O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI FANLAR AKADEMIYASI
V.I.ROMANOVSKIY NOMIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI

O‘ZBEKISTON MATEMATIKA JURNALI

Jurnalga 1957 yilda asos solingan (1991 yilgacha "O‘zbekiston fanlar akademiyasining axboroti. Fizika-matematika fanlari seriyasi"deb nomlangan). Yilda 4 marta chiqadi

3. 2006

УЗБЕКСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

УзМЖ

Основан в 1957 г. (до 1991 г. под названием "Известия Академии наук Узбекистана. Серия физико-математических наук"). Выходит 4 раза в год

ТАШКЕНТ. ИЗДАТЕЛЬСТВО "ФАН"АКАДЕМИИ НАУК РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН. 2006

Адрес редколлегии: 100125. Ташкент, Ф.Ходжаева, 29,
Институт математики АН РУз,
телефон: 162-75-44

Адрес редакции: 100047, Ташкент, ул. акад. Я.Гулямова, 70,
телефон: 133-41-88

Uzbek Mathematical
Journal, 2006,№3, pp.3-6

УДК 517.977.1

Локальная 0-управляемость систем с радиальной нелинейностью

Б.А.Абдурахмонов

Mazkur maqolada radial nochiziqli sistemalar bir sinfining lokal 0-boshqariluvchanligi uchun zarur va yetarli shart topilgan.

In the paper, necessary and sufficient condition is found for a class of systems with radial nonlinearity to be local 0-controllability.

Как хорошо известно, для линейных систем проблемы управляемости разработаны достаточно полно. А изучение 0-управляемости нелинейных систем до сих пор остается сложной проблемой. В настоящей работе найдено необходимое и достаточное условие для локальной 0-управляемости для одного класса систем с радиальной нелинейностью.

Рассматривается нелинейная управляемая система вида

$$\dot{x} = Ax + \varphi(x)x + Bu, \tag{1}$$

где A и B - постоянные матрицы порядка $n\times n$ и $n\times m$ соответственно, u - вектор управления, $u \in R^m$, $\varphi(x)$ - функция, определенная и локально-липшицевая в некоторой окрестности точки 0, $\varphi(0) = 0$. Кусочно-непрерывная функция $u(t)$, определенная на отрезке $[t_0,\ t_1]$, $(t_1 > t_0)$, называется допустимым управлением. Как обычно [1], предполагается, что допустимые управления односторонне непрерывны в точках $t_0,\ t_1$ и непрерывны справа в точках разрыва. Близкие по формулировке задачи рассмотрены в работах [3]-[5]. Здесь получено необходимое и достаточное условие локальной 0-управляемости на основе метода разделения [6].

Пара $(x(t),\ u(t))$ называется допустимым процессом для системы (1), если $u(t)$ - допустимое управление, а функция $x(t)$ непрерывна на всем отрезке $[t_0,\ t_1]$, дифференцируема во всех точках $t \in (t_0, t_1)$ за исключением точек разрыва $u(t)$ и удовлетворяет уравнению

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \varphi(x(t))\, x(t) + Bu(t)$$

всюду, где существует производная.

По определению, допустимый процесс $(x(t),\ u(t))$ переводит систему (1) из точки x_0 в положение x_1 , если выполняются равенства $x(t_0) = x_0,\ \ x(t_1) = x_1$.

Для решения $x(t)$ системы (1), удовлетворяющего начальному условию $x(t_0) = x_0$ и соответствующего допустимому управлению $u(t)$, имеет место аналог формулы Коши:

$$x(t) \,=\, \tau^{-1}(t,x_0)\left[e^{At}x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}\,\tau(s,x_0)Bu(s)ds\right] \qquad (2),$$

где функция $\tau(t,\, x_0)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$\tau(t,x_0) = 1 - \int\limits_{t_0}^{t} \varphi\left[\tau^{-1}(s,x_0)(e^{As}x_0 + \int\limits_{t_0}^{s} e^{A(s-\theta)}\tau(\theta,x_0)\,Bu(\theta)d\theta)\right]\tau(s,x_0)ds.$$

Область G нуль-управляемости системы (1) определяется как множество начальных точек $x_0 \in R^n$, каждую из которых можно перевести в точку $x_1 = 0$ посредством допустимых управлений $u(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$ (Этот отрезок вообще говоря может зависеть от самого управления). Если G содержит открытую окрестность точки $x_1 = 0$, то говорят, что система (1) локально 0-управляема [2].

Теорема. *Система (1) локально 0-управляема тогда и только тогда, когда ранг* $(n \times nm)$ *-матрицы*

$$W = \left[B,\, AB,\ A^2B,\, \cdots,\, A^{n-1}B\right]$$

равен n.

Доказательство. Н е о б х о д и м о с т ь. Предположим противное, т.е. система (1) локально 0-управляема (существует такое положитель-ное число δ , что фазовую точку можно перевести из каждого положения $x_0,\ \ |x_0| < \delta$, в начало координат). Предположим, что $rank\,W < n$. Из последнего неравенства вытекает, что тогда строки матрицы W линейно зависимы. Другими словами, существует ненулевой постоянный вектор $z,\ z \in R^n$, такой, что

$$z\left[B,\, AB,\ A^2B,\, \cdots,\, A^{n-1}B\right] = 0$$

или

$$zB \,=\, zAB \,=\, zA^2B \,=\, \cdots \,=\, zA^{n-1}B \,=\, 0 \qquad (3).$$

Как утверждается теореме Гамильтона-Кэли, матрица А удовлетворяет своему характеристическому уравнению

$$A^n = c_1A^{n-1} + c_2A^{n-2} + \,\cdots\, + c_nI,$$

где $c_1, c_2, \cdots, c_n$ - некоторые действительные числа. Отсюда , в силу (3)

$$zA^nB = c_1zA^{n-1}B + c_2zA^{n-2}B + \cdots + c_nzB = 0.$$

Но тогда, по индукции, $zA^{n+k}B = 0$ для всех $k = 1, 2, \ldots$.

Таким образом,

$$ze^{At}B = z\left[I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \ldots\right]B = 0 \tag{4}$$

для любого t.

Пусть начальная точка x_0 такова, что $z \cdot x_0 \neq 0$, $|x_0| < \delta$. Покажем, что точку x_0 невозможно перевести в начало координат. Предположим противное - пусть существует такое допустимое управление $u(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, которое переводит систему из начального положения x_0 в начала координат, так что $x(t_1) = 0$. Следовательно, соответствующее решение системы (1) существует на отрезке $[t_0, t_1]$, что равносильно тому, что $\tau(t, x_0) \neq 0$ при всех t, $t \in [t_0, t_1]$.

В силу формулы (2) имеем

$$e^{At_1}x_0 + e^{At_1}\int_{t_0}^{t_1} e^{-As}\,\tau(s, x_0)Bu(s)ds = 0$$

или

$$x_0 + \int_{t_0}^{t_1} e^{-As}\,\tau(s, x_0)Bu(s)ds = 0.$$

Умножая скалярно слева последнее равенство на вектор z , будем иметь

$$z \cdot x_0 + \int_{t_0}^{t_1} z \cdot e^{-As}\,\tau(s, x_0)Bu(s)ds = 0.$$

Отсюда, в силу (4), получим

$$z \cdot x_0 = 0,$$

что противоречит предположению $z \cdot x_0 \neq 0$.

Таким образом, если

$$rank\ [W] < n,$$

то система (1) не является локально 0-управлямой.

Д о с т а т о ч н о с т ь, т.е. то, что равенство

$$rank\ [W] = n,$$

влечет локальную 0-управляемость системы (1), является частным случаем общей теоремы ([2], стр.399. теорема 1) потому что из условий вытекает $|\varphi(x)| \leq a|x|$, $a = const$.

Литература

1. Болтянский В.Г. Математическая теория оптимального управления. М.: Наука, 1969. 408 с.

2. Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972. 574 с.

3. Buldaev Alexandr. Optimization of the Controls in Quadratic Dynamical Systems. ICM. Beijing. 2002. August 20-28. 244 p.

4. Зудашкина О.В. О локальной управляемости систем ОДУ. Изв РАН. Дифференциальные уравнения. 2004. №8. с.36-41.

5. Miller Luc. On the null-controllability of the heat equation in unbounded domains. Bull. Sci. math. 2005. 129. №2, pp. 175-185.

6. Азамов А.А., Раад Ю.М. Об устойчивости и управляемости систем с квадратичной нелинейностью Гессе. Узбекский Математический Журнал. 1993. №3, с.21-26.

Институт математики
им. В.И.Романовского АН РУз

Дата поступления
08.02.06

Uzbek Mathematical
Journal, 2006,№3, pp.7-12

Максимальные вещественные алгебры фон Неймана в гильбертовом пространстве

Ш.А.Аюпов, Ф.Н.Арзикулов

Обсуждается понятие максимальной чисто вещественной алгебры фон Неймана. Доказано, что всякая максимальная чисто вещественная подалгебра фон Неймана в $B(H_{\mathbb{C}})$ эта в точности прямая сумма алгебр фон Неймана всех ограниченных линейных операторов в вещественных и кватернионных гильбертовых подпространствах гильбертова пространства $H_{\mathbb{C}}$, удовлетворяющих некоторым условиям. Как следствие, для чисто вещественной алгебры фон Неймана получен вариант теоремы Гельфанда-Наймарка.

It is proved that any maximal purely real von Neumann subalgebra in $B(H_{\mathbb{C}})$ is a direct sum of algebras of all bounded linear operators on a real and guaternionic Hilbert subspaces of $H_{\mathbb{C}}$

Введение

В данной работе изучаются некоторые проблемы, касающиеся вещественных алгебр фон Неймана. Как известно, для всякой вещественной алгебры фон Неймана существует вещественное гильбертово пространство H такое, что во-первых, эта алгебра лежит в $B(H)$ и, во-вторых, второй коммутант этой алгебры в алгебре фон Неймана $B(H)$ совпадает с самой этой алгеброй как и в случае комплексных алгебр фон Неймана (см. [1]). Но в данном случае гильбертово пространство H подбирается для данной вещественной алгебры фон Неймана. В данной работе рассматриваются такие вещественные алгебры фон Неймана R, для которых $R \cap iR = \{0\}$, которые в работе названы как *чисто вещественными алгебрами фон Неймана.* Проблема, обсуждаемая в данной работе, заключается в том, что для данного комплексного гильбертова пространства $H_{\mathbb{C}}$ не всякая чисто вещественная подалгебра фон Неймана алгебры $B(H_C)$ лежит в вещественной алгебре фон Неймана $B(H_{\mathbb{R}})$, где $H_{\mathbb{C}} = H_{\mathbb{R}} + iH_{\mathbb{R}}$. Рассмотрим, например, чисто вещественную подалгебру фон Неймана $B(H_{\mathbb{H}})$ всех ограниченных $\mathbb{H}$ (кватернионы)-линейных операторов в гильбертовом пространстве $H_{\mathbb{H}}$, где $B(H_{\mathbb{C}}) = B(H_{\mathbb{H}}) + iB(H_{\mathbb{H}})$. Здесь вещественное гильбертово пространство H, для которого $B(H_{\mathbb{H}}) \subseteq B(H)$ и

$B(H_{\mathbb{H}})'' = B(H_{\mathbb{H}})$, не является подпространством гильбертова пространства $H_{\mathbb{C}}$. Заметим, что алгебры $B(H_{\mathbb{R}})$ и $B(H_{\mathbb{H}})$ являются максимальными чисто вещественными подалгебрами алгебры $B(H_{\mathbb{C}})$. В связи с этим в данной работе обсуждается следующая проблема: описать все максимальные чисто вещественные подалгебры фон Неймана алгебры $B(H_{\mathbb{C}})$ для фиксированного комплексного гильбертова пространства $H_{\mathbb{C}}$ в терминах данного гильбертова пространства $H_{\mathbb{C}}$. А также выяснить, существует ли для произвольной чисто вещественной $*$-подалгебры A алгебры $B(H)$ вещественная подалгебра M в $B(H)$, в которой второй коммутант A'' алгебры A относительно алгебры M совпадает с A, т.е. $A'' = A$ в M.

Как результат данной работы найдено решение, приведенной выше проблемы. А именно, доказано, что максимальные чисто вещественные подалгебры фон Неймана в $B(H_{\mathbb{C}})$ - это в точности подалгебры вида $B(\bar{H}_{\mathbb{R}}) \oplus B(\bar{H}_{\mathbb{H}})$, где $\bar{H}_{\mathbb{R}}$ и $\bar{H}_{\mathbb{H}}$ —гильбертовы подпространства гильбертовых пространств $H_{\mathbb{R}}$ и $H_{\mathbb{H}}$ соответственно такие, что $H_{\mathbb{R}} = \bar{H}_{\mathbb{R}} \oplus \bar{H}_{\mathbb{R}}^{\perp}$, $H_{\mathbb{H}} = \bar{H}_{\mathbb{H}} \oplus \bar{H}_{\mathbb{H}}^{\perp}$. При этом единицы алгебр $B(\bar{H}_{\mathbb{R}})$ и $B(\bar{H}_{\mathbb{H}})$ ортогональны и в сумме дают единицу алгебры $B(H_{\mathbb{C}})$. Можно убедиться, проверив непосредственно, что для произвольной чисто вещественной $*$-подалгебры A в $B(H)$ второй коммутант A'' алгебры A относительно максимальной чисто вещественной подалгебры фон Неймана $B(\bar{H}_{\mathbb{R}}) \oplus B(\bar{H}_{\mathbb{H}})$, содержащей алгебру A, совпадает с A, т.е. $A'' = A$ в $B(\bar{H}_{\mathbb{R}}) \oplus B(\bar{H}_{\mathbb{H}})$.

Далее, с помощью этого результата для чисто вещественных алгебр фон Неймана доказан вариант теоремы Гельфанда-Наймарка.

Максимальные вещественные алгебры фон Неймана

Для удобства введем следующее определение.

Определение. *Чисто вещественной $*$-алгеброй называется вещественная $*$-алгебра R в $B(H_{\mathbb{C}})$, такая, что $R \cap iR = \{0\}$.*

Чисто вещественной алгеброй фон Неймана называется слабо замкнутая чисто вещественная $*$-алгебра R в $B(H_{\mathbb{C}})$, содержащая единичный оператор.

Заметим, что объединение $\cup_\alpha A_\alpha$ элементов произвольной цепи $\{A_\alpha\}$ чисто вещественных $*$-подалгебр алгебры фон Неймана $B(H_{\mathbb{C}})$ является чисто вещественной $*$-подалгеброй алгебры фон Неймана $B(H_{\mathbb{C}})$. Это объединение $\cup_\alpha A_\alpha$ совпадает с точной верхней гранью семейства $\{A_\alpha\}$. Поэтому для частично упорядоченного по включению множества всех чисто вещественных $*$-подалгебр алгебры фон Неймана $B(H_{\mathbb{C}})$ выполняются все условия леммы Цорна. Следовательно, по лемме Цорна для всякой чисто вещественной $*$-подалгебры алгебры фон Неймана $B(H_{\mathbb{C}})$ существует содержащая ее максимальная чисто вещественная $*$-подалгебра.

Поэтому в дальнейшем мы можем вести рассуждения относительно максимальных чисто вещественных $*$-подалгебр алгебры $B(H_{\mathbb{C}})$.

Примеры. Как известно, тело кватернионов $\mathbb{H}$ может быть вложено в алгебру двумерных комплексно значных матриц $M_2(\mathbb{C})$, с помощью следующего соответствия

$$a+bi+cj+dk \to \begin{pmatrix} a+ib & amp; c-id \\ -c-id & amp; a-ib \end{pmatrix}, a,b,c,d \in \mathbb{R} \quad (*).$$

Тело кватернионов $\mathbb{H}$ является максимальной чисто вещественной $*$-алгеброй в $M_2(\mathbb{C})$. Чисто вещественная $*$-алгебра $R \oplus \mathbb{H}$ максимальна по включению в $M_3(\mathbb{C})$. Действительно, если возьмем более широкую алгебру, например, алгебру $A = R \oplus R \oplus \mathbb{H}$, то для нее не выполняется условие $A + iA \subseteq M_3(\mathbb{C})$. Таким образом, $R \oplus R \oplus \mathbb{H}$ не является вещественной $*$-подалгеброй алгебры $M_3(\mathbb{C})$. Таким же образом можно убедиться, что всякая чисто вещественная $*$-подалгебра, строго содержащая алгебру $R \oplus \mathbb{H}$, не лежит в $M_3(\mathbb{C})$. В алгебре $M_{2m}(\mathbb{C})$ существует подалгебра, которую можно отождествить с алгеброй $M_m(\mathbb{H})$ $m \times m$-матриц над телом кватернионов $\mathbb{H}$. Заметим, что эта алгебра является максимальной чисто вещественной $*$-алгеброй в $M_{2m}(\mathbb{C})$. В алгебре $M_{2m+1}(\mathbb{C})$ эта алгебра уже не будет максимальной чисто вещественной $*$-алгеброй. А алгебра $M_{m+1}(\mathbb{H})$ не вкладывается в эту алгебру. В алгебре $M_{2m+1}(\mathbb{C})$ максимальной чисто вещественной $*$-алгеброй является, например, алгебра $M_m(\mathbb{H}) \oplus \mathbb{R}$ и всякая чисто вещественная $*$-алгебра вида $M_k(\mathbb{H}) \oplus M_l(\mathbb{R})$, где $2k+l = 2m+1$. В алгебре $M_{2m}(\mathbb{C})$ максимальной чисто вещественной $*$-алгеброй является всякая алгебра вида $M_k(\mathbb{H}) \oplus M_l(\mathbb{R})$, где $2k + l = 2m$. Эти утверждения можно обосновать, используя метод математической индукции. Действительно, случай $m = 1$ тривиален. Далее, утверждение для $m + 1$ выводится, используя утверждение для m. В самом деле, если A является максимальной чисто вещественной $*$-подалгеброй алгебры $M_{m+1}(\mathbb{C})$, $B \oplus \mathbb{C} \cdot 1 \subset M_{m+1}(\mathbb{C})$ и $B \cong M_m(\mathbb{C})$, то алгебра $A \cap B$ содержится в некоторой максимальной чисто вещественной $*$-подалгебре $M_k(\mathbb{H}) \oplus M_l(\mathbb{R})$, где $2k + l = m$. Следовательно, или $A \subseteq M_k(\mathbb{H}) \oplus M_{l+1}(\mathbb{R})$ и $2k + l + 1 = m + 1$, или $A \subseteq M_{k+1}(\mathbb{H}) \oplus M_{l-1}(\mathbb{R})$ и $2(k + 1) + l - 1 = m + 1$. В связи с этими рассуждениями имеет место следующее: пусть H —конечномерное гильбертово пространство. Пусть $H_{\mathbb{R}}$, $H_{\mathbb{H}}$ —гильбертовы пространства над $\mathbb{R}$ и $\mathbb{H}$ соответственно такие, что $B(H) = B(H_F) + iB(H_F)$, где $F = \mathbb{R}$ или $\mathbb{H}$ (см. [2]). Тогда

Лемма 1. *Всякая максимальная чисто вещественная $*$-подалгебра алгебры $B(H)$ имеет вид $B(\bar{H}_{\mathbb{R}}) \oplus B(\bar{H}_{\mathbb{H}})$ для некоторых гильбертовых подпространств $\bar{H}_{\mathbb{R}}$ и $\bar{H}_{\mathbb{H}}$ гильбертовых пространств $H_{\mathbb{R}}$ и $H_{\mathbb{H}}$ соот-*

ветственно таких, что $H_{\mathbb{R}} = \bar{H}_{\mathbb{R}} \oplus \bar{H}_{\mathbb{R}}^{\perp}$, $H_{\mathbb{H}} = \bar{H}_{\mathbb{H}} \oplus \bar{H}_{\mathbb{H}}^{\perp}$, *единицы алгебр* $B(\bar{H}_{\mathbb{R}})$ *и* $B(\bar{H}_{\mathbb{H}})$ *ортогональны и в сумме дают единицу алгебры* $B(H_{\mathbb{C}})$.

Теперь докажем обобщенный вариант последнего утверждения для гильбертовых пространств произвольной размерности.

Теорема 2. *Пусть* H *—гильбертово пространство. Пусть* $H_{\mathbb{R}}$, $H_{\mathbb{H}}$ *— гильбертовы пространства над* $\mathbb{R}$ *и* $\mathbb{H}$ *соответственно такие, что* $B(H) = B(H_F) + iB(H_F)$, *где* $F = \mathbb{R}$ *или* $\mathbb{H}$. *Тогда всякая максимальная чисто вещественная* $*$*-алгебра алгебры* $B(H)$ *имеет вид* $B(\bar{H}_{\mathbb{R}}) \oplus B(\bar{H}_{\mathbb{H}})$ *для некоторых гильбертовых подпространств* $\bar{H}_{\mathbb{R}}$ *и* $\bar{H}_{\mathbb{H}}$ *гильбертовых пространств* $H_{\mathbb{R}}$ *и* $H_{\mathbb{H}}$ *соответственно таких, что* $H_{\mathbb{R}} = \bar{H}_{\mathbb{R}} \oplus \bar{H}_{\mathbb{R}}^{\perp}$, $H_{\mathbb{H}} = \bar{H}_{\mathbb{H}} \oplus \bar{H}_{\mathbb{H}}^{\perp}$, *единицы алгебр* $B(\bar{H}_{\mathbb{R}})$ *и* $B(\bar{H}_{\mathbb{H}})$ *ортогональны и в сумме дают единицу алгебры* $B(H_{\mathbb{C}})$.

Доказательство. Пусть A —произвольная максимальная чисто вещественная $*$-алгебра операторов в гильбертовом пространстве H. В силу [1] для произвольного конечномерного проектора f алгебры A подалгебра fAf изоморфна алгебре $\sum_i^{\oplus} M_{k_i}(\mathbb{R}) \oplus \sum_j^{\oplus} M_{m_j}(\mathbb{H}) \oplus \sum_l^{\oplus} M_{n_l}(\mathbb{C})$. Отсюда следует, что существуют ортогональные семейства проекторов $\{e_i\}$, $\{f_j\}$ и $\{g_l\}$ в $B(H)$ такие, что $\sup e_i + \sup f_i + \sup g_l = 1$ и для всяких i, j, l существуют k_i m_j n_l, для которых $e_iAe_i \cong M_{k_i}(\mathbb{R})$, $f_jAf_j \cong M_{m_j}(\mathbb{H})$, $g_lAg_l \cong M_{n_l}(\mathbb{C})$.

Мы утверждаем, что $e_iAf_j = \{0\}$ и $f_jAe_i = \{0\}$ для всяких i и j. Действительно, если это не так, то существует такой минимальный в e_iAe_i проектор q, что $qAf_j \neq 0$. Пусть a —такой элемент из A, что $qaf_j \neq 0$. Существует такое вещественное число λ, что $qaf_j(qaf_j)^* = \lambda q$. Поскольку $qaf_j(qaf_j)^* \geq 0$, то $\lambda > 0$. Пусть $x = (1/\sqrt{\lambda})qaf_j$. Тогда $xx^* = q$ и x^*x является проектором из f_jAf_j. Из теории операторных алгебр известно, что $xB(H_{\mathbb{C}})x^* \cong x^*B(H_{\mathbb{C}})x$. Поэтому $dim(qB(H_{\mathbb{C}})q) = dim(x^*xB(H_{\mathbb{C}})x^*x)$. Следовательно, вещественная $*$-алгебра $R^*(x)$, порожденная элементом x, изометрически изоморфна алгебре $M_2(\mathbb{R})$ и содержит проектор q и проектор x^*x из f_jAf_j. Далее, подалгебра $(q + x^*x)A(q + x^*x)$ вкладывается в алгебру $M_2(\mathbb{H})$ и $x^*xAx^*x = \mathbb{H}x^*x$. Тогда должно быть $(q + x^*x)A(q + x^*x) \cong M_2(\mathbb{H})$. Отсюда $qAq = \mathbb{H}q$. Последнее является противоречием. Следовательно, $e_iAf_j = \{0\}$ и $f_jAe_i = \{0\}$.

Далее имеем также, что $e_iAg_l = \{0\}$ и $g_lAe_i = \{0\}$ для всяких i и l. Действительно, если это не так, то существует такой минимальный в e_iAe_i проектор q, что $qAg_l \neq 0$. Пусть a —такой элемент из A, что $qag_l \neq 0$. Существует такое вещественное число λ, что $qag_l(qag_l)^* = \lambda q$. Поскольку $qag_l(qag_l)^* \geq 0$, то $\lambda > 0$. Пусть $x = (1/\sqrt{\lambda})qag_l$. Тогда $xx^* = q$ и x^*x является проектором из g_lAg_l. Заметим, что $\mathbb{C}x^*x \subseteq A$ и подалгебра, порожденная множеством $\{q, x, x^*, \mathbb{C}x^*x\}$, изоморфна алгебре $M_2(\mathbb{C})$

и $\{q, x, x^*, \mathbb{C}x^*x\} \subseteq A$. Последнее является противоречием с чистой вещественностью алгебры. Следовательно, $e_iAg_l = \{0\}$ и $g_lAe_i = \{0\}$ для всяких i и l.

Пусть $e = \sup e_i$, $f = \sup f_j$, $g = \sup g_l$. Тогда в силу произвольности индексов i, j и l имеем $A \subseteq eAe \oplus (f+g)A(f+g)$, т.е. $eA(f+g) = \{0\}$, $(f+g)Ae = \{0\}$. В силу максимальности алгебры A имеем $A = eAe \oplus (1-e)A(1-e)$ и $e \in A$. По построению проекторов e, f и g имеем $eAe \subseteq B(\bar{H}_{\mathbb{R}})$, $(f+g)A(f+g) \subseteq B(\bar{H}_{\mathbb{H}})$, где $B(\bar{H}_{\mathbb{R}}) = eB(H_{\mathbb{R}})e$, $B(\bar{H}_{\mathbb{H}}) = (f+g)B(H_{\mathbb{H}})(f+g)$. Следовательно, в силу максимальности чисто вещественной $*$-алгебры A имеем $A = B(\bar{H}_{\mathbb{R}}) \oplus B(\bar{H}_{\mathbb{H}})$. Так как $f+g = 1-e$, то теорема полностью доказана.

Следствие 3. *Всякая максимальная чисто вещественная $*$-алгебра операторов в гильбертовом пространстве H является вещественной алгеброй фон Неймана.*

В силу следствия 3 и приведенных выше рассуждений для всякой чисто вещественной алгебры фон Неймана существует максимальная чисто вещественная алгебра фон Неймана, содержащая данную.

Следующий результат может быть рассмотрен как вариант теоремы Гельфанда-Наймарка для чисто вещественных алгебр фон Неймана.

Теорема 4. *Пусть A —вещественная алгебра фон Неймана операторов в гильбертовом пространстве H. Тогда следующие условия эквивалентны*

1. $A \cap iA = \{0\}$,

2. *существуют центральные проекторы z_1 и z_2 в A такие, что $z_1A \subseteq B(H_{\mathbb{R}})$, $z_2A \subseteq B(H_{\mathbb{H}})$ и $A = z_1A \oplus z_2A$.*

Доказательство. (a)$\Rightarrow$(b). По теореме 2 существует максимальная вещественная алгебра фон Неймана $B(\bar{H}_{\mathbb{R}}) \oplus B(\bar{H}_{\mathbb{H}})$ алгебры $B(H)$, содержащая A, где гильбертовы подпространства $\bar{H}_{\mathbb{R}}$ и $\bar{H}_{\mathbb{H}}$ определены также как в теореме 2. Тогда существуют центральные проекторы z_1 и z_2 в A такие, что $z_1R(A) \subseteq B(H_{\mathbb{R}})$, $z_2A \subseteq B(H_{\mathbb{H}})$ и $A = z_1A \oplus z_2A$. Отсюда следует и условие b).

Импликация (b)$\Rightarrow$(a) очевидна.

Литература

1. Li Bing-Ren. Real operator algebras. New Jersey-London-Singapore-Hong Kong; World Scientific, 2003, ix+241

2. 2 Аюпов Ш.А. Классификация и представления упорядоченных йордановых алгебр. Ташкент: Фан, 1986.

Институт математики
им. В.И.Романовского АН РУз

Дата поступления
08.02.06

Uzbek Mathematical
Journal, 2006,№3, pp.13-25

УДК 517.956

О некоторых задачах для уравнения в частных производных третьего порядка

Т.Д.Джураев, О.С.Зикиров

Maqolada bosh qismida giperbolik operator qatnashgan uchinchi tartibli xususiy hosilali tenglama uchun Gursa, Dirixle va nolokal chegaraviy masalalar o‘rganilgan. Riman funksiyasi yordamida o‘rganilayotgan masalalar yechimlarining mavjudligi va yagonaligi haqidagi teoremalar isbotlangan.

The question on a unique resolvability of a problems of Goursat, Dirikhlet and nonlocal problem for one class of partial differential equations of the third order is studied. In paper the Riemann's function for a linear equation of the third order with a hyperbolic operator in a body is constructed. Using this Riemann's function it is proved the existence and uniquenesses theorems of a solution for the problems considered.

1^0. **Постановка задачи.** Многие задачи, связанные с динамикой почвенной влаги и грунтовой воды [1], распространением акустических волн в различных средах [2] редуцируются к локальным и нелокальным задачам для уравнений в частных производных третьего порядка.

В области $D=\{(x,y):\ \ 0<x<l,\ \ 0<y<h\}$ рассмотрим линейное уравнение в частных производных третьего порядка

$$\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x}+\beta\frac{\partial}{\partial y}\right)u_{xy}+Lu=f(x,y), \tag{1}$$

где α, β – заданные постоянные, причем $\alpha^2+\beta^2\neq 0$, а L – линейное дифференциальное выражение вида

$$Lu\equiv a(x,y)u_{xx}+2b(x,y)u_{xy}+c\,(x,y)u_{yy}+a_1(x,y)u_x+b_1(x,y)u_y+c_1(x,y)u.$$

Коэффициенты и правая часть уравнения (1) являются заданными действительными функциями в области D.

Заметим, что уравнение (1) соответствует второму и третьему типу уравнений с частными производными третьего порядка, приведенных к каноническим видам[3].

Изучением краевых задач для уравнений третьего порядка занимались многие авторы. Например, из уравнения (1) при $\alpha = 1$, $\beta = 0$ и $b(x,y) = c(x,y) = 0$ получаем уравнения, исследованные в работах[4-9].

Без ограничения общности предположим, что $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ но $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$.

Определение. *Регулярным в области D решением уравнения (1) называется действительная функция $u(x,y)$, обладающая в D всеми непрерывными частными производными, входящими в уравнение, и удовлетворяющая ему в обычном смысле.*

В настоящей работе для уравнения (1) исследуются следующие краевые задачи.

Задача G. *Найти регулярное в области D решение $u(x,y)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям:*

$$u(x,0) = \psi_1(x), \quad u_y(x,0) = \psi_2(x), \quad 0 \leq x \leq l, \tag{2}$$

$$u(0,y) = \varphi_1(y), \quad u_x(0,y) = \varphi_2(y), \quad 0 \leq y \leq h, \tag{3}$$

где $\psi_i(x)$, $\varphi_i(y)$, $(i = 1,2)$ – заданные функции, такие, что

$$\varphi_1(0) = \psi_1(0), \quad \varphi_2(0) = \psi_2'(0), \quad \varphi_1'(0) = \psi_2(0), \quad \varphi_2'(0) = \psi_2'(0).$$

Задача D. *Найти регулярное в области D решение $u(x,y)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям:*

$$u(0,y) = \varphi_1(y), \quad u(l,y) = \varphi_2(y), \quad 0 \leq y \leq h, \tag{4}$$

$$u(x,0) = \psi_1(x), \quad u(x,h) = \psi_2(x), \quad 0 \leq x \leq l, \tag{5}$$

здесь $\varphi_i(y)$, $\psi_i(x)$ $(i = 1,2)$ – заданные функции, причем выполняются следующие условия согласования

$$\varphi_1(0) = \psi_1(0), \quad \varphi_1(h) = \psi_2(0), \quad \varphi_2(0) = \psi_1(l), \quad \varphi_2(h) = \psi_2(l).$$

Задача BS. *Найти регулярное в области D решение $u(x,y)$ уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям (2) задачи G и нелокальным граничным условиям:*

$$u(0,y) = \lambda_1(y)u(l,y) + \varphi_5(y), \quad 0 \leq y \leq h, \tag{6}$$

$$u_x(0,y) = \lambda_2(y)u_x(l,y) + \varphi_6(y), \quad 0 \leq y \leq h, \tag{7}$$

где $\lambda_1(y)$, $\lambda_2(y)$, $\varphi_5(y)$, $\varphi_6(y)$ – заданные функции, причем выполняются следующие условия согласования

$$\psi_1(0) = \lambda_1(0)\psi_1(l) + \varphi_5(0), \quad \psi_1'(0) = \lambda_2(0)\psi_1'(l) + \varphi_6(0)$$

Очевидно, что прямые $x = const$, $y = const$ являются характеристиками уравнения (1), поэтому задачу G будем называть задачей Гурса.

Согласно определению нелокальных задач [1], нелокальные условия (6) и (7) относятся к типу нелокальных граничных условий типа Бицадзе-Самарского и Самарского-Ионкина [5] соответственно, которые естественным образом возникают при решении прикладных задач.

2^0. Построение явного решение задачи G. Основные результаты о разрешимости задачи G, повторяют соответствующие результаты работы [10], поэтому приведем их в конспективном виде.

Имеет место следующая теорема относительно разрешимости задачи G.

Теорема 1. *Если коэффициенты уравнения (1) и заданные функции удовлетворяют условиям:*

$$a(x,y),\, b(x,y),\, c(x,y) \in C^1(\bar{D}) \cap C^2(D); \tag{8a}$$

$$a_1(x,y),\, b_1(x,y) \in C(\bar{D}) \cap C^1(D),\;\; c_1(x,y) \in C(D); \tag{8b}$$

$$f(x,y) \in C^1(\bar{D}), \quad f(0,y) = f(x,0) = 0; \tag{9a}$$

$$\varphi_i(y) \in C^2[0,h], \quad \psi_i(x) \in C^2[0,l], \quad i = 1,2, \tag{9b}$$

то задача G разрешима и притом единственным образом.

Согласно, работы [10] функция Римана $v = v(x,y;\xi,\eta)$, для уравнения (1) однозначно определяется следующими требованиями:

$$M^*v = 0 \tag{10}$$

$$v(\xi,y;\xi,\eta) = \omega_1(\xi,y), \quad v_x(\xi,y;\xi,\eta) = exp\left(-\frac{1}{\alpha}\int\limits_{\eta}^{y} a(\xi,t)dt\right) \tag{11}$$

$$v(x,\eta;\xi,\eta) = \omega_2(x,\eta), \quad v_y(x,\eta;\xi,\eta) = exp\left(-\frac{1}{\beta}\int\limits_{\xi}^{x} c(t,\eta)dt\right) \tag{12}$$

где

$$M^*v \equiv -\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \beta\frac{\partial}{\partial y}\right) v_{xy} + (av)_{xx} + (2bv)_{xy} + (cv)_{yy} - (a_1 v)_x - (b_1 v)_y + c_1 v,$$

а $\omega_1(\xi,y)$ и $\omega_2(x,\eta)$ являются решениями следующих задач Коши соответственно

$$\beta\omega_{1yy}(\xi,y) - b(\xi,y)\omega_{1y}(\xi,y) + a_1(\xi,y)\omega_1(\xi,y) = 0,$$

$$\omega_1(\xi,\eta)=0, \quad \beta\omega_{1y}(\xi,\eta)=1; \tag{13}$$

$$\alpha\omega_{2xx}(x,\eta)-b(x,\eta)\omega_{2x}(x,\eta)+b_1(x,\eta)\omega_2(x,\eta)=0,$$

$$\omega_2(\xi,\eta)=0, \quad \alpha\omega_{2x}(\xi,\eta)=1; \tag{14}$$

Очевидно, задачи (13) и (14) однозначно разрешимы.

