O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI FANLAR AKADEMIYASI
V.I.ROMANOVSKIY NOMIDAGI MATEMATIKA
INSTITUTI

O‘ZBEKISTON MATEMATIKA JURNALI

Jurnalga 1957 yilda asos solingan (1991 yilgacha "O‘zbekiston fanlar akademiyasining axboroti. Fizika-matematika fanlari seriyasi"deb nomlangan). Yilda 4 marta chiqadi

2. 2007

УЗБЕКСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

УзМЖ

Основан в 1957 г. (до 1991 г. под названием "Известия Академии наук Узбекистана. Серия физико-математических наук"). Выходит 4 раза в год

ТАШКЕНТ. ИЗДАТЕЛЬСТВО "ФАН"АКАДЕМИИ НАУК РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН. 2007

Адрес редколлегии: 100125. Ташкент, Ф.Ходжаева, 29,
Институт математики АН РУз,
телефон: 162-75-44

Адрес редакции: 100047, Ташкент, ул. акад. Я.Гулямова, 70,
телефон: 133-41-88

Азамов Абдулла Азамович

(к шестидесятилетию со дня рождения)

Азамов Абдулла Азамович - математик, известный своими разносторонними интересами. Основные труды посвящены теории дифференциальных уравнений, в особенности теории дифференциальных игр сближения-уклонения (преследования-убегания).

А.А.Азамов родился 21 апреля 1947 года, учился в школе №1 в селе Балыкчи Андижанской области. В 1964 году поступил на механико-математический факультет ТашГУ (ныне НУУз им. Мирзо Улугбека). С 1966 года продолжил учебу на механико-математическом факультете МГУ им. М.В.Ломоносова, после окончания которого был направлен в ТашГУ. Работал ассистентом (1970-73 гг.), старшим преподавателем (1973-76 гг.), доцентом (1977-86 гг.) кафедр математического анализа и (с 1980 г.) дифференциальных уравнений. В 1987-93 гг. был заведующим кафедрой, а в 1992-93 гг. - деканом математического факультета. В 1993 г. был назначен ректором Наманганского государственного университета, где работал также профессором на математическом факультете. В 1998 году вернулся в Ташкент, работал заведующим отделом в ЦССПО Минвуза, затем заместителем главного редактора журнала "Тафаккур"("Мысль"). С 2000 года служит ответственным работником Аппарата Президента Республики Узбекистан. В 1999 году был принят по совместительству на должность ведущего научного сотрудника Института математики им. В.И.Романовского АН РУз (с 2005 года возглавляет отдел прикладной математики). На механико-математическом факультете НУУз читает курс дифференциальных уравнений.

Научную деятельность А.А.Азамов начал в области теории устойчивости под руководством проф. Б.П.Демидовича. Дипломная работа, посвященная методу характеристик Ляпунова, опубликована в журнале "Дифференциальные уравнения"[1]. Работу в этом направлении он продолжил и в дальнейшем [2-7].

С 1970 года А.А.Азамов участвовал в работе семинара, организованного Н.Ю.Сатимовым с целью изучения работ Н.Н.Красовского, Л.С.Понтрягина и Р.Айзекса, откуда выросла ташкентская научная школа теории оптимальных процессов и дифференциальных игр. В течение многих лет он был соруководителем этого семинара.

В 1972 году А.А.Азамов решил задачу Л.А.Петросяна: найти оптимальные смешанные стратегии геометрической игры в нормальной форме (X, Y, K), где X и Y- выпуклые компакты в R^n, $K(x, y) = |x - y|$ [8, 9].

В 1974 году защитил кандидатскую диссертацию (научный руководитель - Н.Ю.Сатимов), посвященную применению метода Айзекса к линейной дифференциальной игре сближения-уклонения размерности 2, когда терминальное множество - прямая или точка [10]. В ней в условиях регулярности (которые охватывают случаи отсутствия убегающего) было дано строгое обоснование эвристического метода Айзекса. Изучение линейных дифференциальных игр на плоскости в нерегулярных случаях было продолжено А.Фазыловым и Е.Сулейменовым ([11, 12]). Эти результаты А.А.Азамова и его учеников, получившие в свое время положительную оценку Л.А.Петросяна, А.И.Субботина и М.И.Зеликина, предполагается опубликовать в виде монографии. В диссертации также впервые была применена стратегия уклонения по направлениям [13], а также обнаружена важность условия открытости терминального множества в задачах избежания столкновений [14]. Последнее направление позже было далеко продвинуто А.З.Фазыловым [15]. В диссертации А.А.Азамова были обнаружены новые явления в поведении экстремальных траекторий, не описанных Р.Айзексом, например, многократные "обрывания". Исследования метода Айзекса и проблемы обоснования полученного им решения были продолжены и в докторской диссертации А.А.Азамова, были разработаны метод полупроницаемых кривых и функций Ляпунова [16].

