экстремальной точкой в $S(R^2_\infty, B)$, то имеем, что $\varphi = \psi = \rho$. Отсюда получим, что $b = \psi(e_1') = \rho(e_2') = c$. Таким образом, мы доказали, что $\psi(e_1')$ является экстремальной точкой в $[0, e_2]$, то есть $\varphi(e_1')^{(2)} = \varphi(e_1')$.

Аналогично $\varphi(e_2')^{(2)} = \varphi(e_2')$. Пусть $a \in R^2_\infty$, тогда $a = \alpha e_1' + \beta e_2'$ и $\varphi(a^{(2)}) = \varphi(a)^{(2)}$. Утверждение доказано.

Определение 7. *Элемент a в пространстве с порядковой единицей A называется скалярным кратным проективной единицы, если $a^{(2)} = \lambda a$, где $\lambda \in R$.*

Теорема 8. *Пусть φ является экстремальной точкой в множестве $S(R^n_\infty, A)$. Тогда $\varphi(e_i)^{(2)} \in \varphi(R^n_\infty)$ в том и только в том случае, когда $\varphi(e_i)$является скалярным кратным проективной единицы в A.*

Доказательство. Пусть $\varphi(e_i)^{(2)} \in \varphi(R^n_\infty)$. Тогда $\varphi(e_i)^{(2)} = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k^{(i)} \varphi(e_k)$, где $\lambda_k^{(i)} \in R$. Не ограничивая общности, можно считать, что $i = 1$.

Отображение $\psi : R^n_\infty \to A$ определим следующим образом

$$\psi(a) = a_1(\lambda_1 e_2' - \varphi(e_1))\varphi(e_1) + \sum_{k=2}^{n} a_k \lambda_k \varphi(e_k),$$

где $a = (a_1, a_2, ..., a_n) \in R^n_\infty$, e_2'- порядковая единица пространства A. При такой определении ψ $\psi(e_1') = 0$, где e_1' - порядковая единица пространства R^n_∞ и $-\mu\varphi \leq \psi \leq \mu\varphi$, где $\mu = \max\{\|\lambda_1 - \varphi(e_1)\|, |\lambda_2|, ..., |\lambda_n|\}$. Выберем $t > 0$ такое, что $t\mu \leq 1$ и $\varphi_1 = \varphi - t\psi$ и $\varphi_2 = \varphi + t\psi$. Тогда мы имеем, что $\varphi_1, \varphi_2) \in S(R^2_\infty, A)$ и также $\varphi = \frac{1}{2}\varphi_1 + \frac{1}{2}\varphi_2$. Так как φ экстремальное отображение, то $\varphi = \varphi_1$, и поэтому $(\lambda_1 - \varphi(e_1)) \circ \varphi(e_1) = 0$.

Отсюда получим, что $\varphi(e_1)^{(2)} = \lambda_1\varphi(e_1)$. Следовательно $\varphi(e_1)$ является скалярно кратной проективной единицей. Если $\varphi(e_1)^{(2)} = \lambda_1\varphi(e_1)$, то $\varphi(e_1)^{(2)} \in R^n_\infty$. Теорема доказана.

Из теоремы 8. следует, что если φ крайняя точка $S(R^2_\infty, A)$ и $\varphi(e_1)^{(2)} \in \varphi(R^n_\infty)$, где $\|\varphi(e_i)\| = 1$ (или 0), то для φ выполняется равенство $\varphi(a^{(2)}) = \varphi(a)^{(2)}$, $\forall a \in R^n_\infty$.

Литература

1. Alfsen E.M. Compact convex sets and boundary integrals. Ergebnisse der Math. 57. Springer Verlag. Berlin. 1971. 210 p.

2. Alfsen E.M., Shults F.W. Non Commutative Spectral theory for affine functions spaces on convex sets. A mer. Math. soc. 172. Providence R.I.AMS, 1976. XI+120 p.

3. Аюпов Ш.А. Ядгоров Н.Ж. Свойства спектральных выпуклых множеств. Доклады АН УзССР. 1989. №7. С. 3-4.

4. Аюпов Ш.А. Ядгоров Н.Ж. Спектральные выпуклые множества. Известия АН УзССР. Серия физ.-мат. наук, 1989. №3. С. 3-7.

5. Аюпов Ш.А. Ядгоров Н.Ж. Двойственность упорядоченных пространств и характеризации проективных единиц. Известия АН УзССР. Серия физ.-мат. наук, 1989. №6. С.3-7.

6. Ядгоров Н.Ж. Понятия модулярности и конечности Р-проекторов в пространстве с порядковой единицей. Известия АН УзССР. Серия физ.-мат. наук,1988. №2. С. 42-45.

7. Ядгоров Н.Ж. Изометрии пространств с порядковой единицей, однородные типа I_2. Доклады АН УзССР. 1988. №8. С. 4-6.

8. Бердикулов М.А. Пространства с порядковой единицей, однородные типа I_2. Известия АН УзССР. Серия физ.-мат. наук,1990. №4. С.8-14.

9. Бердикулов М.А. Теорема о существовании предсопряженного пространства для пространств с порядковой единицей. Узб. Мат. Журнал. 1997. №2. С. 25-28.

10. Бердикулов М.А.,Ядгоров Н.Ж. Пространства с порядковой единицей типа I. В сб. "Операторные алгебры и функциональные пространства". Ташкент. "ФАН", 1988. С.17-21.

11. Bonsall F.F. Extreme maximal ideals of partially ordered vector spaces. Proc. Amer. Math. Soc. P. 831-837.

Бухарский государственный
университет им. Ф.Ходжаева

Дата поступления
10.09.05

Uzbek Mathematical
Journal, 2006,№1, pp.49-57

УДК 517.98

Измеримое расслоение компактных интегральных операторов

К.К.Кудайбергенов

Mazkur ishda Kaplanski-Gilbert modullarida kompakt integral operatorlarning o'lchovli taxlamasi o'rganilgan. Bunday operatorlar uchun Fredgolm alternativasi isbotlangan.

In this paper a measurable bundle of compact operators on Kaplansky-Hilbert modules is studied. For this operators of Fredholm alternative is proved.

Введение

Пусть (Ω, Σ, μ) и $(S, \mathcal{F}, m)$ – измеримые пространства с конечными мерами, $L^0 = L^0(\Omega)$ – алгебра всех комплексных измеримых функций на (Ω, Σ, μ) (равные почти всюду функции отождествляются). Через $L^{2,0}(S\times\Omega)$ обозначим множество всех комплексных измеримых функций на $S\times\Omega$, таких что $\int\limits_S |f(s,\omega)|^2\,dm(s) \in L^0$. Пусть $k(t,s,\omega)$ измеримая функция на $S^2\times\Omega$ такая, что $\int\limits_S\int\limits_S |k(t,s,\omega)|^2\,dm(t)\,dm(s) \in L^0$. Рассмотрим оператор $T : L^{2,0}(S\times\Omega) \to L^{2,0}(S\times\Omega)$, определенный формулой

$$T(f) = \int\limits_S k(t,s,\omega)f(s,\omega)\,dm(s), \quad f \in L^{2,0}(S\times\Omega),$$

а также семейство $\{T_\omega : \omega \in \Omega\}$ интегральных операторов вида

$$T_\omega(f_\omega) = \int\limits_S k_\omega(t,s)f_\omega(s)\,dm(s), \quad f_\omega \in L^2(S),$$

где $k_\omega(t,s) = k(t,s,\omega)$. Если (Ω,Σ,μ) не имеет атомов, то даже в случае, когда $k(t,s,\omega) \equiv 1$ оператор T не является компактным, но при фиксированном ω оператор T_ω будет действовать в $L^2(S)$ и является компактным, т. е. T можно рассматривать как измеримое расслоение компактных операторов. Это позволяет для изучения таких операторов применять метод измеримых банаховых расслоений, развитых в работах [1, 2], и результаты теории модулей Банаха-Канторовича из [1-3]. В работе [4] было показано, что всякий линейный циклически компактный оператор в пространстве Банаха-Канторовича над кольцом измеримых функции можно представить как измеримое расслоение линейных компактных операторов.

В данной работе, используя такое представление, мы покажем, что оператор T является циклически компактным (теорема 3), для оператора $I - T$ справедлива ∇-альтернатива Фредгольма (теорема 4).

1. Предварительные сведения

Пусть $L^0 = L^0(\Omega)$ – алгебра всех комплексных измеримых функций на (Ω, Σ, μ) (равные почти всюду функции отождествляются).

Рассмотрим векторное пространство E над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел.

Отображение $\|\cdot\| : E \longrightarrow L^0$ называется L^0-значной нормой на E, если для любых $x, y \in E, \lambda \in \mathbb{C}$ имеют место соотношения:

$\|x\| \geq 0; \|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0; \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|; \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Пара $(E, \|\cdot\|)$ называется *решеточно-нормированным* пространством (РНП) над L^0. Говорят, что РНП E d-разложимо, если для любого $x \in E$ и для любого разложения $\|x\| = e_1 + e_2$ в сумму дизъюнктных элементов найдутся такие $x_1, x_2 \in E$, что $x = x_1 + x_2$ и $\|x_1\| = e_1, \|x_2\| = e_2$. Сеть $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ элементов из E называется (bo)-сходящейся к $x \in E$, если сеть $(\|x_\alpha - x\|)_{\alpha \in A}$ (o)-сходится к нулю в L^0.

Пространством Банаха-Канторовича (ПБК) над L^0 называется (bo)-полное d-разложимое РНП над L^0 (см. [2, 3]).

Пусть X – отображение, ставящее в соответствие каждой точке $\omega \in \Omega$ некоторое банахово пространство $(X(\omega), \|\cdot\|_{X(\omega)})$. *Сечением* X называется функция u, определенная почти всюду в Ω и принимающая значение $u(\omega) \in X(\omega)$ для всех $\omega \in \mathrm{dom}(u)$, где $\mathrm{dom}(u)$ есть область определения u.

Пусть L – некоторое множество сечений.

Определение [1] (см. также [2]). Пара (X, L) назывется *измеримым банаховым расслоением* (ИБР) над Ω, если

а) $\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 \in L$ для всех $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ и $c_1, c_2 \in L$, где

$\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 : \omega \in \mathrm{dom}(c_1) \cap \mathrm{dom}(c_2) \to \lambda_1 c_1(\omega) + \lambda_2 c_2(\omega)$;

б) функция $\|c\| : \omega \in \mathrm{dom}(c) \to \|c(\omega)\|_{X(\omega)}$ измерима при всех $c \in L$;

в) для каждой точки $\omega \in \Omega$ множество $\{c(\omega) : c \in L, \omega \in \mathrm{dom}(c)\}$ плотно в $X(\omega)$.

Сечение s называется ступенчатым, если $s(\omega) = \sum\limits_{i=1}^{n} \chi_{A_i}(\omega)c_i(\omega)$, где $c_i \in L, A_i \in \Sigma, i = \overline{1,n}$. Сечение u называется измеримым, если найдется такая последовательность $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ступенчатых сечений, что $\|s_n(\omega) - u(\omega)\|_{X(\omega)} \to 0$ почти для всех (п.д.в) $\omega \in \Omega$.

Пусть $\mathcal{M}(\Omega, X)$ – множество всех измеримых сечений. Символом $L^0(\Omega, X)$ обозначим факторизацию $\mathcal{M}(\Omega, X)$ по отношению к равенству почти всюду. Через $\hat{u}$ обозначим класс из $L^0(\Omega, X)$, содержащий сечение $u \in \mathcal{M}(\Omega, X)$. Отметим, что функция $\omega \to \|u(\omega)\|_{X(\omega)}$ измерима для любого $u \in \mathcal{M}(\Omega, X)$. Класс эквивалентности, содержащий функцию $\|u(\omega)\|_{X(\omega)}$ обозначим через $\|\hat{u}\|$.

В работе [1] (стр.144) доказано, что $(L^0(\Omega, X), \|\cdot\|)$ является ПБК над L^0.

Пусть $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$ алгебра ограниченных измеримых функций на (Ω, Σ, μ), $L^\infty(\Omega)$ – факторизация $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$ по отнощению равенства почти всюду. Положим $\mathcal{L}^\infty(\Omega, X) = \{u \in \mathcal{M}(\Omega, X) : \|u(\omega)\|_{X(\omega)} \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)\}$.

Рассмотрим произвольный лифтинг $p : L^\infty(\Omega) \to \mathcal{L}^\infty(\Omega)$ (см. [1]).

Определение [1] (см. также [2]). Отображение $l_X : L^\infty(\Omega, X) \to \mathcal{L}^\infty(\Omega, X)$ называется *векторно-значным лифтингом* (ассоциированным с лифтингом p), если для всех $\hat{u}, \hat{v} \in L^\infty(\Omega, X)$ и $e \in L^\infty(\Omega)$ имеет место:

а) $l_X(\hat{u}) \in \hat{u}, \mathrm{dom}(l_X(\hat{u})) = \Omega$;

б) $\|l_X(\hat{u})(\omega)\|_{X(\omega)} = p(\|\hat{u}\|)(\omega)$;

в) $l_X(\hat{u} + \hat{v}) = l_X(\hat{u}) + l_X(\hat{v})$;

г) $l_X(e\hat{u}) = p(e)l_X(\hat{u})$;

д) множество $\{l_X(\hat{u})(\omega) : \hat{u} \in L^\infty(\Omega, X)\}$ плотно в $X(\omega)$ для всех $\omega \in \Omega$.

Известно [1, теорема 4.4.1 и теорема 4.4.8], что для всякого ПБК E над L^0 существует ИБР (X, L) такое, что E изометрически изоморфно $L^0(\Omega, X)$, и на $L^\infty(\Omega, X)$ существует векторнозначный лифтинг для которого $\{l_X(\hat{u})(\omega) : \hat{u} \in L^\infty(\Omega, X)\} = X(\omega)$ для всех $\omega \in \Omega$.

Пусть ∇ булева алгебра всех идемпотентов в L^0. Если $(u_\alpha)_{\alpha\in A} \subset L^0(\Omega, X)$ и $(\pi_\alpha)_{\alpha\in A}$ – разбиение единицы в ∇, то ряд $\sum\limits_{\alpha\in A} \pi_\alpha u_\alpha$ (bo)-сходится в $L^0(\Omega, X)$ и сумма этого ряда называется *перемешиванием* $(u_\alpha)_{\alpha\in A}$ относительно $(\pi_\alpha)_{\alpha\in A}$. Это сумма обозначается через $\mathrm{mix}(\pi_\alpha u_\alpha)$. Для $K \subset L^0(\Omega, X)$ через $\mathrm{mix}K$ обозначается множество всех перемешиваний произвольных семейств элементов из K. Множество K называется *циклическим,* если $\mathrm{mix}K = K$. Для направленного множества A через $\nabla(A)$ обозначается множество всех разбиений единицы в ∇, заиндексованных элементами A. Отношение порядка на $\nabla(A)$ определяется следующим образом:

$$\nu_1 \leq \nu_2 \Leftrightarrow \forall \alpha, \beta \in A, \, (\nu_1(\alpha) \wedge \nu_2(\beta) \neq 0 \Rightarrow \alpha \leq \beta) \quad (\nu_1, \nu_2 \in \nabla(A)).$$

Пусть $(u_\alpha)_{\alpha\in A}$ сеть в $L^0(\Omega, X)$. Для каждого $\nu \in \nabla(A)$ положим $u_\nu = \mathrm{mix}(\nu(\alpha)u_\alpha)$ и получим новую сеть $(u_\nu)_{\nu\in\nabla(A)}$. Произвольная подсеть сети $(u_\nu)_{\nu\in\nabla(A)}$ называется *циклической подсетью* сети $(u_\alpha)_{\alpha\in A}$.

Определение [3]. Подмножество $K \subset L^0(\Omega, X)$ называется *циклически компактным,* если оно циклично и всякая сеть в K имеет циклическую подсеть сходящуюся к некоторой точке из K.

Примерами циклически компактных множеств являются:

a) порядковый отрезок в L^0 в стандартной топологии L^0 [3, теорема 1.3.7];

b) единичный шар конечномерного модуля над L^0 [5, следствие 2];

c) опорное множество субаддитивного функционала из $L^0(\Omega, X)$ в L^0, в $*$-слабой топологии $L^0(\Omega, X)^*$ [3, теорема 1.3.8].

Линейный оператор $A : L^0(\Omega, X) \to L^0(\Omega, Y)$ называется L^0-ограниченным, если существует $c \in L^0$ такое, что $\|A(x)\| \leq c\|x\|$ для всех $x \in L^0(\Omega, X)$. Для линейного L^0-ограниченного оператора T положим $\|A\| = \sup\{\|A(x)\| : \|x\| \leq \mathbf{1}\}$. Всякий линейный L^0-ограниченный оператор $A : L^0(\Omega, X) \to L^0(\Omega, Y)$ является L^0-линейным, т. е. $A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y)$ для всех $\alpha, \beta \in L^0, x, y \in L^0(\Omega, X)$ (см. [3])

Известно [4] (см. также [2, стр. 530]), что для всякого линейного циклически компактного оператора $A : L^0(\Omega, X) \to L^0(\Omega, Y)$ существует семейство компактных операторов $\{A_\omega : X(\omega) \longrightarrow Y(\omega)\}$ такое, что для всякого $x \in L^0(\Omega, X)$ верно $(A(x))(\omega) = A_\omega(x(\omega))$ п.д.в. $\omega \in \Omega$, при этом если $\|A\| \in L^\infty(\Omega)$, то $l_Y(A(x))(\omega) = A_\omega(l_X(x)(\omega))$ для всех $x \in L^\infty(\Omega, X)$, где l_X и l_Y векторнозначные лифтинги на $L^\infty(\Omega, X)$ и $L^\infty(\Omega, Y)$ соответственно, ассоциированные с лифтингом $p : L^\infty(\Omega) \to \mathcal{L}^\infty(\Omega)$.

Обратно, если $\{A_\omega : X(\omega) \longrightarrow Y(\omega), \omega \in \Omega\}$ измеримое расслоение линейных компактных операторов, т. е. $A_\omega(x(\omega)) \in M(\Omega, Y)$ для любого $x \in M(\Omega, X)$, то линейный оператор $\hat{A} : L^0(\Omega, X) \longrightarrow L_0(\Omega, Y)$, определенный равенством $\hat{A}(\hat{u}) = \widehat{A_\omega(u(\omega))}$ является циклически компактным. Оператор $\hat{A}$ назовем "склейкой" семейства операторов $\{A_\omega : \omega \in \Omega\}$.

2. Основные результаты

Для $f \in L^{2,0}(S \times \Omega)$ положим

$$\|f\| = \sqrt{\int\limits_S |f(s, \omega)|^2 \, dm(s)} \in L^0.$$

Известно [2, Предложение 2.3.9(1)], что $(L^{2,0}(S \times \Omega), \|\cdot\|)$ является пространством Банаха-Канторовича над L^0.

Пусть $\|f\|_2 = \sqrt{\int\limits_\Omega \int\limits_S |f(s,\omega)|^2\, dm(s)\, d\mu(\omega)}$, $f \in L^2(S \times \Omega)$. Ясно, что

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int\limits_\Omega \|f\|^2(\omega)\, d\mu(\omega)}.$$

Через Γ обозначим множество всех функции из $L^{2,0}(S \times \Omega)$ вида $\sum\limits_{k=1}^{n} \varphi_k \times \psi_k$, где $\varphi_k \in L^2(S), \psi_k \in L^\infty(\Omega), k = \overline{1,n}, n \in \mathbb{N}$.

Предложение 1. *Множество* Γ *(bo)-плотно в* $L^{2,0}(S \times \Omega)$.

Доказательство. Известно [6], что множество Γ плотно в $L^2(S \times \Omega)$ по $\|\cdot\|_2$-норме. Пусть $f \in L^2(S \times \Omega)$. Возьмем последовательность $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Gamma$ такое, что $\|f_n - f\|_2 \to 0$ при $n \to \infty$. Имеем $\int\limits_\Omega \|f_n - f\|^2(\omega)\, d\mu(\omega) = \|f_n - f\|_2^2 \to 0$. Поэтому существует подпоследовательность (f_{n_k}) такое, что $\|f_{n_k} - f\|(\omega) \to 0$ п. д. в. $\omega \in \Omega$. Это означает, что Γ (bo)-плотно в $L^2(S \times \Omega)$.

С другой стороны множество $L^{2,\infty}(S \times \Omega) = \{f \in L^{2,0}(S \times \Omega) : \|f\| \in L^\infty(\Omega)\}$ (bo)-плотно в $L^{2,0}(S\times\Omega)$. Ясно, что $\Gamma \subset L^{2,\infty}(S\times\Omega) \subset L^2(S\times\Omega)$. Следовательно Γ (bo)-плотно в $L^{2,0}(S \times \Omega)$. Предложение 1 доказано.

Для каждого $\omega \in \Omega$ положим

$$\gamma_\omega(f)(s) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(s) p(\psi_k)(\omega), \quad f = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k \times \psi_k \in \Gamma,$$

где p некоторый лифтинг на $L^\infty(\Omega)$. Тогда $\gamma_\omega(f)(s)$ измеримая функция на S для всех $\omega \in \Omega$.

Пусть X – отображение, ставящее в соответствие каждой точке $\omega \in \Omega$ банахово пространство $L^2(S)$ и $L = \{\gamma(f) : f \in \Gamma\}$, где $\gamma(f)$ сечение X ставящее в соответствие каждой $\omega \in \Omega$ функцию $\gamma_\omega(f) \in L^2(S)$.

Теорема 1. *Пара* (X, L) *есть ИБР и* $L^0(\Omega, X)$ *изометрически изоморфна* $L^{2,0}(S \times \Omega)$.

Доказательство. 1) Так как лифтинг p линейное отображение, то L линейное множество.

2) Для $f \in \Gamma$ имеем

$$\|\gamma_\omega(f)\|^2_{L^2(S)} = \int\limits_S |\gamma_\omega(f)(s)|^2\, dm(s) \in L^1(\Omega).$$

Это показывает, что $\omega \to \|\gamma_\omega(f)\|_{L^2(S)}$ измеримая функция.