Известно, что (см. например [5, 9, 10]) $u(x,y)$, $v(x,y;\xi,\eta)\in C^2(\overline{D})\bigcap C^3(D)$ и для регулярного решения задачи G имеет место интегральное представление

$$u(\xi,\eta)=\alpha v_x(0,\eta;\xi,\eta)\varphi_1(\eta)+\beta v_y(\xi,0;\xi,\eta)\psi_1(\xi)-\int\limits_0^{\xi}[\beta v(x,0;\xi,\eta)\psi_2^{'}(x)+$$

$$+c(x,0)v(x,0;\xi,\eta)\psi_2(x)+A(x;\xi,\eta)\psi_1^{'}(x)+B(x;\xi,\eta)\psi_1(x)]dx-$$

$$-\int\limits_0^{\eta}[\alpha v(0,y;\xi,\eta)\varphi_2^{'}(y)+a(0,y)v(0,y;\xi,\eta)\varphi_2(y)+A_1(y;\xi,\eta)\varphi_1^{'}(y)+$$

$$+B_1(y;\xi,\eta)\varphi_1(y)]dy+\int\limits_0^{\xi}\int\limits_0^{\eta}v(x,y;\xi,\eta)f(x,y)dxdy \tag{15}$$

здесь

$$A(x,\xi,\eta)=-\alpha v_x(x,0;\xi,\eta)+b(x,0)v(x,0;\xi,\eta);$$

$$B(x;\xi,\eta)=-\beta v_{xy}(x,0;\xi,\eta)-b(x,0)v_x(x,0;\xi,\eta)-$$

$$-c(x,0)v_y(x,0;\xi,\eta)-[b_x(x,0)+c(x,0)-b_1(x,0)]v(x,0;\xi,\eta);$$

$$A_1(y;\xi,\eta)=-\beta v_y(0,y;\xi,\eta)+b(0,y)v(0,y;\xi,\eta);$$

$$B_1(y;\xi,\eta)=-\alpha v_{xy}(0,y;\xi,\eta)-a(0,y)v_x(0,y;\xi,\eta)-$$

$$-b(0,y)v_y(0,y;\xi,\eta)-[a_x(0,y)+b_y(0,y)-a_1(0,y)]v(0,y;\xi,\eta).$$

Таким образом, формула (15) дает решения задачи G, если известно функция Римана $v(x,y;\xi,\eta)$.

Относительно существования и единственности функции Римана $v(x,y;\xi,\eta)$ справедлива

Теорема 2. *Если коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют условиям (8), то функции Римана* $v(x,y)=v(x,y;\xi,\eta)$ *для оператора* M *существует и единственна.*

Доказательство теоремы 2 нетрудно провести, преобразовав задачу (10)–(14) к нагруженному интегральному уравнению Вольтерра второго рода

$$v(x,y) = \frac{1}{2(\alpha^2+\beta^2)} \int\limits_{\beta x-\alpha y}^{\alpha x+\beta y} K_0 v(\bar{x}(s),\bar{y}(s))ds + \gamma(x,y), \qquad (16)$$

здесь

$$K_0 v(\bar{x}(s),\bar{y}(s)) = 2b(\bar{x}(s),\bar{y}(s))v(\bar{x}(s),\bar{y}(s)) +$$

$$+ \int\limits_{\xi}^{\bar{x}(s)} \left[c_y(t,\bar{y}(s)) - b_1(t,\bar{y}(s))\right] v(t,\bar{y}(s))ds +$$

$$+ \int\limits_{\eta}^{\bar{x}(s)} \left[a_x(\bar{x}(s),\tau) - a_1((\bar{x}(s),\tau)\right] v(\bar{x}(s),\tau)d\tau + \int\limits_{\xi}^{\bar{x}(s)} \int\limits_{\eta}^{\bar{y}(s)} c_1(t,\tau)v(t,\tau)d\tau dt;$$

$$\bar{x}(s) = \frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\left(\beta^2 x - \alpha\beta y + \alpha s\right), \qquad \bar{y}(s) = \frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\left(-\alpha\beta x + \alpha^2 y + \beta s\right);$$

$\gamma(x,y)$ – известная функция, решение которой построена в работе [10] методом итерации.

Для доказательство того, что функция (15) удовлетворяет уравнению (1) и условиям (2), (3), достаточно установить существование решения уравнения (1) при однородных краевых условиях $\varphi_i(y) = 0$, $\psi_i(x) = 0$, $i = 1, 2$.

В самом деле, вводя вместо функции $u(x,y)$ новую неизвестную функцию $z(x,y)$ по формуле

$$z(x,y) = u(x,y) - \{\varphi_1(y) + x[\varphi_2(y) - \psi_1^{'}(0)] +$$

$$+\psi_1(x) + y[\psi_2(x) - \psi_2(0)] - \psi_2^{'}(0)xy - \psi_1(0)\},$$

которая удовлетворяет уравнению (1) с другой правой частью и однородным условиям

$$z(0,y) = z_x(0,y) = z(x,0) = z_y(x,0) = 0. \qquad (*)$$

Пользуясь свойством функции Римана, непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что функция определенная равенством (15), удовлетворяет уравнению (1) и однородным условиям (*).

Таким образом, однозначная разрешимость задачи G доказана.

3^0. О разрешимости задачи Дирихле.

Сначала докажем теорему единственности решения задачи Дирихле.

Теорема 3. *Пусть коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют условиям (8) и выполнены следующие неравенства*

$$1)\ a(x,y)\xi^2 + 2b(x,y)\xi\eta + c(x,y)\eta^2 \geq 0, \quad \forall \xi,\eta \in D;$$

$$2)\ a_{xx} + 2b_{xy} + c_{yy} - a_{1x} - b_{1y} + 2c_1 < 0, \quad \forall (x,y) \in D;$$

тогда регулярное в области D решение $u(x,y)$ задачи Дирихле единственно.

Доказательство. Покажем, что однородная задача Дирихле, т.е.

$$f(x,y) = 0, \quad \varphi_i(y) = \psi_i(x) = 0, \ i = 1,2$$

имеет лищь тривиальное решение.

Доказательство этого факта проведем на основании интегрального тождества. Умножая уравнение (1) на функцию $u(x,y)$ и проинтегрируя по частям в области D имеем:

$$\iint\limits_D u\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \beta\frac{\partial}{\partial y}\right)u_{xy}dxdy + \iint\limits_D uLudxdy = 0. \tag{17}$$

Преобразуем подинтегральные выражения следующим образом

$$u\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \beta\frac{\partial}{\partial y}\right)u_{xy} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha u u_{xy} - \frac{\beta}{2}u_y^2\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\beta u u_{xy} - \frac{\alpha}{2}u_x^2\right);$$

$$u\left(a(x,y)u_{xx} + 2b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy}\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left[auu_x + buu_y - \frac{1}{2}(a_x + b_y)u^2\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[buu_x + cuu_y - \frac{1}{2}(b_x + c_y)u^2\right] -$$

$$-(au_x^2 + 2bu_xu_y + cu_y^2) + \frac{1}{2}(a_{xx} + 2b_{xy} + c_{yy})u^2;$$

$$u(a_(x,y)u_x + b_1(x,y)u_y + c_1(x,y)u) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x}(a_1u)^2 + \frac{\partial}{\partial y}(b_1u)^2\right] -$$

$$-\frac{1}{2}(a_{1x} + b_{1y} - 2c_1)u^2.$$

Применяя формулу Грина к интегралу (17) и учитывая однородные граничные условия имеем

$$\iint\limits_D \left(a(x,y)u_x^2 + 2b(x,y)u_xu_y + c(x,y)u_y^2\right)dxdy -$$

$$-\frac{1}{2}\iint\limits_D (a_{xx} + 2b_{xy} + c_{yy} - a_{1x} - b_{1y} + 2c_1)u^2dxdy = 0.$$

Отсюда в силу условий теоремы 3 получим, что $u(x,y) \equiv 0$ в области $\overline{D}$. И тем самым теорема 3 доказана.

Обратимся теперь к построению решения задачи Дирихле.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы 3 и*

$$\varphi_i(y) \in C^2[0,h], \quad \psi_i(x) \in C^2[0,l], \quad i = 1,2.$$

Тогда регулярное решение задачи Дирихле существует.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную задачу Гурса для уравнения (1) с условиями

$$u(0,y) = \varphi_1(y), \quad u_x(0,y) = \varphi(y), \ 0 \le y \le h, \tag{18}$$

$$u(x,0) = \psi_1(x), \quad u_y(x,0) = \psi(x), \ 0 \le x \le l \tag{19}$$

где $\varphi(y), \quad \psi(x)$ – пока неизвестные функции.

Выше мы показали, что если функции $\psi_1(x), \psi(x) \in C^2[0,l]$ и $\varphi_1(y), \varphi(y) \in C^2[0,h]$, то решение задачи (1), (18), (19) существует, единственно и представимо в виде (15).

Для определения неизвестных функций $\varphi(y), \quad \psi(x)$ воспользуемся краевыми условиями $u(l,y) = \varphi_2(y), \quad u(x,h) = \psi_2(x)$.

Полагая в представление (15) $\xi = l$ и учитывая условие $u(l,\eta) = \varphi_2(\eta)$, после ряда преобразований получим

$$\alpha v(0,\eta;l,\eta)\varphi(\eta) + \int\limits_0^\eta k_1(y,\eta)\varphi(y)dy + \int\limits_0^l k_2(x,\eta)\psi(x)dx = g_1(\eta), \tag{20}$$

здесь

$$k_1(y,\eta) = a(0,y)v(0,y;l,\eta) - \alpha v_y(0,y;l,\eta),$$

$$k_2(x,\eta) = c(x,0)v(x,0;l,\eta) - \beta v_x(x,0;l,\eta);$$

и $g_1(\eta)$ – известная непрерывно–дифференцируемая функция.

Удовлетворив представление (15) граничному условию $u(x,h) = \psi_2(x)$, после некоторых преобразований имеем

$$\beta v(\xi,0;\xi,h)\psi(\xi) + \int\limits_0^\xi k_3(x,\xi)\psi(x)dx + \int\limits_0^h k_4(y,\xi)\varphi(y)dy = g_2(\xi), \tag{21}$$

здесь

$$k_3(x,\xi) = c(x,0)v(x,0;\xi,h) - \beta v_x(x,0;\xi,h),$$

$$k_4(y,\xi)=a(0,y)v(0,y;\xi,h)-\alpha v_x(0,y;\xi,h);$$

а $g_2(\xi)$ –известная непрерывно-дифференцируемая функции.

Таким образом, разрешимость задачи Дирихле, редуцирована к разрешимости системы интегральных уравнений (20)–(21).

Функция $v(0,\eta;l,\eta)$ на отрезке $[0,h]$ ни где не обрашается в нуль, если нуль не является собственным значением задачи

$$\alpha v_{xx}(x,\eta;l,\eta)-b(x,\eta)v_x(x,\eta;l,\eta)+b_1(x,\eta)v(x,\eta;l,\eta)=0,$$

$$v(0,\eta;l,\eta)=0, \quad v(l,\eta;l,\eta)=0. \tag{22}$$

Так будет, например когда $b_1(x,y)\le 0$. Действительно, если при некотором $\eta\in[0,h]$ функция $v(0,\eta;l,\eta)=0$, то задача (22) имеет только тривиальное решение $v(x,\eta;l,\eta)=0$, значит $v_x(x,\eta;l,\eta)=0$. Это противоречит условию $\alpha v_x(l,\eta;l,\eta)=1$. Аналогичное рассуждение имеет место и для функции $v(\xi,0;\xi,h)$.

Обращая вольтерровскую часть уравнения (20) относительно $\varphi(\eta)$, имеем

$$\varphi(\eta)=g_3(\eta)-\int_0^l k_5(x,\eta)\psi(x)dx, \tag{23}$$

где

$$g_3(\eta)=\frac{g_1(\eta)}{\alpha v(0,\eta;l,\eta)}-\int_0^\eta R_1(y,\eta)\frac{g_1(y)}{\alpha v(0,y;l,y)}dy,$$

$$k_5(x,\eta)=\frac{k_2(x,\eta)}{\alpha v(0,\eta;l,\eta)}+\int_0^\eta R_1(y,\eta)\frac{k_2(x,y)}{\alpha v(0,y;l,y)}dy,$$

$R_1(y,\eta)$ – резольвента ядра $k_1(y,\eta)/(\alpha v(0,\eta;l,\eta))$.

Подставляя значение $\varphi(\eta)$ в уравнение (21), получим

$$\beta v(\xi,0;\xi,h)\psi(\xi)+\int_0^\xi k_3(x,\xi)\psi(x)dx+\int_0^l k_6(x,\xi)\psi(x)dx=g_4(\xi), \tag{24}$$

здесь

$$k_6(x,\xi)=\int_0^h k_4(y,\xi)k_5(x,y)dy,$$

$$g_4(\xi)=g_2(\xi)-\int_0^h k_4(y,\xi)g_3(y)dy.$$

Наконец, обращая вольтерровскую часть уравнения (24), приходим к интегральному уравнению Фредгольма второго рода относительно функции $\psi(\xi)$:

$$\psi(\xi) + \int\limits_0^l K(x,\xi)\psi(x)dx = g_5(\xi), \tag{25}$$

где

$$K(x,\xi) = \frac{k_6(x,\xi)}{\beta v(\xi,0;\xi,h)} + \int\limits_0^\xi R_3(x,\xi_1)\frac{k_6(\xi_1,\xi)}{\beta v(\xi_1,0;\xi_1,h)}d\xi_1;$$

$$g_5(\xi) = \frac{g_4(\xi)}{\beta v(\xi,0;\xi,h)} + \int\limits_0^\xi R_3(x,\xi)\frac{g_4(x)}{\beta v(x,0;x,h)}dx;$$

$R_3(x,\xi)$ – резольвента ядра $k_3(x,\xi)/(\beta v(\xi,0;\xi,h))$.

В силу условий теоремы 4 заметим, что $g_5(\xi) \in C^2[0,l]$, а гладкость ядра $K(x,\xi)$ следует из свойств функции Римана $v(x,y;\xi,\eta)$.

Таким образом, разрешимость задачи Дирихле для уравнения (1) эквивалентно сведена к разрешимости интегрального уравнения (25). В силу единственности решения задачи Дирихле и альтернативы Фредгольма уравнение (25) имеет единственное решение.

Нетрудно заметить, что функции $\psi(\xi) \in C^2[0,l]$ и $\varphi(\eta) \in C^2[0,h]$. Следовательно, функция $\psi(\xi)$ найдена. Тогда другая неизвестная функция $\varphi(\eta)$ определяется по формуле (23). Подставляя значения этих функций в представление (15), полностью определим решение задачи Дирихле для уравнения (1). Теорема 4 доказана.

4^0. Разрешимость нелокальной задачи.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия (8), (9a) теоремы 1 и*

$$\psi_i(x) \in C^2[0,l], \quad \lambda_i(y) \in C^2[0,h], \ i = 1,2; \quad \varphi_5(y), \ \varphi_6(y) \in C^2[0,h].$$

Тогда нелокальная задача (1)–(2), (6)–(7) имеет единственное регулярное решение.

Доказательство. Для доказательства существования и единственности решения нелокальной задачи исследуем вспомогательную задачу Гурса для уравнения (1) с начальными условиями (2) и граничными условиями

$$u(0,y) = \mu_1(y), \qquad u_x(0,y) = \mu_2(y), \qquad 0 \le y \le h, \tag{26}$$

где $\mu_i(y)$, $(i = 1,2)$ – пока неизвестные функции.

Известно, что если функции $\psi_i(x) \in C^2[0,l]$, $\mu_i(y) \in C^2[0,h]$, $i=1,2$, то решение характеристической задачи (1)–(2), (26) существует, единственно и представимо в виде (15). Представление (15) после некоторых преобразовании запишем в виде

$$u(\xi,\eta) = [\alpha v_x(0,\eta;\xi,\eta) - A_1(\eta;\xi,\eta)]\mu_1(\eta) - \alpha v(0,\eta;\xi,\eta)\mu_2(\eta)+$$
$$+[\beta v_y(\xi,0;\xi,\eta) - A(\xi;\xi,\eta)]\psi_1(\xi) - \beta v_x(\xi,0;\xi,\eta)\psi_2(\xi) + \beta v(0,0;\xi,\eta)\psi_2(0)+$$
$$+\alpha v(0,0;\xi,\eta)\psi_1'(0) + [A_1(0;\xi,\eta) + A(0;\xi,\eta)]\psi_1(0)+$$
$$+\int_0^\xi [\beta v_x(x,0;\xi,\eta) - c(x,0)v(x,0;\xi,\eta)]\psi_2(x)dx+$$
$$+\int_0^\xi [A_x(x;\xi,\eta) - B(x;\xi,\eta)]\psi_1(x)dx+$$
$$+\int_0^\eta [\alpha v_y(0,y;\xi,\eta) - a(0,y)v(0,y;\xi,\eta)]\mu_2(y)dy+$$
$$+\int_0^\eta [A_{1y}(y;\xi,\eta) - B_1(y;\xi,\eta)]\mu_1(y)dy+$$
$$+\int_0^\xi\int_0^\eta v(x,y;\xi,\eta)f(x,y)dxdy. \tag{27}$$

Таким образом, решение нелокальной задачи можно представить в виде (27), если найдены непрерывно-дифференцируемые функции $\mu_1(y)$, $\mu_2(y)$.

Для упрошения дальнейших вычислений обозначим

$$F(\xi,\eta) = [\beta v_y(\xi,0;\xi,\eta) - A(\xi;\xi,\eta)]\psi_1(\xi) - \beta v_x(\xi,0;\xi,\eta)\psi_2(\xi) + \beta v(0,0;\xi,\eta)\psi_2(0)+$$
$$+\alpha v(0,0;\xi,\eta)\psi_1'(0) + [A_1(0;\xi,\eta) + A(0;\xi,\eta)]\psi_1(0) + \int_0^\xi\int_0^\eta v(x,y;\xi,\eta)f(x,y)dxdy+$$
$$+\int_0^\xi [\beta v_x(x,0;\xi,\eta) - c(x,0)v(x,0;\xi,\eta)]\psi_2(x)dx + \int_0^\xi [A_x(x;\xi,\eta) - B(x;\xi,\eta)]\psi_1(x)dx$$

В силу нелокальных условий (6) и (7) находим неизвестные функции $\mu_1(y),\ \mu_2(y)$ удовлетворяюшие условиям

$$\mu_1(y) = \lambda_1(y)u(l,y) + \varphi_5(y), \qquad 0 \le y \le h, \tag{28}$$

$$\mu_2(y) = \lambda_2(y)u_x(l,y) + \varphi_6(y), \qquad 0 \le y \le h, \tag{29}$$

Решение нелокальной задачи полностью свелось к нахождению функций $\mu_1(y),\ \mu_2(y)$.

Из представления (27) при $\xi = l$ находим, что

$$u(l,\eta) = F(l,\eta) + [\alpha v_x(0,\eta;l,\eta) - A_1(\eta;l,\eta)]\mu_1(\eta) - \alpha v(0,\eta;l,\eta)\mu_2(\eta)+$$
$$+\int\limits_0^\eta [\alpha v_y(0,y;l,\eta) - a(0,y)v(0,y;l,\eta)]\mu_2(y)dy+$$
$$+\int\limits_0^\eta [A_{1y}(y;l,\eta) - B_1(y;l,\eta)]\mu_1(y)dy, \tag{30}$$

Умножим последнее выражение на $\lambda_1(\eta)$ и в силу условия (28) получим соотношение мужду функциями $\mu_1(\eta),\ \mu_2(\eta)$:

$$A_{11}(\eta)\mu_1(\eta) + A_{12}(\eta)\mu_2(\eta) = \int\limits_0^\eta [k_{11}(y,\eta)\mu_1(y) + k_{12}(y,\eta)\mu_2(y)]dy + f_1(\eta), \tag{31}$$

здесь

$$A_{11}(\eta) = 1-\lambda_1(\eta)[\alpha v_x(0,\eta;l,\eta)-A_1(\eta;l,\eta)], \qquad A_{12}(\eta) = \lambda_1(\eta)\alpha v(0,\eta;l,\eta),$$

$$k_{11}(y,\eta) = \lambda_1(\eta)[A_{1y}(y;l,\eta) - B_1(y;l,\eta)],$$
$$k_{12}(y,\eta) = \lambda_1(\eta)[\alpha v_y(0,y;l,\eta) - a(0,y)v(0,y;l,\eta)].$$

$f_1(\eta)$ – известная функция.

Вычислим производную $u(\xi,\eta)$ из (27) по ξ и полагая $\xi = l$, с учетом условие (29), после ряда преобразование находим

$$A_{21}(\eta)\mu_1(\eta) + A_{22}(\eta)\mu_2(\eta) = \int\limits_0^\eta [k_{21}(y,\eta)\mu_1(y) + k_{22}(y,\eta)\mu_2(y)]dy + f_2(\eta), \tag{32}$$

где

$$A_{21}(\eta) = -\lambda_2(\eta)[\alpha v_{x\xi}(0,\eta;l,\eta) - A_{1\xi}(\eta;l,\eta)],$$

$$k_{21}(y,\eta) = \lambda_2(\eta)[A_{1y\xi}(y;l,\eta) - B_{1\xi}(y;l,\eta)],$$
$$A_{22}(\eta) = 1 - \lambda_2(\eta)\alpha v_\xi(0,\eta;l,\eta),$$
$$k_{22}(y,\eta) = \lambda_2(\eta)[\alpha v_{y\xi}(0,y;l,\eta) - a(0,y)v_\xi(0,y;l,\eta)].$$

$f_2(\eta)$ – известная функция.

Таким образом, для определения функций $\mu_1(\eta)$, $\mu_2(\eta)$ получили систему интегральных уравнений.

Вводя обозначения

$$\mu(\eta) = \begin{bmatrix} \mu_1(\eta) \\ \\ \mu_2(\eta) \end{bmatrix}, \quad f_0(\eta) = \begin{bmatrix} f_1(\eta) \\ \\ f_2(\eta) \end{bmatrix},$$

$P(\eta) = [A_{ij}(\eta)]$, $K(y,\eta) = [k_{ij}(y,\eta)]$, $1 \le i,j \le 2$; $0 \le y \le \eta$; $0 \le \eta \le h$, систему интегральных уравнений (31)–(32) перепишем в матричном виде

$$P(\eta)\mu(\eta) = \int\limits_0^\eta K(y,\eta)\mu(y)dy + f_0(\eta), \quad 0 \le \eta \le h. \tag{33}$$

На основании лемм, доказанных в работе [10], имеем $det|P(\eta)| \neq 0$, $\forall \eta \in [0,h]$.

Поэтому равенство (33) является системой интегральных уравнений Вольтерра второго рода, решение которой при любых $K(y,\eta)$ и $f_0(\eta)$ из соответствуюших классов существует и единственно (см. например [11]).

Таким образом, искомые функции $\mu_1(\eta)$ и $\mu_2(\eta)$ найдены, и следовательно нелокальная задача (1), (6)–(7) имеет единственное решение, которое выражается формулой (27).

Теорема 5 доказана.

Литература

1. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. –М.; Высщая школа. 1995. –301 с.

2. Руденко О.В., Солуян С.Н. Теоретические основы нелинейной акустики. –М.; Наука. 1975. –287 с.

3. Джураев Т.Д., Попелек Я. О классификации и приведении к каноническому виду уравнений с частными производными третьего порядка.//Дифференц. уравнения. –1991. –т.27. –No 10. –С.1734–1745.

4. Жегалов В.И., Миронов А.Н. Дифференциальные уравнения со старшими частными производными. –Казань. 2001. –226 с.

5. Шхануков М.Х. *О некоторых краевых задачах для уравнения третьего порядка, возникаюших при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах*//Дифференц. уравнения. –1982. –т.18. –No 4. –С. 689–699.

6. Colton D. Pseudoparabolic Equations in One Space Variable. //J. Different. Equations. 1972. v.12. No 3. P. 559–565.

7. Randell W. The Constraction of Solutions to Pseudoparabolic Equations in Noncylindrical Domains//J. Differential Equat. –1978. –v.27.–No 3. –P.394–404.

8. Напсо А.Ф. Задачи внутренными условиями для псевдопараболического уравнения. //Владикавказский математический журнал. –2001. –том.3. –вып. 4. –С. 36–39.

9. Джохадзе О.М. Обшая граничная задача типа Дарбу в угловых криволинейных областях для уравнения третьего порядка с доминированными младшими членами. //Сибирский математический журнал.–2002. –том.43. –No 2. –С.295–313.

10. Джураев Т.Д., Зикиров О.С. Задача Гурса и нелокальная задача для одного класса уравнений третьего порядка//В кн. "Неклассические уравнения математической физики". Новосибирск. –2005. –С.98–109.

11. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. –М.; Наука. –1981.–448 с.

Институт математики
им. В.И.Романовского АН РУз

Дата поступления
06.01.06

Uzbek Mathematical
Journal, 2006,№3, pp.26-35

УДК 517.958

Дифференциальные свойства решения одной обратной задачи для уравнения с памятью

Д.К.Дурдиев

Ushbu maqolada ikkinchi tartibli giperbolik tipdagi integro differensial tenglama uchun bir teskari masala yechimining differensial xossalari o'rganilgan.

In this paper differential properties of the solution of one inverse problem for hyperbolic type integral differential equation of second order are investigated.

Рассмотрим задачу определения функции $k(x,t)$ в области $R\times[0,T]$ по следу обобщенного решения $u(x,z,t)$ следующей задачи:

$$u_{tt}-u_{zz}-u_{xx}=\int\limits_0^t k(x,t-\tau)u(x,z,\tau)d\tau,\quad (x,t)\in R^2,\quad z>0, \qquad (1)$$

$$u|_{t<0}\equiv 0,\quad u_z|_{z=0}=\delta'(t), \qquad (2)$$

известному на плоскости $z=0$ для всех $(x,t)\in R\times[0,T]$

$$u|_{z=0}=-\delta(t)+f(x,t)\theta(t). \qquad (3)$$

Здесь $\delta'(t)$ - производная дельта-функции $\delta(t)$, понимаемая в смысле обобщенных функций, $\theta(t)$ - функция Хевисайда, T- некоторое фиксированное положительное число. Функция $f(,t)$ заданной и достаточно гладкой.

Исследование задач восстановления памяти в гиперболических интегро-дифференциальных уравнениях - сравнительно молодое направление в теории обратных задач. Отличительной чертой таких задач является зависимость искомой функции как от временной, так и от пространственных переменных (многомерная задача). В работах [1],[2] исследованы постановки задач с источниками, распределенными по всей области, в которой протекает соответствующий волновой процесс. Однако важны задачи с дельтаобразными источниками сосредоточенными либо в окрестности некоторой точки, либо на границе области. В статье [3] изучены вопросы единственности определения памяти в волновом уравнении по измерению рассеянной волны в точке приложения точечного источника. В настоящей статье изучаются дифференциальные свойства решения одной обратной задачи для интегро-дифференциального уравнения второго порядка гиперболического типа на основе метода, предложенного В.Г.Романовым в работе [4]. Вопросы разрешимости обратных задач для гиперболических уравнений с памятью в классе функций, аналитических по части переменных, изучены в работах [6],[7].

Из равенств (1), (2) следует, что $u \equiv 0$, $t < z$, $x \in R$, $z > 0$. Представим решение задачи (1), (2) в виде

$$u(x, z, t) = -\delta(t - z) + \tilde{u}(x, z, t)\theta(t - z).$$

Очевидно, что $\tilde{u} = u$ при $t > z$. Для регулярной части функции $u(x, z, t)$ в области $t > z$, $x \in R$ задача (1)-(3) эквивалентна задаче

$$u_{tt} - u_{zz} - u_{xx} + k(x, t - z) - \int\limits_0^{t-z} k(x, \tau)u(x, z, t - \tau)d\tau = 0, \tag{4}$$

$$u|_{z=0} = f(x, t), \quad u_z|_{z=0} = 0, \tag{5}$$

$$u|_{t=z+0} = 0. \tag{6}$$

В уравнениях (4)- (6) совершим замену переменных z, t на z_1, t_1 по формулам:

$$z_1 = t + z, \ t_1 = t - z.$$

Тогда $u(x, z, t) = u(x, (z_1 - t_1)/2, (z_1 + t_1)/2) := u_1(x, z_1, t_1)$. Соотношения (4)-(6) в новых переменных переписываются в виде

$$\frac{\partial^2 u_1(x, z_1, t_1)}{\partial t_1 \partial z_1} + \frac{1}{4}[u_{1xx} - k(x, t_1) +$$

$$+ \int\limits_0^{t_1} k(x, \tau)u_1(x, z_1 - \tau, t_1 - \tau)d\tau] = 0, \quad 0 < t_1 < z_1, \ x \in R, \tag{7}$$

$$u_1|_{t_1=z_1} = f(x, z_1), \quad \frac{\partial}{\partial z_1}u_1|_{t_1=z_1} = \frac{1}{2}f_{z_1}(x, z_1), \ z_1 > 0, \ x \in R, \tag{8}$$

$$u_1|_{t_1=0} = 0, \quad x \in R. \tag{9}$$

Введем функцию

$$v(x, z_1, t_1) = \frac{\partial}{\partial z_1}u_1(x, z_1, t_1), \quad t_1 < z_1. \tag{10}$$

Тогда из соотношений (7)- (10) нетрудно получить в области $G_T = \{(x, z_1, t_1) \,|x \in R,\ 0 \le t_1 \le z_1 \le T\}$ следующую замкнутую систему интегро-дифференциальных уравнений для определения регулярных функций u_1, v, k (для простоты, в дальнейшем, будем опускать индекс 1):

$$u(x,z,t) - \int\limits_t^z v(x,\eta,t)d\eta = u^0(x,t),$$

$$v(x,z,t) = -\frac{1}{4}\int\limits_t^z [u_{xx}(x,z,\xi) + k(x,\xi) -$$

$$- \int\limits_0^\xi k(x,\tau)u(x,z-\tau,\xi-\tau)d\tau]d\xi = v^0(x,z), \tag{11}$$

$$k(x,z) + \int\limits_0^z [v_{xx}(x,z,\xi) - k(x,\xi)f(x,z-\xi) -$$

$$- \int\limits_0^\xi k(x,\tau)v(x,z-\tau,\xi-\tau)d\tau]d\xi = k^0(x,z).$$

Здесь

$$u^0(x,t) = f(x,t),\ v^0(x,z) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}f(x,z),$$

$$k^0(x,z) = -2\frac{\partial^2}{\partial z^2}f(x,z) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,z),\ \frac{\partial^i}{\partial z^i}f(x,z) = \frac{\partial^i}{\partial t^i}f(x,z)|_{t=z},\ i = 0,1,2. \tag{12}$$

Система уравнений (11) эквивалентна задаче (7)-(9) в предположении, что выполнены условия разрешимости $f(x,0) = f_z(x,0) = 0$.

Определение 1. Будем говорить, что функция $h(x)$ принадлежит A_s, $s > 0$, если она представима рядом Фурье $h(x) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} h_n \exp(-inx)$ и ее s - норма $\|h\|_s = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} |h_n| \exp(sn)$ конечна.

Определение 2. Если некоторая функция $u(,z,t)$ принадлежит A_s, $s > 0$, при фиксированных $(z,t) \in G$ и непрерывна в области G как элемент из A_s, то будем говорить, что, она принадлежит $C(A_s, G)$, а символом $\|u\|_s(z,t)$ обозначим ее s - норму при фиксированных $(z,t) \in G$.

Теорема 1. *Пусть* $((\frac{\partial^i}{\partial t^i})f, (\frac{\partial^2}{\partial x^2})f) \in C(A_{s_0}, [0,T])$, $i = 0,1,2$ *при некоторых фиксированных* $s_0 > 0$, $T > 0$, *причем* $\max\{\|f\|_0, \|(\partial/\partial z) f\|_{s_0},\ 2\|\partial^2/\partial z^2)f\|_{s_0} + \|(\partial^2/\partial x^2)f\|_{s_0}\} \le R$ *для* $t \in [0,T]$ *и* $f(x,+0) =$

$(\partial/\partial t)f(x,+0)=0$. *Тогда для произвольного* χ *найдется число* $a\in(0,T/s_0)$, *такое, что для любых* $s\in(0,s_0)$ *и* $(z,t)\in G, G=G(R,s_0,T,\chi,s)=\{(z,t)|\le t\le z<a(s_0-s)\}$ *существует единственное решение системы (11)* $(u,\vartheta)\in C(A_{s_0},G), k\in C(A_{s_0},[0,a(s_0-s)])$, *для которого справедливы неравенства*

$$\|u-u^0\|_s(z,t)\le\chi, \|\vartheta-\vartheta^0\|_s(z,t)\le\frac{2\chi}{s_0-s}, \|k-k^0\|_s(z)\le\frac{4\chi}{(s_0-s)^2}, (z,t)\in G. \tag{13}$$

Используем для доказательства теоремы метод Л.Ниренберга [4]. Для системы уравнений (11) рассмотрим последовательные приближения $u^\sigma(x,z,t),\vartheta^\sigma(x,z,t),k^\sigma(x,z)$, определив их для $\sigma=0,1,2,...$ формулами

$$u^{\sigma+1}(x,z,t)-\int\limits_t^z\vartheta^\sigma(x,\eta,t)d\eta=u^0(x,t),$$

$$\vartheta^{\sigma+1}(x,z,t)-\frac{1}{4}\int\limits_t^z[u^\sigma_{xx}(x,z,\xi)-k^\sigma(x,\xi)-$$

$$-\int\limits_0^\xi k^\sigma(x,\tau)u^\sigma(x,z-\tau,\xi-\tau)d\tau]d\xi=\vartheta^0(x,z). \tag{14}$$

$$k^{\sigma+1}(x,z,t)-\frac{1}{4}\int\limits_t^z[\vartheta^\sigma_{xx}(x,z,\xi)-k^\sigma(x,\xi)f(x,z-\xi)-$$

$$-\int\limits_0^\xi k^\sigma(x,\tau)\vartheta^\sigma(x,z-\tau,\xi-\tau)d\tau]d\xi=k^0(x,z).$$

Здесь $u^0(x,t),\vartheta^0(x,z),k^0(x,z)$ определены формулами (12). Введем кроме того, разности между двумя последовательными приближениями:

$$u^{\sigma+1}-u^\sigma=\widetilde{u}^\sigma, \vartheta^{\sigma+1}-\vartheta^\sigma=\widetilde{\vartheta}^\sigma, k^{\sigma+1}-k^\sigma=\widetilde{k}^\sigma, \sigma=0,1,2,3,... \tag{15}$$

Функции $\widetilde{u}^\sigma,\widetilde{\vartheta}^\sigma,\widetilde{k}^\sigma$, определенные формулой (15), как следует из (14), удовлетворяют системе равенств

$$\widetilde{u}^\sigma(x,z,t)-\int_t^z\widetilde{\vartheta}^\sigma(x,\eta,t)d\eta=0,$$

$$\widetilde{\vartheta}^\sigma(x,z,t)-\frac{1}{4}\int\limits_t^z\{\widetilde{u}^{\sigma-1}_{xx}(x,z,\xi)+\widetilde{k}^{\sigma-1}(x,\xi)-$$

$$-\int\limits_0^{\xi}[\widetilde{k}^{\sigma-1}(x,\tau)u^{\sigma}(x,z-\tau,\xi-\tau)+k^{\sigma-1}(x,\tau)\widetilde{u}^{\sigma-1}(x,z-\tau,\xi-\tau)]d\tau\}d\xi=0,$$

$$\widetilde{k}^{\sigma}(x,z)+\int\limits_0^{z}\{\widetilde{\vartheta}^{\sigma-1}_{xx}(x,z,\xi)-\widetilde{k}^{\sigma-1}(x,\xi)f(x,z-\xi)-$$

$$-\int\limits_0^{\xi}[\widetilde{k}^{\sigma-1}(x,\tau)\vartheta^{\sigma}(x,z-\tau,\xi-\tau)+k^{\sigma-1}(x,\tau)\widetilde{\vartheta}^{\sigma-1}(x,z-\tau,\xi-\tau)d\tau]\}d\xi,$$

$$\sigma=0,1,2,... \qquad (16)$$

При $\sigma=0$ в этих равенствах нужно формально положить $\widetilde{u}^{-1}=u^0,\widetilde{\vartheta}^{-1}=\vartheta^0,\widetilde{k}^{-1}=k^0,k^{-1}=0$.