В 1975-76 гг. А.А.Азамов посещал семинар по алгебре Дж.Хаджиева и получил два результата о том, что дистрибутивные структуры разлагаются на булевы алгебры посредством специальной операции сложения по модулю фильтр-идеала и о том, что конечномерные булевы логики образуются факторизацией булевых алгебр в каждой размерности (доложены на семинарах Дж. Хаджиева и Т.А.Сарымсакова, но пока не опубликованы).

С 1976 года под влиянием работ Б.Н.Пшеничного А.А.Азамов начал изучение игр с одним убегающим и несколькими преследователями, движение которых безинерционно [16-19]. Предложенное им аналитическое решение игры "с линией жизни"перенесено на более сложные классы игр Б.Саматовым, а метод преследования, когда группа преследователей имеет лишь суммарное преимущество - Г.Ибрагимовым. Сюда же относятся работы А.А.Азамова о задаче преследования точки, убегающей по заданной кривой [20, 21]. С этой целью им была введена стратегия радиального преследования. А.Кучкарову недавно удалось доказать, что радиальная стратегия позволяет получить решение задачи качества в случае равных скоростей преследователя и убегающего, когда последний движется вдоль произвольной кривой.

В ряде работ этого периода А.А.Азамов разработал основы теории дискретных игр сближения-уклонения [22-24]. В 1978 году начал исследования по нелинейным дифференциальным играм преследования и получил решение проблемы 8.5.1 Р.Айзекса об "игре перетягивания"[25]. В этой работе обнаружена связь между дифференциальной игрой и качественной теорией динамических систем на плоскости. Эта же игра позволила ему ответить на два вопроса, связанные с работой Л.С.Понтрягина "К теории дифференциальных игр"("Успехи математических наук", 1966, т. 21, вып.4(130), с. 219-274) [26-27]. Введенное в связи с этими работами понятие стратегии локально-гладкого синтеза показало себя как эффективный инструмент для построения гарантирующих стратегий дифференциальных игр (например, [28], общую теорию таких стратегий еще предстоит разработать).

Важное место в творчестве А.А.Азамова занимает теория альтернированного интеграла Понтрягина. Им введен нижний аналог альтернированного интеграла, установлены соотношения двойственности и на их основе предложено одно из решений проблемы Л.С.Понтрягина об -дискриминации убегающего [29-30], которое в отличие от решения П.Б.Гусятникова не использует лемму Цорна; доказано существование стратегии преследователя, порождаемой альтернированным интегралом и имеющей кусочно-постоянные реализации [31]; развита схема М.С.Никольского построения альтернированного интеграла и доказана общая теорема об его полуустойчивости [32]. И.М.Исканаджиев нашел явную формулу для альтернированного интеграла линейных игр 2-порядка [33]. А.А.Азамов развил результат А.П.Пономарева и Н.Х.Розова о липшицевости альтернированного интеграла Понтрягина [34], А.А.Абдуганиев исследовал свойство полулипшицевости и разработал программу для приближенного вычисления альтернированного интеграла [35]. К.Дж.Яксубаев решил поставленный А.А.Азамовым задачу о том, когда сумма двух выпуклых замкнутых множеств является замкнутой [36]. Позже А.А.Азамов вместе с Х.Яхшимовым показал существенность "надевания шапок М.С.Никольского" при составлении альтернированных сумм, а также то, что второй метод Понтрягина сильнее чем все известные варианты первого метода [37], включая вариант, предложенный им самым совместно с Б.Т.Саматовым [38] и модифицированный Н.Ю.Сатимовым варианта первого метода Понтрягина.

А.А.Азамовым также разработан метод трансфинитных итераций оператора Б.Н.Пшеничного и его нижнего аналога [39] и на этой основе выяснена качественная структура фазового пространства дифференциальных игр [40], доказана теорема об альтернативе для динамических игр на бесконечном промежутке времени. Эти исследования составили его докторскую диссертацию [41].