3) Пусть $g \in L^2(S)$. Положим $f(s,\omega) = g(s)$. Тогда $f \in \Gamma$ и $\gamma_\omega(f) = g$. Поэтому множество $\{\gamma_\omega(f) : f \in \Gamma\}$ совпадает с $L^2(S)$ для всех $\omega \in \Omega$.

Пусть теперь $L^0(\Omega, X)$ ПБК над L^0 построенное по (X, L). Так как по построению для $f \in \Gamma$ имеет место $\|f\| = \|\widehat{\gamma(f)}\|$, то соответствие $\gamma : f \to \widehat{\gamma(f)}$ есть изометрия из Γ в $L^0(\Omega, X)$. Так как множество $\{\gamma(f) : f \in \Gamma\}$ содержит множество всех ступенчатых сечений, то $\{\widehat{\gamma(f)} : f \in \Gamma\}$ (bo)-плотно в $L^0(\Omega, X)$. Согласно предложению 1 множество Γ (bo)-плотно в $L^{2,0}(S\times\Omega)$, и поэтому γ продолжается до изометрического изоморфизма из $L^0(\Omega, X)$ на $L^{2,0}(S\times\Omega)$. Теорема 1 доказана.

Пусть $k(t,s,\omega)$ измеримая функция на $S^2\times\Omega$ такая, что $\int\limits_S\int\limits_S |k(t,s,\omega)|^2 d\,m(t) d\,m(s) \in L^0$. Оператор $T : L^{2,0}(S\times\Omega) \to L^{2,0}(S\times\Omega)$ определим формулой

$$T(f) = \int\limits_S k(t,s,\omega) f(s,\omega)\, dm(s), \quad f \in L^{2,0}(S\times\Omega). \tag{1}$$

Пусть $f \in L^{2,0}(S\times\Omega)$ и $g = T(f)$. Покажем, что $g \in L^{2,0}(S\times\Omega)$. Пусть сначала $f \in L^{2,\infty}(S\times\Omega)$, где $L^{2,\infty}(S\times\Omega) = \{h \in L^2(S\times\Omega) : \|h\| \in L^\infty(\Omega)\}$. Используя неравенство Коши-Буняковского имеем

$$|g|^2 = |\int\limits_S k(t,s,\omega) f(s,\omega)\, dm(s)|^2 \le$$

$$\le \int\limits_S |k(t,s,\omega)|^2\, dm(s) \int\limits_S |f(s,\omega)|^2\, dm(s) \le \|f\|^2 K,$$

т.е.

$$|g|^2 \le \|f\|^2 K, \tag{2}$$

где $K = \int\limits_S |k(t,s,\omega)|^2\, dm(s)$. Так как $\sqrt{\int\limits_S |k(t,s,\omega)|^2\, dm(s)} \in L^{2,0}(S\times\Omega)$ и $\|f\|^2 \in L^\infty(\Omega)$, то $g \in L^{2,0}(S\times\Omega)$. Интегрируя (2) по t получим $\|g\|^2 = \int\limits_S |g(t,\omega)|^2\, dm(t) \le C^2\|f\|^2$, где $C^2 = \int\limits_S\int\limits_S |k(t,s,\omega)|^2\, dm(s)\, dm(t)$. Это означает, что T является L^0-ограниченым оператором на $L^{2,\infty}(S\times\Omega)$. Так как $L^{2,\infty}(S\times\Omega)$ (bo)-плотно в $L^{2,0}(S\times\Omega)$, то T также L^0-ограничена на $L^{2,0}(S\times\Omega)$, при этом $\|T\| \le C$.

Непосредственно из (1) вытекает, что T является L^0-линейным оператором.

Ясно, что если $\int\limits_S\int\limits_S |k(t,s,\omega)|^2 d\,m(t) d\,m(s) \in L^\infty(\Omega)$, то $T(L^2(S\times\Omega)) \subseteq L^2(S\times\Omega)$.

Теорема 2. *Пусть* $\int\limits_S \int\limits_S |k(t,s,\omega)|^2 d\,m(t) d\,m(s) \in L^\infty(\Omega)$, (Ω, Σ, μ) *не имеет атомов и* $U : (L^2(S \times \Omega), \|\cdot\|_2) \to (L^2(S \times \Omega), \|\cdot\|_2)$ *сужение оператора (1). Если* U *компактен, то* $k(t,s,\omega) \equiv 0$.

Доказательство. Пусть сначала $k(t,s,\omega) = \overline{k(s,t,\omega)}$. Предположим, что $k(t,s,\omega) \neq 0$. Так как $k(t,s,\omega) = \overline{k(s,t,\omega)}$, то оператор $U \neq 0$ эрмитов и поэтому спектральный радиус оператора U равен норме U. Следовательно спектр $\sigma(U)$ содержит ненулевой $\lambda \in \mathbb{R}$. Из компактности U следует, что λ собственное значение оператора U и поэтому $\ker(\lambda I - U)$ конечномерное линейное пространство над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$.

С другой стороны из L^0-линейности T вытекает, что $\ker(\lambda I - U)$ есть ненулевой модуль над $L^\infty(\Omega)$. Так как (Ω, Σ, μ) не имеет атомов, то всякий ненулевой модуль над $L^\infty(\Omega)$ есть бесконечномерное линейное пространство над $\mathbb{C}$. Из полученного противоречия следует $k(t,s,\omega) \equiv 0$.

В общем случае рассмотрим эрмитовы операторы вида (1) с ядрами

$$k(t,s,\omega) + \overline{k(s,t,\omega)}, \quad i(k(t,s,\omega) - \overline{k(s,t,\omega)}).$$

Из выше показаного следует $k(t,s,\omega) + \overline{k(s,t,\omega)} = i(k(t,s,\omega) - \overline{k(s,t,\omega)}) = 0$. Отсюда $k(t,s,\omega) \equiv 0$. Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Оператор* T *определенный формулой (1) является циклически компактным.*

Доказательство. Пусть $k(t,s,\omega)$ ядро оператора T. Для каждого $\omega \in \Omega$ положим $k_\omega(t,s) = k(t,s,\omega)$. Тогда п. д. в. $\omega \in \Omega$ функция $k_\omega(t,s)$ принадлежит $L^2(S \times \Omega)$, и п. д. в. $\omega \in \Omega$ интегральный оператор $T_\omega : L^2(S) \to L^2(S)$ определим формулой

$$T_\omega(f_\omega) = \int\limits_S k_\omega(t,s) f_\omega(s)\, dm(s), \quad f_\omega \in L^2(S). \tag{3}$$

Хорошо известно [7], что T_ω компактный оператор п. д. в. $\omega \in \Omega$. Покажем, что $\{T_\omega : \omega \in \Omega\}$ является измеримым расслоением компактных операторов. Так как по теореме 1 ПБК $L^{2,0}(S \times \Omega)$ представляется как измеримое расслоение банаховых пространств $L^2(S)$, то достаточно показать, что если $f \in L^{2,0}(S \times \Omega)$, то класс эквивалентности функции $(s,\omega) \to T_\omega(f_\omega)(s)$ принадлежит $L^{2,0}(S \times \Omega)$, где $f_\omega(s) = f(s,\omega)$. Для $f \in L^{2,0}(S \times \Omega)$ имеем

$$T_\omega(f_\omega)(t) = \int\limits_S k_\omega(t,s) f_\omega(s)\, dm(s) = \int\limits_S k(t,\omega,s) f(s,\omega)\, dm(s) = T(f)(t,\omega)$$

п. д. в. $(t,\omega) \in S\times\Omega$, где $f_\omega(s) = f(s,\omega)$. Это показывает, что $\{T_\omega : \omega \in \Omega\}$ измеримое расслоение компактных операторов и склейка $\{T_\omega : \omega \in \Omega\}$ есть T. Поэтому из [4, теорема 3] вытекает, что T циклически компактный оператор. Теорема 3 доказана.

Теперь напомним определение ∇-альтернативы Фредгольма для операторов в ПБК введенное Кусраевым в [3] (см. также [2]).

Элементы $\{x_1, x_2, ..., x_n\} \subset L^0(\Omega, X)$ называют ∇-*линейно независимыми,* если для любых $\pi \in \nabla$ и $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in L^0$ из $\pi \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k x_k = 0$ вытекает $\pi\alpha_1 = \pi\alpha_2 = ...\pi\alpha_n = 0$.

Пусть $L^0(\Omega, X)^*$ сопряженное пространство к $L^0(\Omega, X)$ в смысле ПБК, т.е. множество всех линейных L^0- ограниченных функционалов на $L^0(\Omega, X)$.

Рассмотрим линейный L^0-ограниченный оператор $A : L^0(\Omega, X) \to L^0(\Omega, X)$, сопряженный оператор $A^* : L^0(\Omega, X)^* \to L^0(\Omega, X)^*$, и однородные уравнения

$$A(x) = 0, \quad A^*(g) = 0,$$

и соответствующее основное уравнение

$$A(x) = y,$$

и сопряженное уравнение

$$A^*(g) = f.$$

Говорят, что для оператора A справедлива ∇ - *альтернатива Фредгольма,* если существует счетное разбиение $\{\pi_n : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ единицы в ∇ такое, что выполнены условия:

1) однородное уравнение $\pi_0 A(x) = 0$ (сопряженное однородное уравнение $\pi_0 A^*(g) = 0$) имеет единственное нулевое решение. Уравнение $\pi_0 A(x) = \pi_0 y$ (соответственно $\pi_0 A^*(g) = \pi_0 f$) разрешимо и имеет единственное решение для всякой $y \in L^0(\Omega, X)$ (соответственно $f \in L^0(\Omega, X)^*$),

2) для любого $n \in \mathbb{N}$ однородные уравнения $\pi_n A(x) = 0$ и $\pi_n A^*(g) = 0$ имеют по n ∇ -линейно независимых решений $x_{1,n}, ..., x_{n,n}$ и $g_{1,n}, ..., g_{n,n}$;

3) основное уравнение (сопряженное уравнение) разрешимо в том и только в том случае, если $\pi_n g_{i,n}(y) = 0, n \in \mathbb{N}, i \leq n$ ($\pi_n f_{i,n}(x) = 0, n \in \mathbb{N}, i \leq n$ соответственно);

4) общее решение основного уравнения имеет вид

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \pi_n (x_n^* + \sum_{i=1}^{n} c_{i,n} x_{i,n}),$$

а общее решение сопряженного уравнения –

$$g = \sum_{n=1}^{\infty} \pi_n (g_n^* + \sum_{i=1}^{n} c_{i,n} g_{i,n}),$$

где x_n^* (соответственно g_n^*) – частное решение уравнения $\pi_n A(x) = y$ (соответственно $\pi_n A^*(g) = f$), где $c_{i,n} \in L^0, n \in \mathbb{N}, i \leq n$.

Известно [3, теорема 4.3.12], что когда оператор A циклически компактен, то для оператора $I - A$ справедлива ∇-альтернатива Фредгольма. Поэтому из теорем 2 и теорем 4.3.12 из [3] получим

Теорема 4. *Если T – оператор, определенный формулой (1), то для оператора $I - T$ справедлива ∇-альтернатива Фредгольма.*

Говорят, что модуль E над L^0 *конечнопорожденный,* если в E существует конечное число элементов $x_1, x_2, ..., x_n$ таких, что любое $x \in E$ можно представить в виде $x = \alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n$, где $\alpha_i \in L^0, i = \overline{1, n}$. Модуль E над L^0 называется σ - *конечномерным,* если существует такое разбиение $(\pi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ единицы в ∇, что каждый модуль $\pi_n E$ конечнопорожденный (см. [5]).

Из теоремы 4 получим следующее:

Следствие. *Пусть T – оператор, определенный формулой (1) и $\lambda \in L^0$, $\lambda(\omega) \neq 0$ п. д. в. $\omega \in \Omega$. Тогда* $\ker(\lambda I - T) = \{f \in L^{2,0}(S \times \Omega) : T(f) = \lambda f\}$ *есть σ -конечномерный модуль над L^0.*

Литература

1. Гутман. А. Е. Банаховы расслоения в теории решеточно-нормированных пространств // Тр. Института математики СО РАН. 1995, Т 29, 63-211 с

2. Кусраев А. Г. Мажорируемые операторы. М.: Наука, 2003, 619 с.

3. Кусраев А. Г. Векторная двойственность. Новосибирск: Наука, 1985, 256 с.

4. Ganiev I. G., Kudaybergenov K. K. Measurable bundles of compact operators // Methods of func. an. and top., 2001, v 7, №4. pp. 1-6 .

5. Ганиев И. Г., Кудайбергенов К. К., Конечномерные модули над кольцом измеримых функций // Узб. матем. журн., 2004, №4, С. 3-9.

6. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1984. 752 с

7. Коротков А. Интегралные операторы. М.: Наука, 1985, 256 с.

Институт математики
им. В.И.Романовского АН РУз

Дата поступления
10.10.05

Uzbek Mathematical
Journal, 2006,№1, pp.58-64

УДК 517.95

Численно-аналитический метод для решения импульсных систем с разделенными краевыми условиями

О.О.Курбанбаев

Ushbu maqolada chegaraviy shartlari ajraladigan impuls ta'sirli differensial tenglamalar sistemasi uchun yechimning mavjudligini tekshirishning konstruktiv sonli-analitik va taqribiy yechimni qurish usullari keltirilgan.
Izlanayotgan taqribiy yechimni qurishning effektiv algoritmi va xatolikni baholovchi konstruktiv formulalar keltirilgan.

In this paper presents constructive numerical-analytic method of investigating the existence and approximate construction of solutions for nonlinear impulse systems of differential equations with dividing boundary conditions.
Effective algorithm of approximate construction of the sought-for solutions are suggested, constructive formulas for error estimation are obtained.

Численно–аналитический метод последовательных приближений [1] получил ряд обобщений и применений к краевым задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений [2,4].

В данной работе предлагается и обосновывается одна итерационная схема этого метода для импульсных систем с разделяющимся краевыми условиями [3,5].

Рассмотрим краевую задачу с импульсным воздействием вида

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \quad t \neq \tau_i, \quad i = 1,2,...,N \tag{1}$$

$$\Delta x = x(\tau_i + 0) - x(\tau_i - 0) = h_i \tag{2}$$

$$x_i(0) = d_i, x_j(T) = d_j, i = 1,2,..,k, j = k+1,...,n, \tag{3}$$

где $x, f, h_i \in E_n, i = \overline{1,N}, h_{i+1} - h_i = h = \text{const}$.

Предположим, что вектор-функция $f(t,x)$ определена и непрерывна в области

$$(t,x) \in [0,T] \times D, \tag{4}$$

где D замкнутая ограниченная область E_n. Кроме того, правая часть системы (1) удовлетворяет условию ограниченности вектором M и условию Липшица с матрицией K:

$$|f(t,x)| \leq M, \quad |f(t,x'') - f(t,x')| \leq K|x'' - x'| \tag{5}$$

для всех $t \in [0,T]$; $x, x', x'' \in D$. Пусть кроме того, выполняются дополнительные условия, а именно:

1) Множество D_f точек $x_0(t,x_0,x_T) = (1 - \frac{t}{T})d(x_0) + \frac{t}{T}d(x_T) \in D$ вместе со своей $\frac{1}{2}MT$–окрестностью, не пусто:

$$D_f \neq \emptyset, \tag{6}$$

где

$$d(x_0) = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ ... \\ d_k \\ x_{k+1(0)} \\ ... \\ x_{n(0)} \end{pmatrix}, \quad d(x_T) = \begin{pmatrix} x_1(T) \\ x_2(T) \\ ... \\ x_k(T) \\ d_{k+1} \\ ... \\ d_n \end{pmatrix}$$

2) все собственные значения $\lambda_i(Q)$ матрицы $Q = \frac{T}{\pi}K$ лежат в круге единичного радиуса:

$$\lambda_i(Q) < 1, i = 1, 2, ..., n \tag{7}$$

При таких предположениях построим последовательность функций $x_m(t,x_0,x_T)$, удовлетворяющих импульсным условиям (2) и краевым условиям (3) и равномерно сходящуюся к точному решению задачи (1)-(3). Оценим также отклонение приближенного решения от точного, связав вопрос разрешимости краевой задачи (1)-(3) с существованием нулей определенной вектор-функции, зависящей от $x_m(t,x_0,x_T)$. При этом мы используем функцию Хевисайда, определяемую по формуле

$$\chi(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

и функцию Дирака $\delta(t)$, связанную с функцией $\chi(t)$ формулой

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(s)ds = \chi(t) \tag{8}$$

Используя этих функций, систему (1)-(3) можно переписать в виде:

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) + \sum_i h_i \delta(t-\tau_i) \tag{9}$$

$$x_i(0) = d_i, x_j(T) = d_j \ i = \overline{1,k}, j = \overline{k+1,n} \tag{10}$$

Теперь построим последовательность функций вида

$$x_{m+1}(t,x_0,x_T) = (1-\frac{t}{T})d(x_0) + \frac{t}{T}d(x_T) + \int\limits_0^t \{f(s,x_m(s,x_0,x_T)) +$$

$$+\sum_i h_i\delta(s-\tau_i) - \frac{1}{T}\int\limits_0^T \left[f(s,x_m(s,x_0,x_T)) + \sum_i h_i\delta(s-\tau_i)\right] ds\} ds \tag{11}$$

являющихся приближенным решением рассматриваемой краевой задачи (1)-(3) или эквивалентной (9), (10) при выбранных параметров x_0 и x_T, где $x_0 = (x_{k+1}(0), x_{k+2}(0), ..., x_n(0))$, $x_T = (x_1(T), x_2(T), ..., x_k(T))$.

Используя формулу (8), последовательность функций (11) можно переписать в виде

$$x_{m+1}(t,x_0,x_T) = (1-\frac{t}{T})d(x_0) + \frac{t}{T}d(x_T) + \int\limits_0^t [f(s,x_m(s,x_0,x_T)) -$$

$$-\frac{1}{T}\int\limits_0^T f(s,x_m(s,x_0,x_T))ds]ds + \sum_{\tau_i<t} h_i - \frac{t}{T}\sum_{i=1}^N h_i, \tag{12}$$

$$m = 0,1,2,...$$

Проверка показывает, что все члены последовательности функций (12) удовлетворяют краевым условиям

$$x_m(0,x_0,x_T) = d(x_0), \ \ x_m(T,x_0,x_T) = d(x_T), m = 0,1,2,..., \tag{13}$$

т.е. удовлетворяют краевым условиям (10), где

$$x_0(t,x_0,x_T) = (1-\frac{t}{T})d(x_0) + \frac{t}{T}d(x_T)$$

Справедливо следующее утверждение сходимости последовательных приближений $x_m(t,x_0,x_T)$ вида (12).

Теорема 1. *Предположим, что функция $f(t,x)$ определена и непрерывна в области (4) и выполняются условия (5), (6) и (7).*

Тогда последовательность функций $x_m(t,x_0,x_T)$ вида (12), удовлетворяющих условиям (13), равномерно сходится при $m\to\infty$ относительно $t\in[0;T]$, $x_0(t,x_0,x_T)\in D_f$ к предельной функции $x^*(t,x_0,x_T)$. При этом $x^*(t,x_0,x_T)$, проходящая при $t=0$ через точку $x^*(0,x_0,x_T)=d(x_0)$ и при $t=T$ через точку $x^*(T,x_0,x_T)=d(x_T)$, является решением интегрального уравнения

$$x(t,x_0,x_T)=(1-\frac{t}{T})d(x_0)+\frac{t}{T}d(x_T)+\int\limits_0^t[f(s,x(s,x_0,x_T))-$$

$$-\frac{t}{T}\int\limits_0^T f(s,x(s,x_0,x_T))ds]ds+\sum_{\tau_i<t}h_i-\frac{t}{T}\sum_{i=1}^N h_i \qquad (14)$$

Для отклонения $x^*(t,x_o,x_T)$ от $x_m(t,x_0,x_T)$ для всех $m=1,2,...$ имеет место оценка

$$|x^*(t,x_0,x_T)-x_m(t,x_0,x_T)|\le Q^m(E-Q)^{-1}(M+\frac{1}{h}H)\tilde{\alpha}_1(t) \qquad (15)$$

где $\tilde{\alpha}_1(t)=\frac{\pi}{3}\alpha_1(t)=\frac{2\pi}{3}t(1-\frac{t}{T})$.

Доказательство. Сначала покажем, что при $x_0(t,x_0,x_T)=(1-\frac{t}{T})d(x_0)+\frac{t}{T}d(x_T)\in D_f$ все функции $x_m(t,x_0,x_T)$ определяемые по формуле (12) невыходят из области D, т.е. $x_m(t,x_0,x_T)\in D$. Действительно, из (12) при $m=0$ имеем:

$$|x_1(t,x_0,x_T)-x_0(t,x_0,x_T)|\le(1-\frac{t}{T})\int\limits_0^t|f(s,x_0(s,x_0,x_T))|ds+$$

$$+\frac{t}{T}\int\limits_t^T|f(s,x_0(s,x_0,x_T))|ds+(1-\frac{t}{T})\sum_{\tau_i<t}|h_i|+\frac{t}{T}\sum_{\tau_i>t}|h_i|\le$$

$$\le M\left[(1-\frac{t}{T})\int\limits_0^t ds+\frac{t}{T}\int\limits_t^T ds\right]+H\left[(1-\frac{t}{T})\sum_{\tau_i<t}1+\frac{t}{T}\sum_{\tau_i>t}1\right]\le$$

$$\le M\alpha_1(t)+H\left[(1-\frac{t}{T})\frac{N+1}{T}t+\frac{t}{T}\cdot\frac{N+1}{T}(T-t)\right]=$$

$$=M\alpha_1(t)+H\cdot\frac{1}{h}\alpha_1(t)\le\frac{T}{2}(M+\frac{1}{h}H). \qquad (16)$$

т.е. $x_1(t,x_0,x_T)\in D$ при $x_0(t,x_0,x_T)\in D_f$, где

$$\alpha_1(t)=(1-\frac{t}{T})\int\limits_0^t ds+\frac{t}{T}\int\limits_0^t ds=2t(1-\frac{t}{T}),\ H=\begin{pmatrix} h^1\\ h^2\\ ...\\ h^n\end{pmatrix},\quad h^k=\max_{i=\o 1,N}|h_i^k|.$$

По индукции можно получить, что для всех $m\geq 1$, любых $t\in[0;T]$ и $x_0(t,x_0,x_T)\in D_f$ все функций $x_m(t,x_0,x_T)$ не выходят из области D.