Пусть последовательность чисел $a_0,a_1,...a_\sigma,...$ определена соотношениями $a_{\sigma+1}=a_\sigma/(1+(\sigma+1)^{-2}),\sigma=a_\sigma$. Здесь a_0 - некоторое фиксированное положительное число, порождающее всю последовательность a_σ. Число $a_0<T/s_0$ будет выбрано позже. С числовой последовательностью a_σ свяжем последовательность вложенных областей $F_\sigma=\{(z,t,s)|0<s<s_0,0\le t\le z<a_\sigma(s_0-s)\}$.

Имеет место следующая лемма.

Лемма 1. *При выполнении условии теоремы 1 для любого фиксированного $\xi>0$ и любого $\sigma=0,1,2,...$ найдутся $a_0\in(0,T/s_0),a_0=(R,s_0,\xi)$ и $\lambda_k=\lambda_k(R,s_0,\xi)>0$, такие, что для каждого $s\in(0,s_0)(\widetilde{u}^\sigma,\widetilde{\vartheta}^\sigma)\in C(A_s,G_\sigma)\widetilde{k}^\sigma\in C(A_s,[0,a_\sigma(s_0,-s)]),G_\sigma:=\{(z,t)|0\le t\le z<a_\sigma(s_0-s)\}$ и справедливы неравенства*

$$\|\widetilde{u}^\sigma\|_s(x,t)\le\frac{\lambda_\sigma z}{a_\sigma(s_0-s)-z},\|\widetilde{\vartheta}^\sigma\|_s(x,t)\le\frac{\lambda_\sigma a_\sigma z}{[a_\sigma(s_0-s)-z]^2},\|\widetilde{k}^\sigma\|_s(x)\le$$

$$\le\frac{\lambda_\sigma a_\sigma^2 z}{[a_\sigma(s_0-s)-z]^3},(z,t,s)\in F_\sigma; \qquad (17)$$

$$\|u^{\sigma+1}-u^0\|_s(x,t)\le\xi,\|\vartheta^{\sigma+1}-\vartheta^0\|_s(x,t)\le\frac{2\xi}{s_0-s},\|k^{\sigma+1}-k^0\|_s(z)\le$$

$$\le\frac{4\xi}{(s_0-s)^2)},(z,t,s)\in F_{\sigma+1}. \qquad (18)$$

Доказательство. Используя свойство аналитических функций [5,с.92]:

$$\|h_{xx}\|_s 4e^{-2}(s_0-s)^{-2}\|h\|_{s_0},0<s<s_0,h\in A_s \qquad (19)$$

нетрудно проверить, что при $n=0$ неравенства (17),(18) выполнены, причем λ_0 пропорционально a_0. Установим справедливость этих неравенств для любого σ, пользуясь методом индукции и неравенством (19).

Допустим, что утверждение леммы справедливо для $\sigma \leq n$ и докажем, что тогда оно верно и для $\sigma = n+1$ Используя Индуктивное предположение, находим, что $(\widetilde{u}^{n+1}, \widetilde{\vartheta}^{n+1}, \widetilde{k}^{n+1}) \in C(A_s, G_{n+1})$. Кроме того, из (16) находим

$$\|\widetilde{u}^{n+1}\|_s(z,t) \leq \int\limits_t^z \|\widetilde{\vartheta}\|_s(\eta,t)d\eta \leq \int\limits_t^z \frac{\lambda_n a_n \eta}{[a_n(s_0-s)-\eta]^2} d\eta \leq$$

$$\leq \frac{\lambda_n a_n z}{a_n(s_0-s)-z} \leq \lambda_n a_0 \frac{z}{a_{n+1}(s_0-s)-z},$$

$$\widetilde{\vartheta}^{n+1}\|_s(z,t) \leq \frac{1}{4}\int\limits_t^z \{\frac{4e^{-2}}{(s'-s)^2}\|\widetilde{u}_s^n(z,\xi) + \|\widetilde{k}^n\|_s(\xi) +$$

$$+\int_0^\xi [\|\widetilde{k}\|_s^n(\tau)\|u^{n+1}\|_s(z-\tau,\xi-\tau) + \|k^n\|_s(\tau)\|\widetilde{u}^n\|_s(z-\tau,\xi-\tau)]d\tau\}d\xi$$

Полагая в этом неравенстве $s' = s'(\xi) = (s + s_0 - \xi/a_n)/2$, получаем

$$\|\widetilde{\vartheta}^{n+1}\|_s(z,t) \leq \frac{1}{4}\int\limits_t^z \{\frac{16e^{-2}a_n^2}{[a_n(s_0-s)-\xi]^2}\frac{2\lambda_n z}{[a_n(s_0-s)-\xi]^3} +$$

$$+\int\limits_0^\xi \left[\frac{\lambda_n a_n^2 \tau(\chi+R)}{(a_n(s_0-s)-\tau)^3} + \frac{4\chi + Rs_0^2}{(s_0-s)^2}\frac{2\lambda_n z}{a_n(s_0-s)-z}\right] d\tau\}d\xi \leq$$

$$\leq \frac{a_{n+1}\lambda_n z}{[a_{n+1}(s_0-s)-z]^2} a_0(8e^{-2} + 1 + 2\chi + (1+s_0^2)R).$$

Аналогичные выкладки для $\widetilde{k}^{n+1}$ приводят к неравенству

$$\|\widetilde{k}^{n+1}\|_s(z) \leq \frac{a_{n+1}^2 \lambda_n z}{(a_n(s_0-s)-z)^3} a_0(32e^{-2} + Rs_0(1+2s_0) + \chi(1+8s_0)).$$

Из проделанных оценок следует, что неравенства (17) будут справедливы при $\sigma = n+1$, если положить

$$\lambda_{n+1} = \lambda_n \rho, \rho = a_0 \max[8e^{-2} + 1 + 2\chi + (1+s_0^2)R,$$
$$32e^{-2} + Rs_0(1+2s_0^2) + \chi(1+8s_0)]. \qquad (20)$$

Покажем теперь, что неравенства (18) также выполняются при $\sigma = n+1$, если надлежащим образом выбрано число a_0. Для $(z,t,s) \in F_{n+2}$

$$\|u^{n+2} - u^0\|_s(z,t) \leq \sum_{\sigma=0}^{n+1} \|\widetilde{u}^\sigma\|_s(z,t) \leq \sum_{\sigma=0}^{n+1} \frac{\lambda_\sigma z}{a_\sigma(s_0-s)-z} \leq$$

$$\leq \lambda_0 \sum_{\sigma=0}^{n+1} \frac{\rho^\sigma a_{\sigma+1}}{a_\sigma - a_{\sigma+1}} \leq \lambda_0 \sum_{\sigma=0}^{n+1} \rho^\sigma \left(\frac{a_\sigma}{a_{\sigma+1}} - 1 \right) \leq \lambda_0 \sum_{\sigma=0}^{n+1} \rho^\sigma (\sigma+1)^2,$$

$$\|\vartheta^{n+2} - \vartheta^0\|_s(z,t) \leq \frac{2\lambda_0}{s_0 - s} \sum_{\sigma=0}^{n+1} \rho^\sigma (\sigma+1)^4, \|k^{n+1} - k^0\|_s(z) \leq$$

$$\leq \frac{4\lambda_0}{(s_0 - s)^2} \sum_{\sigma=0}^{n+1} \sum_{\sigma=0}^{n+1} \rho^\sigma (\sigma+1)^6.$$

Поэтому неравенства (18) выполняются при $\sigma = n+1$, если число a_0 выбрано так, что

$$\rho < 1, \lambda_0 \sum_{\sigma=0}^{\infty} \rho^\sigma (\sigma+1)^6 \leq \chi, \tag{21}$$

где число ρ определено формулой (20). Ясно, что всегда можно выбрать параметр a_0 настолько малым, что неравенства (21) выполняются. Тем самым справедливость леммы 1 установлена. Далее будем считать, что число a_0 выбрано из условия (21).

Продолжая доказательство теоремы 1, заметим, что при выбранном значении a_0 последовательность $(u^\sigma, \vartheta^\sigma, k^\sigma)$ равномерно сходится в норме пространства $C(A_s, G), a = \lim a_\sigma$ и определяет единственное решение системы уравнений (11), а вместе с тем решение обратной задачи (1)-(3). Предельный переход в неравенствах (18) при $(z,t,s) \in F = \{(z,t,s) | 0 < s < s_0, 0 \leq t \leq z < a(s_0 - s)\}$ приводит К оценкам, совпадающим с (13). Единственность построенного решения устанавливается с помощью изложенной выше техники оценок стандартным приемом [5,с.103].

Теорема 2. *Предположим, что для* $t \in [0,T] (\partial^i/\partial t^i)\ f, (\partial^2/\partial x^2)$ $f, (\partial^3/\partial z \partial x^2)\ f \in C(A_{s_0}, [0,T]), i = 0,1,2;$

$$\max\left\{\|f\|_{s_0}, \|(\partial/\partial z) f\|_{s_0}, 2\|(\partial^2/\partial z^2) f\|_{s_0} + \right.$$

$$\left. + \|(\partial^2/\partial x^2 f)\|_{s_0}, \|(\partial^3/\partial z \partial x^2) f\|_{s_0}\right\} \leq R,$$

$f(x,+0) = (\partial/\partial t) f(x,+0) = 0$ *и* $\gamma \in (0, s_0)$ *- произвольное фиксированное число. Тогда для любою* $\chi > 0$ *найдется положительная постоянная* $C = C(R, s_0, T, \chi)$ *такая, что для любого* $s \in (0, s_0 - \gamma)$ *решение, определешюе теоремой 1, непрерывно дифференцируемо по переменным* (z,t) *в области* $G_\gamma \subseteq GG_\gamma = G_\gamma(R, s_0, T, \chi, s) = \{(z,t) | 0 \leq t \leq z < a(s_0 - \gamma - s)\}$ *и для него справедливы оценки*

$$\|u\|_s(z,t) \leq c, \|\vartheta\|_s(z,t) = \left\| \frac{\partial u}{\partial z} \right\|_s (z,t) \leq \frac{c}{\gamma},$$

$$\max\left\{\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_s(z,t), \|k\|_s(z), \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\|_s(z,t)\right\|\right\} \leq \frac{c}{\gamma^2},$$

$$\max\left[\left\|\frac{\partial u}{\partial z}\right\|_s(z,t), \left\|\frac{\partial u_{xx}}{\partial z}\right\|_s(z,t)\right] \leq \frac{c}{\gamma^3},$$

$$\max\left[\left\|\frac{\partial u_{xx}}{\partial t}\right\|_s(z,t), \left\|\frac{\partial \vartheta_{xx}}{\partial t}\right\|(z,t)\right] \leq \frac{c}{\gamma^4}, \tag{22}$$

$$\max\left[\left\|\frac{\partial k}{\partial z}\right\|_s(z), \left\|\frac{\partial \vartheta_{xx}}{\partial z}\right\|_s(z,t)\right] \leq \frac{c}{\gamma^5}, (z,t) \in G_\gamma.$$

Доказательство теоремы.

Пусть (u, ϑ, k) - решение системы уравнений (11), определенной теоремой 1.1. В дальнейшем будем предлагать, что числа s_0, a, χ, R и область G имеет тот же смысл, что и в теореме 1.1. Для начала найдем выражения для первых производных функций ϑ и k по переменной z. Для этого дифференцируем по z второе и третье уравнения из (11):

$$\vartheta_z(x,z,t) = (1/2)f_{zz}(x,z) + (1/4)f_{xx}(x,z) + (1/4)k(x,z) +$$
$$+(1/4)\int\limits_t^z [\vartheta_{xx}(x,z,\xi) - k(x,\xi)f(x,z-\xi) -$$
$$-\int\limits_0^\xi k(x,\tau)\vartheta(x,z-\tau,\xi-\tau)d\tau\Bigg] d\xi, \tag{23}$$
$$k_z(x,z) = -2f_{zz}(x,z) - f_{xx}(x,z) - (1/2)f_{zxx} -$$
$$-\int\limits_0^z [(\vartheta_z)_{xx}(x,z,\xi) - (3/2)k(x,\xi)f_z(x,z-\xi) -$$
$$-\int\limits_0^\xi k(x,\tau)\vartheta_z(x,z-\tau,\xi-\tau)d\tau\Bigg] d\xi. \tag{23}$$

Согласно (13), выполнены следующие неравенства:

$$\|u\|_s(z,t) \leq R + \chi := c_1, \|\vartheta\|_s(z,t) \leq \frac{Rs_0 + 2\chi}{s_0 - s} := \frac{c_2}{s_0 - s},$$

$$\|k\|_s(z) \leq \frac{Rs_0^2 + 4\chi}{(s_0 - s)^2} := \frac{c_3}{(s_0 - s)^2} \tag{25}$$

Используя эти соотношения оценим функций ϑ_z и k_z, определяемые равенствами (23) и (24):

$$\|\vartheta_z\|_s(z,t) \le [s_0^3 R + s_0 c_3 + (4c_2 + r s_0 c_3 + T s_0 c_2 c_3)T]/(s_0 - s)^3 := c_4/(s_0-s)^3, \quad (26)$$

$$\|k_z\|_s(z) \le [2Rs_0^5 + (16c_4 + 2s_0^2 R c_3 + c_3 c_4 T)T]/(s_0-s)^5 := c_5/(s_0-s)^5 \quad (27)$$

Пусть теперь $s \in (0, s_0 - \gamma)$ при некотором $\gamma \in (0, s_0)$ и $(z,t) \in G_\gamma$. Тогда из (25)-(27) следует следующие оценки

$$\|u_z\|_s = \|\vartheta\|_s(z,t) \le c_2\gamma^{-1}, \|k\|_s(z) c_3\gamma^{-2},$$

$$\|\vartheta_z\|_s(z,t) \le c_4\gamma^{-3}, \|k_z\|_s(z) \le c_5\gamma^{-5}.$$

Так как u_t удовлетворяет следующему соотношению

$$u_t(x,z,t) = (1/2) f_t(x,z) + \int_t^z \vartheta_t(x,\eta,z)d\eta,$$

то $\|u_t\|_s(z,t) \le (Rs_0 + c_4 T)\gamma^{-2} := c_6\gamma^{-2}$ для оценки s - нормы функции u_{xx} воспользуемся неравенством

$$\|u_{xx}\|_s(z,t) \le 4e^{-2}(s'-s)^{-2}\|u\|_{s'}(z,t),$$

положив в нем $s' = s + \gamma/2$. Так как при этом, очевидно, $s' < s_0 - z/a$, то

$$\|u_{xx}\|_s(z,t) \le 16e^{-2}(R+\chi)\gamma^{-2} := c_7\gamma^{-2}.$$

Аналогичные неравенства, при том же выборе s', используем для оценки первых производных по переменным t, z функций u_{xx}, ϑ_{xx}:

$$\left\|\frac{\partial u_{xx}}{\partial t}\right\|_s (x,t) \le 4e^{-2}(s'-s)^{-2}\|u_t\|_{s'}(z,t) \le 16e^{-2}c_6\gamma^{-4} := c_8\gamma^{-4},$$

$$\left\|\frac{\partial u_{xx}}{\partial z}\right\|_s (x,t) \le 4e^{-2}(s'-s)^{-2}\|u_z\|_{s'}(z,t) \le 16e^{-2}c_2\gamma^{-3} := c_9\gamma^{-3},$$

$$\left\|\frac{\partial u_{xx}}{\partial t}\right\|_s (x,t) \le 4e^{-2}(s'-s)^{-2}\|\vartheta_t\|_{s'}(z,t) \le 16e^{-2}c_6\gamma^{-4} := c_{10}\gamma^{-4},$$

$$\left\|\frac{\partial u_{xx}}{\partial t}\right\|_s (x,t) \le 4e^{-2}(s'-s)^{-2}\|\vartheta_t\|_{s'}(z,t) \le 16e^{-2}c_4\gamma^{-5} := c_{11}\gamma^{-5}.$$

Из полученных выше оценок следуют оценки (22) при подходящим выборе постоянной C. Теорема доказана.

Литература

1. Lorensi A., An identification problem related to a nonlinear hyperbolic integro-differential equation // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications,22(1994),p.297-321.

2. Janno J. Von Welfersdorf L., Inverse problems for identification of memory kernels in viscoelasticity, Math.Methods il1 Appl.Sciel1ces, 20(1997)No.4,p.291-314.

3. Бухгейм А.Л., Дятлов Г.В. Единственность в одной обратной задаче определения памяти // Сиб.мат.журн.37(1996),3,с.52-53.

4. Романов В.Г. О численном методе решения одной обратной задачи для гиперболического уравнения // Сиб.мат.журн. 37(1996) ,3,с.633-655.

5. Романов В.Г. Устойчивость в обратных задачах. М: Научный мир, 2005.

6. Дурдиев Д.К. Многомерная обратная задача для уравнения с памятью //Сиб.мат,журн.35(1994),З, с.574-582.

7. Дурдиев Д.К. Локальная однозначная разрешимость многомерной обратной задачи для волнового уравнения в среде памятью //Уз.мат. журн.l(2004),с.38-41.

Бухарский государственный
университет им. Ф.Ходжаева

Дата поступления
12.12.05

Uzbek Mathematical
Journal, 2006,№3, pp.36-39

УДК 621

Исследавание устойчивости виброзащитных систем по графику амплитуд колебаний

О.М.Дусматов, Х.М.Буронов

Ishda elastik-dissipativ xarakteristikasi gisterezis tipida bo'lgan tebranishlardan himoyalanuvchi sistemalarning chiziqlimas tebranishlari qaralgan.

In the work the stability of vibroprotection systems with hysteresis elastic-dissipate characteristics is analyzed and tinned regions of stability are esteblished.

При нелинейных колебаниях механических систем имеет место случай "загиба скелетной кривой", т.е. зависимости резонансной частоты от амплитуды колебаний, вследствие чего некоторым частотам соответствуют несколько значений амплитуды амплитудно-частотной характеристики. Некоторые из этих амплитуд неосуществимы, т.е. будут неустойчивыми. Определение условий и областей устойчивости является одним из важных проблем систем виброзащиты. Целью данной работы является исследование устойчивости виброзащищаемых систем и динамического гасителя колебаний при кинематических воздействиях.

В данной работе рассматривается виброзащищаемая система, состоящая из твердого тела, которое прикреплена упругим элементом к совершающей по оси x колебательные движения основе, и динамического гасителя колебаний, установленного на виброзащищаемую - систему с помощью упругодемпфирующего элемента гистерезисными диссипативными свойствами.

1. Пастанавка задачи. За координату виброзащищаемай системы примем x_1, а динамического гасителя колебаний x_2. Нелинейную функцию $\varepsilon \overset{\rightleftarrows}{\Phi} (\xi)$, характеризующую гистерезисное рассеяние энергии в упругодемпфирующих элементах динамического гасителя, заменим комплексный линеаризованной функцией в частотно-независимой форме [1]:

$$\varepsilon \overset{\rightleftarrows}{\Phi} (\xi) \approx \varepsilon N(\xi) = (-\nu_1 + i\nu_{20})\xi, \tag{1}$$

где $\nu_{20} = \nu_2 \text{sign}\omega$; ν_1, ν_2 - коэффициенты линеаризации, ω - частота колебаний, i - мнимая единица. Ускорение основания примем в гармоническом виде $W_0 = \zeta \cos \omega t$, где ζ - амплитуда, t- время.

Дифференциальные уравнения виброзащищаемой системы и динамического гасителя колебаний с учетом диссипации энергии имеют вид

$$\begin{aligned}&\ddot{x}_1 + k_1^2 x_1 - \mu k_2^2 (1 - \nu_1 + i\nu_{20}) x_2 = \zeta \cos \omega_1 t;\\ &\ddot{x}_2 - k_1^2 x_1 + \mu(1+\mu) k_2^2 (1 - \nu_1 + i\nu_{20}) x_2 = 0,\end{aligned} \tag{2}$$

где k_1, k_2 - соответственно собственные частоты виброзащищаемой системы и динамического гасителя колебаний; $\mu = \frac{m_1}{m_2}$, m_1, m_2 - соответственно массы виброзащищаемой системы и динамического гасителя.

Для решения системы (2) воспользуемся методом усреднения [3]. Заменим в системе (2) переменные $x_1 = a_1 \cos(\omega_1 t + \theta)1)$, $x_2 = a_2 \cos(\omega_1 t + \theta_2)$, где a_1, a_2 - амплитуды соответственно виброзащищаемой системы и динамического гасителя; θ_1, θ_2 - фазы соответственно виброзащищаемой системы и динамического гасителя. Выполняя усреднение, после преобразований уравнений получим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\dot{a}_1 = \frac{1}{2\omega}[-\zeta \sin \theta_1 + \mu k_2^2 a_2 ((1-\nu_1)\sin\varphi + \nu_2 \cos\varphi)];$$

$$\dot{\theta}_1 = -\frac{1}{2\omega a_1}[\zeta \cos \theta_1 + \mu k_2^2 a_2 ((1-\nu_1)\cos\phi - \nu_2 \sin\varphi) + \Delta\omega_1 a_1];$$

$$\dot{a}_2 = -\frac{1}{2\omega}[(1+\mu) k_2^2 a_2 \nu_2 + k_1^2 a_1 \sin\varphi];$$

$$\dot{\theta}_2 = -\frac{1}{2\omega a_2}[(1+\mu) k_2^2 a_2 \nu_1 + k_1^2 a_1 \cos\varphi + \Delta\omega_2 a_2],$$

где $\Delta\omega_1 = \omega_1^2 - k_1^2,$, $\Delta\omega_2 = \omega_1^2 - (1+\mu)k_2^2$, $\varphi = \theta_2 - \theta_1$.

Из системы уравнений (3) положив $\dot{a}_1 = \dot{a}_2 = \dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = 0$, находим стационарные амплитуды колебаний.

$$\begin{aligned}a_{10} &= \frac{\zeta\sqrt{(b_3+c_1\nu_1)^2+(c_1\nu_2)^2}}{\sqrt{b_1+b_2\nu_1)^2+(b_2\nu_2)^2}}\\ a_{20} &= \frac{\zeta k_2^2}{\sqrt{(b_1+b_2\nu_1)^2+(b_2\nu_2)^2}}\end{aligned} \tag{4}$$

где $b_1 = \omega^2 - (k_1^2 + (1+\mu)k_2^2)\omega + k_1^2 k_2^2$, $b_2 = k_2^2((1+\mu)\omega - k_1^2)$, $b_3 = \omega - (1+\mu)k_2^2$, $c_1 = (1+\mu)k_2^2$.

С помощью уравнений (4) можно найти резонансные кривые и значения соответствующих резонансных амплитуд, а также условия устойчивости стационарных амплитуд.

2. Вывод условий устойчивости. Задача устойчивости стационарных колебаний (4) сводится к исследованию наличия вертикальных касательных на графике амплитуд. Произведя полное дифференцирование уравнений (4) и вычисляя $\frac{da_1}{d\omega}$, находим условие, при выполнении которых

стационарные амплитуды виброзащищаемой системы имеют вертикальные касательные

$$(b_1 + b_2\nu_1)^2 + (b_2\nu_2)^2 + (b_1 + b_2\nu_1)b_2\nu_1' a_2 + b_2^2\nu_2\nu_2' a_2 = 0, \qquad (5)$$

где $\nu_1' = \frac{d\nu_1(a_{20})}{da_2}$, $\nu_2' = \frac{d\nu_2(a_{20})}{da_2}$.

Равенство (5) представим в удобной для анализа форме:

$$b_1^2 + b_1 b_2(2\nu_1 + \nu_1' a_2) + b_2^2(\nu_1(\nu_1 a_2)' + \nu_2(\nu_2 a_2)') = 0, \qquad (6)$$

которая является квадратичной формой относительно b_1, b_2. Выражение, в равенстве (6), не меняет свой знак при условии

$$(\nu_1' a_2)^2 < 4\nu_2(\nu_2 a_2)', \qquad (7)$$

которая является достаточным условием устойчивости стационарных колебаний.

Неравенство (7) показывает, что с ростом коэффициента ν_1 характеризующего изменение частоты колебаний, возрастает возможность появления неустойчивых амплитуд.

Выполнение обратного неравенства означает возможность неустойчивых амплитуд. При этом из равенства (6) можно найти выражения для определения границ устойчивости

$$b_{10} = \frac{-(2\nu_1 + \nu_1' a_2) \pm \sqrt{(\nu_1' a_2)^2 - 4\nu_2(\nu_2 a_2)}}{2} b_{20}. \qquad (8)$$

3. Обсуждение результатов. Рассмотрим условия устойчивости (7) и определения границ устойчивости (8) для зависимости Г.С.Писареко - О.Е.Богинича [3] гистерезисной характеристики упругодемпфирующего элемента динамического гасителя колебаний для n - четного.

$$\varepsilon \overset{\rightleftarrows}{\Phi}(\xi) = \pm\frac{n+1}{4n}\delta(a)\left(a \mp n\xi - \frac{\xi^n}{a^{n-1}}\right);$$

для n нечетного

$$\varepsilon \overset{\rightleftarrows}{\Phi}(\xi) = \pm\frac{n+2}{4(n+1)}\delta(a)\left(a \mp (n+1)\xi - \frac{\xi^{n+1}}{a^n}\right);$$

где $\delta(a)$ - декремент колебаний, n - параметр.

В этом случае коэффициенты гармонической линеаризации будут $\nu_1 = L\delta(a)$, $\nu_2 = \frac{1}{2\pi}\delta(a)$, где

$$L = \begin{cases} \frac{n+1}{4n} & \text{для } n \text{ четного} \\ \frac{n+2}{4(n+1)} & \text{для } n \text{ нечетного.} \end{cases}$$

Если декремент колебаний зависит линейно от амплитуды. колебаний, т.е. $\delta(a_2) = k_1 a_2$, то условие устойчивости (7) примет вид $L^2 < \frac{8}{\pi^2}$. Следовательно, устойчивость сохранится при $n \leq 2$ для n четного и $n \leq 1$ для n нечетного. Выражение для определения границ устойчивости примет вид.

$$4b_1 + \left(6L \pm \sqrt{L^2 - \frac{8}{\pi^2}}\right) k_1 a_2 b_2 = 0. \qquad (9)$$

Для зависимости $\delta(a_2) = k_2 a_2^2$ условие устойчивости примет вид $L^2 < \frac{3}{\pi^2}$, т.е. неустойчивые амплитуды возможны при ≥ 2 для n четного и при $n \geq 1$ для n нечетного. В этом случае равенство (8) примет вид

$$2b_1 + \left(2L \pm \sqrt{L^2 - \frac{3}{\pi^2}}\right) k_2 a_2 b_2 = 0. \qquad (10)$$

Условия (9) и (10) показывают, что устойчивость стационарных амплитуд виброзащищаемой системы зависит не только от декремента колебаний, но и от параметра n.

Таким образом, при исследовании устойчивости виброзащитных систем с гистерезисными упруго-диссипативными свойствами удобно проверять наличие вертикальных касательных на графике амплитуд колебаний, которое дает возможность получать довольно простые выражения для анализа устойчивости.

Литература

1. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в. теории нелинейных колебаний. - М.: Наука, 1974.-504 с.

2. Павловский М.А., Рыжков Л.М., Яковенко В.Б., Дусматов О.М. Нелинейные задачи динамики виброзащитных систем. - Киев: Техника, 1997.- 202 с.

3. Писаренко Г.С., Богинич О.Е. Колебания кинематически возбуждаемых систем с учетом диссипации энергии. - Киев: Наука. Думка, 1982.- 220 с.

4. Ганиев Р.Ф., Кононенко В.О. Колебания твердых тел.-М.:Наука,1976-432

Самаркандский Государственный Университет им. А.Навои

Дата поступления 29.11.04

Uzbek Mathematical
Journal, 2006,№3, pp.40-45

УДК 517.95

Об одном обобщении уравнении теплопроводности

Б.Д.Кадиркулов, Б.Х.Турметов

Ushbu maqolada kasr tartibli differensial tenglama uchun chegaraviy masala o'rganilgan. O'zgaruvchilarni ajratish usuli yordamida qaralayotgan masalaning yechimi mavjudligi va yagonaligi haqidagi teoremalar isbotlangan.

In this paper is studied the original-boundary problem for differential equation of fractional order in rectangular domain. The theorems of uniqueness and existence of solution are proved.

Пусть $\alpha > 0$ - некоторое действительное число. Для функции $f(t)$, заданной на $(0, \ell)$, $\ell < \infty$ рассмотрим оператор дробного интегрирования в смысле Римана - Лиувилля α -порядка [1]

$$I^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \ t > 0. \tag{1}$$

Для $(n+1)$ раз дифференцируемой на интервале $(0, \ell)$ функции $f(t)$ выражение

$$D_*^\alpha f(t) = I^{(n+1-\alpha)} f^{(n+1)}(t) = \frac{1}{\Gamma(n+1-\alpha)} \int\limits_0^t (t-\tau)^{n-\alpha} f^{(n+1)}(\tau) d\tau \tag{2}$$

называется оператором дробного дифференцирования в смысле Капуто [4].

Пусть $0 < \alpha < 1$. Рассмотрим уравнения вида

$$D_{*t}^\alpha u(x,t) = a^2 u_{xx}. \tag{3}$$

Здесь D_{*t}^α означает, что оператор D_*^α действует по переменному t. Так как $I^\alpha f(x) \to I^0 f(t) = f(t)$ почти всюду при $\alpha \to 0$ [1], то при $\alpha = 1$ можно принять $D_*^\alpha u(x,t) = u_t(x,t)$.

Отсюда следует, что уравнение (3) в случае $\alpha = 1$ совпадает с уравнением теплопроводности $u_t = a^2 u_{xx}$.

В области $\Omega = \{(x,t) : 0 < x < \ell,\ \ 0 < t < T\}$, $\ell, T < \infty$, рассмотрим следующую задачу.

Задача $_1$. Найти решение уравнение (3), удовлетворяющее условиям

$$u(x,0) = \varphi(x),\ 0 \le x \le \ell \tag{4}$$

$$u(0,t) = u(\ell,t) = 0,\ 0 \le t \le T \tag{5}$$

Задачи для дифференциальных уравнений дробного порядка с операторами дробного интегрирования или дифференцирования в смысле Римана-Лиувилля рассматривались различными авторами [3-7].

В работе [4] в полупространстве $x \in R^n, t > 0$ была изучена "чистая"задача Коши для уравнения дробного порядка в смысле Капуто, где в отличие от других работ в начальных условиях задано значение самой функции и ее производных.

По аналогии с этой работой в настоящей работе изучается начально-краевая задача для уравнения (3) в случае $0 < \alpha < 1$.

Под регулярным решением задачи Т1 будем понимать функцию $u(x,t)$, такую, что $u \in C(\overline{\Omega})$, $D^{\alpha}_{*t}u,\ u_{xx} \in C(\Omega)$, удовлетворяющую уравнению (3) в области Ω и условиям (4) и (5).

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть $\varphi(x) \in C[0,\ell]$, имеет кусочно-непрерывную производную на $[0,\ell]$ и удовлетворяет условиям $\varphi(0) = \varphi(\ell)$ =0. Тогда задача Т1 имеет единственное регулярное решение.*

Доказательство. Сначала докажем единственность регулярного решения задачи Т1.

Лемма 1. *(Принцип экстремума для оператора $D^{\alpha}_{*t}u$)*

Пусть непрерывная в области $\overline{\Omega}$ функция $u(x,t)$ своего положительного максимума (отрицательного минимума) в $\overline{\Omega}$ достигает в точке $(x_0,t_0) \in \Omega$ и сколь угодно малой окрестности этой точки удовлетворяет условию Гельдера по переменному t с показателем $\sigma > \alpha$. Тогда для любого $\alpha \in (0,1)$ $D^{\alpha}_{*t}u(x_0,t_0) > 0$ ($D^{\alpha}_{*t}u(x_0,t_0) < 0$).

Доказательство леммы аналогично доказательству теоремы 3.1.2 работы [7]

Лемма 2. *Пусть функция $u(x,t) \in (\overline{\Omega})$ удовлетворяет уравнению (3) в области Ω . Тогда $u(x,t)$ своего положительного максимума или отрицательного минимума достигает или в начальный момент $(0 \le x \le \ell,\ t = 0$), или в точках границы x=0, или $x = \ell$ ($0 \le t \le T$).*

Доказательство. Рассмотрим случай максимума. Предположим, что функция $u(x,t)$ своего положительного максимума достигает во внутренней точке (x_0,t_0) области Ω. Тогда из леммы 1 следует, что $D^{\alpha}_{*t}u(x_0,t_0) >$

0 . С учетом этого, из (3) получим, что $u_{xx}(x_0, t_0) > 0$. Но с другой стороны, так как (x_0, t_0) -точка максимума, получим $u_{xx}(x_0, t_0) \leq 0$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Теорема 2. *Задача $_1$ не может иметь более одного регулярного решения.*

Доказательство. Пусть $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ два регулярных решения задачи T1. Тогда нетрудно проверить, что функция

$$u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$$

будет решением однородной задачи T1. Из леммы следует, что функция $u(x,t)$ своего положительного максимума достигает или в начальный момент, или в точках границы x=0 или $x = \ell$. Так как

$$u(x,0) = u(0,t) = u(\ell,t) = 0,$$

то отсюда следует $u(x,t) \equiv 0$ на $\overline{\Omega}$. Значит, $u_1(x,t) \equiv u_2(x,t)$, т.е. решение задачи $_1$ единственно.

Докажем существование решения задачи $_1$.

Решение задачи ищем в виде

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t) \tag{6}$$

Подставляя (6) в уравнения (3) и учитывая краевые условия, (5) получим

$$X''(x) + \lambda\, X(x) = 0,\ X(0) = X(\ell) = 0 \tag{7}$$

$$D_*^{\alpha} T(t) + \lambda a^2\, T(t) = 0 \tag{8}$$

Таким образом, для определения функции $X(x)$ получили задачу о собственных значениях (7), которая имеет решения [8]

$$X_n(x) = \sin(\sqrt{\lambda_n}\, x), \quad \lambda_n = \left(\frac{\pi\, n}{\ell}\right)^2, n \in N \tag{9}$$

Рассмотрим уравнение (8). Учитывая формулы (1) и (2), ее можно представить в виде

$$I^{1-\alpha} T'(t) + \lambda a^2\, T(t) = 0.$$

Отсюда легко показать, что $T(t)$ будет решением следующего интегрального уравнения Вольтерра второго рода

$$T(t) = \frac{\overline{\lambda}}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} T(\tau) d\tau + T(0), \quad \overline{\lambda} = -\lambda a^2. \tag{10}$$

Для получения общего решения уравнения (10), воспользуемся следующей теоремой [2]

Теорема 3. *Пусть функция $f(x)$ принадлежит классу $L_1(0,\ell)$. Тогда интегральное уравнение*

$$u(x) = f(x) + \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^x (x-t)^{\alpha-1} u(t)dt, \quad x \in (0,\ell),$$

где $\alpha > 0$, λ -произвольный комплексный параметр, имеет единственное решение

$$u(x) = f(x) + \lambda \int\limits_0^x (x-t)^{\alpha-1} E_{\alpha,\,\alpha}(\lambda(x-t)^{\alpha}) f(t)dt, \quad x \in (0,\ell),$$

принадлежащее классу $L_1(0,\ell)$.

Здесь $E_{\alpha,\,\beta}(z)$- известная функция типа Миттаг-Леффлера, которая имеет вид [2]

$$E_{\alpha,\,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha\, k + \beta)} \tag{11}$$

На основании этой теоремы, общее решение уравнения (10) можно написать в виде

$$T(t) = T(0)\left[1 + \overline{\lambda} \int\limits_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\overline{\lambda}\,(t-\tau)^{\alpha} d\tau\right]. \tag{12}$$

Учитывая следующие формулы из [2]

$$\int\limits_0^z E_{\alpha,\,\mu}(\lambda t^{\alpha}) t^{\mu-1} dt = z^{\mu} E_{\alpha,\,\mu+1}(\lambda t^{\alpha}),\ \beta > 0$$

$$E_{\alpha,\,\mu}(z) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} + z E_{\alpha,\,\mu+\alpha}(z)$$

решение (10) можно написать в виде

$$T(t) = c E_{\alpha}(\overline{\lambda}\, t^{\alpha}), \quad = T(0).$$

С учетом (9) окончательно получим, что каждому собственному числу λ_n соответствует решение $T_n(t)$ уравнения (8) вида

$$T_n(t) = c_n E_{\alpha}(-a^2 \lambda_n\, t^{\alpha}) \tag{13}$$

Подставляя решения (9) и (13) в формулу (6), получим частные решения уравнения (3), удовлетворяющие краевым условиям (5) в виде

$$u_n(x,t) = c_n E_\alpha(-a^2\lambda_n t^\alpha) \cdot \sin(\sqrt{\lambda_n}x) \tag{14}$$

Нетрудно проверить, что функция

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n E_\alpha\left(-a^2\lambda_n t^\alpha\right) \cdot \sin\sqrt{\lambda_n}x \tag{15}$$

также удовлетворяет уравнению (3) и краевым условиям (5).