С 80-годов XX века А.А.Азамов занимался также теорией управляемых систем. Им и его учениками получено необходимое и достаточное условие единственности экстремальных управлений [42, 43] и 0-управляемости [44] линейных систем, найдена граница области управляемости линейной системы на плоскости [45], доказана, что переключения решений кусочно-линейной системы не имеют точек накопления [46] (этот результат примечателен тем, что имеет приложения к теории чисел); вместе с Н.Ю.Сатимовым найдено элементарное доказательство леммы о нулях конечномерных систем аналитических функций [47] с приложением к теории оптимальных процессов. Недавно им совместно с А.Кучкаровым и Б.Саматовым установлена связь между устойчивостью, управляемостью и разрешимостью задачи преследования [48].

Он ввел понятие смешанной системы, состоящей из дифференциальных и дискретных уравнений [49].

Несколько работ А.А.Азамова посвящено изучению максиминных и минимаксных динамических задач [50], в том числе задаче поиска на графах [51, 52]. Он начал разрабатывать новый комбинаторный подход в теории матричных игр [53, 54].

Последние годы он занимается нелинейными динамическими системами [55]. Проведено полное исследование асимптотического поведения решений систем с нелинейностью типа Гессе [56, 57]. Получены первые результаты по доказательству предложенным им методом численного анализа наличия предельных циклов у конкретных динамических систем.

А.А.Азамов занимался также и приложениями математики: участвовал, руководил хоздоговорными работами по расчету генераторов сверхвысоких напряжений, распространения электромагнитных волн решетчатых антенн, оптимальных выкроек в трикотажном производстве и др., разработал алгоритмы, позволяющие уменьшить число проб в фармакокинетике, установить соответствие по дням между календарями Хиджры и Юлия-Григория [58].

А.А.Азамов уделял много времени делу подготовки молодых математиков. С 1970 года вел кружок (просеминар) для младшекурсников, что способствовало раннему включению студентов к научной работе. Например, курсовая работа Б.Рихсиева была опубликована в журнале "Дифференциальные уравнения"([59], теорема 2).

Опираясь на опыт работы в ВЗМШ при МГУ, в 1971 году он при поддержке республиканской молодежной газеты открыл заочную математическую школу, постоянно участвовал в работе жюри республиканских математических олимпиад, несколько лет был членом жюри всесоюзных математических олимпиад; вместе с Н.Ю.Сатимовым руководил математическим отделением в Малой академии школьников; вел занятия в летних физико-математических и экономических школах Министерства народного образования республики, которые проводились усилиями Б.Рихсиева, Э.Сарикова и Б.Хайдарова. Более десяти лет сотрудничал с журналом "Квант"(соответствующие материалы вошли в книжку [60]); издал для школьников несколько оригинальных и переводных книг [61-63], две книги по информатике [64, 65], был общим редактором учебников по геометрии для 8-9 классов [66]; в журнале "Физика, математика, информатика"ведет рубрику "Притягательность математики".

А.А.Азамов интересуется историей математики в Средней Азии - исследовал точность тригонометрических таблиц Улугбека [67], сравнительные данные о наклонения эклиптики [68], приведенные в известной монографии Т.Кары-Ниязова, формулу для площади треугольника

Мирзы Бади'-дивана [69].

Среди творческой интеллигенции А.А.Азамов известен также публицистическими выступлениями, статьями о науке, философскими эссе о примирении взглядов науки и религии на происхождение человека и о других проблемах современности. Им написано пять пьес, комментарии к сочинению Навои "Муножот"("Обращение к Всевышнему"), издана книга об арузе, другие книги, буклеты, альбомы и др. Он принимал активное участие в издании УзСЭ, Узбекской национальной энциклопедии, книг воспоминаний о С.Х.Сираждинове, Аскаде Мухтаре и А.Шарафиддинове.

Абдулла Азамович считает, что разбрасываться в творчестве нежелательно, тем не менее не перестает заниматься разнообразными задачами в столь же различных областях. По-видимому, чередование научного поиска с занятиями по прикладной или занимательной математике, литературных опытов с философскими служит для него своеобразным средством отдыха, что, надо полагать, способствует выполнению и служебных обязанностей. Пожелаем ему во всем этом удач и успехов.

Редколлегия журнала

Цитированные работы

1. Применение характеристических показателей m-го порядка к изучению асимптотической устойчивости. Дифф. уравнения, 1971, т. 7, №11.

2. О поведении решений нелинейных уравнений с экспоненциально дихотомической линейной частью. Дифф. уравнения, 1974, т. 10, №10.

3. О мере неправильности квазитреугольных систем. Дифф. уравнения, 1975, т. 11, №8.