Для установления сходимости последовательности $x_m(t,x_0,x_T)$ используем признак сходимости Коши, оценивая при этом разность $|x_{m+j}(t,x_0,x_T)-x_m(t,x_0.x_T)|$ при любом $j\geq 1$.

Согласно (5) и (12), для всех $m\geq 1$ и $t\in[0;T]$ имеем

$$|x_{m+1}(t,x_0,x_T)-x_m(t,x_0,x_T)|\leq K\left[(1-\frac{t}{T})\int\limits_0^t|x_m(s,x_0,x_T)-\right.$$

$$\left.-x_{m-1}(t,x_0,x_T)|ds+\frac{t}{T}\int\limits_t^T|x_m(s,x_0,x_T)-x_{m-1}(s,x_0,x_T)|ds\right].$$

Из последнего неравенства при $m=1$ имеем

$$|x_2(t,x_0,x_T)-x_1(t,x_0,x_T)|\leq K\left[(1-\frac{t}{T})\int\limits_0^t|x_1(s,x_0,x_T)-\right.$$

$$\left.-x_0(t,x_0,x_T)|ds+\frac{t}{T}\int\limits_t^T|x_1(s,x_0,x_T)-x_0(s,x_0,x_T)|ds\right]\leq$$

$$\leq K(M+\frac{1}{h}H)\left[(1-\frac{t}{T})\int\limits_0^t\alpha_1(s)ds+\frac{t}{T}\alpha_1(s)ds\right]=K(M+\frac{1}{h}H)\alpha_2(t),$$

где $\alpha_2(t)=(1-\frac{t}{T})\int\limits_0^t\alpha_1(s)ds+\frac{t}{T}\int\limits_t^T\alpha_1(s)ds$.

Аналогично, методом математической индукции установливаем, что при всех $t\in[0;T],m=1,2,...$

$$|x_{m+1}(t,x_0,x_T)-x_m(t,x_0,x_T)|\leq K^m(M+\frac{1}{h}H)\alpha_{m+1}(t)\qquad(17)$$

где $\alpha_{m+1}(t)=(1-\frac{t}{T})\int\limits_0^t\alpha_m(s)ds+\frac{t}{T}\int\limits_t^T\alpha_m(s)ds$.

Принимая во внимание оценку [2]

$$\alpha_{m+1}(t) \leq \frac{T^m}{\pi^m}\tilde{\alpha}_1(t), \tilde{\alpha}_1(t) = \frac{\pi}{3}\alpha_1(t)$$

Неравенство (17) перепишем в виде

$$|x_{m+1}(t, x_0, x_t - x_m(t, x_0, x_T)| \leq \left(\frac{T}{\pi}K\right)^m \left(M + \frac{1}{h}H\right)\tilde{\alpha}_1(t) =$$

$$= Q^m \left(M + \frac{1}{h}H\right)\tilde{\alpha}_1(t) \qquad (18)$$

Тогда из соотношения

$$x_{m+j}(t, x_0, x_T) - x_m(t, x_0, x_T) = \sum_{i=0}^{j-1}(x_{m+j+1}(t, x_0, x_T) - x_{m+j}(t, x_0, x_T))$$

в силу неравенства (18) для всех $j \geq 1$ получим оценку

$$|x_{m+j}(t, x_0, x_T) - x_m(t, x_0, x_T)| \leq \tilde{\alpha}_1(t)\sum_{i=0}^{j-1} Q^{m+i}(M + \frac{1}{h}H) =$$

$$= \tilde{\alpha}_1(t) Q^m \sum_{i=0}^{j-1} Q^i (M + \frac{1}{h}H) \qquad (19)$$

Учитывая предположение (7), имеем

$$\sum_{i=0}^{j-1} Q^i \leq \sum_{i=0}^{\infty} Q^i = (E - Q)^{-1}, \lim_{m\to\infty} Q^m = 0 \qquad (20)$$

Тогда на основании соотношений (19), (20) можно заключить, что при $m \to \infty$ последовательность функции $\{x_m(t, x_0, x_T)\}$ равномерно сходится по $(t, x_0(t, x_0, x_T)) \in [0; T] \times D_f$, т.е.

$$\lim_{m\to\infty} x_m(t, x_0, x_T) = x^*(t, x_0, x_T) \qquad (21)$$

Более того, так как функций $x_m(t, x_0, x_T)$, $m = 1, 2, ...$, удовлетворяют краевым условиям (13), то предельная функция $x^*(t, x_0, x_T)$ также удовлетворяет им.

Относительно отклонения $x^*(t, x_0, x_T)$ от $x_m(t, x_0, x_T)$ из соотношения (19) при $j \to \infty$ для всех m и $t \in [0; T]$ имеем оценку (15).

Если в равенстве (12) перейти к пределу при $m \to \infty$ и принять во внимание соотношение (21), то функция $x^*(t, x_0, x_T)$ будет решением интегрального уравнения (14).

С другой стороны, дифференциальное уравнение с импульсным воздействием (1), (2) или (9) эквивалентно уравнению

$$x(t) = x_0 + \int\limits_0^t f(s, x(s))ds + \sum_{\tau_j < t} h_i.$$

Следовательно проблема решения краевой задачи (1)-(3) или(9), (10) свелась к нахождению такого начального значения
$(x_0, x_T) = \{x_1(T), ..., x_q(T), x_{q+1}(0), ..., x_n(0)\}$ при котором вектор-функция

$$\Delta(x_0, x_T) = \frac{1}{T}[d(x_T) - d(x_0)] - \frac{1}{T}\int\limits_0^T f(s, x^*(s, x_0, x_T))ds - \sum_{i=1}^{N} h_i$$

обращается в нуль.

Литература

1. Самойленко А.М., Ронто Н.И. Численно-аналитические методы исследования периодических решений. Киев: Вища шк., 1976. 180 с.

2. Самойленко А.М., Ронто Н.И. Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. Киев: Наукова думка, 1992. 280 с.

3. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. Киев: Вища шк., 1987.

4. Курбанбаев О.О. Численно-аналитический метод для задачи с двухточечными нелинейными краевыми условиями. // Узб.мат.журн. 1997, №4.

5. Курбанбаев О.О. Численно-аналитический метод для краевых задач с разделяющимися краевыми условиями. // Узб.мат.журн. 2001, №3-4.

Каракалпакский государственный
университет им. Бердаха

Дата поступления
19.01.04

Uzbek Mathematical
Journal, 2006,№1, pp.65-71

УДК 517.946

Регуляризация задач на собственные значения линейной оператор-функции в случае присутствия обобщенных жордановых цепочек

Д.Г.Рахимов

1960 yilda professor M.K.Govurin tomonidan kiritilgan yolg‘on to‘lg‘anish usulini qo‘llagan holda chiziqli operator funksiyaning xos sonlarini, mos xos vektorlarini va umumlashgan jordan zanjirlari elementlarini topish masalasi ko‘rilgan.

We apply the pseudoperturbation method introduced in 1960 by professor M.K.Gavurin, to various iterational and perturbational methods for sharpening of approximately givens eigenvalues, eigenvectors and Jordan chains of the linear operator-functions.

I. Пусть $X, Y-$ некоторые банаховы пространства, и пусть $A, B \in L(X,Y)$, для которых λ искомое собственное значение, являющееся изолированной фредгольмовской точкой дискретного спектра с $Ker\,(A-\lambda B) = \{\varphi\}\,, Ker*(A-\lambda B) = \{\psi\}$ и обобщенными жордановыми цепочками длины p, т.е.

$$\begin{gathered}(A-\lambda B)\,\varphi^{(s)} = B\varphi^{(s-1)},\ (A^*-\lambda B^*)\,\psi^{(s)} = B^*\psi^{(s-1)},\\ s=2,\dots,p,\quad \varphi^{(1)}=\varphi,\ \psi^{(1)}=\psi, \qquad (1)\\ \left(\psi, B\varphi^{(s)}\right)=0,\ s=1,\dots,p-1,\ k=\left(\psi,B\varphi^{(p)}\right)\neq 0,\\ K=\det\left\|\left(\psi^{(i)},B\varphi^{(p+1-j)}\right)\right\|\neq 0.\end{gathered}$$

Предположим, что нам известны достаточно хорошие ε -приближения $\varphi_0^{(i)}$, и $\psi_0^{(i)}$, соответственно к $\varphi^{(i)}$ и $\psi^{(i)}$, т.е. $\left\|\varphi^{(i)}-\varphi_0^{(i)}\right\|\leq\varepsilon$, $\left\|\psi^{(i)}-\psi_0^{(i)}\right\|\leq \varepsilon,\ i=1,\dots,p.$

В силу малости ε $k_0=\left(\psi_0,B\varphi_0^{(p)}\right)\neq 0$, $K_0=\det\left\|\left(\psi_0^{(i)},B\varphi_0^{(p+1-j)}\right)\right\|\neq 0$, поэтому приближение к λ можем выбрать в виде

$$\lambda_0=\frac{\left(\psi_0,A\varphi_0^{(p)}\right)-\left(\psi_0,B\varphi_0^{(p-1)}\right)}{\left(\psi_0,B\varphi_0^{(p)}\right)}.$$

Тогда биортогональные элементы к φ_0 и ψ_0 можно построить следующим образом:

$$\gamma_0^{(i)} = \frac{1}{K_0}\sum_{s=1}^{p} K_{si}^0 B^*\psi_0^{(s)}, \quad z_0 = \frac{1}{k_0}B\varphi_0^{(p)},$$

где K_{si}^0 -алгебраическое дополнение элемента $k_{si}^0 = \left(\psi_0^{(s)}, B\varphi_0^{(p+1-i)}\right)$ в определителе K_0

В силу выбора λ_0 невязки $\sigma_0 = (A-\lambda_0 B)\,\varphi_0$, $\tau_0 = (A*-\lambda_0 B*)\,\psi_0$ будут ортогональны к ψ_0 и φ_0 соответственно: $(\psi_0,\sigma_0)=0$, $(\tau_0,\varphi_0)=0$. Теперь вычислив остальные невязки $\sigma_0^{(i)} = (A-\lambda_0 B)\,\varphi_0^{(i)} - B\varphi_0^{(i-1)}$, $i = 2,\ldots,p$, построим оператор ложного возмущения

$$D_0 x = \sum_{j=1}^{p}\left(\gamma_0^{(p+1-j)}, x\right)\sigma_0^{(j)}, \quad \|D_0\| = O\left(\max_j\left\|\sigma_0^{(j)}\right\|\right),$$

для которого $D_0\varphi_0^{(s)} = \sigma_0^{(s)}$, $s=1,\ldots,p$. Теперь

$$(A-\lambda_0 B - D_0)\,\varphi_0 = 0, \quad (A-\lambda_0 B - D_0)\,\varphi_0^{(s+1)} = B\varphi_0^{(s)}, \quad s=1,\ldots,p-1.$$

Используя лемму Шмидта (см. [1]) равенства (1) приведем к системам:

$$\varphi = \left[I+\Gamma_0\left((\lambda_0-\lambda)\,B + D_0\right)\right]^{-1}\varphi_0, \quad 1 = \left(\gamma_0^{(p)},\varphi\right), \tag{2}$$

$$\varphi^{(s)} = \sum_{l=0}^{s-1}\left[I+\Gamma_0\left((\lambda_0-\lambda)\,B + D_0\right)\right]^{-1}\left(\Gamma_0 B\left[I+\Gamma_0\left((\lambda_0-\lambda)\,B + D_0\right)\right]^{-1}\right)^{l}\varphi_0,$$

$$1 = \left(\gamma_0^{(p)},\varphi^{(s)}\right), \quad s=2,\ldots,p, \tag{3}$$

где оператор $\Gamma_0 = \left[A-\lambda_0 B - D_0 + \left(\gamma_0^{(p)},\cdot\right)z_0\right]^{-1}$ существует в силу достаточной близости начальных приближений. Подставляя φ и $\varphi^{(s)}$ в равенства (2) и (3), получаем уравнения для определения λ:

$$f_1(t) \equiv \left(\gamma_0^{(p)}, \left\{I - \left[I+\Gamma_0\left((\lambda_0-t)\,B + D_0\right)\right]^{-1}\right\}\varphi_0\right) = 0, \tag{4}$$

$$f_s(t) \equiv \left(\gamma_0^{(p)}, \left[I+\Gamma_0\left((\lambda_0-t)\,B + D_0\right)\right]^{-1}(\Gamma_0 B[I+\right.$$

$$\left.+\Gamma_0\left((\lambda_0-t)\,B + D_0\right)]^{-1})^{s-1}\varphi_0\right) = 0, \quad s=2,\ldots,p, \tag{5}$$

причем $-\frac{1}{s!}\frac{d^s f_1(t)}{dt^s} = f_{s+1}(t)$, $s=1,\ldots,p-1$, и $-\frac{1}{p!}\frac{d^p f_1(\lambda)}{dt^p} = f_{p+1}(\lambda)$, т.е. λ является p -кратным корнем (4).

Собственное число λ можно найти теперь итерационным методом Стеффенсена [2]:

$$\lambda_{m+1} = \lambda_m - p\left[f_1\left(\lambda_m, \psi\left(\lambda_m\right)\right)\right]^{-1} f_1\left(\lambda_m\right), \quad m = 0, 1, 2, \ldots, \qquad (6)$$

где $\psi\left(t\right) = t - f_1\left(t\right)$. Каждый шаг итерационного процесса потребует решение двух линейных уравнений. Действительно, т.к.

$$f_1\left(\lambda_m, \psi\left(\lambda_m\right)\right) = \frac{f_1\left(\lambda_m\right) - f_1\left[\psi\left(\lambda_m\right)\right]}{f_1\left(\lambda_m\right)},$$

то реализация (6) сводится к вычислению значений $f_1\left(\lambda_m\right)$ и $f_1\left[\psi\left(\lambda_m\right)\right]$:

$$f\left(\lambda_m\right) = 1 - \left(\gamma_0^{(p)}, x^{(m)}\right), \quad f\left(\psi\left(\lambda_m\right)\right) = 1 - \left(\gamma_0^{(p)}, y^{(m)}\right),$$

где элементы $x_0^{(m)}$, $y_0^{(m)}$ определяются из уравнений

$$\left[A - \lambda_m B + \left(\gamma_0^{(p)}, \cdot\right) z_0\right] x^{(m)} = z_0, \quad \left[A - \psi\left(\lambda_m\right) B + \left(\gamma_0^{(p)}, \cdot\right) z_0\right] y^{(m)} = z_0.$$

Элементы жордановой цепочки определяются из уравнений

$$\left[A - \lambda B + \left(\gamma_0^{(p)}, \cdot\right) z_0\right] x_1 = z_0,$$

$$\left[A - \lambda B + \left(\gamma_0^{(p)}, \cdot\right) z_0\right] x_s = B x_{s-1}, \quad s = 2, \ldots, p,$$

в следующем виде $x_1 = \varphi$, $\varphi^{(s)} = x_1 + x_2 + \cdots + x_s$.

Так как собственное число λ является простым корнем уравнения $f_p\left(t\right) = 0$, то для его нахождения можно применить обычный метод Стеффенсена [2], на каждом шаге которого нужно решать $2p$ линейных уравнений. Итерационный процесс реализуется вычислением значений

$$f_p\left(\lambda_m\right) = \left(\gamma_0^{(p)}, x_p\right), \quad f_p\left(\psi\left(\lambda_m\right)\right) = \left(\gamma_0^{(p)}, y_p\right),$$

где элементы x_p, y_p определяются из уравнений

$$\left[A - \lambda_m B + \left(\gamma_0^{(p)}, \cdot\right) z_0\right] x_p = z_0, \quad \left[A - \psi\left(\lambda_m\right) B + \left(\gamma_0^{(p)}, \cdot\right) z_0\right] y_p = z_0.$$

Замечание. *Элементы $\left\{\psi^{(i)}\right\}_1^p$ определяются на основе тех же начальных приближений, введением оператора ложного возмущения и аналогичными построениями для сопряженной оператор-функции.*

II. Теперь пусть $Ker(A-\lambda B)=\left\{\varphi_1^{(1)},\ldots,\varphi_n^{(1)}\right\}$, $Ker*(A-\lambda B)=\left\{\psi_1^{(1)},\ldots,\psi_n^{(1)}\right\}$ и $\left\{\varphi_i^{(s)}\right\}_1^{p_i}$, $\left\{\psi_i^{(s)}\right\}_1^{p_i}$, $i=1,2,\ldots,n$ - полный ОЖН [1], т.е.

$$(A-\lambda B)\,\varphi_i^{(s)}=B\varphi_i^{(s-1)},\ (A*-\lambda B*)\,\psi_i^{(s)}=B*\psi_i^{(s-1)},\ s=\overline{1,p_i};\ i=\overline{1,n},$$

$$k=\det\left\|\left(\psi_i^{(1)},B\varphi_j^{(p_j)}\right)\right\|\neq 0,\ K=\det\left\|\left\|\left(\psi_i^{(l)},B\varphi_j^{(p_j+1-s)}\right)\right\|\right\|\neq 0, \tag{7}$$

который согласно [3] выбирается так, что

$$\left(\psi_i^{(1)},B\varphi_j^{(p_j+1-s)}\right)=\delta_{ij}\delta_{ls}.$$

Предполагаем известными некоторые приближения $\varphi_{i0}^{(s)}$, $\psi_{i0}^{(s)}$ и Λ к $\varphi_i^{(s)}$, $\psi_i^{(s)}$, λ: $\left\|\varphi_i^{(s)}-\varphi_{i0}^{(s)}\right\|\leq\varepsilon$, $\left\|\psi_i^{(s)}-\psi_{i0}^{(s)}\right\|\leq\varepsilon$, $|\lambda-\Lambda|\leq\varepsilon$.

Согласно теореме Руше и в силу неравенства

$$\left|g_{ij}^{(0)}(t)\right|\leq\varepsilon\left[\left(\|A-tB\|+\|B\|\right)\left\|\varphi_{ij}^{(0)}\right\|+\left\|(A-tB)\,\varphi_j^{(p_j)}\right\|+\left\|B\varphi_j^{(p_j-1)}\right\|\right]$$

Уравнение

$$f^{(0)}(t)\equiv\det\left\|\left(\psi_{i0}^{(1)},(A-tB)\,\varphi_{j0}^{(p_j)}-B\varphi_{j0}^{(p_j-1)}\right)\right\|=0 \tag{8}$$

в окрестности Λ имеет n близких по модулю корней, приближенное значение одного из которых можно выбрать в качестве λ_0. В силу малости ε соответствующие величины k_0 и K_0 также отличны от нуля и можно определить элементы

$$\gamma_{i0}^{(\nu)}=\frac{1}{K_0}\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_\mu}K_{j\nu\mu i}^{0}B*\psi_{\mu0}^{(j)},\quad z_{i0}^{(1)}=\frac{1}{k_0}\sum_{\mu=1}^{n}K_{i\mu}^{0}B\varphi_{\mu0}^{(p_\mu)}$$

($K_{j\nu\mu i}^0$ и $K_{i\mu}^0$ алгебраические дополнения элементов $k_{j\nu\mu i}^0=\left(\psi_{\mu0}^{(j)},B\varphi_{i0}^{(p_i+1-\nu)}\right)$ и $k_{i\mu}^0=\left(\psi_{i0}^{(1)},B\varphi_{\mu0}^{(p_\mu)}\right)$ соответственно в определителях K_0 и k_0), для которых

$$\left(\gamma_{i0}^{(\nu)},\varphi_{j0}^{(p_j+1-\mu)}\right)=\delta_{ij}\delta_{\nu\mu},\quad\left(\psi_{i0}^{(1)},z_{j0}^{(1)}\right)=\delta_{ij}.$$

Вычислив невязки

$$\sigma_{i0}^{(1)}=(A-\lambda_0B)\,\varphi_{i0}^{(1)},\quad\sigma_{i0}^{(s)}=(A-\lambda_0B)\,\varphi_{i0}^{(s)}-B\varphi_{i0}^{(s-1)},$$

$$s=2,\ldots,p_i;\quad i=1,\ldots,n,$$

введем оператор ложного возмущения

$$D_0 x = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p_i} \left(\gamma_{i0}^{(p_i+1-j)}, x \right) \sigma_{i0}^{(j)}, \quad \|D_0\| = O\left(\max_{i,s} \left\| \sigma_{i0}^{(s)} \right\| \right),$$

обладающий следующими свойствами

$$D_0 \varphi_{i0}^{(s)} = \sigma_{i0}^{(s)}, \quad s = 1, \dots, p_i; \quad i = 1, \dots, n,$$

$$(A - \lambda_0 B - D_0)\, \varphi_{i0}^{(1)} = 0, \quad (A - \lambda_0 B - D_0)\, \varphi_{i0}^{(s)} = B \varphi_{i0}^{(s-1)}.$$

Для упрощения рассуждения далее предполагаем, что $p_1 \le p_2 \le \dots \le p_n$.