Требуя теперь, чтобы функция $u(x,t)$ удовлетворяла и начальному условию (4), получаем соотношение

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\frac{\pi\, n}{\ell}x,$$

которое показывает, что коэффициенты cn являются коэффициентами Фурье функции $\varphi(x)$ в интервале $(0,\ell)$, т.е.

$$c_n = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell \varphi(x)\sin\frac{\pi\, nx}{\ell}dx \tag{16}$$

Покажем, что функция $u(x,t)$, определяемая как сумма ряда (15), будет регулярным решением задачи $_1$.

Сначала докажем, что $u \in C(\overline{\Omega})$. Для этого используем следующую оценку

$$|E_\alpha(z)| \leq \frac{M}{1+|z|}, \tag{17}$$

функции типа Миттаг - Леффлера [2]. Здесь $\arg(z) = \pi$, M- положительная постоянная, не зависящая от z.

Тогда из формулы (14) следует, что

$$|u_n(x,t)| \leq M \cdot |c_n|.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |c_n|$ сходится в силу условий теоремы. Отсюда следует, что ряд (15) сходится равномерно на $\overline{\Omega}$. Значит, сумма u(x,t) ряда (15) является непрерывной функцией в области $\overline{\Omega}$. Теперь покажем, что $D^\alpha_{*t}u(x,t) \in (\Omega)$. Учитывая соотношение (8), (13) и (14) нетрудно получить, что

$$D^\alpha_{*t}u_n(x,t) = -c_n a^2\lambda_n E_\alpha\left(-a^2\lambda_n t^\alpha\right)\sin(\sqrt{\lambda_n}x).$$

Отсюда, учитывая оценку (17), получим

$$|D^{\alpha}_{*t}u_n(x,t)| \;\le\; t_0^{-\alpha}|c_n|\cdot M \tag{18}$$

где $0 < t_0 < t$.

Аналогично доказывается, что

$$|u_{n_{xx}}(x,t)| \;\le\; t_0^{-\alpha}|c_n|\cdot M \tag{19}$$

Из оценок (18) и (19) следует, что $D^{\alpha}_{*t}u(x,t)$ и $u_{xx}(x,t)$ принадлежат классу $C(\Omega)$. Значит функция u(x,t), определяемая как сумма ряда (15), является регулярным решением задачи T_1. Теорема доказана полностью.

Заметим, что при $\alpha = 1$ $E_{1,1}(z) = e^z$ и решение (15) совпадает с классическим решением уравнения $u_t = a_2u_{xx}$, удовлетворяющим условиям (4) и (5).

Литература

1. Самко С.Г., Кильбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск, Наука и техника. 1987. -688 с.

2. Джрбашян М.М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. -М., 1966. -672 с.

3. Джрбашян М.М., Нерсесян А.Б., Дробные производные и задача Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка. Известия АН Армян. ССР. Т3. №1. 1968г. с. 3-22.

4. Gorenflo R., Luchko Y.F., Umarov S.R. On the Cauchy and multipoint problems for partial pseudo-differential equations of fractional order //Fract. Calc. & Appl. Anal. 2000. V 3., №3. P. 249-275.

5. Псху А.В. Решение краевой задачи для уравнения с частными производными дробного порядка //Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39. 8. -С. 1092-1099.

6. Псху А.В. К теории оператора интегро-дифференцирования континуального порядка //Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40.1. -С. 120-127.

7. Нахушев А.М. Элементы дробного исчисления и их приложения. Нальчик. 2000. -298 с. 8.Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. -М., 1972. -735 с.

Ташкентский государственный авиационный институт

Дата поступления 31.10.05

Uzbek Mathematical
Journal, 2006,№3, pp.46-51

УДК 517.95

Предельная теорема для линейной сингулярно возмущенной задачи с нестабильным спектром

Б.Т.Калимбетов

Maqolada singulyar g'alayonlangan masalaning asimptotik yechimini limit sistemaning yechimiga yaqinlashishi isbotlangan.

In article the theorem on convergence of asymptotic solutions of singular perturbed problems to the solution of the limiting is proved.

Систематическое изучение теории сингулярных возмущений начинается во второй половине прошлого столетия, когда А.Н. Тихонов и В. Вазов доказывают свои знаменитые теоремы о предельном переходе в сингулярно возмущенных задачах (см. [1,2]). Появились новые теоремы о предельном переходе и новые асимптотические методы, доказывающие сходимость приближенных решений к точным при стремлении малого параметра к нулю в обычном смысле или асимптотически. Одним из эффективных методов асимптотического интегрирования сингулярно возмущенных задач является метод нормальных форм [3,4], сочетающий идеи локального метода нелинейного анализа дифференциальных уравнений [5] и идеи метода регуляризации [6]. Метод нормальных форм, в отличие от ранее известных асимптотических методов, позволяет эффективно строить приближенные (а в некоторых случаях точные) решения задач с нестабильным спектром предельного оператора, суть которого демонстрирована в доказательстве сходимости точных решений к единственному гладкому решению предельной системы.

Рассмотрим следующий пример. Пусть в задаче

$$\varepsilon\dot{w} = a(t)w + \varepsilon, w(0,\varepsilon) = w^0, t \in [0,T] \tag{1}$$

$w = w(t,\varepsilon)$ - скалярная функция, коэффициент $a(t)$ обращается в нуль тождественно на отрезке $[t_1,t_2] \subset [0,T]$ и $a(t) < o\forall t \in [0,T]\backslash[t_1,t_2], w^0$ - постоянное число, $\varepsilon > 0$ малый параметр. Отличие задач такого типа аналогичных задач со стабильным спектром состоит в том, что предельная система $a(t)\overline{w} = 0$ при нарушении стабильности спектра может либо не иметь решений вообще, либо иметь их бесчисленное множество. Если для задач с нарушением стабильности спектра в отдельных точках t_i отрезка $[0,T]$, можно применить классический метод регуляризации [6], то для задач с нарушением стабильности спектра на континуальных подмножествах B_i отрезка $[0,T]$ возникают принципиальные трудности с описанием существенно особых сингулярностей. В этом случае картина предельного перехода в системе (1) становится более сложной, чем в случае дискретной необратимости оператора (см., напр. [7]). Решение задачи (1) можно записать следующим образом:

$$w(t,\varepsilon)=\begin{cases} e^{\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t a(x)dx}w^0+e^{\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t a(x)dx}\int\limits_0^t e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^S a(x)dx}ds,\ t\in[0,t_1),\\ w(t_1-0,\varepsilon)+(t-t_1),\ t\in[t_1,t_2],\\ e^{\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{t_2}^t a(x)dx}w(t_2-0,\varepsilon)+e^{\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{t_2}^t a(x)dx}\int\limits_{t_2}^t e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{t_2}^S a(x)dx}ds,\ t\in(t_2,T]. \end{cases} \tag{2}$$

С другой стороны, к задаче (1) можно применить алгоритм метода нормальных форм [3] и найти, что $w_0^{(0)}(t)\equiv 0$, где $w_0^{(0)}(t)$ - решение предельной системы. Эта функция играет роль гладкого предельного решения в задачах с нестабильным спектром. Однако, как это видно из (2), точное решение не стремится к гладкому предельному решению на отрезке $[t_1,t_2]$. Более того, функция $w_0^{(0)}(t)\equiv 0$ не может служить аппроксимацией линейной функции $w(t_1-0,\varepsilon)+(t-t_1)$, являющейся решением задачи (1) на указанном отрезке, (т.е. на отрезке где коэффициент $a(t)$ тождественно обращается в нуль). Формула (2) показывает, что в случае континуальной нестабильности спектра точное решение (1) состоит из участков "быстрых"и "медленных"движений. "Быстрые"движения (они описываются формулой (2) при $t\in[0,t_1)\cup(t_2,T]$ совершают резкий скачок к гладкому предельному решению $w_0^{(0)}(t)\equiv 0$ и остаются близкими к нему на $[\delta_1,t_1-\delta_2]\subset(0,t_1),[t_1+\delta_3,T]\subset(t_2,T]$, где $\delta_1,\delta_2,\delta_3$ - малые положительные постоянные. На указанных отрезках они хорошо аппроксимируются гладким предельным решением $w_0^{(0)}(t)\equiv 0\in V$ в зоне континуальной необратимости оператора $a(t)$ (т.е. на отрезке $[t_1,t_2]$ функция $w_0^{(0)}(t)\equiv 0$ не может служить аппроксимацией точного решения $w(t,\varepsilon)$, совершающего "медленное"движение. В этой зоне функция $w(t,\varepsilon)$ стремится при $\varepsilon\to+0$ к линейной функции $t-t_1$. Таким образом, предельным режимом задачи (1) является функция

$$\overline{\overline{w}}(t) = \begin{cases} 0,\ 0 \le t < t_1, \\ t - t_1,\ t_1 \le t \le t_2, \\ 0,\ t_2 < t \le T. \end{cases}$$

Она является разрывным решением предельной системы $0 = a(t)\overline{\overline{w}}$.

Сохранится ли эта картина в общем случае для задачи

$$\varepsilon \frac{dy}{dt} = A(t)y + h(t),\ y(0,\varepsilon) = y^0,\ t \in [0,T], \tag{3}$$

где $A(t)$ - матрица размерности $n \times n$, в случае нарушении стабильности спектра $\{\lambda_j(t)\}$ предельного оператора $A(t)$? Иначе говоря, будет ли точное решение $y(t,\varepsilon)$ задачи (3) стремиться при $\varepsilon \to +0$ к гладкому предельному решению $y_0^{(0)}(t)$, определяемому формулой

$$y_0^{(0)}(t) = -\sum_{j=r+1}^{n} \frac{(h(t), d_j(t))}{\lambda_j(t)} c_j(t), \tag{4}$$

где $c_i(t)$ и $d_j(t)$ - собственные функции операторов $A(t)$ и $A^*(t)$, соответствующие собственным значением $\lambda_i(t)$ и $\overline{\lambda}_j(t), i,j = \overline{1,n}$ соответственно, вне участков B_j необратимости оператора $A(t)$? Покажем, что это будет так в случае выполнения условий

$$(y_0(t), d_i(t)) \equiv 0 \forall t \in [0,T], i = \overline{1,r}, \tag{5}$$

Сформулируем подробно условия, при которых будет исследоваться рассматриваемый случай. Будем предполагать, что:

1) матрица $A(t) \in C^\infty([0,T], C^{n^2})$ и вектор-функция $h(t) \in C^\infty([0,T], C^n)$;

2) спектр $\{\lambda_j(t)\}$ оператора $A(t)$ удовлетворяет требованиям:

а) существуют подмножества $B_i \subset [0,T], B_i \cap B_j \neq \emptyset, i \neq j, i,j = \overline{1,r}, r < n,$, такие, что $\lambda_i(t) \equiv 0 \forall t \in B_i; \lambda_i(t) \neq 0 \forall t \in [0,T] \backslash B_i, i = \overline{1,r}; \lambda_k(t) \neq 0\ \forall t \in [0,T], k = \overline{r+1,n}$;

б) $\lambda_i(t) \neq \lambda_j(t),\ i \neq j, i,j = \overline{1,n},\ \forall t \in [0,T]$;

в) $Re\lambda_j(t) \le 0\ \forall t \in [0,T],\ j = \overline{1,n}$.

Имеет место, следующее утверждение.

Теорема. *Пусть числа* $\alpha_i(0) \equiv (y^0, d_i(0)) \neq 0,\ i = \overline{1,r}$, *выполнены условия 1), 2а)-2в), и (5). Пусть, кроме того,* $Re\lambda_i(t) < 0 \forall t \in [0,T] \backslash \bigcup_{S=1}^{r} B_s, i = \overline{1,r}$, *и* $Re\lambda_i(t) < 0 \forall t \in [0,T], j = \overline{r+1,n}$. *Тогда предельная система* $0 = A(t)\overline{y} + h(t)$ *имеет единственное гладкое решение* $y_0^{(0)}(t) \equiv 0$, *записываемое формулой (4), и имеет место предельный переход*

$$\left\| y(t,\varepsilon) - y_0^{(0)}(t) \right\|_{C(\overline{G})} \to 0(\varepsilon \to +0),$$

где $y(t,\varepsilon)$ *- точное решение задачи (3),* $\overline{G}$ *- любой отрезок, лежащий в полуинтервале* $(0,T]$ *и не пересекающийся с множеством* $\bigcup\limits_{i=1}^{r} \overline{B}_i$ *(*$\overline{B}_i$ *замыкание множества* B_i*).*

Доказательство. Согласно теореме об оценке остаточного члена (см., например [6]) имеем

$$\left\| y(t,\varepsilon) - y_{\varepsilon 1}(t) \right\|_{C[0,T]} \leq C_1 \varepsilon, \tag{6}$$

где $y(t,\varepsilon)$ - точное решение задачи (3), $y_{\varepsilon 1}(t)$ - функция вида

$$y_{\varepsilon 1}(t) = \sum_{i=1}^{r} (y_i^{(0)}(t) u_i + \varepsilon y_i^{(1)}(t) u_i) +$$

$$+ y_0^{(0)}(t) + \sum_{j=r+1}^{r} (y_j^{(0)}(t) u_j + \varepsilon y_j^{(1)}(t) u_j) + \varepsilon y_0^{(1)}(t),$$

первый член приближения асимптотических решений $y_0(t,u) + \varepsilon y_1(t,u) + \ldots$, а и $u_i = u_i(t,\varepsilon)$ - функции, удовлетворяющие нормальной форме порядка $m = 2$:

$$\begin{gathered} \varepsilon \dot{u}_i = \lambda_i(t) u_i + (g_{0i}(t) + \varepsilon g_{1i}(t) + \varepsilon^2 g_{2i}(t)),\ i = \overline{1,r}, \\ \varepsilon \dot{u}_j = \lambda_j(t) u_j,\ j = \overline{r+1,n}, \end{gathered} \tag{7}$$

где $g_{0i}(t) = \frac{1}{\alpha_i(t)}(h(t), d_i(t))$, $i = \overline{1,r}$ $\alpha_i(t)$ - произвольные функции, $i = \overline{1,r}$.

Частное решение i-го уравнения, отвечающего неоднородности $\varepsilon^2 g_{2i}(t)$ стремится к нулю при $\varepsilon \to +0$ (равномерно на отрезке $[0,T]$). Поэтому слагаемым $\varepsilon^2 g_{2i}(t)$ можно пренебречь и считать, что

$$\varepsilon \dot{u}_i = \lambda_i(t) u_i + \varepsilon g_{1i}(t), \quad i = \overline{1,r} \quad u_i(0,\varepsilon) = 1,\ i = \overline{1,r},$$

$$\varepsilon \dot{u}_j = \lambda_j(t) u_j, \quad j = \overline{r+1,n}; \quad u_j(0,\varepsilon) = 1,\ j = \overline{r+1,n}.$$

Пусть $\overline{G} = [\alpha,\beta]$ - отрезок, лежащий в полуинтервале $(0,T]$ и не пересекающийся с множеством $\bigcup\limits_{i=1}^{r} \overline{B}_i$. Тогда при достаточно малом $\mu > 0$

отрезок $\overline{G}_\mu = [\alpha-\mu, \beta]$ также лежит в $(0,T]$ и не пересекается с множеством $\bigcup\limits_{i=1}^{r}\overline{B}_i$. На отрезке $\overline{G}_\mu$ решение системы (7) записывается в виде

$$u_i(t,\varepsilon) = e^{\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\alpha-\mu}^{t}\lambda_i(x)dx}\left[u_i(\alpha-\mu,\varepsilon) + \int\limits_{\alpha-\mu}^{t} e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\alpha-\mu}^{x}\lambda_i(s)ds} g_{1i}(x)dx\right],\ \ i=\overline{1,r},$$

$$u_j(t,\varepsilon) = e^{\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\alpha-\mu}^{x}\lambda_j(x)dx} u_j(\alpha-\mu,\varepsilon),\quad i=\overline{1,r},$$

причем значения $u_i(\alpha-\mu,\varepsilon)$, $u_j(\alpha-\mu,\varepsilon)$ ограничены, т .е.

$$|u_s(\alpha-\mu,\varepsilon)| \leq c_0\ \ \forall\varepsilon\in(0,\varepsilon_0],$$

Имея в виду, что $Re\lambda_s(t) < 0\ \forall t\in\overline{G}_\mu$, $s=\overline{1,n}$ будем иметь

$$|u_i(t,\varepsilon)| \leq c_0 e^{\frac{\chi(t-\alpha+\mu)}{\varepsilon}} + \|g_{1i}\|\int\limits_{\alpha-\mu}^{t} e^{\frac{\chi(t-x)}{\varepsilon}}dx =$$

$$= c_0 e^{\frac{\chi(t-\alpha+\mu)}{\varepsilon}} + \|g_{1i}\|\frac{\varepsilon}{\chi}\left(1 - e^{\frac{\chi(t-\alpha+\mu)}{\varepsilon}}\right),\quad i=\overline{1,r},$$

$$|u_j(t,\varepsilon)| \leq c_0 e^{-\frac{\chi(t-\alpha+\mu)}{\varepsilon}},\quad j=\overline{r+1,n},\quad \forall t\in\overline{G}_\mu,$$

где $\chi = \min\limits_{t\in\overline{G}_\mu,\ s=\overline{1,n}}(-\lambda_s(t)) > 0$, $\|g_{1i}\| = \max\limits_{t\in[0,T]}|g_{1i}(t)|$. Отсюда следует, что при $t\in\overline{G}=[\alpha,\beta]$ будут иметь место неравенства

$$\begin{array}{l} |u_i(t,\varepsilon)| \leq c_0 e^{-\frac{\chi\mu}{\varepsilon}} + \|g_{1i}\|\frac{\varepsilon}{\chi},\quad i=\overline{1,r}; \\ |u_j(t,\varepsilon)| \leq c_0 e^{-\frac{\chi\mu}{\varepsilon}},\quad j=\overline{r+1,n}, \end{array} \tag{8}$$

Подставляя теперь функцию $y_{\varepsilon 1}(t)$ в (6) и учитывая неравенства (8), будем иметь

$$\|y(t,\varepsilon) - y_0^{(0)}(t)\|_{C(\overline{G})} \leq \overline{c}_0\varepsilon,$$

откуда и следует утверждение теоремы.

Литература

1. Тихонов А.Н. О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра //Матем.сб.-1948.-Т.22(64).- С. 193 - 204.

2. Wasow W. Asymptotic solutions of boundary value problems for the differential equation $\Delta u + \lambda u = \lambda f(x,y)$//Duke Math. J.- 1944.- V.ll.- P. 405 - 411.

3. Ломов С.А., Сафонов В.Ф. Регуляризация и асимптотические решения сингулярно возмущенных задач с точечными особенностями спектра предельного оператора //Укр.мат.журн.-1984,36,N2.- С. 172 - 180.

4. Бободжанов А.А., Калимбетов Б.Т., Сафонов В.Ф. Внутренний пограничный слой в интегро-дифференциальных уравнениях с быстро меняющимися ядрами //Вестник МЭИ.- 2002, N 6.- С. 15 - 27.

5. Брюно А.Д. Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1979.- 254 с.

6. Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Наука, 1981.- 400 с.

7. Калимбетов Б. Т. Асимптотическое решение линейной сингулярно возмущенной задачи с двумя нестабильными точками спектра. Депон. в ВИНИТИ. 18.12.1989, N 7465 - B89.

Институт математики
им. В.И.Романовского АН РУз

Дата поступления
11.01.06

Uzbek Mathematical
Journal, 2006,№3, pp.52-67

УДК 519.21

О точности гауссовской аппроксимации распределений сумм слабо зависимых случайных величин со значениями в пространствах R^m и ℓ_p

Н.Т.Парпиева, О.Ш.Шарипов

Maqolada R^m va ℓ_p fazolarida qiymat qabul qiluvchi kuchsiz bog'langan tasodifiy maydonlar uchun markaziy limit teoremada yaqinlashish tezligining bahosi olingan.

The rates of the convergence in the central limit theorem for mixing random fields with values in R^m and ℓ_p spaces are obtained.

Основной целью настоящей статьи является установление оценки скорости в центральной предельной теореме для слабо зависимых ℓ_p - значных случайных полей по классу шаров с центром в нуле. Исследованию оценок скорости сходимости в центральной предельной теореме для независимых одинаково распределенных (н.о.р.) банаховозначных случайных величин (с.в.) посвящены много работ (см. например [1], [2]). Оценкам скорости сходимости в центральной предельной теореме для действительнозначных случайных полей также посвящены много работ см. [3], [4]. В то же время оценки скорости сходимости в центральной предельной теореме для слабо зависимых случайных полей со значениями в конечномерных и бесконечномерных пространствах практически не исследованы. В [5] получена оценка скорости сходимости в центральной предельной теореме для конечномерных случайных полей с перемешиванием. Авторам не известно об аналогичных оценках для случайных полей со значениями в бесконечномерных пространствах. В [6]- [12] получены оценки скорости сходимости в центральной предельной теореме для последовательностей слабо зависимых с.в. со значениями в бесконечномерных пространствах.

Для получения оценки скорости сходимости в пространстве ℓ_p мы используем метод конечномерной аппроксимации. Как известно для использования метода конечномерной аппроксимации надо иметь соответствующую оценку в конечномерном пространстве. Мы не можем использовать оценку из [5] в этих целях и по этой причине возникает необходимость установления оценки скорости сходимости в центральной предельной теореме для слабо зависимых случайных полей с явной зависимостью от размерности пространства.

Пусть $X(t)$, $t \in Z^d$, $d \geq 1$ - стационарное в узком смысле случайное поле со значениями в пространстве R^m (с эвклидовой нормой $\|\cdot\|$ и со скалярным произведением (,)). Для $X(t)$ рассмотрим следующий коэффициент перемешивания:

$$\varphi_n(r) = \sup\{|P(A/B) - P(A)| : A \in \sigma(I), B \in \sigma(V),$$
$$|I| + |V| = n,\ I, V \subset Z^d,\ \ d(I,V) \geq r\},$$

где $\sigma(I)$ и $\sigma(V) - \sigma$ - алгебры, порожденные случайными векторами $X(t)$, $t \in I$ и $t \in V$, соответственно;
$|G|$ означает мощность множества G;

$$d(I,V) = \inf\{d(t,s) : t \in I,\ s \in V\}$$

$$d(t,s) = \max_{1 \leq i \leq d} |t_i - s_i|,\quad t = (t_1, ..., t_d),\ s = (s_1, ..., s_d)$$

Обозначим

$$S_n = \sum_{t \in V_n} X(t),$$

где $V_n = [1,n] \times ... \times [1,n] - d$ - мерный куб.

Нулевые элементы всех пространств обозначим через 0.

В дальнейшем используем следующие условия

1) $EX(0) = 0$, $E\|X(0)\|^3 < \infty$;
2) $E(a, X(i))(b, X(j)) = 0$ для любых $i \neq j$, $i, j \in Z^d$ и $a, b \in R^m$;
3) ковариационная матрица $X(0)$ есть единичная матрица;
4) $\varphi_n(r) \leq \alpha(m)\beta(n)e^{-\lambda r}$, $n = 2, 3, ...,\quad r \in R$, где $\alpha(m) \geq 1$, $\{\beta(n)\}$ и λ удовлетворяют одному из следующих условий:

a) $\beta(n) \leq Cn^{\mu}$ для некоторых $C > 0$, $\mu > 0, \lambda \geq \frac{3d}{2(d+1)} + \mu d$; $n = 2, 3, ...$

b) $\beta(n) \leq C \ln n$, $n = 2, 3, ...$ $C > 0$ и $\lambda \geq \frac{3d}{2(d+1)}$.

5) Для любых ограниченных множеств $V \subset Z^d$ существует константа $K(\varphi)$ (и, не ограничивая общности, будем считать, что $K(\varphi) \geq 1$), зависящая от коэффициента перемешивания, такая, что

$$E\left\|\sum_{t \in V} X(t)\right\|^3 \leq K(\varphi)\,|V|^{3/2}\ \ E\,\|X(0)\|^3.$$

Далее обозначим

$$\delta_n = \sup_{A \in J}\left|P\left(\frac{1}{n^{d/2}} S_n \in A\right) - P(N \in A)\right|,\ \ \gamma = \frac{1}{2} + \frac{\ln 3}{\ln 2},$$

где J - класс всех измеримых выпуклых множеств R^m; N - гауссовская случайная величина со значениями в R^m с нулевым средним и единичной ковариационной матрицей.

В конечномерном пространстве наш результат имеет следующий вид

Теорема 1. *Пусть стационарное в узком смысле случайное поле $X(t)$, $t \in Z^d$, $d \geq 1$ со значениями в R^m удовлетворяет условиям 1)-5). Тогда существует константа $C(\lambda, d)$ такая, что для $n = 2, 3, ...$ имеет место неравенство*

$$\delta_n \leq C(\lambda, d) \frac{K(\varphi)(\alpha(m))^{1/2} m^{1/2} E \left\| X(0) \right\|^3 \ln^\gamma n}{n^{\frac{d}{2(d+1)}}}.$$

Эта теорема позволяет получить методом конечномерной аппроксимации оценку скорости сходимости в центральной предельной теореме в пространствах ℓ_p.

Пусть теперь $X(t)$, $t \in Z^d$, $d \geq 1$ - стационарное в узком смысле случайное поле со значениями в пространстве ℓ_p. Напомним, что ℓ_p есть пространство последовательностей $x = (x_1, x_2, ...)$ таких, что $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty$ и с нормой $\|x\|_p = \left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{1/p}$.

Введем определение коэффициента перемешивания и обозначения:

$$\varphi_n^{(m)}(r) = \sup \{ |P(A/B) - P(A)| : A \in \sigma^m(I), B \in \sigma^m(V),$$
$$I, V \subset Z^d, |I| + |V| = n, \ d(I, V) \geq r \},$$

где: $\sigma^m(V)-$ σ -алгебра, порожденная случайными векторами $\Pi_m X(t), t \in V$;

$\Pi_m : \ell_p \to \ell_p^m$ - оператор проектирования на первые m координат;

ℓ_p^* - сопряженное пространство;

$X^{(i)}(0)$ $-$ i -я компонента $X(0)$ в разложении $X(0) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} X^{(i)}(0) e_i$;

$\{e_i\}$ - стандартный базис пространства ℓ_p;

$\operatorname{cov} X(0)$ - ковариационная матрица $X(0)$;

$N(0, T)$ $-$ ℓ_p - значная гауссовская случайная величина с нулевым средним и диагональной ковариационной матрицей T с диагональными элементами $t_i > 0$;

$$\Delta_n = \sup_{r>0} \left| P \left(\frac{\left\| \sum\limits_{t \in V_n} X(t) \right\|_p}{n^{d/2}} < r \right) - P \left(\|N(0, T)\|_p < 0 \right) \right|.$$

Мы будем использовать следующие условия

$$EX(0)=0, E\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{\left(X^{(i)}(0)\right)^2}{t_i}\right)^{3/2}<\infty, m=1,2,... \tag{1}$$

$$Ef\left(X(i)\right)g\left(X(j)\right)=0 \text{ для любых } i\neq j \text{ и } f,g\in\ell_p^* \tag{2}$$

$$\varphi_n^{(m)}(r)\leq\alpha(m)\beta(n)e^{-\lambda r}, m=1,2,...,n=2,3,...,r\in R, \tag{3}$$

где $\{\alpha(m)\}$ - неубывающая последовательность действительных чисел; с $\alpha(1)\geq 1$; $\beta(n)$ и λ удовлетворяют одному из следующих условий
а) $\beta(n)\leq Cn^{\mu}$ для некоторых $C>0,\mu>0$, $\lambda\geq\frac{3d}{2(d+1)}+\mu d$ и $n=2,3,...$
б) $\beta(n)\leq C\ln n$,, $n=2,3,...$ и $\lambda\geq\frac{3d}{2(d+1)}$, $C>0$.

$$\operatorname{cov}X(0)=T=(t_{ij}),\ t_i=t_{ii}>0, i=1,2,...,t_{ij}=0, i\neq j. \tag{4}$$

Для любых ограниченных множеств $V\subset Z^d$ существует константа $K(\varphi^{(m)})\geq 1$, зависящая только от коэффициента перемешивания, такая, что

$$E\left\|\sum_{t\in V}\Pi_m X(t)\right\|^3\leq K(\varphi^{(m)})\left|V\right|^{3/2}E\left\|\Pi_m X(0)\right\|^3. \tag{5}$$

Теорема 2. *Пусть стационарное в узком смысле случайное поле $X(t)$, $t\in Z^d$, $d\geq 1$ со значениями в пространстве ℓ_p $(1\leq p\leq 2)$ удовлетворяет условиям (1)-(5). Тогда существует константа $C_1=C_1(p,\lambda,t_1,...,t_{[p]+1},d)$ такая, что для $n=2,3,...$ и $m=[p]+1,[p]+2,...$ имеет место неравенство*

$$\Delta_n\leq C_1\left[\frac{\alpha^{1/2}(m)K(\varphi^{(m)})m^{1/2}E\left(\sum\limits_{i=1}^{m}\frac{\left(X^{(i)}(0)\right)^2}{t_i}\right)^{3/2}\ln^{\gamma}n}{n^{\frac{d}{2(d+1)}}}+\left(\sum_{i=m+1}^{\infty}t_i^{p/2}\right)^{1/2}\right].$$

Налагая условия на t_i, $i=1,2,...$, и выбрав m зависящим от n можно получить различные следствия теоремы 2.

Заметим, что в этой теореме 1, в общем случае $K(\varphi)$ может зависеть от $|V_n|$. Приведем следствие теоремы 1, в котором эта зависимость явно указывается.

Следствие 1. Пусть случайное поле $X(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 1 (за исключением условия 5)). Тогда существует константа $C(\lambda,d)$ такая, что для $n=2,3,...$

$$\delta_n\leq C(\lambda,d)\frac{(\alpha(m))^{\frac{d+2}{4}}\left[\beta\left(p^d\right)\beta\left(p^{d-1}\right)...\beta(p)\right]^{\frac{1}{4}}m^{\frac{1}{2}}E\left\|X(0)\right\|^3\ln^{\gamma}n}{n^{\frac{d}{2(d+1)}}},$$

где $p = \left[\alpha^{\frac{1}{2d}}(m) n^{\frac{d}{d+1}}\right]$.

Замечание. Естественно, налагая условия на $\beta(n)$, из следствия 1 можно получать различные оценки для δ_n. Например, если $\beta(n) \le n^{\mu}$, то простыми вычислениями получим

$$\delta_n \le C(\lambda, d) \frac{(\alpha(m))^{\frac{4d+8+\mu(d+1)}{16}} n^{\frac{\mu d^2}{8}} m^{\frac{1}{2}} E\left\|X(0)\right\|^3 \ln^{\gamma} n}{n^{\frac{d}{2(d+1)}}},$$

аналогично, если $\beta(n) \le C \ln n$, то имеем

$$\delta_n \le C(\lambda, d) \frac{(\alpha(m))^{\frac{d+2}{4}} (\ln \alpha(m) + \ln n)^{\frac{d}{4}} m^{\frac{1}{2}} E\left\|X(0)\right\|^3 \ln^{\gamma} n}{n^{\frac{d}{2(d+1)}}}.$$

Из теоремы 2 также можно получить следующие следствия.

Следствие 2. Пусть $X(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 2 с

$$\alpha(m) \le C_1 m^{\theta} \text{ для некоторых } \theta > 0,\ C_1 > 0. \quad (6)$$

$\beta(n) \le C_2 n^{\mu}$ для некоторых $\mu > 0$, $C_2 > 0$.

$$C_3 e^{-i} \le t_i \le C_4 e^{-i} \text{ для некоторых } C_3 > 0,\ C_4 > 0 \text{ и } i = 1, 2, ... \quad (7)$$

$$E\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(X^{(i)})^2}{t_i^{\delta}}\right)^{\frac{3}{2}} < \infty \text{ для некоторой } 0 \le \delta < 1. \quad (8)$$

Тогда существует константа $C_5 = C_5(\lambda, t_1, ..., t_{[p]+1})$ такая, что для $n = 2, 3, ...$ имеет место следующее неравенство

$$\Delta_n \le C_5 \frac{(\ln n)^{\frac{4d+8+\mu(d+1)}{16}\theta + \gamma + \frac{1}{2}}}{n^{\frac{d}{2(d+1)} - \frac{\mu d^2}{8} - \frac{3(1-\delta)}{2}}} \cdot E\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{X^{(i)^2}}{t_i^{\delta}}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Следствие 3. Пусть $X(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 2 с (6)-(8) и

$$\beta(n) \le C \ln n,\ \ C > 0.$$

Тогда существует константа $C_6 = C_6(\lambda, t_1, ...t_{[p]+1})$ такая, что для $n = 2, 3...$ имеет место следующее неравенство

$$\Delta_n \le C_6 \frac{(\ln n)^{\theta \frac{d+2}{4} + \frac{d}{4} + \gamma + \frac{1}{2}}}{n^{\frac{d}{2(d+1)} - \frac{3(1-\delta)}{2}}} \cdot E\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(X^{(i)})^2}{t_i^{\delta}}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Заметим, что в [13] приведены примеры с.в. $X \in \ell_p$, для которой имеет место (8) и $E\|X\|^{3+\varepsilon} = \infty$ для всех $\varepsilon > 0$.

Доказательство результатов

Доказательство теоремы 1

В дальнейшем мы будем использовать несколько известных фактов, которые сформулируем в виде лемм. Если не оговорено иное, C (с индексом и без индекса) означает абсолютную константу.

Лемма 1. ([9]). *Пусть $\{X_n\}$ - последовательность с.в. со значениями в сепарабельном банаховом пространстве B. Если $\{Y_n\}$ - последовательность н.с.в., таких, что X_i и Y_i одинаково распределены при $i = 1, 2, ...$, то для любого борелевского множества A имеет место следующее неравенство*

$$|P\left((X_1 + ... + X_n) \in A\right) - P\left((Y_1 + ... + Y_n) \in A\right)| \leq \sum_{k=1}^{n} \varphi(k),$$

где $\varphi(k) = \sup\{|P(A/B) - P(A)| : A \in F_{k+n}^{\infty},\ B \in F_1^n,\ n \in N\}$;
F_a^b - σ - алгебра, порожденная с.в. $X_a, ..., X_b$.

Лемма 2. ([4], [10]). *Для любых с.в. , Y, Z со значениями в сепарабельном банаховом пространстве и для любого $\varepsilon > 0$ имеет место следующее неравенство*

$$|P(X + Y \in A) - P(Z \in A)| \leq |P(X \in A^{\varepsilon}) - P(Z \in A)| + P(\|Y\| > \varepsilon),$$

здесь A - любое борелевское множество.