4. Построение нормальной фундаментальной системы решений уравнения второго порядка в одном частном случае. Укр. матем. журнал, 1976, т. 28, №3.

5. О поведении на бесконечности решений одного дифференциального уравнения 2-го порядка. Известия Вузов, Математика, 1977, №2.

6. Азамов А.А., Газиев Ш.С. Оценка порядка роста и убывания решений дифференциальных уравнений на бесконечности. ТашГУ, 1991 г.

7. Структура оптимальных стратегий в одновременных играх преследования. "Управляемые системы", изд-во СО АН СССР, 1974, вып. 13, с. 65-68 (совместно с Н.Ю.Сатимовым и Л.А.Петросяном).

8. Построение оптимальных стратегий в одной бесконечной игре двух лиц. Известия АН СССР, Техн. Кибернетика, 1978, №1.

9. О двумерных дифференциальных играх преследования-убегания. Канд дисс., ТашГУ, 1974.

10. Фазылов А.З. О структуре дискретных и непрерывных игр. Канд. дисс., ТашГУ, 1981.

11. Сулайменов Е.З. К решению задачи качества в линейных дифференциальных играх преследования и убегания. Канд. дисс., ИМ АН РУз им. В.И.Романовского, 2001.

12. О задаче убегания в двумерных дифференциальных играх. Докл. АН УзССР, 1974, №8.

13. К задаче избежания столкновений в нелинейных системах. Докл. АН УзССР, 1974, №6, с. 6-7 (совместно с Н.Ю.Сатимовым).

14. Фазылов А.З. Задача избежания столкновений в управляемых системах. Докт. диссертация, ИМ АН РУз им. В.И.Романовского, 1997.

15. Функция Ляпунова в связи с игрой перетягивания Айзекса. В сб. "Прямой метод в теории устойчивости и его приложения". Новосибирск, "Наука", 1981.

16. Простое преследование многими объектами одного убегающего объекта. Докл. АН УзССР, 1981, №12 (совместно с Н.Ю.Сатимовым и Б.К.Хайдаровым).

17. О задаче качества для игр простого преследования с ограничением. Сердика. Българско математическо списание. 1986, т. 12, №1.

18. П-strategy. An elementary introduction to the theory of differential games. National University of Uzbekistan, 2000, 32 p. (совместно с Б.Саматовым).

19. О преследовании точки, убегающей по заданной кривой. Докл. АН УзССР, 1982, №1.

20. О задаче убегания по заданной кривой. Прикл. мат. и мех. 1982, т. 46, вып. 4.

21. Нелинейные дискретные игры убегания. АН УССР, Кибернетика, 1976, №4. (Совместно с Н.Ю.Сатимовым)

22. К основам теории дискретных игр преследования и убегания. Известия АН УзССР, 1978, часть I, №3, с. 3-8, часть II, №6, с. 3-10.

23. Структура дискретных игр преследования и убегания. Известия АН УзССР, 1984, №2.

24. Об игре перетягивания Айзекса. Вестник Московского университета, Матем., мех. 1981, ; 4.

25. Об одном классе нелинейных дифференциальных игр. Матем. заметки, 1981, т. 30, №4.

26. Исследование одного класса нелинейных дифференциальных игр. Дифф. уравнения, 1983, т. 19, №12.

27. Хайдаров Б.К. Позиционная -поимка в игре одного убегающего и нескольких преследователей. Прикл. мат., мех., 1984, т. 48, вып. 4.

28. Двойственность линейных дифференциальных игр преследования. Докл. АН СССР, 1982, т. 263, №4.

29. О втором методе Понтрягина в линейных дифференциальных играх преследования. Матем. сборник, 1982, т. 118 (160), №3 (7), с. 422-430.

30. О существовании стратегии с кусочно-постоянными реализациями. Матем. заметки, 1987, т. 41, №5.

31. Полуустойчивость и двойственность в теории альтернированного интеграла Понтрягина. Докл. АН СССР, 1988, т. 299, №3.

32. Исканаджиев И.М. Аппроксимативные свойства интегралов прямых методов в линейных дифференциальных играх. Канд. дисс., ИМ АН РУз, 1990.

33. Оценка пересечения и геометрической разности компактных множеств. В сб. "Дифференциальные уравнения и их приложения к механике", Ташкент, "Фан", 1985, с. 183-193.

34. Абдуганиев А.А. Полулипшицевость и другие свойства альтернированного интеграла. Канд. дисс., ТашГУ, 1993.

35. Яксубаев К.Дж. Необходимые и достаточные условия завершения линейной дифференциальной игры с фиксированным временем. Канд. дисс., ТашГУ, 1987.