Используя лемму Шмидта равенство $(A - \lambda B)\, \varphi = 0$ сводим к системе

$$\varphi^{(1)} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^{(1)} \left[I + \Gamma_0 \left((\lambda_0 - \lambda) B + D_0 \right) \right]^{-1} \varphi_{i0}^{(1)}, xi_i^{(1)} = \left(\gamma_{i0}^{(p_i)}, \varphi^{(1)} \right),$$

где оператор $\Gamma_0 = \left[A - \lambda_0 B - D_0 + \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\gamma_{i0}^{(p_i)}, \cdot \right) z_{i0}^{(1)} \right]^{-1}$ существует согласно общей теории возмущений. Так как (7) при $t = \lambda$ имеет n линейно независимых решений, ранг матрицы системы уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} \xi_j^{(1)} l_{ij} \left(\lambda - \lambda_0 \right) = 0, \text{ где } \; l_{ij} \left(t - \lambda_0 \right) =$$

$$\left(\gamma_{i0}^{(1)}, \left\{ I - \left[I + \Gamma_0 \left((\lambda_0 - t) B + D_0 \right) \right]^{-1} \right\} \varphi_{i0}^{(1)} \right),$$

равен нулю и λ является общим корнем уравнений

$$l_{ij} \left(t - \lambda_0 \right) = 0, \quad i, j = 1, \dots, n. \tag{9}$$

Следовательно, $\xi_j^{(1)}$ произвольны и можно положить
$\varphi_i^{(1)} = \left[I + \Gamma_0 \left((\lambda_0 - \lambda) B + D_0 \right) \right]^{-1} \varphi_{i0}^{(1)}$.
Применяя туже самую методику к уравнениям:

$$(A - \lambda B)\, \varphi_i^{(s)} = B \varphi_i^{(s-1)}, \; s = 2, \dots, p_i,$$

приходим к соотношениям:

$$l_{ij,s-1} \left(\lambda - \lambda_0 \right) \equiv \left(\gamma_{i0}^{(p_i)}, \left[I + \Gamma_0 \left((\lambda_0 - \lambda) A + D_0 \right) \right]^{-1} (\Gamma_0 A [I + \right.$$

$$\left. \Gamma_0 \left((\lambda_0 - \lambda) B + D_0 \right)]^{-1})^{s-1} \varphi_{j0}^{(1)} \right) = 0, \tag{10}$$

где $j = k+1, \ldots, n$, если $s > p_k$ и $j = 1, \ldots, n$, если $s < p_1$. Легко убедиться в справедливости соотношений

$$-\frac{1}{s!}\frac{d^s l_{ij}\left(t-\lambda_0\right)}{dt^s} = l_{ijs}\left(t-\lambda_0\right), \; s \le p_j, \tag{11}$$

причем $l_{ij,p_j}\left(\lambda-\lambda_0\right) \ne 0$. Применяя (11), можно установить, что для функции

$$f(t) = \det\left\|l_{ij}\left(t-\lambda_0\right)\right\| \tag{12}$$

$t=\lambda$ является $p_1+\cdots+p_n$ - кратным корнем, т.к. $\frac{d^s f(\lambda)}{dt^s} = 0$ и $\frac{d^{p_1+\cdots+p_n} f(\lambda)}{dt^{p_1+\cdots+p_n}} = \det\left\|\frac{d^{p_j} l_{ij}(\lambda-\lambda_0)}{dt^{p_j}}\right\| \ne 0$, поскольку при достаточно малых ε

$$\frac{d^{p_j} l_{ij}(0)}{dt^{p_j}} = -p_j!\left[k_{ij}^0 + \left(\gamma_{i0}^{(p_i)}, \Gamma_0 B\varphi_{j0}^{(p_j)}\right) - \left(\psi_{i0}^{(1)}, B\varphi_{j0}^{(p_j)}\right)\right] + O\left(\|D_0\|\right) \ne 0.$$

Следовательно, для разыскания λ можно применить к уравнению (12) метод Стеффенсена (6) с множителем $p_1+\cdots+p_n$ вместо p. Построение итерационного процесса (6) сводится к вычислению значений

$$f\left(\lambda_m\right) = \det\left\|l_{ij}\left(\lambda_m-\lambda_0\right)\right\|, \quad l_{ij}\left(\lambda_m-\lambda_0\right) = 1 - \left(\gamma_{i0}^{(p_i)}, x_j^{(m)}\right),$$

$$f\left(\psi\left(\lambda_m\right)\right) = \det\left\|l_{ij}\left(\psi\left(\lambda_m\right)-\lambda_0\right)\right\|, \quad l_{ij}\left(\psi\left(\lambda_m\right)-\lambda_0\right) = 1 - \left(\gamma_{i0}^{(p_i)}, y_j^{(m)}\right),$$

т.е. к решению $2n$ линейных уравнений

$$\left[A - \lambda_m B + \sum_{i=1}^{n}\left(\gamma_{i0}^{(p_i)}, \cdot\right) z_{i0}^{(1)}\right] x_j^{(m)} = z_{j0}^{(1)},$$

$$\left[A - \psi\left(\lambda_m\right) B + \sum_{i=1}^{n}\left(\gamma_{i0}^{(p_i)}, \cdot\right) z_{i0}^{(1)}\right] y_j^{(m)} = z_{j0}^{(1)}, \; j = 1\ldots, n.$$

Затем отвечающие собственному значению λ элементы ОЖЦ определяются из уравнений

$$\left[A - \lambda B + \sum_{i=1}^{n}\left(\gamma_{i0}^{(p_i)}, \cdot\right) z_{i0}^{(1)}\right] x_{1j} = z_{j0}^{(1)},$$

$$\left[A - \lambda B + \sum_{i=1}^{n}\left(\gamma_{i0}^{(p_i)}, \cdot\right) z_{i0}^{(1)}\right] x_{sj} = Bx_{s-1,j}$$

в виде

$$\varphi_j^{(1)} = x_{1j}, \; \varphi_j^{(s)} = \sum_{l=1}^{s} x_{lj}, \; s = 2, \ldots, p_j, \; j = 1, \ldots, n.$$

Замечание. *Для разыскания ОЖН* $\left\{\psi_i^{(s)}\right\}$ *оператор ложного возмущения строится в виде* $D_0 x = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{p_i}\left(\tau_{i0}^{(j)}, x\right) z_{i0}^{(p_i+1-j)}$ *по анологичной схеме для сопряженной оператор-функции.*

Литература

1. Вайнберг М.М., Треногин В.А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969.

2. Островский А.М. Решение уравнений и систем уравнений, М., ИЛ., 1963.

3. Логинов Б.В., Русак Ю.Б. Обобщенная жорданова структура аналитической оператор-функции и ее роль в теории ветвления. Депонированная рукопись №1782-77, Деп. 81 с.

Ташкентский финансовый институт

Дата поступления 09.09.05

Uzbek Mathematical
Journal, 2006,№1, pp.72-80

УДК 517.95

О разрешимости задачи коши для псевдодифференциальных уравнений с частными производными дробного порядка

Э.М.Сайдаматов

Ushbu maqolada kasr tartibli hususiy xosilali bir jinsli bo‘lmagan psevdodifferensial tenglamalar uchun Koshi masalasi o‘rganilgan. Koshi masalasi yechimining mavjudligi va yagonaligi haqidagi teorema $L_2(R^n)$ fazoga tegishli bo‘lib, Fure almashtirishining tashuvchisi $G \subseteq R^n$ sohada kompakt joylashgan $\Psi_{G,2}(R^n)$ funksiyalar sinfida isbot qilingan.

In the present paper the Cauchy problem for partial inhomogeneous pseudo-differential equations of fractional order is studied. The solvability theorem for the Cauchy problem in the space $\Psi_{G,2}(R^n)$ of functions in $L_2(R^n)$ whose Fourier transforms are compactly supported in a domain $G \subseteq R^n$ is proved.

1. Введение

Известно, что при изучении многих задач математической физики возникает необходимость в дифференциальных операторах дробного порядка. Граничные задачи для дифференциальных уравнений дробного порядка имеют применение в различных областях науки. К таким граничным задачам сводятся многие задачи, возникающие в квантовой механике, электродинамике, компьютерной томографии и др. Исследование дифференциальных уравнений дробного порядка представляет, прежде всего, теоретический интерес с точки зрения корректности постановок граничных задач, а также изучения спектральных вопросов псевдодифференциальных операторов.

В настоящей работе изучается задача Коши для псевдодифференциальных уравнений с частными производными дробного порядка вида

$$D_*^\alpha u(t,x) = A(D_x)u(t,x) + f(t,x), \quad t > 0, \quad x \in R^n \tag{1}$$

$$u(0,x) = \varphi(x), \tag{2}$$

где $f(t,x)$ и $\varphi(x)$ - заданные функции из некоторых пространств, определяемых ниже; $D_x = (D_1, ..., D_n),\ D_j = -i\frac{\partial}{\partial x_j},\ j = 1, ..., n;\ A(D_x)$ - псевдодифференциальный оператор с символом $A(\xi)$, являющимся вещественно-аналитической функцией в некоторой области $G \subseteq R^n$; $D_*^\alpha,\ 0 < \alpha < 1$ суть оператор дробного дифференцирования порядка α в смысле Капуто (см. [1], [2])

$$D_*^\alpha g(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{g'(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau, \quad 0 < \alpha < 1, \quad t > 0.$$

Отметим, что в случае $\alpha \in N$ задача Коши для псевдодифференциальных уравнений с аналитическими символами или с символами, имеющими особенности была изучена, например, в работах [3-8]. Для изучения задачи Коши и более общей нелокальной граничной задачи в указанных работах использовались соответствующие свойства псевдодифференциальных операторов с аналитическими символами в некоторой области $G \subseteq R^n$, введенные Ю.А. Дубинским в [4]. Позже С.Р. Умаров в [7] предложил метод локализации сингулярностей символов заданных операторов. Этот метод позволяет рассматривать неаналитические символы с произвольными особенностями на границе области G или ее внешности. В [7] были найдены условия корректной разрешимости общей нелокальной граничной задачи для псевдодифференциальных уравнений в однородном случае. В неоднородном случае для корректной разрешимости задачи требуется дополнительная оценка соответствующей функции Грина (см. [8]).

При $\alpha \in N$ в силу известного принципа Дюамеля задача Коши (1), (2) может быть сведена к однородному случаю $(f(t,x) = 0)$. Важный интерес представляет случай дробного α . Р.Горенфло, Ю. Лучко и С.Умаров (см. [9]) изучили поставленную задачу (1), (2) в случае $f(t,x) = 0$ и произвольного $\alpha > 0$. В данной работе исследуются условия разрешимости неоднородной задачи (1), (2). Перед формулировкой и доказательством полученного результата напомним известные понятия и результаты (см. [9]).

2. Пространство функций $\Psi_{G,2}(R^n)$

Пусть G - открытая область в R^n и система открытых множеств $\{g_k\}_{k=0}^\infty$ является локально конечным покрытием множества G, т. е.

$$G = \bigcup_{k=0}^\infty g_k, \quad g_k \subset\subset G.$$

Пусть любой компакт $K \subset G$ имеет непустое пересечение лишь с конечным числом множеств g_k. Обозначим через $\{\theta_k\}_{k=0}^\infty$ гладкое разбиение единицы множества G.

Далее, пусть функция $f(x)$ из $L_2(R^n)$ такая, что ее преобразование Фурье имеет компактный носитель в G. Например, $f(x) = x^{-1}sinx \in L_2(R^1)$ и ее преобразование Фурье

$$F[x^{-1}sinx](y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & y \in (-1;1), \\ 0, & y \in R^1 \backslash (-1;1) \end{cases}$$

имеет компактный носитель в G, где G - произвольный интервал, содержащий отрезок $[-1;1]$. Множество всех таких функций со сходимостью, определяемой ниже, будем обозначать через $\Psi_{G,2}(R^n)$.

Определение. Будем говорить, что последовательность функций $f_m \in \Psi_{G,2}(R^n)$, $m = 1, 2, 3, ...$ сходится к элементу $f_0 \in \Psi_{G,2}(R^n)$, если:

1) существует компакт $K \subset G$ такой, что носитель $supp\, F f_m \subset K$ для всех $m \in N$;

2) норма $\|f_m - f_0\|_{L_2} = (\int_{R^n} |f_m(x) - f_0(x)|^2 dx)^{\frac{1}{2}} \to 0$ при $m \to \infty$.

В силу теоремы Пэли-Винера-Шварца элементами пространства $\Psi_{G,2}(R^n)$ являются целые функции экспоненциального типа, сужения которых в R^n принадлежат пространству $L_2(R^n)$.

Пространство $\Psi_{G,2}(R^n)$ может быть представлено также как индуктивный предел следующих пространств. Именно, пусть

$$G_N = \bigcup_{k=1}^{N} g_k, \quad \chi_{_N}(\xi) = \sum_{k=1}^{N} \theta_k(\xi).$$

Обозначим через Ψ_N множество функций $f \in L_2(R^n)$, удовлетворяющих условиям:

a) $supp\, F f \subset G_N$;

b) $supp\, F f \cap supp\; \theta_j = \emptyset$ при $j > N$;

c) $p_{_N}(f) = \|F^{-1} \chi_{_N} F f\|_{L_2} < \infty$.

Здесь F^{-1} - оператор, обратный преобразованию Фурье F. Нетрудно проверить, что

$$\Psi_{G,2} = ind \lim_{N \to \infty} \Psi_N.$$

Далее, пусть $A(D)$ - псевдодифференциальный оператор с символом $A(\xi)$, являющимся вещественно-аналитической функцией в G. Предполагается, что вне области G или на ее границе функция $A(\xi)$ может иметь особенности произвольного типа. Для функции $\varphi(x) \in \Psi_{G,2}(R^n)$ оператор $A(D)$ определяется по формуле

$$A(D)\,\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{R^n} A(\xi) F\varphi(\xi) e^{ix\xi} d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_G A(\xi) F\varphi(\xi) e^{ix\xi} d\xi.$$

Отметим, что псевдодифференциальный оператор $A(D)$ непрерывно отображает пространство $\Psi_{G,2}(R^n)$ в себя (см. [9]).

3. Разрешимость задачи Коши (1), (2) в $\Psi_{G,2}(R^n)$

Рассмотрим сначала задачу Коши в случае $\alpha = 1$, $D_*^\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial t}$, т. е.

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = A(D_x)u(t,x) + f(t,x), \quad t > 0, \ x \in R^n, \tag{3}$$

$$u(0,x) = \varphi(x), \quad x \in R^n. \tag{4}$$

Из известного принципа Дюамеля следует, что для разрешимости задачи (3), (4) достаточно рассмотреть однородный случай. Действительно, если $U(t,\tau,x)$ является решением задачи

$$\frac{\partial U}{\partial t} = A(D_x)U,$$

$$U(0,\tau,x) = f(\tau,x), \quad 0 < \tau < t,$$

то

$$u(t,x) = \int_0^t U(t-\tau,\tau,x)d\tau$$

есть решение неоднородной задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A(D_x)u + f(t,x),$$

$$u(0,x) = 0.$$

Теперь возвратимся к задаче Коши (1), (2). Отметим, что в этом случае нельзя непосредственно применять принцип Дюамеля. При $f(t,x) \equiv 0$ для решения задачи Коши (1), (2) имеется следующее представление (см. [9])

$$u(t,x) = E_\alpha(t^\alpha A(D_x))\varphi(x),$$

где $E_\alpha(t^\alpha A(D_x))$ - псевдодифференциальный оператор с символом $E_\alpha(t^\alpha A(\xi))$, а $E_\alpha(z)$ является функцией Миттаг-Леффлера (см. [10])

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^\infty \frac{z^k}{\Gamma(1+\alpha k)}.$$

Пусть D_{0+}^α - оператор дробного дифференцирования порядка α в смысле Римана-Лиувилля (см. [11])

$$D_{0+}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{f(\rho)}{(t-\rho)^\alpha} d\rho, \quad 0 < \alpha < 1, \quad t > 0.$$

Обозначим через $L_1[t>0;\, \Psi_{G,2}(R^n)]$, $C^{(m)}[t>0;\, \Psi_{G,2}(R^n)]$ и $AC[t>0;\, \Psi_{G,2}(R^n)]$ соответственно пространство суммируемых по Лебегу функций, пространство $m-$ раз непрерывно-дифференцируемых функций и пространство абсолютно-непрерывных функций на $(0;+\infty)$ со значениями из пространства $\Psi_{G,2}(R^n)$. Известно [11], что если функция $f(t,x)\in AC[t\geq 0;\, \Psi_{G,2}(R^n)]$, то существует дробная производная $D_{0+}^{1-\alpha}f(t,x)\in L_1[t>0;\, \Psi_{G,2}(R^n)]$.

Теорема. Пусть $\varphi(x)\in\Psi_{G,2}(R^n)$, $f(t,x)\in AC[t\geq 0;\, \Psi_{G,2}(R^n)]$ и $D_{0+}^{1-\alpha}f(t,x)\in C[t\geq 0;\, \Psi_{G,2}(R^n)]$. Тогда задача Коши (1), (2) имеет единственное решение $u(t,x)\in C^{(1)}[t>0;\, \Psi_{G,2}(R^n)]\cap C[t\geq 0;\, \Psi_{G,2}(R^n)]$, которое определяется с помощью формулы

$$u(t,x)=E_\alpha(t^\alpha A(D_x))\varphi(x)+\int_0^t E_\alpha((t-\tau)^\alpha A(D_x))D_{0+}^{1-\alpha}f(\tau,x)d\tau. \quad (5)$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $\varphi(x)=0$ в (2) и доказать, что функция

$$v(t,x)=\int_0^\infty U(t,\tau,x)d\tau=\int_0^t U(t,\tau,x)d\tau, \quad (6)$$

где

$$U(t,\tau,x)=\begin{cases} E_\alpha((t-\tau)^\alpha A(D_x))D_{0+}^{1-\alpha}f(\tau,x), & t\geq\tau,\\ 0, \quad t<\tau, \end{cases}$$

является решением задачи

$$D_*^\alpha v(t,x)-A(D_x)v(t,x)=f(t,x), \quad (7)$$

$$v(0,x)=0. \quad (8)$$

Покажем вначале, что уравнение

$$D_*^\alpha(\int_0^t g(\tau,x)d\tau)=f(t,x) \quad (9)$$

имеет единственное решение $g(t,x)=D_{0+}^{1-\alpha}f(t,x)\in L_1[t>0;\, \Psi_{G,2}(R^n)]$, если $f(t,x)\in AC[t\geq 0;\, \Psi_{G,2}(R^n)]$. Действительно, имеют место следующие соотношения

$$D_*^\alpha(\int_0^t g(\tau,x)d\tau)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t (t-\rho)^{-\alpha}\frac{\partial}{\partial\rho}(\int_0^\rho g(\tau,x)d\tau)d\rho=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t\frac{g(\rho,x)}{(t-\rho)^\alpha}d\rho.$$

Поэтому мы можем записать уравнение (9) в виде

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t \frac{g(\rho,x)}{(t-\rho)^\alpha}d\rho = f(t,x).$$

Последнее равенство является уравнением типа уравнения Абеля (см. [11]). Поэтому оно имеет единственное решение $g(t,x)\in L_1[t>0;\ \Psi_{G,2}(R^n)]$ при $f(t,x)\in AC[t\geq 0;\ \Psi_{G,2}(R^n)]$. Это решение можно записать в следующем виде

$$g(t,x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t (t-\rho)^{\alpha-1}f(\rho,x)d\rho = D_{0+}^{1-\alpha}f(t,x).$$

Далее проверим, что функция $v(t,x)$ из (6) удовлетворяет уравнению (7). Действительно, функция $U(t,\tau,x)$ является решением однородной задачи

$$D_*^\alpha U(t,\tau,x)-A(D_x)U(t,\tau,x)=0,$$

$$U(\tau,\tau,x)=g(\tau,x).$$

Здесь $g(t,x)$ - решение уравнения (9), т. е. $g(t,x)=D_{0+}^{1-\alpha}f(t,x)$. Мы имеем

$$D_*^\alpha v(t,x)-A(D_x)v(t,x)=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t (t-\rho)^{-\alpha}\frac{\partial}{\partial\rho}v(\rho,x)d\rho - A(D_x)\int_0^t U(t,\tau,x)d\tau=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t (t-\rho)^{-\alpha}\frac{\partial}{\partial\rho}\int_0^\rho U(\rho,\tau,x)d\tau d\rho - \int_0^t A(D_x)U(t,\tau,x)d\tau=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t (t-\rho)^{-\alpha}[U(\rho,\rho,x)+\int_0^\rho \frac{\partial}{\partial\rho}U(\rho,\tau,x)d\tau]d\rho-\int_0^t A(D_x)U(t,\tau,x)d\tau.$$

Учитывая, что $U(\rho,\rho,x)=g(\rho,x)$ и

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t (t-\rho)^{-\alpha}g(\rho,x)d\rho = D_*^\alpha(\int_0^t g(\tau,x)d\tau)=f(t,x)$$

получим

$$D_*^\alpha v(t,x)-A(D_x)v(t,x)=f(t,x)+$$

$$+\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t (t-\rho)^{-\alpha}\int_0^\rho \frac{\partial}{\partial\rho}U(\rho,\tau,x)d\tau d\rho\ -\int_0^t A(D_x)U(t,\tau,x)d\tau.$$

Поменяв порядок интегрирования, мы имеем

$$D_*^\alpha v(t,x)-A(D_x)v(t,x)=f(t,x)+$$

$$+\int_0^t \int_\tau^t \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}(t-\rho)^{-\alpha}\frac{\partial}{\partial\rho}U(\rho,\tau,x)d\rho d\tau - \int_0^t A(D_x)U(t,\tau,x)d\tau =$$

$$= f(t,x) + \int_0^t [\int_\tau^t \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}(t-\rho)^{-\alpha}\frac{\partial}{\partial\rho}U(\rho,\tau,x)d\rho - A(D_x)U(t,\tau,x)]d\tau.$$

Поскольку $U(\rho,\tau,x)=0$ при $\rho<\tau$, то

$$\int_\tau^t \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}(t-\rho)^{-\alpha}\frac{\partial}{\partial\rho}U(\rho,\tau,x)d\rho = \int_0^t \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}(t-\rho)^{-\alpha}\frac{\partial}{\partial\rho}U(\rho,\tau,x)d\rho.$$

Отсюда получаем, что

$$D_*^\alpha v(t,x) - A(D_x)v(t,x) = f(t,x)+$$

$$+\int_0^t [\int_0^t \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}(t-\rho)^{-\alpha}\frac{\partial}{\partial\rho}U(\rho,\tau,x)d\rho - A(D_x)U(t,\tau,x)]d\tau =$$

$$= f(t,x) + \int_0^t [D_*^\alpha U(t,\tau,x) - A(D_x)U(t,\tau,x)]d\tau = f(t,x).$$

Функция $v(t,x)$ из (6) удовлетворяет также начальному условию (8). Кроме того, при фиксированном $t>0$ мы имеем

$$p_N^2(v(t,x)) = \|F^{-1}\chi_N Fv\|_{L_2}^2 = \|\chi_N Fv\|_{L_2}^2 =$$

$$= \int_{R^n} |\chi_N(\xi)|^2 \cdot |\int_0^t E_\alpha((t-\tau)^\alpha A(\xi)) FD_{0+}^{1-\alpha} f(\tau,\xi)d\tau|^2 d\xi.$$

Для $\chi_N(\xi)$ существует компакт $K_N \subset G$ такой, что $supp\,\chi_N(\xi) \subset K_N$. Отсюда, используя неравенство Коши-Буняковского, мы получим оценку

$$p_N^2(v(t,x)) \le \int_{K_N} |\chi_N(\xi)|^2 \cdot \int_0^t |E_\alpha((t-\tau)^\alpha A(\xi))|^2 d\tau \cdot \int_0^t |FD_{0+}^{1-\alpha} f(\tau,\xi)|^2 d\tau d\xi.$$

Функция $\int_0^t |E_\alpha((t-\tau)^\alpha A(\xi))|^2 d\tau$ ограничена на K_N. Поэтому, существует константа $C_N>0$ такая, что

$$p_N^2(v(t,x)) \le C_N \int_{K_N} |\chi_N(\xi)|^2 \cdot \int_0^t |FD_{0+}^{1-\alpha} f(\tau,\xi)|^2 d\tau d\xi \le$$

$$\le C_N \int_0^t \int_{R^n} |\chi_N(\xi)|^2 \cdot |FD_{0+}^{1-\alpha} f(\tau,\xi)|^2 d\xi d\tau =$$

$$= C_N \int_0^t \|\chi_N(\xi) FD_{0+}^{1-\alpha} f(\tau,\xi)\|_{L_2}^2 d\tau = C_N \int_0^t p_N^2(D_{0+}^{1-\alpha} f(\tau,x))d\tau.$$

Поскольку $D_{0+}^{1-\alpha}f(t,x) \in C[t \geq 0;\ \Psi_{G,2}(R^n)]$, то функция $p_{_N}(D_{0+}^{1-\alpha}f(\tau,x))$ является непрерывной относительно переменной $\tau \in (0;t)$ и имеет место оценка

$$p_{_N}^2(v(t,x)) \leq C_{_N} \cdot t \cdot \sup_{0<\tau<t} p_{_N}^2(D_{0+}^{1-\alpha}f(\tau,x)) < +\infty.$$

Отсюда следует, что при фиксированном $t \in (0;+\infty)$ функция $v(t,x)$ из (6) принадлежит пространству $\Psi_{G,2}(R^n)$. Аналогичная оценка имеет место для $\frac{\partial}{\partial t}v(t,x)$. Поэтому $v(t,x) \in C^{(1)}[t > 0;\ \Psi_{G,2}(R^n)] \cap C[t \geq 0;\ \Psi_{G,2}(R^n)]$. Единственность полученного решения следует из единственности решения однородной задачи Коши (1), (2) (см. [9]). Следовательно, функция $u(t,x)$ из (5) является искомым единственным решением задачи Коши (1), (2).