Лемма 3. ([14]). *Пусть $N(0, T_1)$ и $N(0, T_2)$ - гауссовские с.в. в R^m с нулевыми средними и ковариационными матрицами T_1 и T_2. Если для некоторого $\varepsilon > 0$*

$$|(T_1 x, x) - (T_2 x, x)| < \varepsilon(T_2 x, x)$$

для всех $x \in R^k$, то существует C такая, что

$$\sup_{A \in \Im} |P\left(N(0, T_1) \in A\right) - P\left(N(0, T_2) \in A\right)| \leq C m^{1/2} \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon}.$$

Лемма 4. ([15]). *Пусть N - гауссовская с.в. в R^m с нулевым средним и единичной ковариационной матрицей. Тогда существует C такая, что для всех $\varepsilon > 0$ и любого измеримого выпуклого множества A из R^m*

$$|P(N \in A^{\varepsilon}) - P(N \in A)| \leq C m^{1/2} \varepsilon.$$

Лемма 5. ([16]). *Пусть $\{X_n\}$ - последовательность н.о.р.с.в. со значениями в R^m с нулевым средним и единичной ковариационной матрицей I. Если $E\|X_1\|^3 < \infty$, то существует C такая, что*

$$\sup_{A \in \Im} \left| P\left(\frac{1}{\sqrt{n}}(X_1 + ... + X_n) \in A\right) - P\left(N(0, I) \in A\right) \right| \leq C \frac{m^{1/2} E||X_1||^3}{\sqrt{n}}.$$

Лемма 6. ([17]). *Пусть* $\{X_n\}$ *- последовательность н.с.в. со значениями в сепарабельном банаховом пространстве и*

$$A_s = \sum_{k=1}^{n} E||X_k||^s.$$

Пусть r_0 *удовлетворяет условиям:*

$$P\left(\left\|\sum_{k=1}^{n} X_k\right\| \geq r_0\right) \leq \frac{1}{6} \text{ и } \frac{A_s}{r_0^s} \leq \frac{1}{36}, \quad s > 0. \tag{9}$$

Тогда для любого $r > r_0$ *и* $\ell = 1, 2, ...$

$$P\left(\left\|\sum_{k=1}^{n} X_k\right\| \geq 2r\ell\right) \leq \sum_{k=1}^{n} P\left(\|X_k\| > r\right) +$$

$$+\left(\max\left[\frac{1}{2}\exp\left\{-\frac{\ln 3}{2}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{\ln 2}{\ln 3}}\right\},\ 6 \cdot 3^s \cdot A_s/r^s\right]\right)^{\ell}.$$

Произведем разделение на блоки следующим образом.
Поставим

$$\begin{array}{ll} n = (q+\ell)k + r & 0 \leq r < q + \ell \\ r = kd + t & 0 \leq t < k \\ p = q + d & m_0 = 0 \end{array}$$

$$m_j = \begin{cases} \ell + 1, & \text{если } 1 \leq j < t \\ \ell, & \text{если } t < j \leq k. \end{cases}$$

Каждое ребро d-мерного куба V_n (которое есть интервал $[1; n]$) разделим на чередующиеся "длинные" (длиной) и "короткие"(длинами m_i) отрезки. Для определенности первым возьмем "длинный" отрезок. Тогда V_n разделится на $2d$ типа параллелепипеда. Тип параллелепипеда определяется тем, какие из отрезков ("длинные" или "короткие") выбраны из соответствующих ребер V_n. Например, за первый тип берем параллелепипеды, все ребра которых имеют длину р(то есть берутся "длинные"отрезки). Число таких параллелепипедов будет равняться k^d, обозначим их через $v_j^{(1)}$, $j = 1, ..., k^d$. Аналогично параллелепипеды типа i, $i = 2, ..., 2^d$ обозначим $v_j^{(i)}$, $j = 1, ..., k^d$.

Обозначим

$$V_{n1} = \bigcup_{j=1}^{k^d} v_j^{(1)}, \quad V_{n2}^{(i)} = \bigcup_{j=1}^{k^d} v_j^{(i)}, \quad V_{n2} = \bigcup_{i=2}^{2^d} V_{n2}^{(i)}.$$

Заметим, что расстояние между параллелепипедами одного типа не меньше ℓ и $\left|v_j^{(1)}\right| = p^d$, $j = 1, ..., k^d$.

После такого разделения на параллелепипеды имеем

$$S_n = Z_{n1} + Z_{n2},$$

где

$$Z_{n1} = \sum_{t\in V_{n1}} X(t) = \sum_{i=1}^{k^d} \xi_i, \;\; \xi_i = \sum_{t\in v_i^{(1)}} X(t), \quad Z_{n2} = \sum_{t\in V_{n2}} X(t).$$

Заметим, что мы не фиксируем порядок, по которому берутся $v_j^{(1)}$, так как в дальнейшем это не будет иметь значения.

Имеем

$$\begin{gathered}\left|\left(\frac{S_n}{n^{d/2}} \in A\right) - P\left(N(0,I) \in A\right)\right| \le \left|P\left(\frac{Z_{n1}}{n^{d/2}} \in A^{\varepsilon}\right) - P\left(N(0,I) \in A\right)\right| + \\ +P\left(\left\|\frac{Z_{n2}}{n^{d/2}}\right\| > \varepsilon\right) \le \left|P\left(\frac{Z_{n1}}{n^{d/2}} \in A^{\varepsilon}\right) - P\left(N(0,I) \in A^{\varepsilon}\right)\right| + \\ + \left|P\left(N(0,I) \in A^{\varepsilon}\right) - P(N(0,I) \in A)\right| + \\ +P\left(\left\|\frac{Z_{n2}}{n^{d/2}}\right\| > \varepsilon\right) \le \left|P\left(\frac{Q_{n1}}{n^{d/2}} \in A^{\varepsilon}\right) - P\left(N(0,I) \in A^{\varepsilon}\right)\right| + \\ + \left|P\left(\frac{Q_{n1}}{n^{d/2}} \in A^{\varepsilon}\right) - P\left(\frac{Z_{n1}}{n^{d/2}} \in A^{\varepsilon}\right)\right| + \left|P\left(N(0,I) \in A^{\varepsilon}\right) - P(N(0,I) \in A)\right| + \\ +P\left(\left\|\frac{Z_{n2}}{n^{d/2}}\right\| \ge \varepsilon\right) \le \left|P\left(\frac{Q_{n1}}{n^{d/2}} \in A^{\varepsilon}\right) - P\left(N(0,T_{V_{n1}}) \in A^{\varepsilon}\right)\right| + \\ + \left|P\left(N(0,T_{V_{n1}}) \in A^{\varepsilon}\right) - P(N(0,I) \in A^{\varepsilon})\right| + \left|P\left(N(0,I) \in A^{\varepsilon}\right) - P(N(0,I) \in A)\right| + \\ + \left|P\left(\frac{Q_{n1}}{n^{d/2}} \in A^{\varepsilon}\right) - P\left(\frac{Z_{n1}}{n^{d/2}} \in A^{\varepsilon}\right)\right| + P\left(\left\|\frac{Z_{n2}}{n^{d/2}}\right\| \ge \varepsilon\right), \qquad (10)\end{gathered}$$

где $Q_{n1} = \sum\limits_{i=1}^{k^d} \bar{\xi}_i$ и $\bar{\xi}_i$, $i = 1, ..., k^d$ независимы и ξ_i и $\bar{\xi}_i$ одинаково распределены.

Из леммы 5 и условия 5) получим

$$\left|P\left(\frac{Q_{n1}}{n^{d/2}} \in A^{\varepsilon}\right) - P\left(N(0,T_{V_{n1}}) \in A^{\varepsilon}\right)\right| \le \frac{C\, m^{1/2} E\left(\sum\limits_{i=1}^{m} \frac{\xi_1^{(i)^2}}{E\xi_1^{(i)^2}}\right)^{3/2}}{k^{d/2}} \le$$

$$\le \frac{C\,m^{1/2}E\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_1^{(i)^2}\right)^{3/2}}{k^{d/2}p^{3d/2}} \le \frac{C\,m^{1/2}\cdot E\left\|\xi_1\right\|^3}{k^{d/2}p^{3d/2}} \le$$

$$\le \frac{C\,m^{1/2}p^{3d/2}K(\varphi)E\left\|X(0)\right\|^3}{k^{d/2}p^{3d/2}} \le \frac{CK(\varphi)\;m^{1/2}E\left\|X(0)\right\|^3}{k^{d/2}}, \qquad (11)$$

где $T_{V_{n1}} = \operatorname{cov}\frac{Q_{n1}}{n^{\frac{d}{2}}}$.

Имея в виду следующее неравенство

$$|(Ix,x)-(T_{V_{n1}}x,x)| \le \left(1-\frac{(kp)^d}{n^d}\right)(Ix,x),$$

из леммы 3 получим

$$\sup_{A\in\Im}|P\left(N\left(0,T_{V_{n1}}\right)\in A^{\varepsilon}\right)-P\left(N\left(0,I\right)\in A^{\varepsilon}\right)| \le C\,m^{1/2}\frac{1-\left(\frac{kp}{n}\right)^d}{\left(\frac{kp}{n}\right)^d} =$$

$$= C\,m^{1/2}\frac{n^d-(kp)^d}{(kp)^d} = C\,m^{1/2}\frac{(kp+\ell k+t)^d-(kp)^d}{(kp)^d} =$$

$$C\,m^{1/2}\left(\left(1+\frac{\ell k+t}{kp}\right)^d-1\right) \le C\,m^{1/2}\frac{\ell k+t}{kp} \le C\,m^{1/2}\frac{\ell}{p}. \qquad (12)$$

Из леммы 1 получим

$$\left|P\left(\frac{Q_{n1}}{n^{d/2}}\in A^{\varepsilon}\right)-P\left(\frac{Z_{n1}}{n^{d/2}}\in A^{\varepsilon}\right)\right| \le k^d\varphi_{(kp)^d}(\ell). \qquad (13)$$

Из леммы 4 следует

$$|P\left(N\left(0,I\right)\in A^{\varepsilon}\right)-P\left(N\left(0,I\right)\in A\right)| \le Cm^{1/2}\varepsilon. \qquad (14)$$

Остается оценить $P\left(\left\|\frac{Z_{n2}}{n^{d/2}}\right\|>\varepsilon\right)$.

Далее имеем

$$Z_{n2}=\sum_{i=2}^{2^d}Z_{n2}^i,\quad Z_{n2}^i=\sum_{t\in V_n^{(i)}}X(t)=\sum_{j=1}^{k^d}\sum_{t\in v_j^{(i)}}X(t).$$

Отметим, что мы не фиксируем порядок, по которому нумеруются параллелепипеды $v_j^{(i)}$, $j=1,...,k^d$, так как в дальнейшем этот порядок не будет иметь значения.

Таким образом, имеем

$$P\left(\frac{\|Z_{n2}\|}{n^{\frac{d}{2}}} > \frac{\varepsilon}{2}\right) \leq \sum_{i=2}^{2^d} P\left(\frac{1}{n^{\frac{d}{2}}}\left\|\sum_{t\in V_{n2}^{(i)}} X(t)\right\| > \frac{\varepsilon}{2\left(2^d-1\right)}\right). \tag{15}$$

Оценим отдельно каждое слагаемое и покажем, как это делается на примере одного слагаемого.

Пусть $V_{n2}^{(2)}$ есть объединение параллелепипедов v_j^2, $j = 1, ..., k^d$, первое ребро которых состоит из "коротких" отрезков, а все остальные ребра из "длинных"отрезков. Положим

$$Z_{n2}^2 = \sum_{t\in V_{n2}^{(2)}} X(t) = \sum_{i=1}^{k^d} \eta_i,$$

где

$$\eta_i = \sum_{t\in v_i^2} X(t), \quad i = 1, 2, ..., k^d.$$

Напомним, что в дальнейшем не будет иметь значения, в каком порядке выбраны v_i^2, $i = 1, 2, ..., k^d$.

Имеем

$$P\left(\frac{\left\|Z_{n2}^2\right\|}{n^{\frac{d}{2}}} > \frac{\varepsilon}{2\left(2^d-1\right)}\right) \leq \left| P\left(\frac{\left\|\sum\limits_{i=1}^{k^d}\eta_i\right\|}{n^{\frac{d}{2}}} > \frac{\varepsilon}{2\left(2^d-1\right)}\right) - \right.$$

$$\left. - P\left(\frac{\left\|\sum\limits_{i=1}^{k^d}\bar{\eta}_i\right\|}{n^{\frac{d}{2}}} > \frac{\varepsilon}{2\left(2^d-1\right)}\right)\right| + P\left(\frac{\left\|\sum\limits_{i=1}^{k^d}\bar{\eta}_i\right\|}{n^{\frac{d}{2}}} > \frac{\varepsilon}{2\left(2^d-1\right)}\right). \tag{16}$$

Здесь $\bar{\eta}_i$, $i = 1, ..., k^d$ - последовательность н.с.в. таких, что η_i и $\bar{\eta}_i$ одинаково распределены для всех $i = 1, 2, ..., k^d$. Для того, чтобы применить лемму 6, положим

$$\begin{aligned}
&r = \tfrac{\varepsilon}{4(2^d-1)} n^{\frac{d}{2}} \\
&r_0 = C_0 K(\varphi)\left(p^{d-1}\ell\right)^{1/2} k^{\frac{d}{2}} E\left\|X(0)\right\|^3 \\
&\varepsilon = 2C_0 K(\varphi) E\left\|X(0)\right\|^3 \tfrac{(\ln n)^{\frac{1}{2}+\frac{\ln 3}{\ln 2}}}{p^{\frac{1}{2}}} \cdot 2(2^d-1),
\end{aligned}$$

где C_0 выбирается так, чтобы выполнялось условие (9).

Применяя леммы 1, 6 и условие 5) и неравенство Чебышева получим

$$P\left(\frac{\left\|Z_{n2}^{2}\right\|}{n^{\frac{d}{2}}}>\frac{\varepsilon}{2\left(2^{d}-1\right)}\right)\leq k^{d}\varphi_{\left(k^{d}p^{d-1}\ell\right)}\left(\ell\right)+C\frac{\left(\ell\right)^{\frac{3}{2}}}{k^{\frac{d}{2}}\left(\ln n\right)^{3\left(\frac{1}{2}+\frac{\ln 3}{\ln 2}\right)}}+$$

$$+\max\left\{\frac{1}{2}\exp\left(-\frac{\ln 3}{2}\left(\frac{\left(\ln n\right)^{\frac{1}{2}+\frac{\ln 3}{\ln 2}}}{\left(\ell\right)^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{\ln 2}{\ln 3}}\right),C\frac{\left(\ell\right)^{\frac{3}{2}}}{k^{\frac{d}{2}}\left(\ln n\right)^{3\left(\frac{1}{2}+\frac{\ln 3}{\ln 2}\right)}}\right\}. \quad (17)$$

Все остальные вероятности $P\left(\frac{\left\|Z_{n2}^{i}\right\|}{n^{\frac{d}{2}}}>\frac{\varepsilon}{2(2^{d}-1)}\right)$, $i=3,4,...,2^{d}$, оцениваются точно так же и легко видеть, что они не превосходят правой стороны (17). Таким образом,

$$P\left(\frac{\left\|Z_{n2}\right\|}{n^{\frac{d}{2}}}>\frac{\varepsilon}{2}\right)\leq C(d)\,P\left(\frac{\left\|Z_{n2}^{2}\right\|}{n^{\frac{d}{2}}}>\frac{\varepsilon}{2\left(2^{d}-1\right)}\right). \quad (18)$$

Из (10)-(14), (18) получим, что

$$\delta_{n}\leq\frac{CK(\varphi)m^{1/2}E\left\|X(0)\right\|^{3}}{k^{d/2}}+C\,m^{1/2}\frac{\ell}{p}+k^{d}\varphi_{(kp)^{d}}(\ell)+C\,m^{1/2}\varepsilon+$$

$$+C(d)k^{d}\varphi_{\left(k^{d}p^{d-1}\bar{m}\right)}(\ell)+C(d)\frac{\left(\ell\right)^{3/2}}{k^{d/2}\left(\ln n\right)^{3\left(\frac{1}{2}+\frac{\ln 3}{\ln 2}\right)}}+$$

$$+C(d)\max\left\{\frac{1}{2}\exp\left(-\frac{\ln 3}{2}\left(\frac{\left(\ln n\right)^{\frac{1}{2}+\frac{\ln 3}{\ln 2}}}{\ell^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{\ln 3}{\ln 2}}\right),C\frac{\left(\ell\right)^{3/2}}{k^{d/2}\left(\ln n\right)^{3\left(\frac{1}{2}+\frac{\ln 3}{\ln 2}\right)}}\right\}.$$

Утверждение теоремы следует, если выбрать

$$p=\left[\alpha^{\frac{1}{2d}}(m)\cdot n^{\frac{d}{d+1}}\right],\quad \ell=\left[\ln n\right].$$

Теорема 1 доказана.

Доказательство следствия 1.

Для доказательства следствия нам необходимо получить моментное неравенство. Сначала приведем моментное неравенство, которое будем использовать.

Лемма 7. ([18]). *Пусть* $\{X_{n},n\geq 1\}$ *- последовательность одинаково распределенных центрированных с.в. со значениями в* R^{m} *и* $E\left\|X_{k}\right\|^{3}<\infty$. *Тогда имеет место следующее неравенство*

$$E\left\|X_{1}+...+X_{n}\right\|^{3}\leq C\left(1+\sum_{k=1}^{n}k^{2}\varphi^{1/4}(k)\right)n^{\frac{3}{2}}E\left\|X_{1}\right\|^{3},$$

где $\varphi(k)$ определяется как в лемме 1.

Используя лемму 7, докажем моментное неравенство для случайных полей.

Лемма 8. *Для случайного поля $X(t)$, $t \in Z^d$, удовлетворяющего условиям теоремы 1, существует константа $C(\lambda, d)$ такая, что*

$$E\left\|\sum_{t\in V} X(t)\right\|^3 \leq$$

$$\leq C(\lambda,d)\left(\alpha(m)\right)^{\frac{d}{4}}\left[\beta\left(n^{d-1}\right)\beta\left(n^{d-2}\right)...\beta(n)\right]^{1/4}|V|^{3/2}\,E\left\|X(0)\right\|^3. \quad (19)$$

Доказательство леммы 8. Докажем для случая $d = 2$, $V = [1;n]\times[1,n]$. Используя лемму 7, получим (обозначая $i = (i_1, i_2)$)

$$E\left\|\sum_{i\in V} X(i)\right\|^3 = E\left\|\sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n} X\left(i_1;i_2\right)\right\|^3 \leq$$

$$\leq C\left(\alpha(m)\right)^{1/4}\beta^{1/4}(n^2)n^{3/2}E\left\|\sum_{i_1=1}^{n} X\left(i_1;0\right)\right\|^3 \leq$$

$$\leq C\left(\alpha(m)\right)^{1/2}\beta^{1/4}\left(n^2\right)\beta^{1/4}(n)n^3E\left\|X(0)\right\|^3 .$$

В общем случае доказательство проводится аналогично. Лемма 8 доказана.

Как видно из доказательства теоремы 1, для завершения доказательства следствия 1 в теореме 1 надо применить неравенство (19) для случая $V = [1;p]\times[1;p]\times...\times[1;p]$.

Следствие 1 доказано.

Доказательство теоремы 2

Обозначим

$$S_{nm} = \left(S_n^{(1)}, S_n^{(2)}, ..., S_n^{(m)}, 0, 0, ...\right),\; N_m = \left(N^{(1)}, ..., N^{(m)}, 0, 0, ...\right).$$

Имеем

$$\Delta_n = \sup_{r>0}\left|P\left(\left\|\frac{1}{n^{\frac{d}{2}}}S_n\right\|_p \leq r\right) - P\left(\|N\|_p \leq r\right)\right| =$$

$$= \sup_{r>0}\left|P\left(\left\|\frac{1}{n^{\frac{d}{2}}}S_n\right\|_p > r\right) - P\left(\|N\|_p > r\right)\right| \leq$$

$$\leq \sup_{r>0}\left|P\left(\left\|\frac{1}{n^{\frac{d}{2}}}S_n\right\|_p^p > r^p\right) - P\left(\|N\|_p^p > r^p\right)\right| \leq$$

$$\leq \sup_{r>0}\left(P\left(\left\|\frac{1}{n^{\frac{d}{2}}}S_n\right\|_p^p > r^p\right) - P\left(\left\|\frac{1}{n^{\frac{d}{2}}}S_{nm}\right\|_p^p > r^p\right)\right) +$$

$$+\sup_{r>0}\left(P\left(\|N\|_p^p > r^p\right) - P\left(\|N_m\|_p^p > r^p\right)\right) +$$

$$+\sup_{r>0}\left|P\left(\left\|\frac{1}{n^{\frac{d}{2}}}S_{nm}\right\|_p^p > r^p\right) - P\left(\|N_m\|_p^p > r^p\right)\right|. \qquad (20)$$

Для любого $\varepsilon_1 > 0$ имеет место следующее неравенство

$$\sup_{r>0}\left(P\left(\left\|\frac{1}{n^{\frac{d}{2}}}S_n\right\|_p^p > r^p\right) - P\left(\left\|\frac{1}{n^{\frac{d}{2}}}S_{nm}\right\|_p^p > r^p\right)\right) \leq$$

$$\leq P\left(\left\|\frac{1}{n^{\frac{d}{2}}}(S_n - S_{nm})\right\|_p^p > \varepsilon_1^p\right) + \sup P\left(r^p - \varepsilon_1^p \leq \|N_m\|_p^p < r^p\right) +$$

$$+2\sup_{r>0}\left|P\left(\left\|\frac{1}{n^{\frac{d}{2}}}S_{nm}\right\|_p^p < r^p\right) - P\left(\|N_m\|_p^p < r^p\right)\right|. \qquad (21)$$

Точно так же

$$\sup_{r>0}\left(P\left(\|N\|_p^p > r^p\right) - P\left(\|N_m\|_p^p > r^p\right)\right) \leq P\left(\|N - N_m\|_p^p > \varepsilon_1^p\right) +$$

$$+\sup_{r>\varepsilon_1} P\left(r^p - \varepsilon_1^p < \|N_m\|_p^p \leq r^p\right). \qquad (22)$$

Из (20)-(22) следует, что

$$\Delta_n \leq 3\sup_{r>0}\left|P\left(\left\|\frac{1}{n^{\frac{d}{2}}}S_{nm}\right\|_p < r^p\right) - P\left(\|N_m\|_p^p < r^p\right)\right| +$$

$$+2\sup_{r>0} P\left(r^p - \varepsilon_1^p \leq \|N_m\|_p < r^p\right) + P\left(\left\|\frac{1}{n^{\frac{d}{2}}}\left(S_n - S_{nm}\right)\right\|_p^p > \varepsilon_1^p\right) +$$

$$+P\left(\|N - N_m\|_p^p > \varepsilon_1^p\right). \qquad (23)$$

Применяя неравенство Маркова, Гельдера и условия теоремы, получим

$$P\left(\left\|\frac{1}{n^{\frac{d}{2}}}\left(S_n - S_{nm}\right)\right\|_p^p > \varepsilon_1^p\right) \leq \frac{E\sum\limits_{i=m+1}^{\infty}\left|\frac{1}{n^{\frac{d}{2}}}S_n^{(i)}\right|^p}{\varepsilon_1^p} \leq$$

$$\leq \frac{\sum\limits_{i=m+1}^{\infty}\left(E\left(\frac{1}{n^{\frac{d}{2}}}S_n^{(i)}\right)^2\right)^{\frac{p}{2}}}{\varepsilon_1^p} \leq \frac{\sum\limits_{i=m+1}^{\infty}t_i^{p/2}}{\varepsilon_1^p}. \qquad (24)$$

Точно так же

$$P\left(\|N-N_m\|_p^p>\varepsilon_1^p\right)\leq\frac{E\sum\limits_{i=m+1}^{\infty}\left|N^{(i)}\right|^p}{\varepsilon_1^p}\leq\frac{\sum\limits_{i=m+1}^{\infty}t_i^{p/2}}{\varepsilon_1^p}. \qquad (25)$$

Известно, что имеет место следующее неравенство (см.[1], [13])

$$\sup_{r\geq\varepsilon}P\left(r^p-\varepsilon_1^p\leq\|N_m\|^p<r^p\right)\leq C\left(t_1,...,t_{[p]+1}\right)\varepsilon_1^p \qquad (26)$$

Так как множество $\{(x_1,...,x_m):|x_1|^p+...+|x_m|^p\leq r\}$ - выпуклое в R^m, то мы можем применять теорему 3.2.1, откуда следует, что

$$\sup_{r>0}\left|P\left(\left\|\frac{1}{n^{\frac{d}{2}}}S_{nm}\right\|_p\leq r^p\right)-P\left(\|N_m\|_p<r^p\right)\right|\leq$$

$$\leq C\left(\lambda,d\right)\frac{K(\varphi)\alpha^{\frac{1}{2}}(m)m^{1/2}E\left(\sum\limits_{i=1}^{m}\frac{\left(X_1^{(i)^2}\right)}{t_i}\right)^{3/2}(\ln n)^{\gamma}}{n^{\frac{d}{2(d+1)}}}. \qquad (27)$$

Выбирая

$$\varepsilon_1^p=\left(\sum_{i=m+1}^{\infty}t_i^{p/2}\right)^{1/2}$$

и подставляя (24)-(27) в (23), получим утверждение теоремы 2.

Доказательство следствий 2,3.

Утверждения следствий 2, 3 легко доказываются простыми вычислениями, используя явный вид $K(\varphi)$ и выбором $m=[\ln\, n]$.

Следствия доказаны.

Литература

1. Паулаускас В.И., Рачкаускас А.Ю. Точность аппроксимации в центральной предельной теореме в банаховых пространствах. - Вильнюс: Мокслас. - 1987.

2. Бенткус С.В.,Гетце Ф., Паулаускас В., Рачкаускас А. Точность гауссовской аппроксимации в банаховых пространствах. // Итоги науки и техники. - 1991. - Т.81. - С. 39-139.

3. Булинский А.В. Предельные теоремы в условиях слабой зависимости. М., Изд-во МГУ, 1983, 136 стр.

4. 4 Сунклодас И. Аппроксимация распределений сумм слабо зависимых случайных величин нормальным распределением. // ВИНИТИ. Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. - 1991. - Т.81. - С.140-199.

5. Тихомиров А.Н. О нормальной аппроксимации сумм случайных полей с перемешиванием. ДАН СССР, 1983, т. 272, №2, 312-314 с.

6. Тихомиров А.Н. О точности нормальной аппроксимации вероятности попадания в шар сумм слабо зависимых гильбертовозначных случайных величин. Теор. вер. и ее прим., 1991, т.36, №4, 699-710.

7. Basu A.K. Uniform and nonuniform estimates in the CLT for Banach valued dependent random variables. Jour.Mult.Anal., 1988, v.25, 153-163.

8. Dehling H. Limit theorems for sums of weakly dependent Banach space valued random variables. Z.Wahrsh.verw.Geb., 1983, 63, 383-432.

9. Зупаров Т.М. Оценки скорости сходимости в центральной предельной теореме для абсолютно регулярных случайных величин со значениями в некоторых банаховых пространствах. ДАН, СССР, 1983, т.272, №5, 1042-1045.

10. Лапинскас Р. О скорости сходимости для сумм бесконечномерных случайных величин, связанных в цепь Маркова. // Liet. Matem. Rink. - 1976. - 16.- №4. - С.125-132.

11. Мамадалиев К.Б. Предельные теоремы для сумм слабо зависимых случайных величин со значениями в гильбертовом пространстве. Дисс. на соиск.уч.степ. к.ф-м.н., 1983, Ташкент.

12. Шарипов О.Ш. Оценка скорости сходимости в центральной предельной теореме для слабо зависимых случайных величин со значениями в пространстве lp. Некоторые вопросы анализа и алгебры: Сб. науч. тр. ТашГУ. - Ташкент, 1994, 165-178.

13. Паулаускас В.И. Оценка скорости сходимости в центральной предельной теореме в пространстве lp. Лит.матем.сб.- 1981, т.21, №1, 109-119.

14. Барсов С.С., Ульянов В.В. Оценки близости гауссовских мер. // ДАН СССР. - 1986. - Т.291. - №2. - С.273-276.

15. Бхаттачария Р.Н., Рао Р.Р. Аппроксимация нормальным распределением и асимптотические разложения. - М.: Наука, 1982.

16. Бенткус В. О зависимости оценки Берри - Эссеена от размерности: Лит. матем.сборник. - 1986. - Т.25. - №2. - С.205-211.

17. Нагаев С.В., Пинелис И.Ф. О больших уклонениях для сумм независимых случайных величин со значениями в банаховом пространстве. //II Вильнюсская конф. по теории вероятн. и матем.статистике: Тез. докл.- Вильнюс, 1977. Т.1. С.66-67.

18. Утев С.А. Неравенство для сумм слабозависимых случайных величин и оценки скорости сходимости в принципе инвариантности : Предельные теоремы для сумм сл. величин. - Новосибирск: Наука, 1984. - С.50-77.

Институт математики
им. В.И.Романовского АН РУз

Дата поступления
25.01.06

Uzbek Mathematical
Journal, 2006,№3, pp.68-78

УДК: 517.956

Об одной задаче на собственные значения для уравнения смешанного типа с двумя сингулярными коэффициентами

М.С.Салахитдинов, А.К.Уринов

Ikkita buzilish chizig‘iga ega bo‘lgan aralash tipdagi tenglama uchun xos qiymatlar to‘g‘risidagi bir masala o‘rganilgan. Qaralgan masalaning xos sonlari va xos funksiyalari topilgan. Topilgan xos funksiyalar sistemasining to‘laligi tekshirilgan.

In this work one eigenvalue problem for the mixed type equation with two line of degenerating is considered. Eigenvalue and eigenfunctions of this problem are found. Completeness of the system of eigenfunctions is proved.

Пусть Ω - область плоскости xOy, ограниченная дугой $\overline{\sigma}_0 = \{(x,y) : x^2+y^2=1, x \geq 0, y \geq 0\}$ и отрезками $\overline{OB} = \{(x,y) : x=0, 0 \leq y \leq 1\}$, $\overline{OC} = \{(x,y) : x+y=0, 0 \leq x \leq 1/2\}$, $\overline{CA} = \{(x,y) : x-y=1, 1/2 \leq x \leq 1\}$, а $\Omega_0 = \Omega \cap (y>0)$, $\Omega_1 = \Omega \cap (y<0)$, $OA = \{(x,y) : y=0, 0<x<1\}$.

В работе [1] в области Ω для уравнения

$$L_{\alpha,\beta}[U] \equiv U_{xx} + signy U_{yy} + \frac{2\alpha}{x}U_x + \frac{2\beta}{|y|}U_y + \lambda U = 0,$$

где $\alpha, \beta \in R, \lambda \in C$, при $0<\alpha<\beta<1/2$ сформулированы две задачи на собственные значения и найдены собственные числа и собственные функции поставленных задач. В данной работе рассмотрен один аналог этих задач при $0<\alpha=\beta<1/2$, найдены собственные числа и собственные функции, исследована на полноту найденная система собственных функций.

Задача A_λ^0. Найти значения параметра λ, при которых существуют нетривиальные в $\overline{\Omega}$ функции $U(x,y)$, удовлетворяющие условиям

$$U(x,y) \in C\left(\overline{\Omega}_j\right) \cap C^2(\Omega_j), \quad |y|^{2\beta} U_y(x,y) \in C(\Omega_j \cup OA), \quad j=0,1; \quad (1)$$

$$U(x,y) \in C^1(\Omega_0 \cup \sigma_0) \; ; \quad (2)$$

$$U(x,-0) = U(x,+0),\; 0 \leq x \leq 1; \; \lim_{y\to -0}(-y)^{2\beta}U_y = \lim_{y \to +0} y^{2\beta}U_y,\; 0<x<1, \quad (3)$$

$$L_{\beta,\beta}\left[U\left(x,y\right)\right]=0, \qquad \left(x,y\right)\in\Omega_j\ , \quad j=0,1; \tag{4}$$

$$a\,U\left(x,y\right)+b\frac{\partial}{\partial n}U\left(x,y\right)=0, \qquad\qquad \left(x,y\right)\in\sigma_0; \tag{5}$$

$$U\left(0,y\right)=0, \qquad\quad 0\le y\le 1; \tag{6}$$

$$x^{1-2\beta}A_{0x}^{1,\sqrt{\lambda}}\left\{\ x\cdot D_{0x;x^2}^{\beta}\left[x^{4\beta-2}U\left(\theta\right)\right]\right\}+cU\ \left(x,0\right)=0, \quad 0\le x\le 1, \tag{7}$$

где $a,\ b,\ c$ - заданные действительные числа, причем $a^2+b^2\neq 0$; n - внешняя нормаль к σ_0 ; $\theta=\theta\left(x/2;-x/2\right)$;

$$A_{\ 0x}^{1,\sqrt{\lambda}}\ \left[f\left(x\right)\right]\equiv f\left(x\right)-\int\limits_0^x f\left(t\right)\frac{t}{x}\ \frac{\partial}{\partial t}J_0\ \left[\sqrt{\lambda x\ \left(x-t\right)}\right]\ dt$$

- оператор, введенный и изученный в [2], [3],

$$D_{\ 0x;g(x)}^{\ \gamma}f\left(x\right)\equiv\frac{1}{\Gamma\left(1-\gamma\right)}\cdot\frac{1}{g'\left(x\right)}\cdot\frac{d}{dx}\int\limits_0^x\frac{f\left(t\right)\cdot g'\left(t\right)\ dt}{\left[g(x)-g(t)\right]^{\gamma}}$$

- дробная производная функции $f(x)$ по функции $g(x)$ порядка γ $(0<\gamma<1)$ [4], $J_m(z)$ - функция Бесселя первого рода порядка m, $\Gamma(z)$ - гамма функция Эйлера.

Прежде чем перейти к исследованию задачи A_{λ}^{0} рассмотрим задачу Коши-Гурса для уравнения (4) в области Ω_1 и некоторые следствия, вытекающие из представления решения этой задачи.

Задача Коши-Гурса. Найти в области Ω_1 решение уравнения (4), удовлетворяющее условиям

$$\lim_{y\to -0}\left(-y\right)^{2\beta}U_y=\nu\left(x\right),\ \ 0<x<1; \qquad U\left(x,-x\right)=\psi\left(2x\right),\ 0\le x\le 1/2,$$

где $\nu\left(x\right)$ и $\psi\left(x\right)$ - заданные функции, причем $\nu\left(x\right)\in C^2\left(0,1\right)$ и может иметь особенность порядка меньше $1-2\beta$ при $x\to 0$ и $x\to 1$, а $\psi\left(x\right)\in C^1\left[0,1\right]\cap C^3\left(0,1\right)$.