36. Задача качества для одной линейной дифференциальной игры с критическими свойствами. Матем. заметки, 2000, т. 67, №4 (совместно с Х.К.Яхшимовым).

37. О модифицированном третьем методе в задаче преследования. В

сб. "Неклассические задачи математической физики", Ташкент, "Фан", 1985 (совместно с Б.Т.Саматовым).

38. Двойственная теория -стратегий в дифференциальных играх. В сб. "Краевые задачи для уравнений математической физики и их приложения", Ташкент, "Фан",1983.

39. Об альтернативе для дифференциальных игр преследования-убегания на бесконечном интервале времени. Прикл. мат.и мех., 1986, вып 4.

40. "Качественное структура фазового пространства дифференциальных игр преследования-убегания". Докт. дисс. ТашГУ, 1987.

41. О линейных системах управления, удовлетворяющих условию общности опорного положения. Изв. АН УзССР, 1987, №3. (совместно с Кувандиковым К.)

42. О необходимом и достаточном условии единственности и релейности экстремальных управлений в линейных системах. Изв. АН УзССР, 1990, №3. (совместно с Азаматоввм А.Р.)

43. Азаматов А.Р., Пак Е.В. О локальной 0-управляемости линейных систем. В сб. "Управляемые системы", Ташкент, "Университет", 1992.

44. Построение границы области управляемости линейных систем второго порядка. ДАН РУз. 1992, №3 (совместно с Шеиной Е.В.).

45. О числе переключений в линейных системах. Изв. АН УзССР, 1982, №2. (совместно с Сатимовым)

46. О числе пересечения решений одной кусочно-линейной системы с линией сшивания. Изв. АН УзССР, сер. физ-мат. наук, 1980, №5.

47. О системах, состоящих из дифференциальных и дискретных уравнений. Докл. АН УзССР, 1988, №7 (совместно с О.Бегалиевым).

48. Минимаксные задачи сближения-уклонения с фазовым ограничением для преследователя. Докл. АН УзССР, 1990, №4 (совместно с Х.Ниязовым).

49. Максиминная задача сближения-уклонения с фазовыми ограничениями для убегающего. УзМЖ, 1992, №2 (совместно с Х.Ниязовым)

50. О минимаксной динамической задачи поиски на графах. УзМЖ, 1991, №4 (Совместно с Норжигитовым).

51. Нижняя оценка для коэффициента преимущества в задаче поиска на графах. Дифф. уравнения (в печати).

52. Оценка точности конечных приближений непрерывных игр. УзМЖ, 2001, №2, (совместно с К. Ражабовым).

53. Комбинаторный подход к теории матричных игр. УзМЖ, 2004, №2.

54. On the combinatorical approach to the theory of matrix games/ International Jurnal of Game Theory (в печати).

55. О связы между задачами преследования, управляемости и устойчивости в целом в линейных системах с ранотипными ограничениями. ПММ, 2007, т.71, вып.2.(совместно с А.Кучкаровым и Б.И.Саматовым)

56. О предельных множествах орбит систем векторных полей. Дифф. уравнения, 2004, т. 40, №2 (совместно с А.Нармановым).

57. Об устойчивости и управляемости систем с квадратичной нелинейностью Гессе. УзМЖ. 1993, №3 (совместно с Раадом Ю.М.).

58. Одно свойство почти-периодических функций и его приложение к теории устойчивости. УзМЖ, 2005, №1 (совместно Б.Абдурахмановым).

59. Два века. Таблицы соответствия по дням календарей Хиджры и Юлия-Григория, Тошкент, 1992, 98 с. (на узб. языке).

60. БЕЙСИК MSX (краткий справочник. Ташкент, Главная редакция энциклопедий, 1992, 96 с. (совместно с А.Юлдашевым).

61. К XXI веку с компьютером. (Пособие по информатике для начинающих, на узб языке), Наманган, изд-во им. Ибрата, 1996.

62. Об условиях убегания в линейных дифференциальных играх. Дифф. уравнения, 1976, т. 12, №8. (совместно с Б.Рихсиевым).

63. Букет от математика. Ташкент, изд-во "Шарк", 2005.

64. Планета математики (Пособие по внеклассной работе). Ташкент, "Укитувчи", 1993. (совместно с Б.Хайдаровым).

65. Энциклопедический словарь юного математика. Ташкент, Главная редакция энциклопедий, 1991 (на узб. языке).