Литература

1. Caputo M. Linear models of disspation whose Q is almost frequency independent. Part II, Geophys. J. R. Astr. Soc., 13 (1967), 529 - 539.

2. Gorenflo R., Luchko Yu. and Mainardi F. Analytical properties and applications of the Wright function. Fractional Calculus and Applied Analysis, 2 (1999), 383 - 415.

3. Дубинский Ю.А. К теории задачи Коши для уравнений в частных производных. ДАН СССР, 1981, т. 259, No 4, С. 781-785.

4. Дубинский Ю.А. Алгебра псевдодифференциальных операторов с аналитическими символами и ее приложения к математической физике. УМН, 1982, т. 37, вып. 5(224), С. 97-137.

5. Чинь Нгок Мин, Чан Дык Ван. Задача Коши для систем уравнений в частных производных с выделенной переменной. ДАН СССР, 1985, т. 284, No 5, С. 1080-1083.

6. Умаров С.Р. Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений и их приложения. Изв. АН УзССР, 1986, No 4, С. 38-42.

7. Умаров С.Р. О корректности граничных задач для псевдодифференциальных уравнений с аналитическими символами. ДАН СССР, 1992, т. 322, No 6, С. 1036-1039.

8. Сайдаматов Э.М. О корректности неоднородных граничных задач для псевдодифференциальных уравнений. Узб. мат. журнал, 1995, No 2, С. 78 - 89.

9. Gorenflo R., Luchko Yu.F. and Umarov S.R. On the Cauchy and multi-point problems for partial pseudo-differential equations of fractional order. Fractional Calculus and Applied Analysis 3, №3 (2000), 249-277.

10. Джрбашян М.М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука, 1966, 671 с.

11. Samko S.G., Kilbas A.A. and Marichev O.I. Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications. New York and London, Gordon and Breach Science Publishers (1993).

Национальный Университет
Узбекистана им. М.Улугбека

Дата поступления
22.06.05

Uzbek Mathematical
Journal, 2006,№1, pp.81-92

УДК 517.98

Об аналитическом продолжении решения однородной системы уравнений Максвелла по значениям на куске границы

Э.Н.Сатторов

Ushbu ishda sohada chegarasini bir qismida berilgan qiymati bo'yicha Maksvell tenglamalari sistemasi yechimining analitik davomi masalasi qaraladi.

We consider the problem of continuation of a solution to the system of the Maxwell equations from data on part of the boundary of the domain. This problem in constructed by the method of Carleman's matrix.

Введение

Пусть D- односвязная ограниченная область в комплексной плоскости z с границей ∂D, состоящей из отрезка $[A,B]$ действительной оси и гладкой дуги S кривой, лежащей в верхней замкнутой полуплоскости $Imz \geq 0$, $\partial D = \{z : A \leq z \leq B\} \bigcup S$. Обозначим через S_0 внутренние точки дуги $S, S_0 = S \backslash \{A, B\}$. Пусть $f(z) \in C(S_0), \int\limits_S |f(\varsigma)||d\varsigma| < \infty$.

При $\sigma \geq 0$ введем обозначения:

$$J_\sigma(f) = \int\limits_S f(\varsigma) e^{-i\sigma\varsigma} d\varsigma, \ \ 2\pi i f_\sigma(z) = \int\limits_S e^{-i\sigma(\varsigma - z)} \frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z} d\varsigma,$$

$$2\pi i f_0(z) = \int\limits_S \frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z} d\varsigma, \ \ z \notin S,$$

где функция $f_\sigma(z)$ дифференцируема по параметру $\sigma (\sigma \geq 0)$ при каждом фиксированном $z \notin S$ и имеет место формула

$$2\pi i \frac{df_\sigma(z)}{d\sigma} = -i \int\limits_S e^{-i\sigma(\varsigma - z)} f(\varsigma) d\varsigma = -ie^{i\sigma z} J_\sigma(f).$$

В этих условиях В.А.Фок и Ф.М.Куни [1] доказали следующий интересный результат.

Для существования функции $F(z)$, голоморфной в D и такой, что $F(z) = f(z),\ \ z \in S_0$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{\sigma\to\infty} \sigma^{-1} \ln |J_\sigma(f)| = 0.$$

Если это условие выполнено, то аналитическое продолжение в область D осуществляется формулой

$$2\pi i F(z) = 2\pi i \lim_{\sigma\to\infty} f_\sigma(z) \equiv \lim_{\sigma\to\infty} \int\limits_S f(\varsigma) e^{-i(\varsigma - z)\sigma} \frac{d\varsigma}{\varsigma - z},\ \ z \in D \qquad (0.1)$$

которую можно преобразовать в такую:

$$2\pi i F(z) = \int\limits_S \frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z} d\varsigma - i \int\limits_0^\infty e^{i\sigma z} J_\sigma(f) d\sigma,\ \ z \in D. \qquad (0.2)$$

Эквивалентность формул продолжения (0.1) и (0.2) вытекает из формулы

$$\lim_{\sigma\to\infty} f_\sigma(z) = \int\limits_0^\infty \frac{df_\sigma(z)}{d\sigma} d\sigma + f_0(z), \qquad (0.3)$$

где существование предела слева влечет за собой сходимость несобственного интеграла справа.

Формула восстановления голоморфной в области функции по ее заданным значениям на части границы была получена впервые Т.Карлеманом еще в 1926 г. [2]. Далеко идущие обобщения формулы Карлемана получили Г.М.Голузин и В.И.Крылов [3]. Различные одномерные и многомерные обобщения формулы Карлемана приведены в [4]. Формулы продолжения для решения уравнений Гельмгольца, теории упругости и формулы гармонического продолжения получена Ш.Ярмухамедовым [5-8].

Проследим бегло основную идею доказательства теоремы Фока-Куни [1]. Подинтегральная функция в (0.1) состоит из произведения двух функций. Первый множитель - это $f(\varsigma)$, а второй, как легко видеть, представляет собой регулярную функцию, кроме точки $\varsigma = z$, в которой она имеет простой полюс с вычетом, равным единице, стремящуюся к нулю при $\sigma \to \infty$, когда $Im\varsigma = 0,\ \ Imz > 0$. Функция с указанными свойствами согласно М.М.Лаврентьеву [9], называется функцией Карлемана для рассматриваемой области D и части S. Теперь формула (0.1) немедленно следует из интегральной формулы Коши. Отсюда в силу (0.3) получаем формулу (0.2) и вместе с ней необходимость условия теоремы. С другой стороны, второе слагаемое в правой части (0.2) изображает регулярную функцию в полуплоскости $Imz > 0$, а первое слагаемое как интеграл типа Коши - различные аналитические функции в D и в $\{Imz > 0\}\backslash D$ соответственно, поэтому $F(z)$ распадается на две регулярные функции $F^+(z)$ и $F^-(z)$ соответственно. Из (0.2) видно, что $F^-(z) = 0$, когда $Imz > \sup Im\varsigma,\ \ \varsigma \in D$. Это вытекает из того, что повторные интегралы перестановочны и имеют место равенства

$$\int\limits_0^\infty e^{i\sigma z} J_\sigma(f) d\sigma = \int\limits_0^\infty e^{i\sigma z} [\int\limits_S e^{-i\sigma\varsigma} f(\varsigma) d\sigma] d\varsigma =$$

$$= \int\limits_S f(\varsigma) [\int\limits_0^\infty e^{-i\sigma(\varsigma - z)} d\sigma] d\varsigma = -i \int\limits_S \frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z} d\varsigma.$$

Теперь полное доказательство формулы (0.1) следует из теоремы единственности и формулы скачка для граничных значений интеграла типа Коши, а также из теоремы о продолжимости $F^+(z)$ на S_0 как функции класса $C(D \bigcup S_0)$ [4].

Здесь приводим аналогичный результат для решения однородной системы уравнений Максвелла. Доказанные формулы продолжения основаны на постановке М.М.Лаврентьева конструкции многомерной функции Карлемана [10].

В §1 приводится постановка задачи, в §2 конструкция матрицы фундаментального решения однородной системы уравнений Максвелла, зависящего от положительного параметра и исчезающего в пределе (вместе со своими производными) при стремлении параметра к бесконечности на той части границы, где $y_1 = 0$. Выписывается в явном виде матрицы Карлемана для области D. Устанавливается справедливость классической формулы Стрэттона-Чу, в которой в качестве матрицы фундаментального решения присутствует построенная матрица Карлемана. Из полученной формулы легко выводятся формулы Карлемана и критерий разрешимости задачи Коши для однородной системы уравнений Максвелла.

1. Постановка задачи

Введем обозначения: R^3 - трехмерное вещественное евклидово пространство: $x = (x_1, x_2, x_3),\ \ y = (y_1, y_2, y_3) \in R^3,\ \ x' = (0, x_2, x_3),\ \ y' = (0, y_2, y_3) \in R^2,\ \ \alpha^2 = |y' - x'|^2,\ \ r^2 = |y - x|^2 = \alpha^2 + (y_1 - x_1)^2,\ \ s = \alpha^2,\ \ R^3_+ = \{y = (y_1, y') : y' \in R^2, y_1 > 0\}$. D- односвязная ограниченная область с границей, состоящей из компактной части гиперплоскости $y_1 = 0$ и гладкого куска поверхности S, лежащей в полупространстве

$y_1 \geq 0$; $\overline{D} = D \bigcup \partial D$; S_0- внутренние точки S, т.е. поверхность S без края.

Рассмотрим однородную систему уравнений Максвелла

$$rotE = i\omega\mu H;$$

$$rotH = -i\omega\varepsilon E,$$

где $i = \sqrt{-1}$, ε и $\mu-$ электромагнитные постоянные (диэлектрическая постоянная и магнитная проницаемость); $E = (E_1, E_2, E_3)$ и $H = (H_1, H_2, H_3)-$ напряженность электрического и магнитного полей, $\omega-$ частота электромагнитных колебаний.

Через $A(D)$ обозначим пространство вектор-функций класса $C^1(D)$ удовлетворяющих системам уравнений Максвелла в D.

Задача 1.

$$rotE = i\omega\mu H;$$

$$rotH = -i\omega\varepsilon E, \;\; x \in D_\rho, \tag{1.1}$$

$$[n(y), E(y)] = f(y), \;\; [n(y), H(y)] = g(y), \;\; y \in S \tag{1.2}$$

По заданным $f(y)$ и $g(y)$ на S вычислить $E(x), H(x)$, $x \in D$.

Задача 2. Пусть на S заданы функции $f(y)$ и $g(y)$. Указать условия на $f(y)$ и $g(y)$, необходимые и достаточные для того, чтобы существовало решение системы (1.1) класса $A(D) \cap C(D \cup S)$, удовлетворяющее условию (1.2).

Задача (1.1), (1.2) относится к числу некорректно поставленных задач. В настоящее время теория некорректных задач разработана достаточно хорошо. Различные методы решения изложены в [10-13].

Ж.Адамар [14] заметил, что решение задачи 1 неустойчиво. Чаще всего в приложениях вместо вектор-функций $f(y)$ и $g(y)$ задаются на S их приближения $f_\delta(y)$ и $g_\delta(y)$ соответственно с заданным уклонением $\delta > 0$ и требуется по $f_\delta(y)$ и $g_\delta(y)$ построить решение в точках области D с заранее заданной точностью. Поскольку решение задачи неустойчиво, то построение приближенного решения невозможно.

Для того чтобы построить устойчивое решение, необходимо сузить класс рассматриваемых решений [9-12]. Чаще всего это компакт в известных функциональных пространствах. Если известно число характеризующее компакт (размеры компакта) которому принадлежат решения, то речь идчт о построении семейства вектор-функции $E_\sigma(x) = E_\sigma(x, f_\delta, g_\delta)$, $H_\sigma(x) = H_\sigma(x, f_\delta, g_\delta)$ (регуляризация), зависящих от положительного параметра $\sigma > 0$ (параметр регуляризации). При подходящем выборе параметра σ в зависимости от δ и размера компакта сходится к решению задачи, когда $\delta \to 0$. Введение положительного параметра в зависимости от погрешности исходных данных здесь обусловлено свойством задачи. Это обстоятельство впервые было замечено М.М.Лаврентьевым [9]. Явная формула для регуляризации задачи (1.1), (1.2) дана в [15]. Приводим решение задачи 1 и 2, когда $f(y)$ и $g(y)$ задаются на S точной формулой.

2. Матрицы и формулы Карлемана

Функцию $\Phi_\sigma(y-x)$ при $\alpha > 0,\ \ \sigma \geq 0$ определим равенством

$$\Phi_\sigma(y-x) = -\frac{1}{2\pi^2}\int\limits_0^\infty Im\left[\frac{e^{\sigma w + a w^2}}{w}\right]\frac{ch(ku)}{\sqrt{u^2+\alpha^2}}du,$$

$$w = i\sqrt{u^2+\alpha^2} + y_1 - x_1,\ \ k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}, \tag{2.1}$$

При $\sigma = 0$ интегралы в (2.1) вычисляется и для $\Phi_0(y-x)$ получаем

$$\Phi_0(y-x) = \frac{e^{-ikr}}{4\pi r}. \tag{2.2}$$

Обозначим

$$F_\sigma(y-x) = \frac{d\Phi_\sigma(y-x)}{d\sigma}. \tag{2.3}$$

Определение 1. *Матрицей фундаментальных решений системы (1.1) называется симметричная матрица $H(y,x)$ для вектора $E(x)$:*

$$H(y,x) = \|(H_{ij}(y,x))\|_{3\times 3},$$

где

$$H_{ij}(y,x) = \frac{\partial^2\Phi_0(y-x)}{\partial x_i \partial x_j} + \delta_{ij}k^2\Phi_0(y-x),$$

где δ_{ij}- символ Кроникера и антисимметричная матрица $\overline{H}(y,x)$ для вектора $H(x)$:

$$\overline{H}(y,x) = \left\|\begin{matrix} 0 & \frac{\partial\Phi_0(y-x)}{\partial x_3} & -\frac{\partial\Phi_0(y-x)}{\partial x_2} \\ -\frac{\partial\Phi_0(y-x)}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial\Phi_0(y-x)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial\Phi_0(y-x)}{\partial x_2} & -\frac{\partial\Phi_0(y-x)}{\partial x_1} & 0 \end{matrix}\right\|$$

Развивая идею М.М.Лаврентьева, который ввел понятие функции Карлемана задачи Коши для уравнения Лапласа [10], дадим следующее

Определение 2. *Матрицей Карлемана задачи (1.1)-(1.2) называется (3×3)- матрица $M(y,x,\sigma),\ \ N(y,x,\sigma)$, удовлетворяющая следующим двум условиям:*

1) $M(y,x,\sigma)=H(y,x)+G_1(y,x,\sigma),\ \ N(y,x,\sigma)=\overline{H}(y,x)+G_2(y,x,\sigma),$ *где* σ *- положительный числовой параметр, матрицы* $G_i(y,x,\sigma),\ \ (i=1,2)$ *по переменной* y *удовлетворяют системе (1.1) всюду в области* D;

2) $\int\limits_{\partial D\backslash S}(|M(y,x,\sigma)|+|N(y,x,\sigma)|)dS_y\le\varepsilon(\sigma)$, *при фиксированном* $x\in D$, *где* $\varepsilon(\sigma)\to 0$ *при* $\sigma\to\infty$; *здесь и далее* $|M(y,x,\sigma)|,\ \ |N(y,x,\sigma)|$ *означает евклидову норму матрицы* $M=||M_{ij}||$ *и* $N=||N_{ij}||$.

С целью построения приближенного решения задачи (1.1)-(1.2) рассмотрим матрицы $M(y,x,\sigma)=||M_{ij}(y,x,\sigma)||_{3\times3}$, где

$$M_{ij}(y,x,\sigma)=\frac{\partial^2\Phi_\sigma(y-x)}{\partial x_i\partial x_j}+\delta_{ij}k^2\Phi_\sigma(y-x),$$

$$N(y,x,\sigma)=\left\|\begin{matrix}0 & \frac{\partial\Phi_\sigma(y-x)}{\partial x_3} & -\frac{\partial\Phi_\sigma(y-x)}{\partial x_2}\\ -\frac{\partial\Phi_\sigma(y-x)}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial\Phi_\sigma(y-x)}{\partial x_1}\\ \frac{\partial\Phi_\sigma(y-x)}{\partial x_2} & -\frac{\partial\Phi_\sigma(y-x)}{\partial x_1} & 0\end{matrix}\right\|, \qquad (2.4)$$

где функция $\Phi_\sigma(y-x)$ определяется из (2.1).

В [16] доказана

Лемма 1. *Функция* $\Phi_\sigma(y-x)$ *определенная формулой (2.1), представима в виде*

$$\Phi_\sigma(y-x)=\Phi_0(y-x)+g_\sigma(y-x),$$

где $g_\sigma(y-x)$ *- некоторая функция, определенная для всех значений* y,x *и удовлетворяющая уравнению Гельмгольца* $\Delta(\frac{\partial}{\partial y})g+\varsigma^2g=0$ *по переменному* y *при любом* $\sigma\ge 0$.

Лемма 2. *Матрицы* $M(y,x,\sigma),\ \ N(y,x,\sigma)$ *определенные формулами (2.4), является матрицей Карлемана задачи (1.1)-(1.2), т.е. представимо в виде*

$$M(y,x,\sigma)=H(y,x)+G_1(y,x,\sigma),$$

$$N(y,x,\sigma)=\overline{H}(y,x)+G_2(y,x,\sigma), \qquad (2.5)$$

где $G_i(y,x,\sigma)=\|G_{ij}(y,x,\sigma)\|_{3\times3},\ \ (i=1,2)$ *- матрицы, определенные для всех значений* y,x *и по переменному* y *удовлетворяющие системе (1.1) во всем* R^3.

Из леммы 1 и равенства (2.3) видим, что функция

$$\frac{d\Phi_\sigma(y-x)}{d\sigma}=F_\sigma(y-x) \qquad (2.6)$$

является регулярным решением уравнений Гельмгольца в R^3.

Предложение. *Пусть* $E(y),\ \ H(y) \in A(D) \cap C(\overline{D})$. *Тогда справедлива формула Стрэттона-Чу [17]:*

$$E(x) = -\int\limits_{\partial D} [n(y), E(y)] N(y,x,\sigma) dS_y + \frac{1}{ik} \int\limits_{\partial D} [n(y), H(y)] M(y,x,\sigma) dS_y,\ \ x \in D,$$

$$H(x) = -\int\limits_{\partial D} [n(y), H(y)] N(y,x,\sigma) dS_y - \frac{1}{ik} \int\limits_{\partial D} [n(y), E(y)] M(y,x,\sigma) dS_y,\ \ x \in D. \tag{2.7}$$

Пусть $f(y), g(y) \in L(S)$. Введем обозначения

$$E_\sigma(x) = \int\limits_S \left[-f(y) N(y,x,\sigma) + \frac{1}{ik} g(y) M(y,x,\sigma) \right] dS_y,$$

$$H_\sigma(x) = \int\limits_S \left[-g(y) N(y,x,\sigma) - \frac{1}{ik} f(y) M(y,x,\sigma) \right] dS_y, \tag{2.8}$$

$$E_0(x) = E_\sigma(x)|_{\sigma=0} = \int\limits_S \left[-f(y) \overline{H}(y,x) + \frac{1}{ik} g(y) H(y,x) \right] dS_y,$$

$$H_0(x) = H_\sigma(x)|_{\sigma=0} = \int\limits_S \left[-g(y) \overline{H}(y,x) - \frac{1}{ik} f(y) H(y,x) \right] dS_y, x \notin S. \tag{2.9}$$

$$J_1(\delta,x) = -\int\limits_S N_1(y,x,\delta) f(y) dS_y + \frac{1}{ik} M_1(y,x,\delta) g(y) dS_y,$$

$$J_2(\delta,x) = -\int\limits_S N_1(y,x,\delta) g(y) dS_y + \frac{1}{ik} M_1(y,x,\delta) f(y) dS_y, \tag{2.10}$$

$$M_1(y,x,\sigma) = \frac{d}{d\sigma} M(y,x,\sigma), \quad N_1(y,x,\sigma) = \frac{d}{d\sigma} N(y,x,\sigma),$$

где $\Phi_\sigma(y-x),\ \ \Phi_0(y-x),\ \ F_\sigma(y-x)$ определяются из (2.1)-(2.3) соответственно.