Пользуясь результатами работ [4], [5], нетрудно убедиться, что решение этой задачи существует, единственно и представимо в виде

$$U\left(x,y\right)=\overline{\chi}2^{2\beta-1}\int\limits_0^{x+y}\nu\left(t\right)\left(r_0^2\right)^{-\beta}\left(t/x\right)^{\beta}\Xi_2\left(\beta,1-\beta,1-\beta;r_1,r_2\right)dt+$$

$$+\int\limits_0^{x+y}\Phi_0\left(t\right)\overline{H}\left(x,y;t/2,-t/2\right)dt+\int\limits_{x+y}^{x-y}\Phi_0\left(t\right)R\left(x,y;t/2,\ -t/2\right)dt, \tag{8}$$

где

$$r_0^2=(x-t)^2-y^2,\quad r_1=-r_0^2/4xt,\qquad r_2=-\lambda r_0^2/4;$$

$$\Phi_0(t)=\psi'(t)+2\beta t^{-1}\psi(t);,\qquad \overline{\chi}=\Gamma(\beta)/\Gamma(1-\beta)\Gamma(2\beta);$$

$\overline{H}\,(x,y;x_0,y_0)$ и $R\,(x,y;x_0,y_0)$ – соответственно функция Грина - Адамара и Римана уравнения (4) в области Ω_1 [5], [6]:

$$\overline{H}\;(x,y;x_0,y_0)\;=\overline{\chi}\,(x_0/x)^{\beta}\,(-y_0)^{2\beta}\left(4/R_0^2\right)^{\beta}\;\times$$

$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\,(\beta)_n}\left(-\frac{\lambda\,R_0^2}{4}\right)^n H_2\,(\beta-n,\;\beta,\;\beta,\;1-\beta,\;2\beta;\;R_1,\;R_2)\,,$$

$$R\,(x,y;x_0,y_0)=(x_0/x)^{\beta}\,(y_0/y)^{\beta}\;\;\times$$

$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n!)^2}\left(-\frac{\lambda\,R_0^2}{4}\right)^n F_3\left(\beta,\beta,1-\beta,\,1-\beta,\;1+n;\;\frac{1}{R_1},-R_2\right)\;;$$

$$R_0^2=(x-x_0)^2-(y-y_0)^2, R_1=4yy_0/R_0^2,\;\;R_2=R_0^2/4xx_0;$$

$$\Xi_2\,(a,b,c;x,y)=\sum_{m,k=0}^{\infty}\frac{(a)_m(b)_m}{(c)_{m+k}m!\,k!}x^my^k;$$

$$H_2\,(a,b,c,d,e;x,y)=\sum_{m,k=0}^{\infty}\frac{(a)_{m-k}\,(b)_m\,(c)_k\,(d)_k}{(e)_m\,m!\,k!}x^my^k,$$

$$F_3\,(a,b,c,d,e;x,y)=\sum_{m,k=0}^{\infty}\frac{(a)_m\,(b)_k\,(c)_m\,(d)_k}{(e)_{m+k}\,m!\,k!}x^my^k,$$

$$(a)_m=a\;\;(a+1)\;\;(a+2)\,...(a+m-1)=\Gamma\,(a+m)\,/\Gamma(a).$$

Справедлива следующая

Лемма 1. *Если $U\,(x,y)$- решение задачи Коши-Гурса для уравнения (4) в области Ω_1, то имеет место равенство*

$$U(x,0)=\overline{\chi}\Gamma(1-\beta)x^{1-2\beta}A_{0x}^{1,\sqrt{\lambda}}\left\{x\cdot D_{0x;x^2}^{\beta}\left[x^{4\beta-2}U\,(\theta)\right]\right\}+$$

$$+\overline{\chi}2^{2\beta-1}\int\limits_0^x\nu(t)\,(x-t)^{-2\beta}\,(t/x)^{\beta}\,\Xi_2\left(\beta,1-\beta,1-\beta;-\frac{(x-t)^2}{4xt},\;-\frac{\lambda}{4}\,(x-t)^2\right)dt. \tag{9}$$

Доказательство. Пусть $U\,(x,y)$ решение задачи Коши-Гурса для уравнения (4) в области Ω_1. Тогда справедлива формула (8). Отсюда, пользуясь разложениями функций H_2 и Ξ_2 [4], [5]

$$\Xi_2(a,b,c;x,y)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{y^m}{(c)_m m!}F(a,b,c+m;x),$$

$$H_2\left(a,b,c,d,e;x,y\right)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(a)_m\,(b)_m}{(e)_m\,m!}x^mF\left(c,d,1-a-m;-y\right)$$

и введя обозначения $\Phi_1(t)=\frac{d}{dt}\left[t^{2\beta}\psi(t)\right]$, при $y\to 0$, имеем

$$U(x,0)=\overline{\chi}2^{-\beta}x^{-2\beta}\int\limits_0^x\Phi_1(t)(x-t)^{-\beta}t^{\beta}\Xi_2\left(\beta,1-\beta,1-\beta;\frac{t-x}{2t},\frac{\lambda}{4}\left(t-x\right)\right)dt+$$

$$+\overline{\chi}2^{\beta-1}\int\limits_0^x\nu(t)(x-t)^{-2\beta}\left(t/x\right)^{\beta}\Xi_2\left(\beta,1-\beta,1-\beta;-\frac{(x-t)^2}{4xt},-\frac{\lambda}{4}\left(x-t\right)^2\right)dt. \tag{10}$$

Обозначив через $\Phi_2(x)$ первый интеграл правой части равенства (10) и принимая во внимание равенство [4]

$$\Xi_2\left(a,b,c;x,y\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k\,(b)_k}{(c)_k\,k!}x^k\overline{J}_{c+k-1}\left(2i\sqrt{y}\right),$$

где $\overline{J}_k\left(z\right)=\Gamma\left(k+1\right)\left(z/2\right)^{-k}J_k\left(z\right)$ - функция Бесселя - Клиффорда, имеем

$$\Phi_2(x)=\int\limits_0^x\Phi_1\left(t\right)\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\beta)_k}{k!}\left(-\frac{1}{2}\right)^kt^{\beta-k}\left(x-t\right)^{k-\beta}\overline{J}_{k-\beta}\left[\sqrt{\lambda x\left(x-t\right)}\right]\right\}dt.$$

Отсюда, используя легко проверяемое тождество

$$(x-t)^{k-\beta}\overline{J}_{k-\beta}\left[\sqrt{\lambda x\left(x-t\right)}\right]=\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_x^t\left(s-t\right)^{k-\beta}J_0\left[\sqrt{\lambda x\left(x-s\right)}\right]ds,$$

после некоторых преобразований, получим

$$\Phi_2\left(x\right)=x\,A_{ox}^{1,\sqrt{\lambda}}\left[x^{-1}\Phi_3\left(x\right)\right], \tag{11}$$

где

$$\Phi_3\left(x\right)=\int\limits_0^x\Phi_1\left(t\right)t^{\beta}\left(x-t\right)^{-\beta}F\left(\beta,1-\beta,1-\beta;\,\frac{t-x}{2t}\right)dt.$$

Пользуясь формулой [6] $F(a,b,b;z)=(1-z)^{-a}$ и равенством $\Phi_1\left(xz\right)=z^{2\beta-1}\frac{d}{dx}\left[x^{2\beta}\psi\left(zx\right)\right]$, имеем

$$\Phi_3(x)=2^{\beta}\Gamma(1-\beta)x^2D_{0x;x^2}^{\beta}\left[x^{4\beta-2}\psi(x)\right]. \tag{12}$$

Принимая во внимание $\psi(x)=U(\theta)$ и подставляя (12) в (11), а его в (10), приходим к равенству (9). Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Справедливо равенство*

$$\int\limits_0^x (x-t)^{-2\beta}\, t^{\beta-1} J_\omega\left(\sqrt{\lambda}t\right) \Xi_2\left(\beta,1-\beta,1-\beta;-\frac{(x-t)^2}{4xt},-\frac{\lambda}{4}(x-t)^2\right)dt=$$

$$=\left[2^{2\beta-1}\Gamma(\beta+\omega/2)\Gamma(1-2\beta)/\Gamma(1-\beta+\omega/2)\right]x^{-\beta}J_\omega\left(\sqrt{\lambda}x\right), \qquad (13)$$

где $\omega=\sqrt{4\beta^2+\mu^2}, Re\mu^2>0.$

Доказательство. Пусть $U(x,y)$ - решение уравнения (4) в области Ω_1, удовлетворяющее условию $U(x,-x)=0$, а $\lim\limits_{y\to-0}(-y)^{2\beta}U_y=\nu(x)\in C^2(0,1)$. Тогда, согласно лемме 1, справедливо равенство

$$U(x,0)=2^{2\beta-1}\overline{\chi}\int\limits_0^x \nu(t)(x-t)^{-2\beta}(t/x)^\beta\times$$

$$\times\Xi_2\left(\beta,1-\beta,1-\beta;-\frac{(x-t)^2}{4xt},-\frac{\lambda}{4}(x-t)^2\right)dt. \qquad (14)$$

С другой стороны, разыскивая в области Ω_1 решение уравнения (4), удовлетворяющее условию $U(x,-x)=0$, в виде $U(x,y)=R(\rho)\cdot Q(\delta)$, где $\rho=\sqrt{x^2-y^2}$, $\delta=-y^2/\rho^2$, находим

$$U(x,y)=c_0\rho^{-2\beta}(-\delta)^{-\beta-\omega/2}J_\omega\left(\sqrt{\lambda}\rho\right)F\left(\beta+\omega/2,(1+\omega)/2,1+\omega,\frac{1}{\delta}\right),$$

откуда следует, что

$$U(x,0)=\overline{c}_0x^{-2\beta}J_\omega\left(\sqrt{\lambda}x\right),\ \nu(x)=\lim_{y\to-0}(-y)^{2\beta}U_y=\overline{c}_0(1-2\beta)k_0x^{-1}J_\omega\left(\sqrt{\lambda}x\right), \qquad (15)$$

здесь $c_0\neq0$ - произвольное число, $\overline{c}_0=c_0\cdot\Gamma(1+\omega)\Gamma(-\beta+1/2)/[\Gamma(1+\omega/2)\Gamma(1-\beta+\omega/2)]$,

$$k_0=\Gamma(\beta+1/2)\,\Gamma(1-\beta+\omega/2)\,/\,[\Gamma(\beta+\omega/2)\,\Gamma(3/2-\beta)].$$

Подставляя (15) в (14) и принимая во внимание единственность решения задачи Коши-Гурса, убеждаемся в справедливости равенства (13).

Теперь переходим к исследованию задачи A_λ^0. Пусть $U(x,y)$- решение задачи A_λ^0 и $\nu(x)=\lim\limits_{y\to0}|y|^{2\beta}U_y(x,y)\in C^2(0,1)$, $U(x,-x)\in C^1[0,1]\cap C^3(0,1)$. Тогда, согласно условию (3) и лемме 1, справедливо равенство

(9). Принимая во внимание это, из (7) получим функциональное соотношение между $\tau(x) = U(x,0)$ и $\nu(x)$ на OA, принесенное из области Ω_1 :

$$\gamma\tau(x) = 2^{2\beta-1}\overline{\chi}\int\limits_0^x \nu(t)(x-t)^{-2\beta}\left(\frac{t}{x}\right)^{\beta} \times$$

$$\times\Xi_2\left(\beta, 1-\beta, 1-\beta; -\frac{(x-t)^2}{4xt}, -\frac{\lambda}{4}(x-t)^2\right)dt \qquad (16)$$

где $\gamma = 1 + c\Gamma(\beta)/\Gamma(2\beta)$.

Таким образом, задача A_λ^0 эквивалентно сведена к следующей эллиптической задаче C_λ^0 : найти значения параметра λ, при которых существуют нетривиальные в $\overline{\Omega}_0$ функции $U(x,y)$, удовлетворяющие условиям (1), (2), (4), (5), (6), (16).

Решение этой задачи ищем в виде $U(x,y) = R(r)\cdot Q(\varphi)$, где $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\varphi = arctg(y/x)$, $0 \le r \le 1$, $0 \le \varphi \le \pi/2$. Тогда задача C_λ^0 распадается на две:

$$r^2R''(r) + (1+4\beta)rR'(r) + \left(\lambda r^2 - \mu^2\right)R(r) = 0, \quad 0 < r < 1, \qquad (17)$$

$$|R(0)| < +\infty, \quad aR(r) + bR'(r) = 0, \quad r = 1; \qquad (18)$$

$$Q''(\varphi) + 4\beta ctg2\varphi Q'(\varphi) + \mu^2 Q(\varphi) = 0, \quad 0 < \varphi < \pi/2, \qquad (19)$$

$$Q(\pi/2) = 0, \qquad (20)$$

$$\gamma R(x)Q(0) = \overline{\chi}2^{2\beta-1}\left[Q'(\varphi)(\sin\varphi)^{2\beta}\right]_{\varphi\to 0} \times \qquad (21)$$

$$\times\int\limits_0^x (x-t)^{-2\beta}(t/x)^{\beta}R(t)t^{2\beta-1}\Xi_2\left(\beta, 1-\beta, 1-\beta; -\frac{(x-t)^2}{4xt}, -\frac{\lambda}{4}(x-t)^2\right)dt,$$

где $\mu-$ константа разделения.

С помощью замены $z = \sin^2\varphi$, нетрудно убедиться в том, что общее решение уравнения (19) имеет вид

$$Q(\varphi) = c_1F\left(\beta+\omega/2, \beta-\omega/2, \beta+1/2; \sin^2\varphi\right) +$$

$$+c_2(\sin\varphi)^{1-2\beta}F\left((1+\omega)/2, (1-\omega)/2, 3/2-\beta, \sin^2\varphi\right), \qquad (22)$$

где c_1, c_2 - произвольные числа, $\omega = \sqrt{4\beta^2+\mu^2}$, $Re\mu^2 > 0$.

Отсюда следует, что

$$Q(0) = c_1, \quad \lim_{\varphi\to 0} Q'(\varphi)(\sin\varphi)^{2\beta} = (1-2\beta)c_2. \qquad (23)$$

Далее, ограниченным при $r \to 0$ решением уравнения (17) является функция $R(r) = r^{-2\beta} J_\omega \left(\sqrt{\lambda} r\right), \lambda \neq 0$.

Подставляя это решение в (21) и пользуясь равенствами (13) и (23), находим

$$c_2 = c_1 \gamma \Gamma(1-\beta+\omega/2)\,\Gamma(\beta+1/2) \,/\, [\Gamma(\beta+\omega/2)\,\Gamma(3/2-\beta)]\,. \tag{24}$$

В силу (20) из (22) с учетом (24) находим, что нетривиальные в $\overline{\Omega}_0$ решения задачи (19) - (21) существуют лишь при $\mu = \mu_n$, где $\mu_n = \sqrt{\omega_n^2 - 4\beta^2}$,

$$\omega_n = \begin{cases} 2n - 2\beta - \frac{2}{\pi} arcctg\zeta & \text{при} \quad arcctg\zeta < (1-2\beta)\,\pi, \\ 2(n+1) - 2\beta - \frac{2}{\pi} arcctg\zeta & \text{при} \quad arcctg\zeta \geq (1-2\beta)\,\pi, \end{cases} \tag{25}$$

$$n \in N\,, \;\; \zeta = (\gamma + \sin\beta\pi) \,/\, \cos\beta\pi.$$

Следовательно, собственными функциями задачи (19) - (21) являются функции

$$Q_n(\varphi) = c_n \left\{F\left(\beta+\omega_n/2, \beta-\omega_n/2, \beta+1/2; \sin^2\varphi\right) + \right.$$

$$+\gamma k_n (\sin\varphi)^{1-2\beta} F\left((1+\omega_n)/2, (1-\omega_n)/2, 3/2-\beta; \sin^2\varphi\right), \;\; n \in N, \tag{26}$$

где $c_n \neq 0$ - произвольные числа,

$$k_n = \Gamma(1-\beta+\omega_n/2)\,\Gamma(\beta+1/2) / \left[\Gamma(\beta+\omega_n/2)\,\Gamma(3/2-\beta)\right].$$

Подставляя в решение $R(r) = r^{-2\beta} J_\omega\left(\sqrt{\lambda} r\right)$ уравнения (17) $\omega = \omega_k$ и реализуя второе из условий (18), имеем

$$[a - 2\beta\, b]\; J_{\omega\,k}\left(\sqrt{\lambda}\right) + b\sqrt{\lambda} \cdot J'_{\omega\,k}\left(\sqrt{\lambda}\right) = 0, \quad k \in N. \tag{27}$$

Пусть $a = 0$ или $b = 0$ или $a \cdot b \neq 0$, $(a/b) - 2\beta + \omega_1 \geq 0$. Тогда, согласно общей теории бесселевых функций [7], уравнения (27) имеют только действительные корни счетного числа. Обозначая m - ый корень уравнения (27) при $k = n$ через $\theta_m^{(\omega_n)}$, получим собственные числа $\lambda_{nm} = \left[\theta_m^{(\omega_n)}\right]^2$ $(n, m \in N)$ задачи $C_\lambda^0\left(A_\lambda^0\right)$.

Соответствующие найденным собственным числам собственные функции в области Ω_0 определяются формулами

$$U_{nm}(x,y) = c_{nm} r^{-2\beta} J_{\omega_n}\left(\sqrt{\lambda_{nm}} x\right)\left\{F\left(\beta+\omega_n/2, \beta-\omega_n/2, \beta+1/2; \sin^2\varphi\right) + \right.$$

$$\left. +\gamma k_n (\sin\varphi)^{1-2\beta} F\left((1+\omega_n)/2, (1-\omega_n)/2, 3/2-\beta; \sin^2\varphi\right)\right\}, \;\; n, m \in N, \tag{28}$$

где $c_{nm} \neq 0$ - произвольные числа.

Собственные функции задачи A_λ^0 в области Ω_1 находится как решение видоизмененной задачи Коши [5] для уравнения (4) при $\lambda = \lambda_{nm}$ с начальными данными :

$$
\begin{aligned}
&U(x,0) = c_{nm} x^{-2\beta} J_{\omega_n}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}x\right), \\
&\lim_{y\to -0} (-y)^{2\beta} U_y = c_{nm}(1-2\beta)\gamma k_n x^{-1} J_{\omega_n}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}x\right).
\end{aligned} \tag{$*$}
$$

Исследуем на полноту систему функций (28) в $L_2(\Omega_0)$.

Пользуясь последовательно формулами (8), (9), (7), (17), (14) соответственно из страницы 148, 148, 144, 145, 145 справочника [6], нетрудно привести к следующему виду функции (28) :

$$
U_{nm}(x,y) = \widetilde{c}_{nm} \cdot r^{-2\beta} J_{\omega_n}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}r\right)(\sin 2\varphi)^{\frac{1}{2}-\beta} \times
$$

$$
\times \left\{ \left[\frac{\gamma + \sin\beta\pi}{\cos\beta\pi} + ctg\left(\beta + \frac{\omega_n}{2}\right)\pi\right] P^{\beta-1/2}_{(\omega_n-1)/2}(\cos 2\varphi) + \right.
$$

$$
\left. + \frac{1}{\sin\left(\beta+\frac{\omega_n}{2}\right)\pi} \cdot P^{\beta-1/2}_{(\omega_n-1)/2}(-\cos 2\varphi) \right\},
$$

где $\widetilde{c}_{nm} = const \neq 0$. $P_\nu^\mu(z)-$ функция Лежандра первого рода [6].

Принимая во внимание

$$
\frac{\gamma + \sin\beta\pi}{\cos\beta\pi} + ctg\ \left(\beta + \frac{\omega_n}{2}\right)\pi = 0,
$$

имеем

$$
U_{nm}(x,y) = \bar{c}_{nm} r^{-2\beta} J_{\omega_n}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}r\right)\Phi_n(\varphi_1), \quad n,m \in N, \tag{29}
$$

$$
\Phi_n(\varphi_1) = (\sin\varphi_1)^{\frac{1}{2}-\beta} P^{\beta-1/2}_{(\omega_n-1)/2}(\cos\varphi_1), \quad n \in N, \tag{30}
$$

$$
\varphi_1 = \pi - 2\varphi, \ \ \bar{c}_{nm} = \widetilde{c}_{nm}/sin(\beta+\omega_n/2)\pi.
$$

Из результатов [8],[9] следует

Лемма 3. *Если* $\beta_1 \geq 0$, $0 < \alpha_1 < \min\left\{1, \frac{\beta_1}{2} + \frac{3}{4}\right\}$, *то система функций*

$$
f_n(\varphi_1) = (\sin\varphi_1)^{1-\alpha_1} P^{\alpha_1-1}_{n-(\beta_1+1)/2}(\cos\varphi_1), \quad 0 < \varphi_1 < \pi, \ \ n \in N
$$

полна в $L_2(0,\pi)$.

Из (30) и леммы 3 следует, что справедлива

Теорема 1. *Если выполнено одно из следующих условий, то система функций* (30) *полна в* $L_2(0,\pi)$*:*

$$arcctg\zeta < (1-2\beta)\,\pi, \qquad \begin{cases} arcctg\zeta \geq (1-\beta)\,\pi, \\ arcctg\zeta > 3\pi/4. \end{cases} \tag{31}$$

Допустим, что существует функция $F(x,y) \in L_2(\Omega_0)$ такая, что

$$\iint\limits_{\Omega_0} F(x,y) U_{nm}(x,y)\, dxdy = 0, \quad n,m \in N.$$

Подставляя сюда (29) и переходя в полярную систему координат, имеем:

$$0 = \overline{c}_{nm} \int\limits_0^1 \int\limits_0^{\pi/2} f(r,\varphi) r^{-2\beta} J_{\omega_n}\left(\sqrt{\lambda}_{nm} r\right) \Phi_n(\varphi_1)\, r d\varphi dr =$$

$$= \frac{1}{2}\overline{c}_{nm} \int\limits_0^1 r^{1-2\beta} F_n(r) \cdot J_{\omega_n}\left(\sqrt{\lambda}_{nm} r\right) dr,$$

где

$$F_n(r) = \int\limits_0^{\pi} f\left[r, (\pi-\varphi_1)/2\right] \Phi_n(\varphi_1)\; d\varphi_1, \;\; n \in N;$$

$$f(r,\varphi) = F(r\cos\varphi, r\sin\varphi).$$

Из последнего следует, что для функции $r^{-2\beta} F_n(r)$ все коэффициенты ряда Дини равны нулю. Пользуясь неравенством Коши-Буняковского нетрудно доказать, что если $\beta < (1/4)$, то интеграл $\int\limits_0^1 \sqrt{r}\left|r^{-2\beta} F_n(r)\right| dr$ существует и абсолютно сходится. Поэтому из теоремы Юнга следует, что $r^{-2\beta} F_n(r) = 0, \; n \in N$, т.е.

$$F_n(r) = \int\limits_0^{\pi} f\left[r, (\pi-\varphi_1)/2\right] \Phi_n(\varphi_1)\, d\varphi_1 = 0 \tag{32}$$

для всех $n \in N$ и при любом $r \in (0,1)$. Так как система функций $\{\Phi_n(\varphi_1)\}_{n=1}^{\infty}$ полна в $L_2(0,\pi)$, то из (32) следует, что при каждом r множество тех φ_1, где $f\left[r, (\pi-\varphi_1)/2\right] \neq 0$ имеет меру нуль. В силу теоремы Фубини это означает, что $f\left[r, (\pi-\varphi_1)/2\right] \equiv 0$, т.е. $f(r,\varphi) \equiv 0$ почти всюду в $\overline{\Omega}_0$. Следовательно, система функций (29) ((28)) при $\beta < (1/4)$ полна в $L_2(\Omega_0)$.

Нетрудно убедиться, что при $(1/4) \leq \beta < (1/2)$ система функций (29) ((28)) полна в $L_2(\Omega_0)$ с весом r^ε $(\varepsilon > 2\beta - 1/2)$.

Таким образом доказана

Теорема 2. *Пусть $a = 0$ или $b = 0$ или $a \cdot b \neq 0$, $(a/b) - 2\beta + \omega_1 \geq 0$, где ω_1 - число, определяемое равенством (25). Тогда задача A_λ^0 имеет счетное число собственных чисел и собственных функций. Собственные числа задачи A_λ^0 определяются как квадрат корня уравнений (27), а собственные функции в области Ω_0 определяются равенствами (28) ((29)) и в области Ω_1 - как решения уравнения (4) при $\lambda = \lambda_{nm}$, удовлетворяющие условиям (*). Если $0 < \beta < (1/4)$ и выполнено одно из условий (31), то система собственных функций задачи A_λ^0 полна в $L_2(\Omega_0)$, а если $(1/4) \leq \beta < (1/2)$ и выполнено одно из условий (31), то полна в $L_2(\Omega_0)$ с весом r^ε $(\varepsilon > 2\beta - 1/2)$.*

Замечание 1. Из задачи A_λ^0 при $b = c = 0$ следует задача о нахождении собственных чисел и собственных функций задачи Трикоми для уравнения (4) в области Ω. При этом $\omega_n = 2n - \beta - 1/2$, $n \in N$.

Замечание 2. Пользуясь заменой $\vartheta(x,y) = |xy|^{2\beta-1}U(x,y)$, где $U(x,y)-$ решение уравнения (4), можно исследовать задачу A_λ^0 и при $(1/2) < \alpha = \beta < 1$.

Литература

1. Салахитдинов М.С., Уринов А.К. Задачи на собственные значения для уравнения смешанного типа с двумя сингулярными коэффициентами // Труды международной конференции "Современные проблемы математической физики и информационных технологий". 18-24 апреля 2005 год. Том №1. Ташкент: 2005, с. 156-158.

2. Салахитдинов М.С., Уринов А.К. Об одной краевой задаче для уравнения смешанного типа с негладкими линиями вырождения // Докл. АН СССР, 1982, т. 262, №3, с. 539-541.

3. Салахитдинов М.С., Уринов А.К. Краевые задачи для уравнений смешанного типа со спектральным параметром. Ташкент: "Фан", 1997, 186 с.

4. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: "Наука и техника", 1987, 688 с.

5. Капилевич М.Б. Об одном классе гипергеометрических функций Горна // Дифференциальные уравнения. 1968, т. IV, №8, с. 1465

-1483.

6. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Том 1. М.: "Наука", 1965, 295 с.

7. Кузнецов Д.С. Специальные функции. М.: "Высшая школа", 1965, 273 с.

8. Моисеев Е.И. О базисности систем синусов и косинусов // Докл. АН СССР, 1984, т. 275, №4, с.794-798.

9. Мамедов Я.Н. О некоторых задачах на собственные значения для уравнения смешанного типа //Дифференциальные уравнения. 1990, т. 26 №1, с. 162-167.

Институт математики
им. В.И.Романовского АН РУз

Дата поступления
17.01.06

Uzbek Mathematical
Journal, 2006,№3, pp.79-85

УДК 519.1

Об одном классе невольтеровских квадратичных стохастических операторов

Н.Шамсиддинов

Maqolada bog‘liq bo‘lmagan graflarga kvadratik operator konstruksiyasini qo‘llab novolterra kvadratik stoxastik operatorlarning bir sinfi qurilgan. Bunday kvadratik stoxastik operatorni volterra operatorlari yordamida trayektoriyasi o‘rganilgan.

In clause, using designs of square-law operators, 1 class of not voltairian square-law stochastic operators on untied graph is constructed. With the help of voltairian operators trajectories of such square-law stochastic operators are investigated.

Квадратичный стохастический оператор V, действующий на симплексе $S^{n-1} = \left\{ x = (x_1, x_2, ..., x_n) : x_i \geq 0, i = \overline{1,n}, \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1 \right\}$, задается следующим образом:

$$x'_k = \sum_{i,j=1}^{n} P_{ij,k} x_i x_j, \tag{1}$$

где $P_{ij,k} \geq 0, P_{ij,k} = P_{ji,k}, \sum\limits_{k=1}^{n} P_{ij,k} = 1$ для всех $i, j, k \in \{1, 2, ..., n\}$.

Оператор V действует в пространстве вероятностных мер на конечном множестве $E = \{1, 2, ..., n\}$. Такие операторы естественным образом возникают при изучении некоторых моделей наследования. В связи с этим представляется актуальным детальное изучение поведения траекторий квадратичного оператора. Этой задаче посвящены, например работы [1-4].

В статье изучаются квадратичные операторы, конструкция которых предложена в работе [4].

Пусть (Λ, L) - конечный граф без петель и кратных ребер, где $Lambda$ - множество вершин графа и L - множество ребер; Φ -некоторое конечное множество. Функция $\sigma : \Lambda \to \Phi$ называется клеткой.

Пусть $\{\Lambda_i\}$ совокупность связных компонентов графа (Λ, L), $i = 1, ..., n$. Для произвольных двух клеток $\sigma_i,\ \sigma_j \in \Omega$ положим

$$\Omega\left(\Lambda, \sigma_i, \sigma_j\right) = \left\{\sigma \in \Omega : \sigma\left|_{\Lambda_k}\right. = \sigma_i\left|_{\Lambda_k}\right. \sigma\left|_{\Lambda_k}\right. = \sigma_j\left|_{\Lambda_k}\right., k = \overline{1,n}\right\}.$$

Пусть $S(\Lambda, \Phi)$ множество всех вероятностных мер на Ω, $\mu \in S(\Lambda, \Phi)$ - некоторая вероятностная мера, определенная на Ω так, что $\mu(\sigma) > 0$ для любой клетки $\sigma \in \Omega$. Коэффициенты $P_{\sigma_i \sigma_j, \sigma}$ определим следующим образом:

$$P_{\sigma_i \sigma_j, \sigma} = \begin{cases} \frac{\mu(\sigma)}{\mu(\Omega(\Lambda, \sigma_i, \sigma_j))} & \text{если } \sigma \in \Omega(\Lambda, \sigma_i, \sigma_j), \\ 0, & \text{в остальных случаях} \end{cases} \qquad (2)$$

Квадратичный стохастический оператор, действующий на симплексе $S(\Lambda, \Phi)$ и заданный коэффициентами (2), определяется следующим образом: для произвольной меры $\lambda \in S(\Lambda, \Phi)$ мера $V\lambda = \lambda' \in S(\Lambda, \Phi)$ определяется равенством

$$\lambda'(\sigma) = \sum_{\sigma_i, \sigma_j \in \Omega} P_{\sigma_i \sigma_j, \sigma} \lambda(\sigma_i) \lambda(\sigma_j) \qquad (3)$$

для любой клетки $\sigma \in \Omega$.

Нетрудно проверить, что коэффициенты наследственности (2) удовлетворяют следующим условиям:

$$P_{\sigma_i \sigma_j, \sigma} \geq 0, \sum_{\sigma \in \Omega} P_{\sigma_i \sigma_j, \sigma} = 1 \text{ и } P_{\sigma_i \sigma_j, \sigma} = P_{\sigma_j \sigma_i, \sigma}.$$

По построению квадратичный стохастический оператор (3) зависит от структуры графа (Λ, L), множества Φ и выбора меры μ из $S(\Lambda, \Phi)$.

Теорема 1. [6] *Квадратичный стохастический оператор (3) является вольтерровским тогда и только тогда, когда граф связанный.*

Пусть (Λ, L) связанный конечный граф , Φ -произвольное конечное множество и $\mu \in S(\Lambda, \Phi)$. Положим $\frac{2\mu(\sigma)}{\mu(\sigma)+\mu(\bar{\sigma})} - 1 = \frac{\mu(\sigma)-\mu(\bar{\sigma})}{\mu(\sigma)+\mu(\bar{\sigma})} = h_{\sigma\bar{\sigma}}$, тогда из (3) следует

$$\lambda'(\sigma) = \lambda(\sigma) \left(1 + \sum_{\bar{\sigma} \in \Omega} h_{\sigma\bar{\sigma}} \lambda(\bar{\sigma})\right), \quad \sigma \in \Omega \qquad (4)$$

где $|h_{\sigma\bar{\sigma}}| \leq 1$, и $h_{\sigma\bar{\sigma}} = -h_{\bar{\sigma}\sigma}$.

Вольтеровские операторы достаточно полно изучены в работе [3].

Пусть $|\Omega| = n$ и $\Omega = \{\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n\}$. Положим для краткости $h_{\sigma_i \sigma_j} = h_{ij}$, $\lambda(\sigma_i) = \lambda_i$. Тогда квадратичный оператор (4) принимает вид

$$\lambda_i' = \lambda_i \left(1 + \sum_{j=1}^{n} h_{ij} \lambda_j\right), \quad i = \overline{1, n}. \qquad (5)$$

В этой статье доказывается, что для одного класса мер на Ω построенные по ним квадратичные стохастические операторы можно редуцировать к вольтеровскому. В [5] была доказана возможность редукции для биномиальных распределений, а в этой работе расширяется класс таких распределений.

В дальнейшем будем предполагать что $\Phi = \{A, a\}$. Пусть $\{\Lambda_i\}$ совокупность связных компонентов графа (Λ, L), $i = 1, ..., m$, $|\Lambda| = n$ и $|\Lambda_i| = n_i$, где $\sum\limits_{i=1}^{m} n_i = n$. Так как $\Omega = \prod\limits_{i=1}^{n} \Phi_i$, где $\Phi_i = \{A, a\}$ для любого i, то Ω можно представить как $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times ... \times \Omega_m$, где $\Omega_i = \prod\limits_{i=1}^{n_i} \Phi_i$. Пусть μ_i -мера на Ω_i, т.е. для любого $\sigma = (\sigma(\Lambda_1), \sigma(\Lambda_2), ..., \sigma(\Lambda_m))$

$$\mu(\sigma) = \prod_{i=1}^{m} \mu_i(\sigma(\Lambda_i)). \qquad (6)$$

Чтобы избежать громоздких вычислений ограничимся следующим примером несвязанного графа. Пусть Λ имеет вид

$$\begin{array}{ccc} 1 & \qquad\qquad & 2 \\ \bullet & & \bullet \\ \Lambda_1 & & \Lambda_2 \end{array}$$

Тогда $\Lambda = \{1, 2\}$, $L = \emptyset$, $\Omega_1 = \Omega_2 = \{A, a\}$. Пусть μ_i мера на Ω_i, где

$$\begin{array}{llll} \mu_1: & (\alpha_1, \alpha_2), & \alpha_i > 0, & \alpha_1 + \alpha_2 = 1, \\ \mu_2: & (\beta_1, \beta_2), & \beta_j > 0, & \beta_1 + \beta_2 = 1. \end{array}$$

Тогда для любого $\sigma \in \Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$

$$\mu(\sigma) = \mu_1(\sigma(\Lambda_1))\, \mu_2(\sigma(\Lambda_2)),$$

откуда

$$\begin{aligned} \mu(\sigma_1) &= \mu(A, A) = \alpha_1 \beta_1, \\ \mu(\sigma_2) &= \mu(A, a) = \alpha_1 \beta_2, \\ \mu(\sigma_3) &= \mu(a, A) = \alpha_2 \beta_1, \\ \mu(\sigma_4) &= \mu(a, a) = \alpha_2 \beta_2. \end{aligned}$$

Определим коэффициенты наследственности:
$\Omega(\Lambda, \sigma_i, \sigma_j)$ $(\Omega(\Lambda, \sigma_i, \sigma_j) = \Omega(\Lambda, \sigma_j, \sigma_i))$:
$\Omega(\Lambda, \sigma_1, \sigma_1) = \{\sigma_1\}$, $\Omega(\Lambda, \sigma_1, \sigma_2) = \{\sigma_1, \sigma_2\}$, $\Omega(\Lambda, \sigma_1, \sigma_3) = \{\sigma_1, \sigma_3\}$,
$\Omega(\Lambda, \sigma_1, \sigma_4) = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4\}$, $\Omega(\Lambda, \sigma_2, \sigma_2) = \{\sigma_2\}$,
$\Omega(\Lambda, \sigma_2, \sigma_3) = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4\}$, $\Omega(\Lambda, \sigma_2, \sigma_4) = \{\sigma_2, \sigma_4\}$,
$\Omega(\Lambda, \sigma_3, \sigma_3) = \{\sigma_3\}$, $\Omega(\Lambda, \sigma_3, \sigma_4) = \{\sigma_3, \sigma_4\}$, $\Omega(\Lambda, \sigma_4, \sigma_4) = \{\sigma_4\}$.

Коэффициенты $P_{ij,k}$ определим следующим образом (см (2)):
$P_{11,1} = 1$, $P_{12,1} = \frac{\alpha_1\beta_1}{\alpha_1\beta_1+\alpha_1\beta_2} = \beta_1$, $P_{12,2} = \beta_2$, $P_{13,1} = \alpha_1$, $P_{13,3} = \alpha_2$, $P_{14,1} = \alpha_1\beta_1$, $P_{14,2} = \alpha_1\beta_2$, $P_{14,3} = \alpha_2\beta_1$, $P_{14,4} = \alpha_2\beta_2$, $P_{22,2} = 1$, $P_{23,1} = \alpha_1\beta_1$, $P_{23,2} = \alpha_1\beta_2$, $P_{23,3} = \alpha_2\beta_1$, $P_{23,4} = \alpha_2\beta_2$, $P_{24,3} = \alpha_1$, $P_{33,3} = 1$, $P_{34,3} = \beta_1$, $P_{34,4} = \beta_2$, $P_{44,4} = 1$.

Все остальные коэффициенты $P_{ij,k} = 0$.
Ясно, что в этом случае размерность соответствующего симплекса равна 4, и тогда квадратичный стохастический оператор имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
x_1' &= x_1^2 + 2\beta_1 x_1 x_2 + 2\alpha_1 x_1 x_3 + 2\alpha_1\beta_1 x_1 x_4 + 2\alpha_1\beta_1 x_2 x_3\\
x_2' &= 2\beta_2 x_1 x_2 + x_2^2 + 2\alpha_1\beta_2 x_2 x_3 + 2\alpha_1 x_2 x_4 + 2\alpha_1\beta_2 x_1 x_4\\
x_3' &= 2\alpha_2 x_1 x_3 + 2\alpha_2\beta_1 x_2 x_3 + x_3^2 + 2\beta_1 x_3 x_4 + 2\alpha_2\beta_1 x_1 x_4\\
x_4' &= 2\alpha_2\beta_2 x_1 x_4 + 2\alpha_2 x_2 x_4 + 2\beta_2 x_3 x_4 + x_4^2 + 2\alpha_2\beta_2 x_2 x_3,
\end{aligned} \tag{7}$$

где $x_i = \lambda(\sigma_i)$ $i = \overline{1,4}$.