66. Понтрягин Л.С. Математический анализ для школьников. (На узб. языке). Ташкент, "Укитувчи", 1988.

67. О точности тригонометрических таблиц Улугбека. В сб. "От Улугбека до XX века", Ташкент, изд-во НУУз, 2003.

68. Формула для приближенного вычисления площади треугольников в сочинении "Мажма' ал-ар ам"Мирзы Бади-дивана. УзМЖ, 2002, №3-4.

Uzbek Mathematical
Journal, 2007,№2, pp.13-20

L^ω-пространства, ассоциированные состоянием на алгебрах фон Неймана

Р.З.Абдуллаев, Б.А.Хикметов

Ushbu maqolada, umuman olganda, fon Neyman algebralarida izlar bo'yicha qurilgan Arens algebralari bilan ustma-ust tushmaydigan, holat bilan assotsirlangan L_p^ω - fazolar mavjudligi isbotlangan.

The paper proved that L_p^ω - spaces are existed they are associated with the state, which sometimes can not coincide with Arens algebras built on traces on von Neumann algebras.

Пусть μ — точный нормальный конечный след на алгебре фон Неймана M, т.е. M конечна. Рассмотрим алгебру Аренса (см. [1,2])

$$L^\omega(M,\mu) = \{x \in S(M) : \mu(|X|^p) < \infty,\ \forall p \in [1,\infty)\},$$

где $S(M)$ — алгебра измеримых операторов, присоединенных к M.

Пусть ψ — произвольное точное нормальное состояние на M. Тогда существует положительный оператор $h \in L_1(M;\mu)$ такой, что $\psi(x) = \mu(hx)$ для любого $x \in M$. В силу конечности M, точность состояния ψ эквивалентна регулярности (см. [3], следствие, стр.66). Поэтому в силу конечности и регулярности ψ, из теоремы 1 [3] получаем, что $h, h^{-1} \in S(M)$.

Аналог алгебры Аренса $L^\omega(M,\mu)$ для состояния ψ (см. [4]) вводится как

$$L^\omega(M,\psi) = \left\{x \in S(M) : \mu\left(\left|h^{\frac{1}{2p}} x h^{\frac{1}{2p}}\right|^p\right) < \infty,\ \forall p \in [1,\infty)\right\}.$$

Теорема 1. *а) Включение $L^\omega(M,\mu) \subset L^\omega(M,\psi)$ имеет место тогда и только тогда, когда $h \in \bigcup\limits_{q\in(1,\infty]} L_q(M,\mu)$;*

б) Включение $L^\omega(M,\psi) \subset L^\omega(M,\mu)$ имеет место тогда и только тогда, когда $h^{-1} \in \bigcup\limits_{q\in(1,\infty]} L_q(M,\psi)$.

Объединяя а) и б) получаем критерий совпадения $L^\omega(M,\psi)$ и $L^\omega(M,\mu)$.

Возникает вопрос: существует ли для любого точного нормального состояния ψ на M точный нормальный конечный след μ такой, что $L^\omega(M,\psi) = L^\omega(M,\mu)$?

Теорема 2 дает отрицательный ответ на этот вопрос. Для ее доказательства понадобятся три леммы. Предварительно введем обозначения. Для некоммутативной алгебры A через A_z обозначим ее центр. Для функционала γ на A через γ_z обозначим сужение γ на A_z.

Лемма 1. *Пусть M — алгебра фон Неймана с точными нормальными конечными следами μ и ν. Тогда равенство $L^\omega(M,\mu) = L^\omega(M,\nu)$ имеет место тогда и только тогда, когда $L^\omega(M_z,\mu_z) = L^\omega(M_z,\nu_z)$.*

Доказательство. Обозначим $h = \dfrac{d\mu}{d\nu}$ — положительный оператор, присоединенный к центру M, который является производной Радона-Никодима следа μ относительно ν, т.е. $\mu(x) = \nu(hx)$ для любого $x \in M^+$.

Так как $h \in (S(M))_z$, то

$$\frac{d\mu}{d\nu} = \frac{d\mu_z}{d\nu_z}, \quad \frac{d\nu}{d\mu} = \frac{d\nu_z}{d\mu_z}, \tag{1}$$

в силу справедливости равенства $\mu(x) = \nu(hx)$ для любого $x \in M_z$.