Из (2.6) заключаем, что функции $E_\sigma(x),\ \ H_\sigma(x)$, дифференцируемы по параметру $\sigma (\sigma \geq 0)$ и при каждом фиксированном $x \in R^3_+ \backslash S$ справедлива формула $\frac{dE_\sigma(x)}{d\sigma} = e^{-\sigma x_1} J_1(\sigma,x),\ \ \frac{dH_\sigma(x)}{d\sigma} = e^{-\sigma x_1} J_2(\sigma,x)$, при этом функции $e^{-\sigma x_1} J_1(\sigma,x),\ \ e^{-\sigma x_1} J_2(\sigma,x)$ удовлетворяют системы (1.1) в R^3_+ при каждом фиксированном $\sigma \geq 0$.

Согласно формуле Ньютона-Лейбница имеем

$$\lim_{\sigma \to \infty} E_\sigma(x) = \int\limits_0^\infty e^{-\sigma x_1} J_1(\sigma,x) d\sigma + E_0(x),$$

$$\lim_{\sigma\to\infty} H_\sigma(x) = \int\limits_0^\infty e^{-\sigma x_1} J_2(\sigma,x)d\sigma + H_0(x) \tag{2.11}$$

при условии, что предел слева существует и конечен при каждом фиксированном $x \in R^3_+ \backslash S$.

Теорема 1. *Пусть* $E(y),\ \ H(y) \in A(D)\cap C(\overline{D})$, *и* $[n(y),E(y)] = f(y),\ \ [n(y),H(y)] = g(y,)$ *где* $f(y),\ \ g(y)$*- заданные вектор функции класса* $C(S)$*. Тогда для любого* $x \in D$ *справедливы формулы Карлемана:*

$$E(x) = \lim_{\sigma\to\infty} E_\sigma(x) = \lim_{\sigma\to\infty} \int\limits_S \left[-f(y)N(y,x,\sigma) + \frac{1}{ik} g(y)M(y,x,\sigma)\right] dS_y,$$

$$H(x) = \lim_{\sigma\to\infty} H_\sigma(x) = \lim_{\sigma\to\infty} \int\limits_S \left[-g(y)N(y,x,\sigma) - \frac{1}{ik} f(y)M(y,x,\sigma)\right] dS_y, \tag{2.12}$$

которые можно преобразовать так:

$$E(x) = \int\limits_0^\infty J_1(\sigma,x)d\sigma + [-\int\limits_S \overline{H}(y,x)f(y)dS_y + \frac{1}{ik}\int\limits_S g(y)H(y,x)dS_y],$$

$$H(x) = \int\limits_0^\infty J_2(\sigma,x)d\sigma + [-\int\limits_S \overline{H}(y,x)g(y)dS_y - \frac{1}{ik}\int\limits_S f(y)H(y,x)dS_y], \tag{2.13}$$

где

$$J_1(\sigma,x) = -\int\limits_S N_1(y,x,\sigma)f(y)dS_y + \frac{1}{ik}\int\limits_S g(y)M_1(y,x,\sigma)dS_y,$$

$$J_2(\sigma,x) = -\int\limits_S N_1(y,x,\sigma)g(y)dS_y - \frac{1}{ik}\int\limits_S f(y)M_1(y,x,\sigma)dS_y,$$

$$M_1(y,x,\sigma) = \frac{d}{d\sigma}M(y,x,\sigma),\ \ N_1(y,x,\sigma) = \frac{d}{d\sigma}N(y,x,\sigma)$$

Теорема 2. *Пусть* $S \subset C^2,\ \ f(y), g(y) \in C(S_0)\cap L(S)$*. Для существования решений* $E(y), H(y) \in A(D)\cap C(D\cup S_0)$ *таких, что*

$$[n(y),E(y)] = f(y),\ \ [n(y),H(y)] = g(y),\ \ y \in S_0$$

необходимо и достаточно, чтобы для каждого $x \in R^3_+$ *сходился несобственный интеграл (равномерно на компактах из* $x \in R^3_+$*):*

$$\left|\int_0^\infty J_i(\sigma,x)d\sigma\right| < \infty,\ \ i = 1,2 \tag{2.14}$$

Если условие (2.14) выполнено, то аналитическое продолжение осуществляется эквивалентными формулами (2.12) и (2.13).

Доказательство теоремы 1. Используя формулы (2.7) оценим $N(y,x,\sigma)$, $M(y,x,\sigma)$. Для этого необходимо оценить функция $\Phi_\sigma(y-x)$ и ее частные производные первого и второго порядка. Из (2.1) следуют очевидные неравенства, которые запишем в виде леммы.

Лемма 3. *Если* $\sigma \geq 1$, *то*

$$|\Phi_\sigma| + \left|\frac{\partial}{\partial y_i}\Phi_\sigma\right| + \left|\frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j}\Phi_\sigma\right| \leq Const \cdot \frac{\sigma}{r} \cdot e^{\sigma(y_1-x_1)}\left(\frac{\sigma^2}{r^2}+\frac{\sigma}{r}+1\right), \quad (2.15)$$

$$\left|\frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial \sigma}\right| + \left|\frac{\partial}{\partial \sigma}\frac{\partial}{\partial y_i}\Phi_\sigma\right| + \left|\frac{\partial}{\partial \sigma}\frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j}\Phi_\sigma\right| \leq Const \cdot \sigma^2 \cdot e^{\sigma(y_1-x_1)}, \quad (2.16)$$

здесь постоянные не зависят от σ, x, y.

По определению $N(y,x,\sigma)$, $M(y,x,\sigma)$ и из неравенств (2.15)-(2.16) получим

$$|N(,x,\sigma)| \leq Const \cdot r^{-2}\sigma^2 \exp\sigma(y_1-x_1), \quad (2.17)$$

$$|M(,x,\sigma)| \leq Const \cdot r^{-3}\sigma^3 \exp\sigma(y_1-x_1), \quad (2.18)$$

Из леммы 3 видно, что в формуле (2.7) интеграл по части $\partial D \backslash S$, где $y_1 = 0$ стремится к нулю, когда $\sigma \to \infty$ и $x_1 > 0$; стремление будет равномерным на компактах из R_3^+. Отсюда следует формула (2.12). Эквивалентность формул продолжения (2.12) и (2.13) вытекает из (2.11).

Доказательство теоремы 2. *Необходимость.* Пусть функция $E(y), H(y) \in A(D) \cap C(D \cup S_0)$ удовлетворяет на S_0 условиям (1.2), где $f(y), g(y) \in L(S)$, и пусть $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Обозначим

$$S_\varepsilon = \{y : y \in R^3_+,\ \ y_1 = \varepsilon\} \bigcap D,\ \ S_\varepsilon^+ = S \bigcap \{y : y \in R^3_+,\ \ y_1 \geq \varepsilon\}.$$

Так как $F_\sigma(y-x)$ является фундаментальным решением уравнения Гельмгольца в $R^3_+ \bigcup \{y_1 = 0\}$, $\sigma \geq 0$, то согласно формуле Стрэттона-Чу, применяемой в области с границей $S_\varepsilon \bigcup S_\varepsilon^+$, получаем

$$\int\limits_{S_\varepsilon^+}\left[-f(y)N_1(y,x,\sigma) + \frac{1}{ik}g(y)M_1(y,x,\sigma)\right]dS_y =$$

$$\int\limits_{S_\varepsilon}\left[-f(y)N_1(y,x,\sigma) + \frac{1}{ik}g(y)M_1(y,x,\sigma)\right]dS_y,$$

где направление нормалей к S_ε и S_ε^+ согласованы. Используя это равенство, для $J_i(\sigma,x)$, $(i = 1,2)$ имеем

$$J_i(\sigma,x) = \int\limits_{S \backslash S_\varepsilon^+}\left[-f(y)N_1(y,x,\sigma) + \frac{1}{ik}g(y)M_1(y,x,\sigma)\right]dS_y +$$

$$+\int\limits_{S_\varepsilon}\left[-N_1(y,x,\sigma)+\frac{1}{ik}g(y)M_1(y,x,\sigma)\right]dS_y.$$

Оценим интегралы. В первом интеграле $y_1 \leq \varepsilon$, а во втором $y_1 = \varepsilon$. Используем оценки для $\frac{d\Phi_\sigma(y-x)}{d\sigma} = e^{-\sigma x_1}F_\sigma(y-x)$. Из леммы 3 с учетом того, что $f(y), g(y) \in L(S)$, получаем

$$|J_i(\sigma,x)| \leq C_\varepsilon \sigma^2 e^{\varepsilon\sigma},\ \ \sigma \geq 1,\ \ x \in R^3_+,$$

постоянная C_ε не зависит от σ. Так как $\varepsilon > 0$ любое, отсюда следует (2.14) ($x_1 > 0$).

Достаточность. Определим функции $J_i(\sigma,x)$ формулой (2.13) эквивалентной (2.12). Из (2.14) заключаем, что первое слагаемое в правой части (2.13) представляет собой аналитическую функцию в полупространстве $x_1 > 0$ как предел равномерно сходящейся последовательности аналитических функций

$$E_n(x) = \int\limits_0^\infty J_1(x,\sigma)d\sigma,\ \ H_n(x) = \int\limits_0^\infty J_2(x,\sigma)d\sigma,\ \ n = 1,2,....$$

Второе слагаемое представляет собой как интеграла типа Стрэттона - Чу и изображает одно решение в D и другое в $D_1 = R^3_+\backslash D$. Поэтому правая часть в (2.13) определяет в D и D_1 два различных решения $E^+(x)$ и $E^-(x)$, $H^+(x)$ и $H^-(x)$ соответственно. Если x_1, x_2 две точки на нормали в точке $x \in S_0$, симметричные относительно точки x, то

$$\lim_{x_1\to x}[E^+(x_1) - E^-(x_2)] = E(x),\ \ \lim_{x_1\to x}[H^+(x_1) - H^-(x_2)] = H(x),$$

причем предельные соотношения выполняются равномерно относительно x на каждой компактной части S_0. Из равенства (2.12), которое эквивалентно (2.13), видим, что $E^-(x) = 0$, $H^-(x) = 0$, когда $x_1 > \max\limits_{y\in D} y_1$. Согласно теореме единственности $E^-(x) \equiv 0$, $H^-(x) \equiv 0$, $x \in D_1$. Ясно, что $E^-(x)$, $H^-(x)$ гладко продолжаются на $D_1 \bigcup S_0$. Поэтому $E^+(x)$, $H^+(x)$ также непрерывно продолжаются $D_1 \bigcup S_0$ (см.[18], §33). Положим, $[n(x), E^+(x)] = f(x)$, $[n(x), H^+(x)] = g(x)$, $x \in S_0$. Тогда $E^+(x)$, $H^+(x)$ гладко продолжаются на $D \bigcup S_0$.

Тем самым $[n(x), E^+(x)] = f(x)$, $[n(x), H^+(x)] = g(x)$, $x \in S_0$, где $E(x) = E^+(x)$, $H(x) = H^+(x)$, $x \in D \bigcup S_0$. Теорема 2 доказана.

В заключение автор выражает признательность профессору Ш.Ярмухамедову за постановку задачи и обсуждения в процессе ее решения.

Литературы

1. Фок В.А., Куни Ф.М. О введение "гасящей"функции в дисперсионные соотношения // ДАН СССР. 1959. Т.127. №6. С.1195-1198.

2. Carleman T. Les fonctions guasianalytiques. Paris: Gauthier-Villar, 1926.

3. Голузин Г.М., Крылов В.И. Обобщенная формула Карлемана и ее приложение к аналитическому продолжению функций // Мат. сб. 1933. Т.40, №2, С. 144-149.

4. Айзенберг Л.А. Формулы Карлемана в комплексном анализе. Новосибирск: Наука, 1990.

5. Ярмухамедов Ш. О продолжении решения уравнения Гельмгольца// Докл. РАН. 1997. Т.357. №3. С.320-323.

6. Ярмухамедов Ш. Теория Коши в математических задачах теории упругости // Докл. РАН. 1997. Т.357. №5. С.628-630.

7. Ярмухамедов Ш. О продолжении решения уравнения теории упругости // Докл. РАН. 1998. Т.358. №1. С.54-56.

8. Ярмухамедов Ш. О гармоническом продолжении дифференцируемых функций, заданных на куске границы// Сибирский Математический Журнал. 2002. Т.43. №1.С.228-239.

9. Лаврентьев М.М. О задаче Коши для уравнения Лапласа // Изв. АН СССР Сер. мат. 1956. Т. 20, №6. С. 819-842.

10. Лаврентьев М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1962.

11. Латтес Р., Лионс Ж. Л. Метод квазиобращения и его приложения. М. : Мир, 1970.

12. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.

13. Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М. :Наука, 1978.

14. Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболичекого типа.- М.: Наука, 1978.

15. Сатторов Э., Мардонов Дж. Задача Коши для системы уравнений Максвелла // Сиб. Матем. Журн. 2003. Т.44, №4. С.

16. Ярмухамедов Ш. Интегральные представления гармонических функций многих переменных // ДАН СССР, 1977. Т.235, №2, С.281-283.

17. Stratton J.A., Chu L.J. Diffraction theory of electromagnetic waves // Phys. Repav. 1939. V. 56. P.99-107.

18. Жданов М.С. Аналоги интеграла типа Коши в теории геофизических полей. М. Наука, 1984.

Самаркандский государственный университет им. А.Навои

Дата поступления 10.03.05

Uzbek Mathematical
Journal, 2006,№1, pp.93-100

УДК 517.95

Обобщенный принцип локализации спектральных разложений по произвольной системе одного эллиптического оператора с дискретным спектром

А.Сейтов

Maqolada diskret spektrli singulyar operatorning xos funksiyalari bo‘yicha yoyilgan spektral yoyilma uchun umumlashgan lokalizatsiya prinsipi o‘rganilgan.

In the paper the problem of lokalization of spectral dicomposition on any systems of one singular operator with a discrete spectrum are studied.

Пусть G -произвольная N - мерная область. В настоящей работе мы рассмотрим обобщенный принцип локализации спектральных разложений по произвольный системы одного эллиптического оператора с дискретным спектром. Эллиптический оператор A имеет вид $A = (-\triangle + q(x))^m$, где $q(x) \in C_0^\infty$. В данной работе мы отходим от классической постановки вопроса о принципе локализации средних Рисса ряда Фурье функции $f(x)$. Предполагаем, что разлагаемая функция $f(x)$ обращается в нуль в некоторой окресности D произвольной лежащей внутри Ω точки x_0. Но мы изучаем условия обеспечивающие не сходимость средних Рисса ряда Фурье $f(x)$ в самой точке x_0, а лишь сходимость указанных средних почти всюду в окрестности D этой точки. Пусть $\{u_k(x)\}$-произвольная система собственных функций и $\{\lambda_k\}$ собственных чисел эллиптического оператора A. Нам удается доказать, что если функция $f(x)$ во всей области G принадлежит только классу L_2, то для почти всех точек x той принадлежащей $\Omega \subset G$ области D, в которой $f(x)$ обращается в нуль, средние Рисса $\sigma_\lambda^s(x,f)$ ряда Фурье функции $f(x)$ любого положительного порядка s не только стремятся к нулю при $\lambda \to \infty$, но имеют порядок $\sigma_\lambda^s(x,f) = o(\lambda^{-\frac{s}{2m}})$.

Средние Рисса порядка s функции $f(x)$ определяются равенством

$$\sigma_\lambda^s(x,f) = \sum_{\lambda_k<\lambda} f_k u_k(x) \left(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda}\right)^s. \tag{1}$$

Теорема. *$\{u_k(x)\}$-произвольная система собственных функции оператора A и пусть у собственных чисел $\{\lambda_k\}$ отсутствуют конечные точки сгущения $f \in L_2(G)$ и $f(x) = 0$ для почти всех $x \in D$. Тогда для средних Рисса (1) функции $f(x)$ любого положительного порядка s почти всюду в D справедлива следущая оценка*

$$\sigma^s_\lambda(x, f) = o(\lambda^{-\frac{s}{2m}}). \tag{2}$$

Лемма 1. *Пусть выполнены условия теоремы. Тогда для почти всех $x \in D$ и для любого $s > -\frac{1}{2}$ средние Рисса функции $f(x)$ удовлетворяет неравенству*

$$\int_0^\infty \lambda^{\frac{s}{m} - \frac{2m-1}{2m}} [\sigma^s_\lambda(x, f)]^2 d\lambda < \infty. \tag{3}$$

Доказательство. Вместо риссовских средних будем рассматривать модифицированные риссовские средние

$$\tau^s_\mu(x) = \sum_{\sqrt[2m]{\lambda_k} < \mu} f_k u_k(x) \left(1 - \frac{\lambda_k}{\mu^{2m}}\right)^s. \tag{4}$$

Очевидно, что $\tau^s_\mu(x) = \sigma^s_{\mu^{2m}}(x)$. Таким образом для доказательства неравенства (3) достаточно установить неравенство

$$\int_0^\infty \mu^{2s} [\tau^s_\mu(x)]^2 d\mu < \infty \tag{5}$$

для любого значения $s > -\frac{1}{2}$ и для почти всех $x \in D$.

Рассмотрим функцию

$$v(r) = \begin{cases} \Gamma(s+1) 2^s (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \mu^{\frac{N}{2} - s} r^{-\frac{N}{2} - s} J_{-\frac{N}{2} + s}(r\mu) & \text{при} \quad r < R \\ 0 & \text{при} \quad r \geqslant R \end{cases} \tag{6}$$

Коэффициент Фурье функции (6) по системе $\{u_k(x)\}$ как известно (см. [8], стр. 72 формула (27)), имеет вид

$$v_k = (2\pi)^{\frac{N}{2}} u_k(x) \nu_k^{\frac{2-N}{2}} \int_0^R v(r) J_{\frac{N}{2} - 1}(r\nu_k) dr +$$

$$+ \int_0^R v(r) A(r, \nu_k) dr = \Gamma(s+1) 2^s u_k(x) \mu^{\frac{N}{2} - s} \nu_k^{1 - \frac{N}{2}} \int_0^R J_{\frac{N}{2} + s}(r\mu) J_{\frac{N}{2} - 1}(r\nu_k) r^{-s} dr +$$

$$+ \Gamma(s+1) 2^s u_k(x) \mu^{\frac{N}{2} - s} \int_0^R J_{\frac{N}{2} + s}(r\mu) A(r, \nu_k) r^{-s} dr, \tag{7}$$

где $\nu_k = \lambda^{\frac{1}{2m}} > 0$.

$\frac{N-1}{2}$- кратно интегрируем по частям и используем рекурентные соотношения для функции Бесселя. В результате получим

$$v_k = \Gamma(s{+}1)2^s u_k(x)\mu^{\frac{N}{2}-s}\nu_k^{1-\frac{N}{2}} \left\{ - \left[\sum_{p=1}^{\frac{N-1}{2}} (\frac{\nu_k}{\mu})^p \frac{J_{\frac{N}{2}+s-p}(r\mu) J_{\frac{N}{2}-p}(r\nu_k)}{r^{-s}\nu_k} \right]_{r=0}^{r=R} \right\} +$$

$$+ \left(\frac{\nu_k}{\mu}\right)^{\frac{N-1}{2}} \int_0^R J_{\frac{N}{2}+s}(r\mu) J_{\frac{N}{2}-1}(r\nu_k) r^{-s} dr +$$

$$+\Gamma(s+1)2^s(2\pi)^{-\frac{N}{2}}\mu^{\frac{N}{2}-s} \int_0^R J_{\frac{N}{2}+s}(r\mu) A(r,\nu_k) r^{-s} dr. \qquad (8)$$

Первый член в правой части (8) при $r = 0$ обращается в нуль, и мы приходим к следующему равенству

$$v_k = -\Gamma(s+1)2^s u_k(x) \sum_{p=1}^{\frac{N-1}{2}} \nu_k^{p-\frac{N}{2}} \mu^{\frac{N}{2}-p-s} J_{\frac{N}{2}-p+s}(R\mu) J_{\frac{N}{2}-p}(R\nu_k) R^{-s} +$$

$$+\nu_k^{\frac{1}{2}} f_k \mu^{\frac{1}{2}-s} \int_0^R J_{\frac{1}{2}+s}(r\mu) J_{-\frac{1}{2}}(r\nu_k) r^{-s} dr +$$

$$+\Gamma(s+1)2^s(2\pi)^{-\frac{N}{2}}\mu^{\frac{N}{2}-s} \int_0^R J_{\frac{N}{2}+s}(r\mu) A(r,\nu_k) r^{-s} dr. \qquad (9)$$

Умножая равенство (9) на коэффициент Фурье f_k придадим ему вид

$$f_k v_k = -\Gamma(s+1)2^s f_k u_k(x) \sum_{p=1}^{\frac{N-1}{2}} \nu_k^{p-\frac{N}{2}} \mu^{\frac{N}{2}-p-s} J_{\frac{N}{2}-p+s}(R\mu) J_{\frac{N}{2}-p}(R\nu_k) R^{-s}$$

$$+\Gamma(s+1)2^s f_k u_k(x) \nu_k^{\frac{1}{2}} \mu^{\frac{1}{2}-s} \int_0^R J_{\frac{1}{2}+s}(r\mu) J_{-\frac{1}{2}}(r\nu_k) r^{-s} dr +$$

$$+\Gamma(s+1)2^s(2\pi)^{-\frac{N}{2}} f_k \mu^{\frac{N}{2}-s} \int_0^R J_{\frac{N}{2}+s}(r\mu) A(r,\nu_k) r^{-s} dr. \qquad (10)$$

Просуммируем теперь равенство (10) по всем номерам k от 1 до ∞. В силу равенства Парсеваля при суммировании по всем номерам k левой части (10) получим интеграл

$$\int_G v(r) f(y) dy,$$

который равен нулю для любой точки x из $D' \subset\subset D$. При суммировании по всем номерам k слагаемых стоящих в правой части (10) получим равенство

$$\Gamma(s+1)2^s\mu^{\frac{1}{2}-s}\sum_{k=1}^{\infty} f_k u_k(x)\nu_k^{\frac{1}{2}}\int_0^R J_{\frac{1}{2}+s}(r\mu)J_{-\frac{1}{2}}(r\nu_k)r^{-s}dr+$$

$$\Gamma(s+1)2^s(2\pi)^{-\frac{N}{2}}\mu^{\frac{N}{2}-s}\sum_{k=1}^{\infty} f_k\int_0^R J_{\frac{N}{2}+s}(r\mu)A(r,\nu_k)r^{-s}dr=0. \qquad (11)$$

справедливое для почти всех точек x из области D'.