1. Сложив соответствующие равенства оператора (7) и сгруппировав как указано ниже, получим следующий оператор:

$$\begin{aligned}
&x_1' + x_2' = x_1^2 + 2\beta_1 x_1 x_2 + 2\alpha_1 x_1 x_3 + 2\alpha_1\beta_1 x_1 x_4 + 2\alpha_1\beta_1 x_2 x_3 +\\
&+2\beta_2 x_1 x_2 + x_2^2 + 2\alpha_1\beta_2 x_2 x_3 + 2\alpha_1 x_2 x_4 + 2\alpha_1\beta_2 x_1 x_4\\
&x_3' + x_4' = 2\alpha_2 x_1 x_3 + 2\alpha_2\beta_1 x_2 x_3 + x_3^2 + 2\beta_1 x_3 x_4 + 2\alpha_2\beta_1 x_1 x_4 +\\
&+2\alpha_2\beta_2 x_1 x_4 + 2\alpha_2 x_2 x_4 + 2\beta_2 x_3 x_4 + x_4^2 + 2\alpha_2\beta_2 x_2 x_3
\end{aligned} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
&x_1' + x_2' = \left(x_1^2 + 2\beta_1 x_1 x_2 + 2\beta_2 x_1 x_2 + x_2^2\right) + 2\alpha_1 x_1 x_3 + 2\alpha_1 x_2 x_4 +\\
&+2\alpha_1\beta_2 x_2 x_3 + 2\alpha_1\beta_1 x_2 x_3 + 2\alpha_1\beta_2 x_1 x_4 + 2\alpha_1\beta_1 x_1 x_4\\
&x_3' + x_4' = 2\alpha_2 x_2 x_4 + 2\beta_2 x_1 x_3 + 2\alpha_2\beta_2 x_2 x_3 + 2\alpha_2\beta_1 x_2 x_3 +\\
&+2\alpha_2\beta_2 x_1 x_4 + 2\alpha_2\beta_1 x_1 x_4 + \left(x_3^2 + 2\beta_1 x_3 x_4 + 2\beta_2 x_3 x_4 + x_4^2\right)
\end{aligned} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
&x_1' + x_2' = \left(x_1^2 + 2(\beta_1+\beta_2) x_1 x_2 + x_2^2\right) + 2\alpha_1 x_1 x_3 + 2\alpha_1 x_2 x_4 +\\
&+2\alpha_1(\beta_2+\beta_1) x_2 x_3 + 2\alpha_1(\beta_2+\beta_1) x_1 x_4\\
&x_3' + x_4' = 2\alpha_2 x_2 x_4 + 2\beta_2 x_1 x_3 + 2\alpha_2(\beta_2+\beta_1) x_2 x_3\\
&+2\alpha_2(\beta_2+\beta_1) x_1 x_4 + \left(x_3^2 + 2(\beta_2+\beta_1) x_3 x_4 + x_4^2\right)
\end{aligned}$$

Воспользуемся выражением $\beta_1 + \beta_2 = 1$, отсюда

$$\begin{aligned}
x_1' + x_2' &= \left(x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2\right) + 2\alpha_1 x_1 x_3 + 2\alpha_1 x_2 x_4 + 2\alpha_1 x_2 x_3 + 2\alpha_1 x_1 x_4\\
x_3' + x_4' &= 2\alpha_2 x_2 x_4 + 2\alpha_2 x_1 x_3 + 2\alpha_2 x_2 x_3 + 2\alpha_2 x_1 x_4 + \left(x_3^2 + 2x_3x_4 + x_4^2\right)
\end{aligned} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
x_1' + x_2' &= (x_1 + x_2)^2 + 2\alpha_1 (x_1x_3 + x_2x_4 + x_2x_3 + x_1x_4)\\
x_3' + x_4' &= 2\alpha_2 (x_2x_4 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_1x_4) + (x_3 + x_4)^2
\end{aligned} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} x_1' + x_2' &= (x_1 + x_2)^2 + 2\alpha_1 (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) \\ x_3' + x_4' &= 2\alpha_2 (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) + (x_3 + x_4)^2 \end{aligned} \tag{8}$$

Положим $x_1 + x_2 = y_1$ и $x_3 + x_4 = y_2$, тогда из (8) получим

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1^2 + 2\alpha_1 y_1 y_2 \\ y_2' &= 2\alpha_2 y_1 y_2 + y_2^2 \end{aligned} \Rightarrow V_1 : \begin{cases} y_1' = y_1 (y_1 + 2\alpha_1 y_2) \\ y_2' = y_2 (2\alpha_2 y_1 + y_2) \end{cases} \tag{9}$$

Этот оператор V_1 является вольтеровским оператором, переводящим симплекс $\tilde{S}(\Lambda, L) = \left\{ y = (y_1, y_2) : y_i \geq 0, i = \overline{1,2}, y_1 + y_2 = 1 \right\}$ в себя. Рассмотрим траекторию этого оператора определенную для произвольной начальной меры $\lambda_0 \in \tilde{S}(\Lambda, L)$ как рекурренции $\lambda_n = V_1(\lambda_{n-1})$ $n = 1, 2, 3, ...$

Лемма 1. *Для квадратичного стохастического оператора (9) справедливы следующие утверждения.*

1. Если $\alpha_1 > \frac{1}{2}$, то траектория $\{\lambda_n\}$ для любого $\lambda_0 \in \tilde{S}(\Lambda, L)$ сходятся к точке (1,0).

2. Если $\alpha_2 > \frac{1}{2}$, то траектория $\{\lambda_n\}$ для любого $\lambda_0 \in \tilde{S}(\Lambda, L)$ сходятся к точке (0,1).

3. Если $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$, то произвольная точка симплекса $\tilde{S}(\Lambda, L)$ является неподвижной.

Доказательство. Используя $y_1 = 1 - y_2$ из (9) следует $y_2 = y_2((1 - 2\alpha_2)\times$ $\times y_2 + 2\alpha_2)$, т.е. получаем одномерную динамическую систему $f(x) = x((1 - 2\alpha_2)x + 2\alpha_2)$. Заметим, что $x = 0$ и $x = 1$ являются неподвижными точками для $f(x)$. Так как $f'(x) = 2\alpha_2$ то точка 0 притягивающая, если $2\alpha_2 < 1$, т.е. $\alpha_2 < \frac{1}{2}$ и $\alpha_1 > \frac{1}{2}$, так как $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$. Отсюда следует утверждение 1.
Утверждение 2 доказывается аналогично, а утверждение 3 тривиально.

2. Складывая соответствующие равенства (7) и группируя надлежащим образом, получим следующий оператор:

$$\begin{aligned} x_1' + x_3' &= (x_1 + x_3)^2 + 2\beta_1 (x_1 + x_3)(x_2 + x_4) \\ x_2' + x_4' &= \left(x_2 + x_4^2\right)^2 + 2\beta_2 (x_1 + x_3)(x_2 x_4) \end{aligned} \tag{10}$$

Положим $x_1 + x_3 = z_1$ и $x_2 + x_4 = z_2$, тогда из (8) получим

$$\begin{aligned} z_1' &= z_1 (z_1 + 2\beta_1 z_2) \\ z_2' &= z_2 (2\beta_2 z_1 + z_2) \end{aligned} . \tag{11}$$

Этот оператор является вольтеровским оператором переводящим симплекс $\hat{S}(\Lambda, L) = \left\{ z = (z_1, z_2) : z_i \geq 0, i = \overline{1,2}, z_1 + z_2 = 1 \right\}$ в себя.

Лемма 2. Для квадратичного стохастического оператора (11) справедливы следующие утверждения.

1. Если $\beta_1 > \frac{1}{2}$, то траектория $\{\lambda_n\}$ для любого $\lambda_0 \in \hat{S}\,(\Lambda, L)$ сходятся к точке (1,0,).

2. Если $\beta_2 > \frac{1}{2}$, то траектория $\{\lambda_n\}$ для любого $\lambda_0 \in \hat{S}\,(\Lambda, L)$ сходятся к точке (0,1).

3. Если $\beta_1 = \beta_2 = \frac{1}{2}$, то произвольная точка симплекса $\hat{S}\,(\Lambda, L)$ является неподвижной.

Доказательство. Доказательство леммы 2 аналогично доказательству леммы1. Из вышеприведенных лемм следует.

Теорема 5. Для квадратичного оператора (7) с распределением (6) справедливы следующие утверждения.

1. Если $\alpha_1 > \frac{1}{2}$ и $\beta_1 > \frac{1}{2}$, то траектория $\{\lambda_n\}$ для любого $\lambda_0 \in S\,(\Lambda, L)$ сходятся к точке (1,0,0,0).

2. Если $\alpha_1 > \frac{1}{2}$ и $\beta_1 < \frac{1}{2}$, то траектория $\{\lambda_n\}$ для любого $\lambda_0 \in S\,(\Lambda, L)$ сходятся к точке (0,1,0,0).

3. Если $\alpha_1 < \frac{1}{2}$ и $\beta_1 > \frac{1}{2}$, то траектория $\{\lambda_n\}$ для любого $\lambda_0 \in S\,(\Lambda, L)$ сходятся к точке (0,0,1,0).

4. Если $\alpha_1 < \frac{1}{2}$ и $\beta_1 < \frac{1}{2}$, то траектория $\{\lambda_n\}$ для любого $\lambda_0 \in S\,(\Lambda, L)$ $S(\Lambda, L)$ сходятся к точке (0,0,0,1).

5. Если $\beta_1 = \frac{1}{2}$, то множества $S_1 = \{x \in S\,(\Lambda, \Phi) : x_1 + x_2 = 1\}$ и $S_2 = \{x \in S\,(\Lambda, \Phi) : x_3 + x_4 = 1\}$ являются множествами неподвижных точек оператора (7) и для $\lambda_0 \in S\,(\Lambda, \Phi) \setminus (S_1 \cup S_2)$

$$\lim_{n\to\infty} V^{(n)}\lambda_0 \in \left\{ \begin{array}{l} S_1 \text{ если } \alpha_1 > \frac{1}{2} \\ S_2 \text{ если } \alpha_1 < \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

6. Если $\alpha_1 = \frac{1}{2}$, то множества $S_3 = \{x \in S\,(\Lambda, \Phi) : x_1 + x_3 = 1\}$ и $S_4 = \{x \in S\,(\Lambda, \Phi) : x_2 + x_4 = 1\}$ являются множествами неподвижных точек оператора (7) и для $\lambda_0 \in S\,(\Lambda, \Phi) \setminus (S_3 \cup S_4)$

$$\lim_{n\to\infty} V^{(n)}\lambda_0 \in \left\{ \begin{array}{l} S_3 \text{ если } \beta_1 > \frac{1}{2} \\ S_4 \text{ если } \beta_1 < \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

7. Если $\beta_1 = \frac{1}{2}$ и $\alpha_1 = \frac{1}{2}$, то множества $S_5 = \{x \in S\,(\Lambda, \Phi) : x_2 = x_4$ и $x_1 = x_3\}$ и $S_6 = \{x \in S\,(\Lambda, \Phi) : x_1 = x_2$ и $x_3 = x_4\}$ являются множествами неподвижных точек оператора.

Литература

1. Ганиходжаев Р.Н., Сарымсаков А.Т. Об одном обобщении примера С Улама// ДАН Уз ССР, 1989, №3, с.5-9.

2. Ганиходжаев Р.Н. О неподвижных точках квадратичных операторов// ДАН Уз ССР, 1977, №8, с.3-7.

3. Ганиходжаев Р.Н. Исследования по теории квадратичных стохастических операторов//Дисс.док.физ.-мат.наук, 1994.

4. Ганиходжаев Н.Н., Мейлиев Х.Ж. Об одной конструкции квадратичных операторов // ДАН РУз.-1997.- №8.-С.3-5.

5. Шамсиддинов Н.Б., Аноров О.У. О редукции одного класса квадратичных стохастических операторов к вольтеровским//Уз.мат.жур., 2001, с.65-69.

6. Ганиходжаев Н.Н. Применение теории Гиббс распределений к математической генетике// ДАН РАН. 2000, с.321-323.

Ташкентский институт
ирригации и мелиорации

Дата поступления
16.01.06

Uzbek Mathematical
Journal, 2006,№2, pp.86-95

УДК 517.977.5

Анализ одной системы ОДУ в линейном приближении

И.Ярмухамедов

Maqolada to‘rt o‘lchovli linear bo‘lmagan ODT sistemasi o‘rganiladi. Mazkur sistema teskarilanuvchi avtomorfizmiga ega bo‘lib ikki kichik parametrga bog‘liq. Tahlil Nyuton ko‘pyoqlari usuli bilan olib borilgan. Mazkur sistemaning beshta qisqartirilgan sistemalari topilgan va ulardan to‘rttasini echimlarini oshkor ifodalari topilgan. Beshinchi, asosiy bo‘lgan (no integrallanuvchi) sistemaning linear approksimatsiyada tahlili keltirilgan. Linear sistema ikkita kvadratik birinchi integrallarga ega bo‘lgani va ulardan tashqari kvadratik birinchi integrallar mavjud bo‘lmagani haqida teorema isbotlangan.

In the paper a four-dimensional system of ODE's with automorphizm of reversibility is considered.

1. Постановка задачи и обозначения

Мы исследуем обратимую систему ОДУ четвертого порядка, зависящую от двух малых параметров $X^* = (x_5, x_6)$

$$\dot{X}' = \Phi(X', X''), \quad X \in R^4,\ \dot{X}'' = 0,\ X'' \in R^2, \tag{1.1}$$

где $X = (X', X'')$, $X' = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ и $\Phi(0, X') = 0$ т.е. точка $X' = 0$ является неподвижной. Такая система возникает в гидродинамике, в задаче о поверхностных волнах [3].

Исследование проводим при помощи многогранника Ньютона [1]. Согласно [1] систему (1.1) запишем в виде:

$$\frac{d(lnX')}{dt} = F(X) \stackrel{\text{def}}{=} \sum F_Q X^Q, \quad X'' = 0 \tag{1.2}$$

где $X^Q = x_1^{q_1} x_2^{q_2} x_3^{q_3} x_4^{q_4} \mu^{q_5} \mu_2^{q_6} \in R^6$, $Q = (q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6) \in R^6$, $ln\, X' = (ln\, x_1, ln\, x_2, ln\, x_3, ln\, x_4)$ и $F_Q = (f_{1Q}, f_{2Q}, f_{3Q}, f_{4Q})$.

Рассмотрим в R^6 множество $S \stackrel{\text{def}}{=} S(F) = \{Q : \ F_Q \neq 0\}$ которое называется носителем системы (1.2). Замыкание его выпуклой оболочки

$\Gamma = \Gamma(F)$ называется многогранником Ньютона этой системы. Граница $\partial\Gamma$ многогранника Γ состоит из граней $\Gamma_j^{(d)}$ различной размерности d. Каждой грани $\Gamma_j^{(d)}$ многогранника Γ соответствует граничное подмножество $S_j^{(d)} = \Gamma_j^{(d)} \bigcap S$, по которому выделяется укороченная система

$$\frac{d(ln\, X')}{dt} = \hat{F}_j^{(d)}(X) \stackrel{\text{def}}{=} \sum F_Q X^Q, \quad Q \in S_j^{(d)}. \tag{1.3}$$

В пространстве R_*^6 , сопряженном к R^6, каждой грани $\Gamma_j^{(d)}$ соответствует ее нормальный конус $U_j^{(d)}$, т.е. множество тех векторов $P \subset R_*^6$, для которых нормальная к P и опорная к Γ гиперплоскость $\langle P, Q\rangle$ пересекается с Γ по грани $\Gamma_j^{(d)}$. Скобки $\langle\cdot,\cdot\rangle$ обозначают скалярное произведение. Если $X \to 0$ вдоль кривых вида $x_i = b_i\tau^{p_i}(1 + o(1)), i = \overline{1,6}$ где постоянные $b_i \in C/\{0\}$, $\tau \to \infty$ и $P = (p_1, ..., p_6)$, то укороченная система (1.3) является первым приближением системы (1.1).

Пусть в R_*^6 задан многогранный выпуклый конус задачи . Нас интересуют только те грани $\Gamma_j^{(d)}$ (а также укороченные системы (1.3)), нормальные конусы которых $\bigcup_j^{(d)}$ персекаются с конусом задачи . Пересечение двух выпуклых конусов $\bigcup_j^{(d)} \bigcap K$ также является многогранным выпуклым конусом и может быть задано как выпуклая коническая оболочка минимального конечного числа векторов $V_1, \dots, V_s$, образующих остов этого конуса. Обозначим через N_j нормали к гиперграням $\Gamma_j^{(5)}$. Очевидно, остов конуса $\bigcup_j^{(5)}$ состоит из одного вектора N_j. С другой стороны, граница ∂K конуса задачи состоит из конечного числа конусов меньшей размерности $K_k^{(e)}$; пересечение каждого из них с нормальным конусом $K_k^{(e)} \bigcap \bigcup_j^{(d)}$ является многогранным конусом и может быть задано неким конечным остовом $D_1, \dots, D_t$. Доказано, что остов пересечения $\bigcup_i^{(d)} \bigcap K$ состоит из векторов нормалей $N_j \in K$ к гиперграням $\Gamma_j^{(5)}$ и векторов D_j, лежащих на границе ∂K конуса задачи (см. [1] Гл. 1). Для системы (1.1) в окрестности неподвижной точки $= 0$ конусом задачи является

$$K = \{P \leq 0\}$$

2. Укороченные системы

Результаты расчета, которые проводились при помощи программы для ЭВМ [2], показали, что у многогранника Ньютона, соответствующего системе

$$
\begin{aligned}
d(\ln x_1)/dt = &\quad x_1^{-1}x_2 + \sum f_{1Q}X^Q,\\
d(\ln x_2)/dt = &\quad x_2^{-1}x_3 + \mu x_2^{-1}x_1 + \sum f_{2Q}X^Q,\\
d(\ln x_3)/dt = &\quad x_3^{-1}x_4 + \mu x_3^{-1}x_2 + \sum f_{3Q}X^Q,\\
d(\ln x_4)/dt = &\quad \mu_2 x_4^{-1}x_1 + \mu x_4^{-1}x_3 + \sum f_{4Q}X^Q,
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

с конусом задачи $P \leq 0$ пересекаются нормальные конусы 12 гиперграней, 54 граней размерности 4, 114 граней размерности 3, 128 граней размерности 2, 71 ребра и 16 вершин.

Здесь рассматриваются только те укорочения, которые соответствуют гиперграням (в таблице соответствий 1. эти строки отмечены знаком N во втором столбце). Таких укорочений 11. Однако у шести гиперграней нормальные векторы имеют некоторые нулевые компоненты, т.е. лежат на границе конуса задачи. По соответствующим этим гиперграням укорочениям невозможно проанализировать поведение решений системы (2.1) в окрестности нуля. Поэтому здесь эти укорочения также не рассматриваются.

У остальных пяти гиперграней нормальные векторы N_i не содержат нулевых компонент и лежат внутри конуса задачи. Укороченная система, соответствющая гиперграни $\Gamma_1^{(5)}$ с нормальным вектором

$N_1 = (-4,\ -5,\ -6,\ -7,\ -2,\ -4,)$ (12-я строка табл. 1) имеет вид:

$$
\begin{aligned}
(\ln \dot{x}_1) = &\quad x_1^{-1}x_2,\\
(\ln \dot{x}_2) = &\quad x_2^{-1}x_3 + \mu x_2^{-1}x_1,\\
(\ln \dot{x}_3) = &\quad x_3^{-1}x_4 + \mu x_3^{-1}x_2,\\
(\ln \dot{x}_4) = &\quad \mu_2 x_4^{-1}x_1 + \mu x_4^{-1}x_3 + a x_4^{-1}x_1^2.
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

В укороченных системах, соответствующих остальным четырем гиперграням, у одного из уравнений укороченной системы правая часть является тождественным нулем. Запишем эти укороченные системы и найдем их решения.

Укороченная система, соответствующая гиперграни $\Gamma_2^{(5)}$ с нормальным вектором $N_2 = (-1,\ -1,\ -2,\ -2,\ -1,\ -1,)$ (9-я строка табл. 1) имеет вид:

$$
\begin{aligned}
(\ln \dot{x_1}) &= x_1^{-1}x_2,\\
(\ln \dot{x_2}) &= 0,\\
(\ln \dot{x_3}) &= x_3^{-1}x_4 + \mu x_3^{-1}x_2 + a_3x_3^{-1}x_1x_2,\\
(\ln \dot{x_4}) &= \mu_2 x_4^{-1}x_1 + a x_4^{-1}x_1^2 + b x_4^{-1}x_2^2,
\end{aligned}
$$

или в обычной записи,

$$\dot{x_1} = x_2,\ \ \dot{x_2} = 0,\ \ \dot{x_3} = \mu x_2 + x_4 + a_3x_1x_2,\ \ \dot{x_4} = \mu_2x_1 + ax_1^2 + bx_2^2.$$

Проинтегрировав эту систему, получим ее явные решения

$$x_1 = c_2t + c_1,\ \ x_2 = c_2,\ \ x_3 = (1/12)ac_2t^4 + (1/6)(\mu_2c_2+$$

$$+2ac_1c_2)t^3 + (1/2)(ac_1^2 + bc_2 + \mu_2c_1 + a_3c_3^2)t^2+$$

$$+(c_1c_2 + \mu c_2 + c_4)t + c_3,$$

$$x_4 = (1/3)ac_2^2t^3 + (1/2)(\mu^2c_2 + 2ac_1c_2)t^2+$$

$$+(\mu_2c_1 + ac_1^2 + bc_2)t + c_4,$$

где через $c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4$ обозначены произвольные постоянные. Это обозначение используется и в дальнейшем.

Теперь рассмотрим укороченную систему соответствующую гиперграни $\Gamma_3^{(5)}$ с нормальным вектором $N_3 = (-1,\ -1,\ -1,\ -2,\ -1,\ -1)$ (8 строка табл. 1), и запишем ее сразу в обычном виде:

$$\dot{x_1} = x_2,\ \ \dot{x_2} = x_3,\ \ \dot{x_3} = 0,$$

$$\dot{x_4} = \mu_2x_1 + \mu x_3 + ax_1^2 + bx_2^2 + a_{13}x_1x_3 + dx_3^2.$$

Ее решения суть

$$x_1 = (1/2)c_3t^2 + c_2t + c_1,\ \ x_2 = c_3t + c_2,\ \ x_3 = c_3$$

$$x_4 = (1/20)ac_3^3t^5 + (1/4)ac_2c_3t^4 + (1/6)(\mu_2c_3+$$

$$+2ac_2^2 + 2ac_1c_3 + a_{13}c_3^2 + bc_3^2)t^3+$$

$$+(1/2)(\mu_2c_2 + 2ac_1c_2 + a_{13}c_2c_3 + 2bc_3)t^2+$$

$$+(\mu_2c_1 + ac_1^2 + a_{13}c_1c_3 + bc_2^2 + dc_3^2)t + c_4.$$

1. Таблица соответствий

							j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
							T_j	V	V	V	V	V	V	V	V	d	V	V	d	d	d	d	V	d	d	V	V	V
							Q_j	-1	0	0	1	0	0	1	2	2	0	1	0	1	1	-1	0	0	0	1	-1	0
								1	-1	0	-1	1	0	0	-1	0	1	1	2	-1	0	1	-1	0	0	0	0	-1
								0	1	-1	0	-1	1	0	0	0	0	-1	0	1	1	1	2	2	0	-1	1	0
								0	0	1	0	0	-1	-1	0	-1	0	0	-1	0	-1	0	0	-1	1	1	1	2
											1	1	1	0														
i	t_i	B_i, N_i, D_i									0	0	0	1														
1	N	0	0	0	-1	0	0	-	-	-	-	-	+	+	-	+	-	-	+	-	+	-	-	+	-	-	-	-
2	N	0	-1	0	-1	0	0	-	+	-	+	-	+	+	+	+	-	-	-	+	+	-	+	+	-	-	-	-
3	N	0	0	-1	-1	0	0	-	-	-	-	+	-	+	-	+	-	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-
4	N	0	-1	-2	-1	0	0	-	-	+	+	+	-	+	+	+	-	+	-	-	-	-	-	-	-	+	-	-
5	N	0	0	0	-1	0	0	+	+	+	-	-	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
6	N	-2	-1	-4	-3	-2	0	+	-	+	-	+	-	+	-	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-
7	N	0	0	0	0	0	-1	+	+	+	+	+	+	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
8	N	-1	-1	-1	-2	-1	-1	+	+	-	-	-	+	+	-	+	-	-	+	-	+	-	-	+	-	-	-	-
9	N	-1	-1	-2	-2	-1	-1	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-
10	N	-2	-2	-3	-4	-1	-2	+	-	-	-	+	+	+	-	+	-	-	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-
11	N	-1	-2	-2	-2	-1	-1	-	+	+	+	-	-	+	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
12	N	-4	-5	-6	-7	-2	-4	+	+	+	+	+	+	+	-	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
13	D	-2	-1	-2	-3	0	0	+	-	-	-	+	+	+	-	-	-	-	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-
14	D	-1	-1	-1	-1	0	0	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
15	D	0	-1	0	0	0	0	-	+	-	+	-	-	-	+	-	-	-	-	+	-	-	+	-	-	-	-	+
16	D	0	0	-1	0	0	0	-	-	+	-	+	-	-	-	-	-	+	-	-	-	-	-	-	-	+	-	-
17	D	-1	0	-1	0	0	0	+	-	+	-	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
18	D	0	-1	-1	0	0	0	-	-	+	+	-	-	-	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	-	+
19	D	-1	0	0	-1	0	0	+	-	-	-	-	+	-	-	-	-	-	+	-	-	+	-	+	-	-	-	-
20	D	-2	-1	0	-1	0	0	+	+	-	-	-	+	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+	+	-	-	+	-
21	D	-1	0	-1	-1	0	0	+	-	-	-	-	+	-	-	-	-	-	-	+	-	-	-	-	-	-	-	-
22	D	-1	0	0	0	0	0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	-	-	-	-	+	-
23	D	-2	-1	-1	-3	-1	0	+	-	-	-	-	+	+	-	-	-	-	+	-	-	-	-	+	-	-	-	-
24	D	-4	-3	-2	-5	-2	0	+	+	-	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	-	-	-	-
25	D	-2	-5	-4	-3	-2	0	-	+	+	+	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
26	D	-1	-1	-2	-3	0	-1	-	-	-	-	+	+	+	-	+	-	-	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-
27	D	-2	-3	-4	-5	0	-2	-	-	-	+	+	+	+	-	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
28	D	-1	-1	0	0	0	0	-	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	-	-	-	+	+
29	D	-1	-1	-1	0	0	0	-	-	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+
30	D	-4	-3	-2	-1	0	0	+	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+
31	D	-2	-3	-2	-1	0	0	-	+	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+
32	D	-1	-3	-2	-1	-1	0	-	+	+	+	-	-	-	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+

Таблица соответствий (окончание)

	j	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
	T_j	V	V	d	V	V	V	V	d	d	d	V	d	d	V	V	V	d	V	d	d	d	V	V	d	d	V	V	V
	Q_j	3	3	1	2	1	-1	0	2	2	0	0	1	1	-1	0	0	1	2	-1	0	0	-1	1	-1	0	0	-1	0
		-1	0	1	1	2	3	3	-1	0	1	2	-1	0	1	-1	0	0	0	2	2	0	0	-1	1	1	-1	0	0
		0	0	0	-1	0	0	-1	1	1	1	1	2	2	2	3	3	0	-1	0	-1	1	2	0	0	-1	1	0	-1
		0	-1	0	0	-1	0	0	0	-1	0	-1	0	-1	0	0	-1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3
i	t_i																												
1	N	-	-	-	-	-	-	+	-	+	-	+	-	-	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2	N	+	+	-	-	-	-	-	+	+	-	-	+	+	-	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
3	N	-	+	-	+	+	-	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
4	N	+	+	-	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	-	-	-	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5	N	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
6	N	-	-	-	-	-	-	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
7	N	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
8	N	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
9	N	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
10	N	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
11	N	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
12	N	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
13	D	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
14	D	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
15	D	+	-	-	-	-	-	-	+	-	-	-	+	-	-	+	-	-	-	-	-	-	-	+	-	-	+	-	-
16	D	-	-	-	+	-	-	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	-	+	-	-	-	-	+	-	-	+
17	D	-	-	-	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+	-	-	-	+	+	-	+	+
18	D	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	-	-	-	-	+	-	-	-	+
19	D	-	-	-	-	-	+	-	-	-	-	+	-	-	+	-	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
20	D	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+	+	-	-	-	-	-	+	-	-	-	-	-	-
21	D	-	-	-	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
22	D	-	-	-	-	-	+	-	-	-	-	-	-	-	+	-	-	-	-	+	-	-	+	-	+	-	-	+	-
23	D	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
24	D	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
25	D	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
26	D	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
27	D	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
28	D	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	-	-	-	-	-	-	+	-	-	-	+	+	-
29	D	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+
30	D	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	-
31	D	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
32	D	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Гиперграни $\Gamma_4^{(5)}$ с нормальным вектором $N_4 = (-2,\ -2,\ -3,\ -4,\ -1,\ -2)$ (10-я стр. табл. 1) соответствует укороченная система

$$\dot{x_1} = x_2,\ \ \dot{x_2} = 0,\ \ \dot{x_3} = \mu x_2,\ \ \dot{x_4} = \mu_2 x_1 + \mu x_3 + a x_1^2 + b x_2^2.$$

Ее решения суть

$$x_1 = c_2 t + c_1,\ \ x_2 = c_2,\ \ x_3 = \mu c_2 t + c_3,$$

$$x_4 = (1/3)ac_2^2t^3 + (1/2)(\mu^2c_2 + \mu_2c_2 + 2ac_1c_2)t^2 +$$
$$+(\mu_2c_1 + \mu c_3 + ac_1^2 + bc_2^2)t + c_4$$

Гиперграни $\Gamma_5^{(5)}$ с нормальным вектором $N_5 = (-1,\ -2,\ -2,\ -2,\ -1,\ -1)$ (11-я строка табл. 1) соответствует укороченная система

$$\dot{x_1} = 0,\ \ \dot{x_2} = \mu x_1 + x_3 + a_2x_1^2,\ \ \dot{x_3} = x_4,\ \ \dot{x_4} = \mu_2x_1 + ax_1^2$$

Ее решения суть

$$x_1 = c_1$$
$$x_2 = (1/6)(ac_1^2 + \mu_2c_1)t^3 + (1/2)c_4t^2 + (c_3 + \mu c_1 + a_2c_1^2)t + c_2,$$
$$x_3 = (1/2)(ac_1^2 + \mu_2c_1)t^2 + c_4t + c_3,\ \ x_4 = (ac_1^2 + \mu_2c_1)t + c_4$$

3. Исследование основной укороченной системы

В систему (2.1) входит шесть координат $x_1, \ldots, x_4, \mu, \mu_2$. Поскольку ее размерность (т.е размерность выпуклой оболочки $\Gamma_1^{(5)}$ носителя $S_1^{(5)}$ в R^6) $d = 5$, то согласно общей теории (см. [1] гл.3) посредством степенного преобразования координат и замены времени можно свести ее к системе с пятью координатами. Мы используем эту возможность, чтобы сократить число параметров с двух до одного (см. [1]). Сделаем это следующим образом: возьмем вектор N_1 нормальный к грани $\Gamma_1^{(5)}$, и пронормируем его по пятой координате. Получим вектор $\bigcup$, у которого $U_5 = 1$. Образуем матрицу $\beta = (E_1E_2E_3E_4\bigcup E_6)$, где столбец $E_i - i -$ единичный вектор. Теперь сделаем преобразование $\ln X = \beta \ln \check{Y}$ где $\ln \check{Y} = (\ln y_1, \ln y_2, \ln y_3, \ln y_4, \ln /\mu/, \ln v)$, и соответствующую замену времени. В нашем случае $N_1 = -(4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 2,\ 4)$, т.е. $U = (2,\ 5/2,\ 3,\ 7/2,\ 1,\ 2)$, и степенное преобразование есть

$$x_1 = y_1\mu^2,\ x_2 = y_2/\mu/^{5/2},\ x_3 = y_3/\mu/^3,\ x_4 = y_4/\mu/^{7/2},\ \mu = \mu,\ \mu_2 = v\mu^2 \tag{3.1}$$

После замены времени $t_1 = \sqrt{/\mu/}t$ система (2.1) принимает вид

$$\begin{aligned} dy_1/dt_1 &= y_2,\\ dy_2/dt_1 &= \sigma y_1 + y_3,\\ dy_3/dt_1 &= \sigma y_2 + y_4,\\ dy_4/dt_1 &= vy_1 + \sigma y_3 + \sigma y_1^2, \end{aligned} \tag{3.2}$$

где $\sigma = sgn\mu$, $\nu = \mu_2/\mu^2$. Система (2.1) сведена к системе (3.2) для $\mu \neq 0$.

Если в правой части четвертого уравнения системы (3.2) отбросить единственный нелинейный член ay_1^2, то получим линейную систему

$$\dot{Y} = AY. \tag{3.3}$$

Теорема *Линейная система (3.3) имеет всего два независимых квадратичных первых интерала:*

$$J_1^{(2)} \stackrel{def}{=} \nu y_1^2 + 2\sigma y_1 y_3 + y_3^2 - \sigma y_2^2 - 2y_2 y_4 = const, \tag{3.4}$$

$$J_2^{(2)} \stackrel{def}{=} \sigma y_1^2 + 2v y_1 y_3 - (1+v) y_2^2 + \sigma y_3^2 - y_4^2 = const. \tag{3.5}$$

Доказательство. Докажем сначала то, что (3.4) и (3.5) являются первыми интегралами системы (3.3). Для этого продифференцируем (3.4) и (3.5) и покажем, что $J'_1 = 0$ и $J'_2 = 0$ в силу системы (3.3)

$$J'_1 = \frac{\partial y_1}{\partial y_1} y'_1 + \frac{\partial y_1}{\partial y_2} y'_2 + \frac{\partial y_1}{\partial y_3} y'_3 + \frac{\partial y_1}{\partial y_4} y'_4$$

в силу (3.3), имеем:

$$J'_1 = (2\nu y_1 + 2\sigma y_3 + 2a y_1^2) y'_1 + (-2\sigma y_2 - 2y_4) y'_2 +$$

$$+ (2\sigma y_1 + 2y_3) y'_3 - 2y_2 y'_4 =$$

$$= (2\nu y_1 + 2\sigma y_3 + 2a y_1^2) y_2 - (2\sigma y_2 + 2y_4)(\sigma y_1 + y_3) +$$

$$+ (2\sigma y_1 + 2y_3)(\sigma y_2 + y_4) - 2y_2(\nu y_1 + \sigma y_3 + a y_1^2) =$$

$$= 2\nu y_1 y_2 + 2\sigma y_2 y_3 + 2a y_1^2 y_2 - 2\sigma^2 y_1 y_2 - 2\sigma y_2 y_3 - 2\sigma y_1 y_4 - 2y_3 y_4 +$$

$$+ 2\sigma^2 y_1 y_2 + 2\sigma y_1 y_4 + 2\sigma y_2 y_3 + 2y_3 y_4 - 2\nu y_1 y_2 - 2\sigma y_2 y_3 - 2a y_1^2 y_2 = 0$$

аналогично для J_2 имеем:

$$J'_2 = (2\nu y_1 + 2\sigma y_3) y'_1 - (2\sigma y_2 + 2y_4) y'_2 + (2\sigma y_1 + 2y_3) y'_3 - 2y_2 y'_4 =$$

$$= (2\nu y_1 + 2\sigma y_3) y_2 - (2\sigma y_2 + 2y_4)(\sigma y_1 + y_3) + (2\sigma y_1 + 2y_3)(\sigma y_2 + y_4) -$$

$$- 2y_2(\nu y_1 + \sigma y_3) = 2\nu y_1 y_2 + 2\sigma y_2 y_3 - 2\sigma^2 y_1 y_2 - 2\sigma y_2 y_3 - 2\sigma y_1 y_4 -$$

$$- 2y_3 y_4 + 2\sigma^2 y_1 y_2 + 2\sigma y_1 y_4 + 2\sigma y_2 y_3 + 2y_3 y_4 - 2\nu y_1 y_2 - 2\sigma y_2 y_3 = 0$$

Теперь докажем основное требование теоремы то, что система (3.3) имеет всего два независимых квадратичных первых интеграла. Пусть система (3.3) имеет квадратичный первый интеграл

$$< Y, BY >= const \tag{3.6}$$

где матрица – симметрическая, т.е. транспонированная матрица $B^* = B$. Далее скобки $< \cdot,\cdot >$ обозначают скалярное произведение. Из (3.6) с учетом (3.1) получаем:

$$< \dot{Y}, BY > + < Y, B\dot{Y} > = < AY, BY > + < Y, BA > =$$

$$< Y, A^*BY > + < Y, BAY > = < Y, (A^*B + BA)Y > = 0.$$

Отсюда $A^*B + BA = 0$, и так как $A^*B = (BA)^*$, то $(BA)^* = -BA$. Следовательно, матрица кососимметрическая. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sigma & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 & 1 \\ \nu & 0 & \sigma & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{pmatrix}$$

тогда

$$BA = \begin{pmatrix} \sigma b_{12} + \nu b_{14} & b_{11} + \sigma b_{13} & b_{12} + \sigma b_{14} & b_{13} \\ \sigma b_{22} + \nu b_{24} & b_{21} + \sigma b_{23} & b_{22} + \sigma b_{24} & b_{23} \\ \sigma b_{32} + \nu b_{34} & b_{31} + \sigma b_{33} & b_{32} + \sigma b_{34} & b_{33} \\ \sigma b_{42} + \nu b_{44} & b_{41} + \sigma b_{43} & b_{42} + \sigma b_{44} & b_{43} \end{pmatrix}$$

Из условия кососимметричности $(BA)^* = -BA$, мы получаем систему 16 линейных уравнений

$\sigma b_{12} + \nu b_{14} = 0$, $\sigma b_{22} + \nu b_{24} = -b_{11} - \sigma b_{13}$, $\sigma b_{32} + \nu b_{34} = -b_{12} - \sigma b_{14}$, $\sigma b_{42} + \nu b_{44} = -b_{13}$, $b_{11} + \sigma b_{13} = -\sigma b_{22} - \nu b_{24}$, $b_{21} + \sigma b_{23} = 0$, $b_{31} + \sigma b_{33} = -b_{22} - \sigma b_{24}$, $b_{41} + \sigma b_{43} = -b_{23}$, $b_{12} + \sigma b_{14} = -\sigma b_{32} - \nu b_{34}$, $b_{22} + \sigma b_{24} = -b_{31} - \sigma b_{33}$, $b_{32} + \sigma b_{34} = 0$, $b_{42} + \sigma b_{44} = -b_{33}$, $b_{13} = -\sigma b_{42} - \nu b_{44}$, $b_{23} = -b_{41} - \sigma b_{43}$, $b_{33} = -b_{42} - \sigma b_{44}$, $b_{43} = 0$.