В силу критерия совпадения некоммутативных алгебр Аренса (теорема 1) равенство $L^\omega(M,\mu) = L^\omega(M,\nu)$ эквивалентно следующим соотношениям

$$\frac{d\mu}{d\nu} \in \bigcup_{q\in(1,\infty]} L_q(M,\nu) \quad \text{и} \quad \frac{d\nu}{d\mu} \in \bigcup_{q\in(1,\infty]} L_q(M,\mu).$$

Последнее, в свою очередь, в силу равенств (1) эквивалентно соотношениям

$$\frac{d\mu_z}{d\nu_z} \in \left(\bigcup_{q\in(1,\infty]} L_q(M;\nu)\right) \cap (S(M))_z = \bigcup_{q\in(1,\infty]} L_q(M_z,\nu_z),$$

аналогично получаем

$$\frac{d\nu_z}{d\mu_z} \in \bigcup_{q\in(1,\infty]} L_q(M_z,\mu_z).$$

А это есть критерий совпадения коммутативных алгебр Аренса $L^\omega(M_z,\mu_z)$ и $L^\omega(M_z,\nu_z)$ (теорема 1). Лемма доказана.

Лемма 2. *Для точного нормального состояния* ψ *на конечной алгебре фон Неймана* M *верно равенство* $(L^\omega(M,\psi))_z = L^\omega(M_z,\psi_z)$.

Доказательство. Для центрального измеримого оператора $x \in (S(M))_z = S(M_z)$ и точного нормального конечного следа μ на M имеют место следующие равенства

$$\mu\left(\left|h^{\frac{1}{2p}}xh^{\frac{1}{2p}}\right|^p\right) = \mu(h|x|^p) = \psi(|x|^p) = \psi_z(|x|^p),$$

где $h = \dfrac{d\psi}{d\mu}$. Отсюда получаем

$$(L^\omega(M,\psi))_z = \left\{x \in S(M) : \mu\left(\left|h^{\frac{1}{2p}}xh^{\frac{1}{2p}}\right|^p\right) < \infty,\ \forall p \in [1,\infty)\right\}_z =$$

$$= \left\{x \in (S(M))_z : \mu\left(\left|h^{\frac{1}{2p}}xh^{\frac{1}{2p}}\right|^p\right) < \infty,\ \forall p \in [1,\infty)\right\} =$$

$$= \{x \in S(M_z) : \psi_z(|x|^p) < \infty, \forall p \in [1,\infty)\} = L^\omega(M_z,\psi_z).$$

Лемма доказана.

Лемма 1 для случая, когда ν – состояние, вообще говоря, неверна (см. следствие 2 теоремы 2). Для этого случая имеет место следующая

Лемма 3. *Из равенства* $L^\omega(M,\psi) = L^\omega(M,\mu)$ *следует, что* $L^\omega(M_z,\psi_z) = L^\omega(M_z,\mu_z)$.

Доказательство. Из условия $L^\omega(M,\psi) = L^\omega(M,\mu)$ следует, что центры этих алгебр совпадают, т.е. $(L^\omega(M,\psi))_z = (L^\omega(M,\mu))_z$.

Равенства $(L^\omega(M,\mu))_z = L^\omega(M_z,\mu_z)$, $(L^\omega(M,\psi))_z = L^\omega(M_z,\psi_z)$ следуют из леммы 2. Отсюда получаем $L^\omega(M_z,\psi_z) = L^\omega(M_z,\mu_z)$. Лемма доказана.

Теорема 2. *На некоммутативной алгебре фон Неймана* M *типа* I *существует такое точное нормальное состояние* ψ, *для которого*

$$L^\omega(M,\psi) \neq L^\omega(M,\mu)$$

для любого точного нормального конечного следа на M.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда алгебра M имеет тип I_2. Это значит, что она представима в виде $M = L_\infty(X,\mu_0)\otimes B(H_2)$, где $L_\infty(X,\mu_0)$ — алгебра существенно ограниченных комплексных функций на некотором пространстве с мерой X ($\mu_0(X) = 1$), и

$B(H_2)$ – алгебра 2×2-матриц. Тогда элементы M имеют вид 2×2 матриц, составленных из функций $L_\infty(X,\mu)$. Пусть $x \in M$ и Φ — центрозначный след на M (M конечна, а поэтому центрозначный след на M существует, и он единственен). Его значение равно сумме диагональных элементов матрицы x. Тогда на M можно рассмотреть точный нормальный конечный след

$$\mu(x) = \int\limits_X \Phi(x) d\mu_0 = \int\limits_X \left(x_{11}(t) + x_{22}(t)\right) d\mu_0 \tag{2}$$

для матрицы

$$x = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим положительный элемент h, присоединенный к M и имеющий следующий вид: $h = \begin{pmatrix} h_1(t) & 0 \\ 0 & h_2(t) \end{pmatrix}$, где $h_1(t), h_2(t) \in S(X,\mu_0)$, $h_1(t) + h_2(t) = \mathbf{1}$. Функции h_1 и h_2 можно выбрать так, чтобы h_1^{-1} и h_2^{-1} были бы неинтегрируемыми ни в какой степени $p \in (0,\infty)$ и $h_1(t) + h_2(t) = \mathbf{1}$.