Теперь для любого k, для которого $\nu_k \neq \mu$, применим к интегралу, стоящему в правой части (11), преобразование вида $\int_0^R = \int_0^\infty - \int_R^\infty$. Заметим, что

$$\Gamma(s+1)2^s\mu^{\frac{1}{2}-s}\nu_k^{\frac{1}{2}}\int_0^\infty J_{\frac{1}{2}+s}(r\mu)J_{-\frac{1}{2}}(r\nu_k)r^{-s}dr=$$

$$=\begin{cases}\left(1-\frac{\nu_k}{\mu}\right)^s, & \text{при} \quad \nu_k<\mu,\\ 0, & \text{при} \quad \nu_k\geq\mu.\end{cases} \qquad (12)$$

Обозначим через $I^{\mu}_{\nu_k}(R)$ величину

$$I^{\mu}_{\nu_k}(R)=\begin{cases}\mu^{\frac{1}{2}}\nu_k^{\frac{1}{2}}\int_R^\infty J_{\frac{1}{2}+s}(\mu r)J_{-\frac{1}{2}}(r\nu_k)r^{-s}dr & \text{при} \quad \nu_k\neq\mu,\\ \mu^{\frac{1}{2}}\nu_k^{\frac{1}{2}}\int_0^R J_{\frac{1}{2}+s}(\mu r)J_{-\frac{1}{2}}(r\nu_k)r^{-s}dr & \text{при} \quad \nu_k=\mu,\end{cases} \qquad (13)$$

(см.[6] стр. 439). Тогда

$$\tau^s_\mu(x)=\sum_{\nu_k<\mu} f_k u_k(x)\left(1-\frac{\nu_k}{\mu}\right)^s=\Gamma(s+1)2^s\mu^{-s}\sum_{k=1}^{\infty} f_k u_k(x)I^{\mu}_{\nu_k}(R)+$$

$$+\Gamma(s+1)2^s(2\pi)^{-\frac{N}{2}}\mu^{\frac{N}{2}-s}\sum_{k=1}^{\infty} f_k\int_0^R J_{\frac{N}{2}+s}(r\mu)A(r,\nu_k)r^{-s}dr.$$

В силу равенства Парсеваля

$$\int_{D'}[\tau^s_\mu(x)]^2dx\leq\int_G[\tau^s_\mu(x)]^2dx\leq\Gamma^2(s+1)2^{2s}\mu^{-2s}\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2[I^{\mu}_{\nu_k}(R)]^2+$$

$$+\Gamma^2(s+1)2^{2s}(2\pi)^{-N}\mu^{-2s}\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2[J^{\mu}_{\nu_k}(R)]^2. \qquad (14)$$

здесь $J^{\mu}_{\nu_k}(R)=\mu^{\frac{N}{2}}\int_0^R J_{\frac{N}{2}+s}(r\mu)A(r,\nu_k)r^{-s}dr$.

Для доказательства того, что при $s > -\frac{1}{2}$ почти всюду в D' справедливо неравенство (5), достаточно установить сходимость двойного интеграла

$$\int_0^\infty \mu^{2s} \left(\int_{D'} [\tau_\mu^s(x)]^2 dx \right) d\mu. \tag{15}$$

В силу неравенства (14), двойной интеграл (15) мажорируется следующей величиной

$$\int_0^\infty \mu^{2s} \left(\int_{D'} \left[\tau_\mu^s(x)\right]^2 dx \right) d\mu \le \Gamma^2(s+1)2^{2s} \sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 \int_0^\infty [I_{\nu_k}^\mu(R)]^2 d\mu +$$

$$\Gamma^2(s+1)2^{2s}(2\pi)^{-N} \sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 \int_0^\infty [J_{\nu_k}^\mu(R)]^2 d\mu. \tag{16}$$

Из неравенства (16) и из принадлежности $f(x)$ классу $L_2(G)$ вытекает, что для доказательства сходимости двойного интеграла (15) достаточно установить следующые оценки

$$\int_0^\infty [I_{\nu_k}^\mu(R)]^2 d\mu = O(1). \tag{17}$$

$$\int_0^\infty [J_{\nu_k}^\mu(R)]^2 d\mu = O(1). \tag{18}$$

Оценка (17) доказана в работе [1] (см. [1] стр. 1149-1150). Для установления оценки (18), разобъем интеграл, стоящей в левой части (18) на сумму двух интегралов

$$\int_0^\infty [J_{\nu_k}^\mu(R)]^2 d\mu = \int_0^\infty \left[\mu^{\frac{N}{2}} \int_0^R J_{\frac{N}{2}+s}(r\mu) A(r,\nu_k) r^{-s} dr \right]^2 d\mu =$$

$$= \int_0^\infty \mu^N \left[\int_0^1 J_{\frac{N}{2}+s}(r\mu) A(r,\nu_k) r^{-s} dr + \int_1^{R\mu} J_{\frac{N}{2}+s}(r\mu) A(r,\nu_k) r^{-s} dr \right]^2 d\mu.$$

Используя асимптотическую формулу для функции Бесселя и оценку для $A(r,\nu_k)$ и учитывая $|\nu_k - \mu| \le 1$, получим

$$\int_0^\infty \mu^N \left[e^{-a\nu_k} \int_0^1 J_{\frac{N}{2}+s}(x) \frac{x^{-\frac{N}{2}-s}}{\mu^{-\frac{N}{2}-s}} \frac{dx}{\mu} + e^{-a\nu_k} \int_1^{R\mu} J_{\frac{N}{2}+s}(x) \frac{x^{-\frac{N}{2}-s}}{\mu^{-\frac{N}{2}-s}} \frac{dx}{\mu} \right]^2 d\mu \le$$

$$\le C \int_0^\infty \mu^{N-1} e^{-a(\mu-1)} d\mu = O(1). \tag{19}$$

Следовательно, доказательство леммы 1 завершено.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия теоремы и* $D' \subset\subset D$. *Тогда для любого* $s > -\frac{1}{2}$ *найдется последовательность чисел* $\{\overline{\lambda_k}\}, (n = 1, 2, ...)$ *такая, что* $(n-1)^{2m} \leq \overline{\lambda_k} \leq n^{2m}$ *и для почти всех* x *из* D' *справедлива оценка*

$$\sigma^s_{\overline{\lambda}}(x, f) = o(\overline{\lambda}^{-\frac{s}{2m}}). \tag{20}$$

Доказательство. При доказательстве леммы 1 для любого $s > \frac{1}{2}$ нами установлена сходимость "двойного"интеграла (16), который эквивалентен следующему "двойному" интегралу

$$\int_0^\infty \lambda^{\frac{s}{m} - \frac{2m-1}{m}} \left(\int_{D'} [\sigma^s_\lambda(x)]^2 dx \right) d\lambda < \infty. \tag{21}$$

Представляя интеграл (21) в виде суммы

$$\int_0^\infty \lambda^{\frac{s}{m} - \frac{2m-1}{m}} \left(\int_{D'} [\sigma^s_\lambda(x)]^2 dx \right) d\lambda =$$

$$= \sum_{n=1}^\infty \int_{(n-1)^{2m}}^{n^{2m}} \left\{ \lambda^{\frac{s}{m}} \int_{D'} [\sigma^s_\lambda(x)]^2 dx \right\} \frac{d\lambda}{\sqrt[2m]{\lambda}} \tag{22}$$

и применяя к каждому интегралу формулу среднего значения, получим, что найдется значение $\overline{\lambda_k}$ такое, что $(n-1)^{2m} \leq \overline{\lambda_k} \leq n^{2m}$ и

$$\int_{(n-1)^{2m}}^{n^{2m}} \left\{ \lambda^{\frac{s}{m}} \int_{D'} [\sigma^s_\lambda(x)]^2 dx \right\} \frac{d\lambda}{\sqrt[2m]{\lambda}} =$$

$$= \int_{D'} \lambda^{\frac{s}{m}} [\sigma^s_\lambda(x)]^2 dx \int_{(n-1)^{2m}}^{n^{2m}} \frac{d\lambda}{\sqrt[2m]{\lambda}} = C \int_{D'} [\overline{\lambda_k}^{\frac{s}{2m}} \sigma^s_{\overline{\lambda}}(x)]^2 dx. \tag{23}$$

Из сопоставления (20)-(23) заключаем, что $\sum_{n=1}^\infty \int_{D'} [\overline{\lambda_k}^{\frac{s}{2m}} \sigma^s_{\overline{\lambda}}(x)]^2 dx < \infty$.

Из последнего неравенства и из теоремы Беппо-Леви вытекает, что почти всюду в D' сходится ряд $\sum_{n=1}^\infty [\overline{\lambda_k}^{\frac{s}{2m}} \sigma^s_{\overline{\lambda}}(x)]^2 dx < \infty$

Доказательство теоремы. Мы будем опираться на следующее представление риссовских средних порядка s через риссовские средние более низкого порядка δ

$$\lambda^s \sigma^s_\lambda(x) = C(s, \delta) \int_0^\lambda (\lambda - t)^{s-\delta-1} t^\delta \sigma^\delta_t(x) dt. \tag{24}$$

здесь $C(s, \delta) = \Gamma(s+1)[\Gamma(s-\delta)\Gamma(\delta+1)]^{-1}, s > \delta > -\frac{1}{2}$.

Из представления (24) вытекает, в частности, что

$$\frac{d}{d\lambda}[\lambda^s\sigma^s_\lambda] = \lambda^{s-1}\sigma^{s-1}_\lambda \text{ (при любом } s > \frac{1}{2}). \tag{25}$$

Пусть λ и $\overline{\lambda}$- любые два значения переменной λ, связанные неравенством $|\lambda-\overline{\lambda}| < C\sqrt[2m]{\lambda}$, где C-достаточно большое фиксированное число. В силу леммы для доказательства справедливости почти всюду в D' оценки (20) достаточно доказать, что для указанных выше λ и $\overline{\lambda}$ почти всюду в D' справедлива оценка

$$\lambda^{\frac{s}{m}}\sigma^s_\lambda(x) - \overline{\lambda}^{\frac{s}{m}}\sigma^s_{\overline{\lambda}}(x) = o(\lambda^{\frac{s}{2m}}). \tag{26}$$

Для установления оценки (26) рассмотрим отдельно два случая: 1)$s > \frac{1}{2}$, 2)$0 < s \leq \frac{1}{2}$

В случае $s > \frac{1}{2}$, интегрируя соотношение (25) по λ в пределах от $\overline{\lambda}$ до λ, где $|\lambda-\overline{\lambda}| < C\sqrt[2m]{\lambda}$, будем иметь

$$\lambda^{\frac{s}{m}}\sigma^s_\lambda(x) - \overline{\lambda}^{\frac{s}{m}}\sigma^s_{\overline{\lambda}}(x) = \int_{\overline{\lambda}}^{\lambda} t^{\frac{s}{m}-1}\sigma^{s-1}_t(x)dt.$$

Переходя к модулям и применяя неравенство Коши-Буняковского, получим

$$\lambda^{\frac{s}{m}}\sigma^s_\lambda(x) - \overline{\lambda}^{\frac{s}{m}}\sigma^s_{\overline{\lambda}}(x) \leq \left\{\int_{\overline{\lambda}}^{\lambda} t^{\frac{s}{m}-\frac{3}{2}}[\sigma^{s-1}_t(x)]^2dt\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\int_{\overline{\lambda}}^{\lambda} t^{\frac{s}{m}-\frac{1}{2}}dt\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{27}$$

Теперь остается заметить, что в силу неравенства $|\lambda-\overline{\lambda}| < C\sqrt[2m]{\lambda}$, справедлива оценка

$$\left\{\int_{\overline{\lambda}}^{\lambda} t^{\frac{s}{m}-\frac{1}{2}}dt\right\}^{\frac{1}{2}} = O(\lambda^{\frac{s}{2m}}), \tag{28}$$

а из предположений $s > -\frac{1}{2}$ и из сходимости интеграла (3) для любого $s > -\frac{1}{2}$ вытекает, что

$$\left\{\int_{\overline{\lambda}}^{\lambda} t^{\frac{s}{m}-\frac{3}{2}}[\sigma^{s-1}_t(x)]^2dt\right\}^{\frac{1}{2}} = O(1). \tag{29}$$

Из сопоставления соотношений (27)-(29)заключаем, что при $s > \frac{1}{2}$ оценка (26) доказана. Для завершения доказательства теоремы остается установить оценку (27) для случая $0 < s \leq \frac{1}{2}$. Из соотношения (24), взятого при $\delta = \frac{s}{m} - \frac{1}{2}$, получим, что

$$|\lambda^{\frac{s}{m}}\sigma_\lambda^s(x)-\overline{\lambda}^{\frac{s}{m}}\sigma_{\overline{\lambda}}^s(x)|\leq C\left(\frac{s}{m},\frac{s}{m}-\frac{1}{2}\right)\int_0^\lambda(\lambda-t)^{-\frac{1}{2}}t^{\frac{s}{m}-\frac{1}{2}}\sigma_t^{s-\frac{1}{2}}(x)dt-$$

$$-\int_0^{\overline{\lambda}}(\overline{\lambda}-t)^{-\frac{1}{2}}t^{\frac{s}{m}-\frac{1}{2}}\sigma_t^{s-\frac{1}{2}}(x)dt]. \qquad (30)$$

Не ограничивая общности, можем считать, $\overline{\lambda}\leq\lambda$, так что $0\leq\lambda-\overline{\lambda}\leq C\sqrt[2m]{\lambda}$. Тогда неравенство (30) можно записать в следующем виде:

$$|\lambda^{\frac{s}{m}}\sigma_\lambda^s-\overline{\lambda}^{\frac{s}{m}}\sigma_{\overline{\lambda}}^s|\leq C\left(\frac{s}{m},\frac{s}{m}-\frac{1}{2}\right)[I_1+I_2+I_3],$$

где

$$I_1=\int_0^{\lambda-2(\lambda-\overline{\lambda})}[(\lambda-t)^{-\frac{1}{2}}-(\overline{\lambda}-t)^{-\frac{1}{2}}]t^{\frac{s}{m}-\frac{1}{2}}\sigma_t^{s-\frac{1}{2}}(x)dt.$$

$$I_2=\int_{\lambda-2(\lambda-\overline{\lambda})}^{\lambda}(\lambda-t)^{-\frac{1}{2}}t^{\frac{s}{m}-\frac{1}{2}}\sigma_t^{s-\frac{1}{2}}(x)dt,\ I_3=\int_{\lambda-2(\lambda-\overline{\lambda})}^{\overline{\lambda}}(\overline{\lambda}-t)^{-\frac{1}{2}}t^{\frac{s}{m}-\frac{1}{2}}\sigma_t^{s-\frac{1}{2}}(x)dt$$

Почти всюду в D' каждый из интегралов I_1, I_2, I_3 есть $o(\lambda^{\frac{s}{2m}})$. Это доказано в работе [1] (см.[1] стр. 1153-1155). Следовательно, доказательство теоремы завершено.

Литература

1. Ильин В.А. Дифференциальные Уравнения. 1970, Т.VI, №7, С. 1143-1158.

2. Ильин В.А. УМН. 1968, 23, №2, С. 61-120.

3. Ильин В.А., Алимов Ш.А. ДАН СССР . 1970, 190, №3.

4. Никольский С.М. Приближ. функц. мн. перемен.и теор. и влож. М. Наука. 1969.

5. Ильин В.А. Сибирский математический журнал. 1968, 9, №5, С. 1093-1106.

6. Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций. 1949, Т.I. ИЛ.

7. Харди Г.Г., Литтльвуд Дж.Е., Полиа Г. Неравенства. ИЛ, 1948.

8. Холмухамедов А.Р. Дифференциальные уравнения. 1986, Т. 22, №12, С. 2107-2117.

Национальный Университет
Узбекистана им. М.Улугбека

Дата поступления
10.06.05

Uzbek Mathematical
Journal, 2006,№1, pp.101-108

УДК 517.98

Пирсовские проекторы и свойства симметричных граней на гранево симметричных пространствах

С.Ж.Тлеумуратов

Bu maqolada simmetrik tomonlarning simmetriya orqali bog'liqligi va ekvivalentligi tadqiq qilingan. Tomoniy simmetrik fazoda Pirs proyektorlarining aksi topilgan.

In this paper we investigate relation via symmetry and equivalence of symmetric faces. The images of Peirce projections on facially symmetric spaces are found.

Введение

В этой статье рассматриваются гранево симметричные пространства, которые впервые были определены и подробно изучены Фридманом и Руссо в работах [1-2], основной целью которых является геометрическая характеризация Банаховых пространств, допускающих алгебраическую структуру. В работе [3] доказано, что предсопряженное пространство для алгебры фон-Нейман и более общих JBW^*-троек является нейтральным сильно гранево симметричным пространством. Поэтому Фридман и Руссо в основном изучали гранево симметричные пространства и получили в этих пространствах результаты, которые были раньше получены для упомянутых предсопряженных пространств. Известно, что в йордановых операторных алгебрах и в алгебрах фон-Неймана есть понятие эквивалентности проекторов. Для спектральных и симметричных множеств в [4] рассматриваются эквивалентность проективных граней. Все эти понятия эквивалентности для каждого пространства вводятся разными способами. В данной статье введено понятие связанности через симметрию и эквивалентности симметричных граней в гранево симметричные пространства и исследованы некоторые их свойства.

В §1 параграфе настоящей работы приведены необходимые определения и понятия.

В §2 показано, что в вещественном SFS пространстве ранга 1, условие STP и связанность через симметрию экстремальных точек эквивалентны. Доказано, что эквивалентность симметричных граней совпадает со связанностью через симметрию симметричных граней на слабо гранево симметричном пространстве.

Пирсовские проекторы играют значительную роль в теории йордановых операторных алгебр, алгебр фон-Неймана и JBW^*-троек. Во всех этих пространствах особенно важным является существование Пирсовских разложении, в которых каждое слагаемое является подпространством. В работе [5] показано, что образы Пирсовских проекторов в JBW^*-тройках определены через полуторалинейную форму.

В §3 аналогичный результат доказан в случае гранево симметричных пространств.

1. Предварительные сведения

Пусть Z - вещественное или комплексное нормированное пространство. Элементы $f, g \in Z$ называются ортогональными ($f \diamond g$), если $\|f \pm g\| = \|f\| + \|g\|$. Подмножества $S, T \subset Z$ называются ортогональными ($S \diamond T$), если $f \diamond g$ для всех $(f, g) \in S \times T$. Для подмножеств S из Z положим $S^\diamond = \{f \in Z : f \diamond g$ для всех $g \in S\}$ и назовем $S^\diamond$ ортогональным дополнением к S. Подмножество F выпуклого множества $Z_1 = \{f \in Z : \|f\| \leq 1\}$ называется гранью, если для $g, h \in Z_1, \lambda \in (0, 1)$ из $\lambda g + (1 - \lambda)h \in F$ следует, что $g, h \in F$. Собственная грань F единичного шара называется выставленной по норме, если $F = F_u = \{f \in Z_1 : f(u) = 1\}$ для некоторого $u \in Z^*$ с $\|u\| = 1$.

Элемент $u \in Z^*$ называется проективной единицей, если $\|u\| = 1$ и $u(g) = 0$ для всех $g \in F_u^\diamond$ (см.[1-3]).

Определение 1.1. *Выставленная по норме грань F из Z_1 называется симметричной гранью, если существует линейная изометрия S_F на Z такая, что $S_F^2 = I$, и множество неподвижных точек которой в точности совпадает с топологической прямой суммой замыкания $\overline{sp}F$ линейной оболочки грани F и ее ортогонального дополнения $F^\diamond$, т.е. совпадает с $(\overline{sp}F) \oplus F^\diamond$.*

Проективная единица u из Z^* называется геометрическим трипотентом, если F_u является симметричной гранью и $S_F^* u = u$ для симметрии S_F, соответствующей F. Через GU обозначим множество всех геометрических трипотентов Z^*.

Определение 1.2. *Нормированное пространство Z называется слабо гранево симметричным пространством (WFS - пространством), если каждая выставленная по норме грань из ∂Z_1 симметрична.*

Приведем простой пример WFS-пространства.

Пример 1 (1. Пример 1.7). Пусть единичным шаром Z_1 пространства $\mathbb{R}^2$ является правильный шестиугольник, с вершинами в точках $(\pm 1, 0)$,

$(\frac{1}{2}; \frac{\pm\sqrt{3}}{2})$, $(-\frac{1}{2}; \frac{\pm\sqrt{3}}{2})$. Граница Z_1 этого единичного шара имеет двенадцать выставленных по норме граней, которые являются симметричными. Поэтому Z является WFS- пространством. Граница единичного шара Z_1^* пространства Z^* совпадает с множеством проективных единиц. Точки

$$(\pm 1, 0), \left(\frac{1}{2}; \frac{\pm\sqrt{3}}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}; \frac{\pm\sqrt{3}}{2}\right)\ , \left(1; \frac{\pm\sqrt{3}}{3}\right),\ \left(0; \frac{\pm 2\sqrt{3}}{3}\right),\ \left(-1; \frac{\pm\sqrt{3}}{3}\right)$$

единичного шара Z_1^* являются геометрическими трипотентами.