Поскольку $b_{ij} = b_{ji}$, то получается система из 10 однородных уравнений для 10 неизвестных с $i \leq j$.

$\sigma b_{12} + \nu b_{14} = 0$, $b_{12} + \sigma b_{23} = 0$, $b_{23} + \sigma b_{34} = 0$, $b_{34} = 0$, $\sigma b_{22} + \nu b_{24} = -b_{11} - \sigma b_{13}$, $\sigma b_{23} + \nu b_{34} = -b_{12} - \sigma b_{14}$, $b_{13} + \sigma b_{33} = -b_{22} - \sigma b_{24}$, $b_{23} = -b_{14} - \sigma b_{34}$, $b_{13} = -\sigma b_{24} - \nu b_{44}$, $b_{33} = -b_{24} - \sigma b_{44}$,

Из этой системы выделяется система двух линейных однородных уравнений:

$$b_{11} + \nu b_{24} + \sigma b_{44} = 0, \quad b_{13} + \sigma b_{24} + \nu b_{44} = 0, \tag{3.7}$$

и уравнения $b_{22} = -\sigma b_{11} - b_{13} - \sigma\nu b_{44}$, $b_{33} = -b_{24} - \sigma b_{44}$, а остальные $b_{ij} = 0$. Линейная однородная система (3.7) имеет два нетривиальные системы частных решений $b_{11} = \nu$, $b_{13} = \sigma$, $b_{24} = -1$, $b_{44} = 0$ и $b_{11} = \sigma$, $b_{13} = \nu$, $b_{24} = 0$, $b_{44} = -1$. Первому решению соответствует матрица

$$B = \begin{pmatrix} \nu & 0 & \sigma & 0 \\ 0 & -\sigma & 0 & -1 \\ \sigma & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

которая является матрицей интеграла (3.4). Второму решению соответствует матрица

$$B = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & \nu & 0 \\ 0 & -1-\nu & 0 & 0 \\ \nu & 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

интеграла (3.5). Теорема доказана.

Литература

1. Брюно А.Д., А.С. Солеев Локальный анализ особенностей одной обратимой системы ОДУ// УМН, 1995г., Т. 50., вып. 6, с. 169-170

2. Soleev A., Yarmukhamedov I. Newton polyhedron of the reversible system of ODE.// Proceedings of the CASC2000, Samarkand, Verlag Publisher House Germany, 2000.

3. Iooss G. Capillary-gravity water-waves problem as dynamical system. Structure and dynamics of nonlinear waves in fluids // Eds. Mielke A., Kirchgässner K., Singapore, World Scientific, 1995. P. 42-57.

Самаркандский государственный университет им. А.Навои

Дата поступления 15.02.05

Uzbek Mathematical
Journal, 2006,№3, pp.96-107

УДК 517.947.5

Обратная задача для квадратичного пучка операторов Штурма-Лиувилля с периодическим потенциалом на полуоси

А.Б.Яхшимуратов, О.Р.Аллаберганов

Mazkur maqolada yarim o'qda berilgan davriy potensialli Shturm-Liuvill operatorining kvadratik dastasi uchun teskari masala o'rganilgan, aniqrog'i spektral berilganlar orqali izlar formulalari va hegaraviy shartni topish formulasi keltirib chiqarilgan.

In this paper inverse problem for quadratic pencil of Sturm-Liouvill's operators with periodic potential in half line is studied, the trace formulas and formula for boundary condition from spectral data's is deduced.

Обратные задачи для оператора Штурма-Лиувилля на полупрямой в случае конечнозонных периодических и непериодических потенциалов изучены в работах Н.И.Ахиезера [1], Х.Хохштадта, В.Г.Гольдберга [2] и Б.М. Левитана, А.В.Савина [3], а на всей прямой исследованы в работах В.А.Марченко, И.В.Островского [4], Е.Трубовица [5] и др.

Для квадратичного пучка операторов Штурма-Лиувилля обратные задачи на всей прямой в случае периодических и конечнозонных периодических коэффициентов изучены в работах [6, 7].

В настоящей статье рассматривается обратная задача на полуоси для квадратичного пучка операторов Штурма-Лиувилля с периодическим потенциалом, а именно выводятся формулы для следов и формула нахождения граничного условия через спектральные данные.

1. Рассмотрим в пространстве $L_2(0,\infty)$ следующий пучок

$$T(\lambda)y \equiv -y'' + q(x)y + 2\lambda p(x)y - \lambda^2 y = 0, \quad (0 < x < \infty) \tag{1}$$

операторов Штурма-Лиувилля с граничным условием

$$y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0, \quad \alpha \in (0,\pi), \tag{2}$$

где $p(x)$ и $q(x)$ действительные функции, имеющие период π, а λ комплексный параметр.

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что выполняются следующие условия (см. [6]): а) $p(x)$ и $q(x)$ определены на R^1, π-периодичны, $q(x) \in L_2[0,\ \pi]$, $p(x) \in W_2^1[0,\ \pi]$; б) для всех функций $y(x) \in W_2^2[0,\ \pi]$, $y(x) \not\equiv 0$ удовлетворяющих равенству

$$[y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha]y'(0) - [y(\pi)\cos\alpha + y'(\pi)\sin\alpha]y'(\pi) = 0$$

выполняется неравенство $(L_0 y, y) > 0$, где $L_0 y \equiv -y'' + q(x)y$. Здесь $W_2^n[0,\ \pi]$ - пространство С.Л.Соболева, состоящая из заданных на сегменте $[0,\ \pi]$ комплекснозначных функций, которые имеют $n-1$ абсолютно непрерывных производных и производную n го порядка, суммируемую с квадратом на $[0,\ \pi]$. Это условие обеспечивает действительность спектра и спектральных параметров задачи (1)+(2).

Обозначим через $c(x,\lambda)$, $s(x,\lambda)$, $\theta(x,\lambda)$ и $\varphi(x,\lambda)$ решения уравнения (1) удовлетворяющие начальным условиям

$$c(0,\lambda) = 1, \quad c'(0,\lambda) = 0, \quad s(0,\lambda) = 0, \quad s'(0,\lambda) = 1,$$

$$\theta(0,\lambda) = \cos\alpha, \quad \theta'(0,\lambda) = \sin\alpha, \quad \varphi(0,\lambda) = -\sin\alpha, \quad \varphi'(0,\lambda) = \cos\alpha.$$

Функция Вейля-Титчмарша для задачи (1)+(2) однозначно определяется условием $\theta(x,\lambda) + m_\alpha(\lambda)\varphi(x,\lambda) \in L_2(0,\infty)$, где $\lambda \in C\backslash R^1$ любое число. Известно (см. [6]), что

$$c(x,\lambda) + m^+(\lambda)s(x,\lambda) \in L_2(0,\infty), \tag{3}$$

где

$$m^+(\lambda) = \frac{s'(\pi,\lambda) - c(\pi,\lambda) - \sqrt{\Delta^2(\lambda) - 4}}{2s(\pi,\lambda)}, \quad \Delta(\lambda) = s'(\pi,\lambda) + c(\pi,\lambda). \tag{4}$$

Из тождеств

$$c(x,\lambda) = \theta(x,\lambda)\cos\alpha - \varphi(x,\lambda)\sin\alpha, \quad s(x,\lambda) = \theta(x,\lambda)\sin\alpha + \varphi(x,\lambda)\cos\alpha$$

и условия (3) получим, что

$$m_\alpha(\lambda) = \frac{-\sin\alpha + m^+(\lambda)\cos\alpha}{\cos\alpha + m^+(\lambda)\sin\alpha}. \tag{5}$$

Подставляя в равенство (5) выражение (4) находим

$$m_\alpha(\lambda)=\frac{(s'(\pi,\lambda)-c(\pi,\lambda))\cos 2\alpha-(s(\pi,\lambda)+c'(\pi,\lambda))\sin 2\alpha-\sqrt{\Delta^2(\lambda)-4}}{2s(\pi,\lambda)\cos^2\alpha+2(s'(\pi,\lambda)-c(\pi,\lambda))\cos\alpha\sin\alpha-2c'(\pi,\lambda)\sin^2\alpha}. \tag{6}$$

Выражение (6) в терминах $\theta(x,\lambda)$ и $\varphi(x,\lambda)$ выглядит следующим образом:

$$m_\alpha(\lambda)=\frac{-\theta(\pi,\lambda)\cos\alpha-\theta'(\pi,\lambda)\sin\alpha+\varphi'(\pi,\lambda)\cos\alpha-\varphi(\pi,\lambda)\sin\alpha}{2(\varphi(\pi,\lambda)\cos\alpha+\varphi'(\pi,\lambda)\sin\alpha)}-$$

$$-\frac{\sqrt{\Delta^2(\lambda)-4}}{2(\varphi(\pi,\lambda)\cos\alpha+\varphi'(\pi,\lambda)\sin\alpha)}\,. \tag{7}$$

Функция $\Delta(\lambda)=s'(\pi,\lambda)+c(\pi,\lambda)$ называется функцией Ляпунова или дискриминантом Хилла задачи (1)+(2), отметим, что она не зависит от α.

Из выражения (7) следует, что непрерывный спектр задачи (1)+(2) имеет вид $E_{ess}=R^1\backslash\bigcup\limits_{n=-\infty}^{\infty}(\lambda_n^-,\lambda_n^+)$. Непересекающиеся интервалы $(\lambda_n^-,\lambda_n^+)$, $n\in Z$ принято называть лакунами пучка (1). Отметим, что лакуна $(\lambda_0^-,\lambda_0^+)$, которая содержит точку $\lambda=0$, всегда является невырожденной: $\lambda_0^-<\lambda_0^+$.

Для удобства введем множество индексов: $\Omega=\{\ \pm0,\ \pm1,\ ...\ \}$. Обозначим через ξ_n, $n\in\Omega$ корни уравнения

$$\varphi(\pi,\lambda)\cos\alpha+\varphi'(\pi,\lambda)\sin\alpha=0.$$

Отметим, что ξ_n, $n\in\Omega$ совпадают с собственными значениями регулярной задачи для уравнения (1) с граничными условиями

$$y(0)\cos\alpha+y'(0)\sin\alpha=0,\quad y(\pi)\cos\alpha+y'(\pi)\sin\alpha=0,$$

а также $\xi_{-0}\in[\lambda_0^-,0)$, $\quad\xi_{+0}\in(0,\lambda_0^+]$, $\quad\xi_n\in[\lambda_n^-,\lambda_n^+]$, $\quad n\in Z\backslash\{0\}$.

Определение 1. *Числа ξ_n, $n\in\Omega$ и знаки*

$$\sigma_n=sign\left\{\frac{\varphi(\pi,\xi_n)}{\sin\alpha}-\frac{\sin\alpha}{\varphi(\pi,\xi_n)}\right\},\quad n\in\Omega$$

называются спектральными параметрами задачи (1)+(2).

Определение 2. *Спектральные параметры и границы λ_n^-, λ_n^+, $n\in Z$ непрерывного спектра назовем спектральными данными задачи (1)+(2).*

2. Выведем формулы для следов задачи (1)+(2). Для этого изучим двумя способами асимптотику следующей функции

$$f(\lambda)=\frac{\tilde{\varphi}(\pi,\lambda)h-\tilde{\varphi}'(\pi,\lambda)}{s(\pi,\lambda)}, \tag{8}$$

при $\mu\to+\infty$, где $\mu=i\lambda$. Здесь $h=-ctg\alpha$ и $\tilde{\varphi}(x,\lambda)$ решение уравнения (1) удовлетворяющее начальным условиям: $\tilde{\varphi}(0,\lambda)=1$, $f(\lambda)=-\mu^2+i\mu(s_1-\xi_{-0}-\xi_{+0})+\frac{1}{2}[s_2-\xi_{-0}^2-\xi_{+0}^2+(s_1-\xi_{-0}-\xi_{+0})^2]+\underline{\underline{0}}\left(\frac{1}{\mu}\right)$,. Подставляя разложения

$$s(\pi,\lambda)=\pi\prod_{0\neq k=-\infty}^{\infty}\frac{\tau_k-\lambda}{k},$$

$$\tilde{\varphi}(\pi,\lambda)h-\ \tilde{\varphi}'(\pi,\lambda)=\pi(\lambda-\xi_{-0})(\lambda-\xi_{+0})\prod_{0\neq k=-\infty}^{\infty}\frac{\xi_k-\lambda}{k}$$

в (8) имеем:

$$f(\lambda)=(\lambda-\xi_{-0})(\lambda-\xi_{+0})\prod_{0\neq k=-\infty}^{\infty}\frac{\xi_k-\lambda}{\tau_k-\lambda}. \tag{9}$$

Легко видеть, что

$$\prod_{0\neq k=-\infty}^{\infty}\frac{\xi_k-\lambda}{\tau_k-\lambda}=\exp\left\{\sum_{0\neq k=-\infty}^{\infty}\ln\left(1+\frac{\tau_k-\xi_k}{\lambda-\tau_k}\right)\right\}=$$

$$=\exp\left\{\frac{1}{\lambda}\cdot\sum_{0\neq k=-\infty}^{\infty}(\tau_k-\xi_k)+\frac{1}{2\lambda^2}\cdot\sum_{0\neq k=-\infty}^{\infty}(\tau_k^2-\xi_k^2)+\underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{\lambda^3}\right)\right\}. \tag{10}$$

Вводя обозначения

$$S_1=\sum_{0\neq k=-\infty}^{\infty}(\tau_k-\xi_k),\quad S_2=\sum_{0\neq k=-\infty}^{\infty}(\tau_k^2-\xi_k^2)$$

и принимая во внимание (9), из (8) получим

$$f(\lambda)=-\mu^2-i\mu\cdot(S_1-\xi_{-0}-\xi_{+0})+$$

$$+\frac{1}{2}\cdot[S_2-\xi_{-0}^2-\xi_{+0}^2+(S_1-\xi_{-0}-\xi_{+0})^2]+\underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{\mu}\right). \tag{11}$$

Теперь для функции $f(\lambda)$ выведем асимптотическую формулу типа (10) используя следующие решения уравнения (1) (см. [8], стр. 22):

$$y_\nu(x,\lambda) = \exp\left\{\lambda\omega_\nu x + \int\limits_0^x \sigma_\nu(t,\lambda)dt\right\}, \quad \nu = 1,\ 2, \tag{12}$$

где

$$\omega_1 = i,\ \ \omega_2 = -i,\ \ \sigma_\nu(x,\lambda) = \sigma_{\nu,0}(x) + \frac{1}{2\lambda\omega_\nu}\cdot\sigma_{\nu,1}(x) + \underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{\lambda^2}\right), \tag{13}$$

$$\sigma_{\nu,0}(x) = -\omega_\nu p(x),\ \ \sigma_{\nu,1}(x) = \omega_\nu p'(x) + p^2(x) + q(x).$$

Нетрудно видеть, что

$$\tilde{\varphi}(x,\lambda) = \frac{h + i\lambda - \sigma_2(0,\lambda)}{2i\lambda + \sigma_1(0,\lambda) - \sigma_2(0,\lambda)}\cdot y_1(x,\lambda) +$$

$$+\frac{-h + i\lambda + \sigma_1(0,\lambda)}{2i\lambda + \sigma_1(0,\lambda) - \sigma_2(0,\lambda)}\cdot y_2(x,\lambda), \tag{14}$$

$$s(\pi,\lambda) = \frac{1}{2i\lambda + \sigma_1(0,\lambda) - \sigma_2(0,\lambda)}\cdot y_1(x,\lambda) -$$

$$-\frac{1}{2i\lambda + \sigma_1(0,\lambda) - \sigma_2(0,\lambda)}\cdot y_2(x,\lambda). \tag{15}$$

Пользуясь равенствами (13) и (14) функцию $f(\lambda)$ перепишем в следующем виде

$$f(\lambda) = [h + \mu - \sigma_2(0,\lambda)]\cdot[h - \mu - \sigma_1(\pi,\lambda)] +$$

$$+\frac{y_2(\pi,\lambda)}{y_1(\pi,\lambda) - y_2(\pi,\lambda)}\cdot\{[-h + \mu + \sigma_1(0,\lambda)]\cdot[h + \mu - \sigma_2(\pi,\lambda)] +$$

$$+[h + \mu - \sigma_2(0,\lambda)]\cdot[h - \mu - \sigma_1(\pi,\lambda)]\}.$$

Из вида (11) решений и асимптотики (12) получим

$$f(\lambda) = -\mu^2 + 2i\mu\cdot p(0) + h^2 - q(0) + \underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{\mu}\right), \quad (\mu \to +\infty). \tag{16}$$

Сопоставляя (10) и (15) находим

$$S_1 - \xi_{-0} - \xi_{+0} = -2p(0), \quad S_2 - \xi_{-0}^2 - \xi_{+0}^2 = 2ctg^2\alpha - 4p^2(0) - 2q(0),$$

т.е.

$$-\xi_{-0} - \xi_{+0} + \sum_{0\neq k=-\infty}^{\infty} (\tau_k - \xi_k) = -2p(0), \tag{17}$$

$$-\xi_{-0}^2 - \xi_{+0}^2 - \sum_{0\neq k=-\infty}^{\infty} (\tau_k^2 - \xi_k^2) = 2ctg^2\alpha - 4p^2(0) - 2q(0). \tag{18}$$

Из работы [6] Г.Ш.Гусейнова известно, что

$$\frac{\lambda_0^+ + \lambda_0^-}{2} + \sum_{0\neq k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\lambda_k^+ + \lambda_k^-}{2} - \tau_k \right) = p(0), \tag{19}$$

$$\frac{(\lambda_0^+)^2 + (\lambda_0^-)^2}{2} + \sum_{0\neq k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{(\lambda_k^+)^2 + (\lambda_k^-)^2}{2} - \tau_k^2 \right) = q(0) + 2p^2(0). \tag{20}$$

Прибавим к равенствам (17) и (18) соответственно равенства (16) и (18):

$$\frac{\lambda_0^+ + \lambda_0^-}{2} - \xi_{-0} - \xi_{+0} + \sum_{0\neq k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\lambda_k^+ + \lambda_k^-}{2} - \xi_k \right) = -p(0),$$

$$\frac{(\lambda_0^+)^2 + (\lambda_0^-)^2}{2} - \xi_{-0}^2 - \xi_{+0}^2 + \sum_{0\neq k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{(\lambda_k^+)^2 + (\lambda_k^-)^2}{2} - \xi_k^2 \right) =$$

$$= 2ctg^2\alpha - q(0) - 2p^2(0).$$

Если в уравнении (1) вместо функций $p(x)$ и $q(x)$ рассмотреть $p(x+t)$ и $q(x+t)$, то из последних равенств получаются формулы

$$p(t) = -\left(\frac{\lambda_0^+ + \lambda_0^-}{2} - \xi_{-0}(t) - \xi_{+0}(t) \right) - \sum_{0\neq k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\lambda_k^+ + \lambda_k^-}{2} - \xi_k(t) \right), \tag{21}$$

$$q(t)+2p^2(t)=2ctg^2\alpha-\left(\frac{(\lambda_0^+)^2+(\lambda_0^-)^2}{2}-\xi_{-0}^2(t)-\xi_{+0}^2(t)\right)-$$

$$-\sum_{0\neq k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{(\lambda_k^+)^2+(\lambda_k^-)^2}{2}-\xi_k^2(t)\right). \qquad (22)$$

Здесь $\xi_n(t)$, $n\in\Omega$ спектральные параметры соответствующие коэффициентам $p(x+t)$ и $q(x+t)$.

3. Найдем формулу для граничного условия через спектральные данные. Исходя из вида (6) функции Вейля-Титчмарша введем следующие функции

$$A(\lambda)=2s(\pi,\lambda)\cos^2\alpha+[s'(\pi,\lambda)-c(\pi,\lambda)]\sin 2\alpha-2c'(\pi,\lambda)\sin^2\alpha, \qquad (23)$$

$$C(\lambda)=[s'(\pi,\lambda)-c(\pi,\lambda)]\cos 2\alpha-[s(\pi,\lambda)+c'(\pi,\lambda)]\sin 2\alpha. \qquad (24)$$

Если дополнительно ввести функцию

$$B(\lambda)=2s(\pi,\lambda)\sin^2\alpha-[s'(\pi,\lambda)-c(\pi,\lambda)]\sin 2\alpha-2c'(\pi,\lambda)\cos^2\alpha, \qquad (25)$$

то равенства (20), (21), (22) можно задать одним матричным тождеством:

$$\begin{pmatrix} A(\lambda) & C(\lambda)\\ C(\lambda) & B(\lambda)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\times$$

$$\times\begin{pmatrix} 2s(\pi,\lambda) & s'(\pi,\lambda)-c(\pi,\lambda)\\ s'(\pi,\lambda)-c(\pi,\lambda) & -2c'(\pi,\lambda)\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}.$$

Переходя к определителям в этом равенстве, получим

$$A(\lambda)B(\lambda)-C^2(\lambda)=4-\Delta^2(\lambda). \qquad (26)$$

Из результатов теоремы 1.1 работы [8] не трудно вывести, что

$$c(\pi,\lambda)=\cos\pi(\lambda-c_0)+\frac{\pi c_1}{\lambda}\sin\pi(\lambda-c_0)+\overline{\overline{o}}\left(\frac{e^{|Im\lambda|\pi}}{\lambda}\right),$$

$$c'(\pi,\lambda)=-\lambda\sin\pi(\lambda-c_0)+p(0)\sin\pi(\lambda-c_0)+\pi c_1\cos\pi(\lambda-c_0)+\overline{\overline{o}}\left(\frac{e^{|Im\lambda|\pi}}{\lambda}\right),$$

$$s(\pi,\lambda)=\frac{1}{\lambda}\sin\pi(\lambda-c_0)+\frac{p(0)}{\lambda^2}\sin\pi(\lambda-c_0)+\overline{\overline{o}}\left(\frac{e^{|Im\lambda|\pi}}{\lambda^2}\right),$$

$$s'(\pi,\lambda)=\cos\pi(\lambda-c_0)+\frac{\pi c_1}{\lambda}\sin\pi(\lambda-c_0)+\overline{\overline{o}}\left(\frac{e^{|Im\lambda|\pi}}{\lambda}\right)\ ,\ (|\lambda|\to\infty),\quad(27)$$

где

$c_0=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}p(t)dt,\quad c_1=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}[q(t)+p^2(t)]dt.$

Подставляя эти асимптотические формулы в (20), (21), (22) находим

$$A(\lambda)=2\lambda\sin^2\alpha\sin\pi(\lambda-c_0)-2p(0)\sin^2\alpha\sin\pi(\lambda-c_0)-$$

$$-2\pi c_1\sin^2\alpha\cos\pi(\lambda-c_0)+\frac{2}{\lambda}\cdot\cos^2\alpha\sin\pi(\lambda-c_0)+\overline{\overline{o}}\left(\frac{e^{|Im\lambda|\pi}}{\lambda}\right),\ \ (|\lambda|\to\infty),$$

$$C(\lambda)=\lambda\sin2\alpha\sin\pi(\lambda-c_0)-p(0)\sin2\alpha\sin\pi(\lambda-c_0)-$$

$$-\pi c_1\sin2\alpha\cos\pi(\lambda-c_0)-\frac{1}{\lambda}\cdot\sin2\alpha\sin\pi(\lambda-c_0)+\overline{\overline{o}}\left(\frac{e^{|Im\lambda|\pi}}{\lambda}\right),\quad(|\lambda|\to\infty),$$

$$B(\lambda)=2\lambda\cos^2\alpha\sin\pi(\lambda-c_0)-2p(0)\cos^2\alpha\sin\pi(\lambda-c_0)-$$

$$-2\pi c_1\cos^2\alpha\cos\pi(\lambda-c_0)+\frac{2}{\lambda}\sin^2\alpha\sin\pi(\lambda-c_0)+\overline{\overline{o}}\left(\frac{e^{|Im\lambda|\pi}}{\lambda}\right)\ ,\ \ (|\lambda|\to\infty).\quad(28)$$

Отсюда получим следующую асимптотику

$$\frac{C(\lambda)}{A(\lambda)}=ctg\alpha+\underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\ ,\quad |\lambda|\to\infty.\quad(29)$$

Пользуясь равенством (25) и теоремой Миттаг-Леффлера имеем

$$\frac{C(\lambda)}{A(\lambda)}=ctg\alpha+\sum_{n\in\Omega}\frac{C(\xi_n)}{A'(\xi_n)(\lambda-\xi_n)}=$$

$$= ctg\alpha + \frac{1}{\lambda}\sum_{n\in\Omega}\frac{C(\xi_n)}{A'(\xi_n)} + \frac{1}{\lambda^2}\sum_{n\in\Omega}\xi_n\frac{C(\xi_n)}{A'(\xi_n)} + \underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{\lambda^3}\right), \quad |\lambda|\to\infty. \qquad (30)$$

Вводя обозначения

$$d_1 = \sum_{n\in\Omega}\frac{C(\xi_n)}{A_1'(\xi_n)}, \quad d_2 = \sum_{n\in\Omega}\xi_n\frac{C(\xi_n)}{A_1'(\xi_n)}, \quad A_1(\lambda) = \frac{1}{\sin^2\alpha}A(\lambda), \qquad (31)$$

равенство (26) перепишем в следующем виде:

$$\frac{C(\lambda)}{A(\lambda)} = ctg\alpha + \frac{1}{\lambda\sin^2\alpha}\cdot d_1 + \frac{1}{\lambda^2\sin^2\alpha}\cdot d_2 + \underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{\lambda^3}\right), \quad |\lambda|\to\infty.$$

Отсюда находим

$$\left(\frac{C(\lambda)}{A(\lambda)}\right)^2 = ctg^2\alpha + \frac{1}{\lambda}\cdot\frac{2\cos\alpha}{\sin^3\alpha}d_1 + \frac{1}{\lambda^2}\left\{\frac{1}{\sin^4\alpha}d_1^2 + \frac{2\cos\alpha}{\sin^3\alpha}d_2\right\} + \underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{\lambda^3}\right). \qquad (32)$$

Теперь для функции $\left(\frac{C(\lambda)}{A(\lambda)}\right)^2$ получим асимптотическую формулу другим способом. Из тождества (23) следует, что

$$\left(\frac{C(\lambda)}{A(\lambda)}\right)^2 = \frac{B(\lambda)}{A(\lambda)} + \frac{\Delta^2(\lambda)-4}{A^2(\lambda)}. \qquad (33)$$

В силу асимптотических формул (28) имеем

$$\frac{B(\lambda)}{A(\lambda)} = ctg^2\alpha - \frac{1}{\lambda^2}\cdot\frac{\cos 2\alpha}{\sin^4\alpha} + \overline{\overline{o}}\left(\frac{1}{\lambda^2}\right), \ |\lambda|\to\infty. \qquad (34)$$

Используя (24), нетрудно видеть, что

$$\Delta^2(\lambda) - 4 = -4\sin^2\pi(\lambda - c_0) + \overline{\overline{o}}\left(\frac{e^{2|Im\lambda|\pi}}{\lambda}\right), \quad (|\lambda|\to\infty). \qquad (35)$$

Из (28) вытекает, что

$$A^2(\lambda) = 4\lambda^2\sin^4\alpha\sin^2\pi(\lambda - c_0) + \underline{\underline{O}}(\lambda e^{2|Im\lambda|\pi}), \quad (|\lambda|\to\infty). \qquad (36)$$

Пользуясь формулами (30), (31) находим

$$\frac{\Delta^2(\lambda)-4}{A^2(\lambda)}=-\frac{1}{\lambda^2\sin^4\alpha}+\overline{\overline{o}}\left(\frac{1}{\lambda^2}\right),\quad (|\lambda|\to\infty). \tag{37}$$

Подставляя (29) и (32) в равенство (28) получим

$$\left(\frac{C(\lambda)}{A(\lambda)}\right)^2=ctg^2\alpha-\frac{1}{\lambda^2\sin^4\alpha}(\cos 2\alpha+1)+\overline{\overline{o}}\left(\frac{1}{\lambda^2}\right),\ (|\lambda|\to\infty). \tag{38}$$

Сопоставляя асимптотические формулы (32) и (33) имеем

$$d_1=0,\qquad \frac{1}{\sin^4\alpha}\cdot d_1^2+\frac{2\cos\alpha}{\sin^3\alpha}\cdot d_2=-\frac{2\cos^2\alpha}{\sin^4\alpha}.$$

Отсюда вытекает, что $ctg\alpha=-d_2$. Учитывая обозначения (27) перепишем это равенство в виде:

$$ctg\alpha=-\sum_{n\in\Omega}\xi_n\frac{C(\xi_n)}{A_1'(\xi_n)}.$$

В силу тождества (23) имеем $C(\xi_n)=\sigma_n\sqrt{\Delta^2(\xi_n)-4}$. Поэтому

$$ctg\alpha=-\sum_{n\in\Omega}\xi_n\frac{\sigma_n\sqrt{\Delta^2(\xi_n)-4}}{A_1'(\xi_n)}\ . \tag{39}$$

Для целых функций $\Delta^2(\lambda)-4$ и $A_1(\lambda)$ нетрудно вывести следующие разложения:

$$\Delta^2(\lambda)-4=-4\pi^2(\lambda-\lambda_0^-)(\lambda-\lambda_0^+)\prod_{0\neq k=-\infty}^{\infty}\frac{(\lambda-\lambda_k^-)(\lambda-\lambda_k^+)}{k^2},$$

$$A_1(\lambda)=2\pi(\lambda-\xi_{-0})(\lambda-\xi_{+0})\prod_{0\neq k=-\infty}^{\infty}\frac{\lambda-\xi_k}{k}.$$

4. В работе [9] получен следующий результат: пусть задача (1)+(2) имеет непрерывный спектр

$$E_{ess}=R^1\setminus\bigcup_{n=-\infty}^{\infty}(\lambda_n^-,\lambda_n^+)$$

и спектральные параметры $\xi_n,\ \sigma_n,\ n\in\Omega$. Тогда при всех действительных значениях параметра $t\in(-\infty,\ \infty)$, следующая задача

$$-y''+q(x+t)y+2\lambda p(x+t)y-\lambda^2y=0,\quad 0<x<\infty$$

$$y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0, \quad \alpha \in (0,\ \pi),$$

имеет тот же непрерывный спектр E_{ess} и спектральные параметры $\xi_n(t),\ \sigma_n(t)$, $n \in \Omega$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений Дубровина-Трубовица:

$$\dot{\xi}_n(t) = \frac{2[(\xi_n^2(t) - 2\xi_n(t)p(t) - q(t)) + ctg^2\alpha]\sigma_n(t)\sqrt{\Delta^2(\xi_n(t)) - 4}}{A_1'(\xi_n(t))}, \quad n \in \Omega, \tag{40}$$

а также начальным условиям $\xi_n(t)|_{t=0} = \xi_n, \quad \sigma_n(t)|_{t=0} = \sigma_n$, $n \in \Omega$.

Знак $\sigma_n(t)$ меняется на противоположный при каждом столкновении спектрального параметра $\xi_n(t)$ с границами своей лакуны.

Формула нахождения граничного условия (34), формулы следов (21), (19) и система дифференциальных уравнений Дубровина-Трубовица (40) позволяют решить обратную задачу для задачи (1)+(2).

Пользуясь случаем, авторы благодарят проф. А.Б.Хасанова за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Литература

1. Ахиезер Н.И. Континуальный аналог ортогональных многочленов на системе интервалов. // ДАН СССР, 1961, т. 141, є 2, с. 262-266.

2. Hochstadt H., Goldberg W. An inverse problem for a differential operator with a mixed spectrum.// J. Math. Anal. And Appl. 1985, 105, 206-221.

3. Левитан Б. М., Савин А. В. Обратная задача на полупрямой для конечно-зонных потенциалов.// Вестн. Моск. ун-та, сер. 1, мат., мех., 1988, є 1, с. 21-28.

4. Марченко В.А., Островский И.В. Характеристика спектра оператора Хилла.// Мат. сб. , 1975, 97, вып. 4, с. 540-606.

5. Trubowitz E. The inverse problem for periodic potentials.// Comm. Pure Appl. Math., 1977, v. 30, p. 321-337.

6. Гусейнов Г.Ш. Спектр и разложения по собственным функциям квадратичного пучка операторов Штурма-Лиувилля с периодическими коэффициентами. Сб. Сп. теория операторов и ее прилож., вып. 6, с. 56-97, изд. "Элм", Баку-1985.

7. Бабажанов Б.А., Хасанов А.Б., Яхшимуратов А.Б. Об обратной задаче для квадратичного пучка операторов Штурма-Лиувилля с периодическим потенциалом.// "Дифференциальные уравнения", 2005 г., т. 41, є 3, с. 298-305.

8. Гусейнов Г.Ш. Асимптотические формулы для решений и собственных значений квадратичного пучка уравнений Штурма-Лиувилля. Препринт є 113, Институт физики АН Азерб. ССР, Баку-1984, 49 с.

9. Бабажанов Б.А., Аллаберганов О.Р. Об обратной задаче для квадратичного пучка операторов Штурма-Лиувилля с периодическими коэффициентами на полуоси. // Труды межд. науч. конф. “Дифф. ур. с частн. производн. и родств. проблемы анализа и информатики”, г. Ташкент, 16-19 ноября 2004 г., с. 224-227.

Ургенчский государственный университет

Дата поступления 30.05.05

Содержание

Mundarija

Компьютерная верстка: *к.ф.-м.н. А.Р.Хаетов*

Регистр. №00110. Сдано в набор 10.05.06г. Подписано к печати 30.05.06 г.
Формат 60×90 1/16. Гарнитура литературная. Печать офсетная.
Усл.-печ.л. 7,0. Тираж 200. Заказ №59

Издательство "Фан"АН РУз: 100047, Ташкент, ул. акад. Я.Гулямова, 70
Отпечатано в ООО "Арнапринт" г.Ташкент, ул. Х.Байкаро, 41
Институт математики им. В.И.Романовского АН РУз: 100125,

Ташкент, Академгородок, ул. Ф.Ходжаева, 29.