Определение 1.3. *Слабо гранево симметричное пространство называется сильно гранево симметричным пространством (SFS - пространством), если для каждой выставленной по норме грани F из Z_1 и каждого $y \in Z^*$, $\|y\| = 1$ и $F \subset F_y$ мы имеем $S_F^* y = y$, где S_F - симметрия соответствующая F.*

Примерами SFS пространств являются гильбертово пространство, предсопряженное пространство к алгебре фон Неймана или JBW^* - алгебре и более общее, предсопряженное пространство к JBW^* - тройке. Очень простыми и наглядными примерами SFS- пространства являются пространства $\mathbb{R}^2$, единичными шарами которых являются прямоугольник или эллипс. Примером пространства являющегося WFS-пространством, но не являющегося SFS-пространством, служить пространство из примера 1.

Более того, в [6] доказано, если множества проективных единиц и геометрических трипотентов совпадают, тогда WFS является SFS пространством.

Для $u, \nu \in GU$ будем писать $u \leq \nu$, если $F_u \subset F_\nu$.

На WFS - пространстве Z по каждой симметричной грани F определяются обобщенные Пирсовские проекторы $P_k(F)$ $(k = 0, 1, 2)$ следующим образом: $P_1(F) = \frac{1}{2}(I - S_F)$ и $P_1(F)(Z) = \{f \in Z : S_F f = -f\}$; $P_0(F)$ и $P_2(F)$ проектируют Z на $F^\diamond$ и $\overline{sp}F$, соответственно так, что $P_2(F) + P_0(F) = \frac{1}{2}(I + S_F)$. Из определения обобщенных Пирсовских проекторов вытекает, что $P_2(F) + P_1(F) + P_0(F) = I$ и $P_2(F) - P_1(F) + P_0(F) = S_F$. Для каждого трипотента $u \in Z^*$, мы определим обобщенные Пирсовские проекторы $P_k(u) = P_k(F_u)$ для каждого $k \in \{0, 1, 2\}$. А также

$$U = Z^*,\ Z_k(u) = Z_k(F_u) = P_k(u)Z,\ U_k(u) = U_k(F_u) = P_k(u)^* U$$

так, что

$$Z = Z_2(u) + Z_1(u) + Z_0(u)$$

и

$$U = U_2(u) + U_1(u) + U_0(u)$$

Сжимающий проектор Q на нормированном пространстве Z называется нейтральным, если для любого $\varphi \in Z$ из $\|Q\varphi\| = \|\varphi\|$ вытекает, что $Q\varphi = \varphi$. Нормированное пространство Z называется нейтральным, если для каждой симметричной грани F соответствующий проектор $P_2(F)$ является нейтральным.

2. Некоторые свойства симметричных граней в гранево симметричном пространстве

Симметричные грани F и G из Z_1 называются связанными через симметрию в Z, если существует такая симметрия S_u на Z, что $S_uF = G$, где $u \in GU$ (обозначим $F \sim_1 G$). Очевидно, что отношение рефлексивно, симметрично, но, вообще говоря, не транзитивно. Симметричные грани F и G называются эквивалентными, если существует конечное число симметрии $S_{u_1}, S_{u_2}, \dots, S_{u_k}$, $(u_i \in GU)$ таких, что $S_{u_1}S_{u_2}\dots S_{u_k}(F) = G$ (обозначим $F \sim G$). Ясно, что из $F \sim_1 G$ следует, что $F \sim G$.

В сопряженном пространстве u и v называются связанными через симметрию в Z^*, если существует такая симметрия S_w, что $S_w^*u = v$, где $u, v, w \in GU$ (обозначим $u \sim_1 v$).

Лемма 2.1. *Если Z WFS пространство, то $F \sim_1 G$ в Z тогда и только тогда, когда $v_F \sim_1 v_G$ в Z^*.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $F \sim_1 G$ в Z, т.е. $S_uG = F$ для некоторой симметрий S_u соответствующей $u \in GU$. В силу [1.лемма 2.4] имеем, что $S_u^*v_F = v_{S_u^{-1}(F)} = v_G$. Следовательно $v_F \sim_1 v_G$.

Достаточность. Пусть $v_F \sim_1 v_G$, т.е. $S_u^*v_F = v_G$. В силу [1.Лемма 2.4] имеем, что $S_u^{-1}(F) = F_{S_u^*v_F} = F_{v_G} = G$, т.е. $S_uG = F$. Следовательно, $F \sim_1 G$. Лемма 2.1 доказана.

Определение 2.1. *Нормированное пространство называется пространством ранга 1, если не существует взаимно ортогональных элементов отличных от нуля .*

Геометрические трипотенты u и v называются коллинеарными, если $u \in P_1(F_v)^*(Z^*)$ и $v \in P_1(F_u)^*(Z^*)$. В гранево симметричном пространстве ранга 1 коллинеарность трипотентов $v(f)$ и $v(g)$ эквивалентна равенству $P_2(f)g = 0$, т.е., ортогональности в Гильбертовом пространстве. Поэтому ортонормальному базису в Гильбертовом пространстве соответствует максимальное семейство взаимно коллинеарных геометрических трипотентов.

Определение 2.2. *Говорят, что нейтральное SFS-пространство удовлетворяет условию (STP), если для любой пары экстремальных точек f и g выполняется равенство $\overline{f(v(g))} = g(v(f))$, где $\overline{f(v(g))}$ - комплексное сопряженное число для $f(v(g))$.*

Теорема 2.2. *Вещественное SFS пространство Z ранга 1 удовлетворяет условие STP тогда и только тогда, когда $f \sim_1 g$, для всех $f, g \in extZ_1$, $(f \neq -g)$.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть Z вещественное SFS пространство и для всякого $f, g \in extZ_1$, положим $\alpha = \|f + g\|$. Тогда

$$\alpha^2 = \|f + g\|^2 = \langle f + g, f + g\rangle = \langle f, f\rangle + \langle f, g\rangle + \langle g, f\rangle + \langle g, g\rangle =$$

$$= f(v(f)) + f(v(g)) + g(v(f)) + g(v(g)).$$

Отсюда из условия STP и учитывая, что $f(v(f)) = g(v(g)) = 1$, имеем что $\alpha^2 = 2(1+f(v(g))$. Поскольку Z ранга 1, то $P_0(u) = 0$. Пусть $h = (f+g)/\|f+g\| = (f+g)/\alpha$, $(f \neq -g)$ и $u = v(h)$. Тогда $S_u f = (2P_2(u)-I)f = 2P_2(u)f - f = 2f(u)h - f$. Так как $h = (f+g)/\alpha$, $u = v(h) = (v(f)+v(g))/\alpha$ и $\frac{2}{\alpha^2}(1 + f(v(g)) = 1$, то $S_u f = \frac{2}{\alpha^2}(f(v(f)) + f(v(g))(f + g) - f = \frac{2}{\alpha^2}(1 + f(v(g))(f + g) - f = g$, т.е. $S_u f = g$. Это означает, что $f \sim_1 g$.

Достаточность. Пусть Z SFS пространство и $f \sim_1 g$, для всех $f, g \in extZ_1$, т.е., $S_u f = g$. Тогда по лемме 2.1 следует $S_u^* v(f) = v(g)$ в Z^*. Поскольку Z вещественное, то $g(v(f)) = \langle g, v(f)\rangle = \langle S_u f, v(f)\rangle = \langle f, S_u^* v(f)\rangle = \langle f, v(g)\rangle = f(v(g))$, т.е., выполняется условие STP.

В случае, когда $f = -g$, имеем $f(v(g)) = \langle f, v(g)\rangle = \langle f, v(-f)\rangle = -1 = \langle g, v(-g)\rangle = \langle g, v(f)\rangle = g(v(f))$. Это показывает, что выполняется условие STP. Теорема 2.2 доказана.

Предложение 2.3. *Сильно гранево симметричное пространство Z является пространством ранга 1 тогда и только тогда, когда Z^* является пространством ранга 1.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $rankZ > 1$. Тогда существуют $f, g \in Z$ такие, что $\|f\| = \|g\| = 1$, $f \diamond g$. Поэтому в силу [1.Следствие 1.3] существуют $x, y \in Z^*$, $\|x\| = \|y\| = 1$ такие, что $f \in F_x$ и $g \in F_y$. Покажем, что $x \in GU$. Из [1. Лемма 2.8] найдется $u \in GU$ такое, что $x = u + P_0^*(u)x = u$. Поэтому $x \in GU$. Аналогично $y \in GU$. Поэтому в силу [1.Лемма 2.5] имеем, что $x \diamond y$. Следовательно $rankZ^* > 1$.

Достаточность. Пусть $rankZ^* > 1$. Тогда существуют $x, y \in Z^*$, $\|x\| = \|y\| = 1$ и $x \diamond y$. Из [1. Лемма 2.8] следует, что $x, y \in GU$. Тогда в силу [1.Лемма 2.5] вытекает, что $F_x \diamond F_y$ и $F_x \neq 0$,$F_y \neq 0$. Поэтому существуют $0 \neq f \in F_x$ и $0 \neq g \in F_y$ такие $f \diamond g$. Следовательно $rankZ > 1$. Предложение 2.3 доказана.

Определение 2.3. *Говорят, что WFS-пространство удовлетворяет условию JP, если для любой пары u, v взаимно ортогональных геометрических трипотентов выполняется равенство $S_u S_v = S_{u+v}$.*

Предложение 2.4. *Пусть Z WFS пространство с условием JP. Если геометрические трипотенты соответствующих симметрий взаимно ортогональны, то $F \sim G$ тогда и только тогда, когда $F \sim_1 G$ в Z.*

Доказательства. Достаточно показать, что из $F \sim G$ следует, что $F \sim_1 G$ в Z. Если геометрические трипотенты соответствующих симметрий взаимно ортогональны, то из [7.Лемма 2] следует, что $(\sum\limits_{i=1}^{n-1} u_i) \diamond u_n$, где $n \in \{2, 3, \ldots k\}$. В силу [1.Лемма 2.5,(5)], $\sum\limits_{i=1}^{k} u_i = u \in GU$ и из условия JP, имеем $S_{u_1} S_{u_2} \ldots S_{u_k}(F) = S_{u_1+u_2+u_3+\ldots+u_k}(F) = S_u(F) = G$ т.е., $F \sim_1 G$. Предложение 2.4 доказана.

3. Образы Пирсовских проекторов на WFS пространстве

Пусть $U-$ комплексное банахово пространство. Обозначим через $B(U)$ множество всех ограниченных операторов в U.

Пространство U называется JB^*-тройкой, если оно снабжено непрерывной полуторалинейной формой

$$U \times U \longrightarrow B(U),\ (x, y) \rightarrow D(x, y),$$

где $D(x, y)z \equiv \{xyz\}$ такой оператор, что

(a) $\{xyz\} = \{zyx\}$;

(b) $\{xy\{uvz\}\} - \{uv\{xyz\}\} = \{\{xyu\}vz\} - \{u\{vxy\}z\}$;

(c) $D(z, z)$ является эрмитовым оператором со спектром $[0; +\infty)$;

(d) $\|D(z, z)\| = \|z\|^2$ для всех x, y, z, u, v из U.

Примерами JB^*-тройки являются:

1) $M_{n\times m}$- множество всех прямоугольных матриц, относительно тройного умножения $\{xyz\} = (xy^*z + zy^*x)/2$;

2) Всякая C^*-алгебра,относительно тройного умножения $\{abc\} = (ab^*c + cb^*a)/2$;

3) Всякая JB^*-алгебра,относительно тройного умножения $\{uvw\} = (u \circ v^*) \circ w + (w \circ v^*) \circ u - (u \circ w) \circ v^*$.

JB^*-тройка U, имеющая предсопряженное банахово пространство называется JBW^*-тройкой.

В JBW^*-тройке U полуторалинейная форма $D(x, y)$ связана с Пирсовскими проекторами следующим образом

$$D(e) = P_2(e) + \frac{1}{2}P_1(e),$$

где $e-$трипотент. Кроме того из [5], известно, что

$$P_k(e)U = \{x : x \in U, D(e)x = \frac{1}{2}kx\}\ k \in \{0, 1, 2\} \tag{1}$$

Следующий результат показывает, что соотношение (1) имеет место и в случае гранево симметричных пространств.

Теорема 3.1. *Пусть Z WFS пространство и $D(u) = P_2(u) + \frac{1}{2}P_1(u)$. Тогда*

$$Z_k(u) = \{f : f \in Z, D(u)f = \frac{1}{2}kf\},\ k \in \{0, 1, 2\}. \tag{2}$$

Доказательство. Сначала покажем, что

$$Z_k(u) \subset \{f : f \in Z, D(u)x = \frac{1}{2}kf\},\ k \in \{0, 1, 2\}. \tag{3}$$

Пусть g произвольный элемент из $Z_k(u)$. Тогда $P_k(u)g = g$. Следовательно, $D(u)g = P_2(u)g + \frac{1}{2}P_1(u)g = P_2(u)P_k(u)g + \frac{1}{2}P_1(u)P_k(u)g$. Поскольку $\sum\limits_{k=0}^{2} P_k(u) = I$, то $P_k(u)P_j(u) = 0$, где $k, j \in \{0, 1, 2\}$ $(k \neq j)$. Отсюда следует,что $D(u)g = \frac{1}{2}kg$. Это означает справедливость соотношения (3).

Теперь покажем, что

$$Z_k(u) \supset \{f : f \in Z, D(u)f = \frac{1}{2}kf\},\ k \in \{0, 1, 2\}. \tag{4}$$

Пусть f произвольный элемент из Z такой,что $D(u)f = \frac{1}{2}kf$. Тогда $P_2(u)f + \frac{1}{2}P_1(u)f = \frac{1}{2}kf$. Рассмотрим три случая.

Случай 1. $k = 0$. Тогда $P_2(u)f+\frac{1}{2}P_1(u)f = 0$, и поэтому $P_2(u)(P_2(u)f+\frac{1}{2}P_1(u)f) = P_2(u)f + \frac{1}{2}P_2(u)P_1(u)f = 0$. Поскольку $P_2(u)P_1(u) = 0$ и отсюда $P_2(u)f = 0$. Следовательно, $P_1(u)f = 0$. Из $\sum\limits_{k=0}^{2} P_k(u) = I$ следует, что $P_0(u)f = f$, т.е. $f \in Z_0(u)$.

Случай 2. $k = 1$. Тогда $P_2(u)f + \frac{1}{2}P_1(u)f = \frac{1}{2}f$, и поэтому $P_2(u)f - \frac{1}{2}(I - P_1(u))f = 0 \Longrightarrow P_2(u)f - \frac{1}{2}(P_2(u) + P_0(u))f = 0 \Longrightarrow P_2(u)f - P_0(u)f = 0$. Если $P_2(u)(P_2(u)f - P_0(u)f) = 0$, то получим, что $P_2(u)f = 0$ и $P_0(u)f = 0$. Поэтому $P_1(u)f = f$, т.е. $f \in Z_1(u)$.

Случай 3. $k = 2$. Тогда $P_2(u)f + \frac{1}{2}P_1(u)f = f$. Поскольку $P_0(u)f = P_0(u)P_2(u)f + \frac{1}{2}P_0(u)P_1(u)f = 0$, $P_2(u)f = \frac{1}{2}(I + S_u)f$ и учитывая, что $S_uf = f$, получим $P_2(u)f = \frac{1}{2}(I + S_u)f = f$, т.е. $f \in Z_2(u)$.

Эти три случая показывают справедливость соотношения (4).Теорема 3.1 доказана.

Из этой теоремы вытекает следующее следствие.

Следствие 3.2. *Пусть Z WFS пространство. Тогда*

$$U_k(u) = \{x : x \in Z^*, D(u)^*x = \frac{1}{2}kx\},\ k \in \{0, 1, 2\}.$$

Литература

1. Friedman Y. and Russo B. A geometric spectral theorem// Quart.J. Math. Oxford 1986.Vol.37. №2, p. 263-277.

2. Friedman Y. and Russo B. Affine structure of facially symmetric spaces// Math. Proc. Camb. Philos. Soc. 1988. Vol.106, p.107-124.

3. Friedman Y. and Russo B. Some affine geometric aspects of operator algebras // Pac. J. Math. 1989. Vol.137, №1. p.142-174.

4. Аюпов Ш.А., Ядгоров Н.Ж. Геометрия пространства состояний модулярных йордановых алгебр // Изв. Росс. Акад. Наук. 1993. Том 57, №6, с.199-211.

5. Friedman Y. and Russo B. Structure of the predual of a $JBW^* - triple$ // J. Reine Angew. Math. 1985. V. 356, p. 67-89.

6. Ядгоров Н.Ж. Слабо и сильно гранево симметричные пространство // Докл. АН РУз, 1996. №5, С. 6-8.

7. Ибрагимов М.М.,Тлеумуратов С.Ж. Геометрические свойства геометрических трипотентов на нейтральном SFS-пространстве // Узб. мат. журн. 2004. №3, С. 35-38.

Институт математики
им. В.И.Романовского АН РУз

Дата поступления
27.01.06

Математическая жизнь

О республиканской конференции "Дифференциальные уравнения и их приложения"

А.Р.Артыков, Б.Хужаеров

27-28 октября 2005 года Самаркандский государственный университет имени Алишера Навои совместно с Самаркандским отделением Академии наук республики Узбекистан провели республиканскую научную конференцию на тему: "Дифференциальные уравнения и их приложения", посвященную 100-летию со дня рождения академика АН РУз Куклеса Исаака Самойловича.

Академик Академии наук Республики Узбекистан, заслуженный деятель науки Узбекистана, доктор физико-математических наук, профессор Куклес Исаак Самойлович являлся одним из крупнейших специалистов в области теории дифференциальных уравнений и ее применений. Его научные работы получили признание и высокую оценку как у нас в Узбекистане, так и в ближнем и дальнем зарубежье. Им внесен существенный вклад в развитие качественной теории дифференциальных уравнений и ее приложений. Он был основателем и руководителем, получившей международную известность, Самаркандской научной школы по качественной теории дифференциальных уравнений. За годы работы в Самаркандском университете, с 1947 года по 1977 год - год его кончины, И.С.Куклесом опубликовано более 100 научных статей, под его научным руководством подготовлены и защищены 33 кандидатские диссертации, шестеро из его учеников стали докторами наук. Со дня переезда из Москвы с Самарканд в 1947 году и до конца своей жизни И.С.Куклес заведовал кафедрой теоретической механики Самаркандского университета.

На пленарном заседании открытия конференции с вступительным словом выступил ректор Самаркандского университета, профессор Т.Ш.Ширинов. Коротко изложив биографию И.С.Куклеса, он особо отметил его заслуги перед Самаркандским университетом. В заключении профессор Т.Ш.Ширинов поздравил всех участников с началом конференции и пожелал успехов в работе конференции. Далее с докладом о научном наследии И.С.Куклеса выступил профессор А.Р.Артыков и с обзорным научным докладом на тему: "Проблемы вязкоупругости контактного взаимодействия"выступил академик Т.Ш.Ширинкулов. С воспоминаниями об И.С.Куклесе выступили профессора Х.Н.Нарзуллаев и М.Дж.Джуракулов и доценты И.И.Широв, Т.Н.Нуров. Гостья из Ташкента доцент Б.Раззакова приветствовала всех участников конференции от имени членов семинара по качественной теории дифференциальных уравнений при кафедре высшей математики Ташкентского технического университета, которым более тридцати лет руководит профессор Х.Р.Латипов - ученик И.С.Куклеса.

Во второй половине дня началась работа секций. Всего работало четыре секции. Секция I - Обыкновенные дифференциальные уравнения; секция II - Уравнения в частных производных; секция III - Приложения дифференциальных уравнений; секция IV - Информационные технологии. Ввиду того, что желающих выступить с докладами во второй и третьей секциях оказалось достаточно много, эти секции пришлось разбить на четыре подсекции, по две в каждой секции.

География участников конференции такова. Тематику своих докладов по электоронной почте прислали: из Ташкента - 12 человек, из Джиззака - 9 человек, из Намангана - 7, из Бухары - 5, из Термеза - 4, из Гулистана - 4, из Карши - 2, из Навои -1, из Нью-Йорка - 1, но не все желающие участвовать в работе конференции смогли приехать в Самарканд. Все остальные участники - сотрудники Самаркандских вузов и научных центров.

Всего было сделано 112 докладов.

Наибольший интерес в обсуждениях на конференции вызвали следующие доклады: 1) Особые точки уравнений и их разрешения (А.С.Солеев); 2) Об одной обратной задаче Коши для волнового уравнения (И.А.Икромов); 3) Применения нейронной сети (И.И.Жуманов с учениками); 4) Задачи оптимального управления (С.Отакулов с учениками) и др.

В конце работы конференции все ее участники единодушно согласились с тем, что такого рода конференции необходимы для встреч, общений друг с другом, обсуждений различных задач современной математики, и приняли решение о том, что конференции по дифференциальным уравнениям необходимо проводить в масштабе республики не реже одного раза в три года при соответствующих научных центрах нашей республики.

Материалы конференции опубликованы в 2-х томах. Желающих получить Материалы просим обратиться по адресу: 703004, г. Самарканд, Университетский бульвар, 15. тел. 8-3662-33-46-85. Можно заказать электронную версию Материалов на адрес: rxx05@mail.ru ; rxx1961@samdu.uz

Содержание

Математическая жизнь

Mundarija

Matematika hayotidan

Регистр. №00110. Сдано в набор 08.02.06г. Подписано к печати 15.03.06 г.
Формат 60×90 1/16. Гарнитура литературная. Печать офсетная.
Усл.-печ.л. 7,0. Тираж 200. Заказ №36

Издательство "Фан"АН РУз: 100047, Ташкент, ул. акад. Я.Гулямова, 70
Отпечатано в ООО "Арнапринт" г.Ташкент, ул. Х.Байкаро, 41
Институт математики им. В.И.Романовского АН РУз: 100125,

Ташкент, Академгородок, ул. Ф.Ходжаева, 29.