Действительно, пусть g – неинтегрируемая ни в какой $p \in (0,\infty)$ степени функция на отрезке $(0,1]$ и $\varphi(x) > 1$ $\forall x \in (0,1]$. Тогда функции h_1 и h_2 заданные на $X = (0,2]$, введем следующим образом:

$$h_1(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{g(t)}, & \text{при } t \in (0,1], \\ 1 - \dfrac{1}{g(t-1)}, & \text{при } t \in (1,2], \end{cases}$$

$$h_2(t) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{g(t)}, & \text{при } t \in (0,1], \\ \dfrac{1}{g(t-1)}, & \text{при } t \in (1,2]. \end{cases}$$

Тогда очевидно выполняются условия $h_1(t) + h_2(t) = \mathbf{1}$ и

$$\int\limits_0^2 (h_1(x))^p dx \geq \int\limits_0^1 (g(t))^p dt = \infty, \quad \int\limits_0^2 (h_2(x))^p dx \geq \int\limits_1^2 (g(t-1))^p dt = \infty \tag{3}$$

для любого $p \in (0, \infty)$ в силу выбора g.

Тогда для точного нормального состояния

$$\psi(x) = \mu(hx), \quad \forall x \in M^+$$

имеем $L^\omega(M, \mu) \subset L^\omega(M, \psi)$, т.к. h ограничен (см. теорему 1 (а)). Ограниченность следует из условия $h_1(t) + h_2(t) = \mathbf{1}$ и положительности $h_1(t)$ и $h_2(t)$. Надо показать, что обратное включение не выполняется. В силу критерия совпадения (см. [4]) это эквивалентно тому, что $\mu\left(\left(h^{-1}\right)^p\right) = \infty$, для любого $p \in (0, \infty)$.

Используя равенства (2), (3) и

$$h^{-p} = \begin{pmatrix} h_1^{-p}(t) & 0 \\ 0 & h_2^{-p}(t) \end{pmatrix},$$

для $p \in (0, \infty)$ получаем

$$\mu\left(\left(h^{-1}\right)^p\right) = \int\limits_0^2 \Phi\left(h^{-p}\right) dt = \int\limits_0^2 \left(h_1^{-p}(t) + h_2^{-p}(t)\right) dt = \infty.$$

Поэтому из теоремы 1 (б) в силу леммы 1 из [4] получаем, что $L^\omega(M, \psi) \not\subset L^\omega(M, \nu)$.

Отсюда следует, что

$$L^\omega(M, \psi) \neq L^\omega(M, \mu). \tag{4}$$

Покажем теперь, что $L^\omega(M, \psi) \neq L^\omega(M, \nu)$ для любого точного нормального конечного следа ν.

Для этого сначала покажем, что $L^\omega(M_z, \psi_z) = L^\omega(M_z, \mu_z)$, несмотря на то, что они неравны на всей алгебре фон Неймана M (4).

Это равенство следует из следующих соотношений, которые имеют место для $x \in M_z$ и центрозначного следа Φ на M:

$$\psi(x) = \mu(hx) = \mu(\Phi(h)x) = \mu((h_1 + h_2)x) = \mu(x).$$

Иначе говоря, ψ и μ на центре совпадают, следовательно,

$$L^\omega(M_z, \psi_z) = L^\omega(M_z, \mu_z). \tag{5}$$

Предположим теперь, что

$$L^\omega(M,\psi)=L^\omega(M,\nu). \tag{6}$$

Отсюда в силу леммы 3 получаем

$$L^\omega(M_z,\psi_z)=L^\omega(M_z,\nu_z). \tag{7}$$

Из равенств (5) и (7) следует

$$L^\omega(M_z,\mu_z)=L^\omega(M_z,\nu_z)$$

Но для следов совпадение алгебр Аренса на центре влечет, в силу леммы 1, совпадение соответствующих алгебр Аренса на всей алгебре фон Неймана, т.е.

$$L^\omega(M,\mu)=L^\omega(M,\nu).$$

Отсюда в силу предположения (6) получаем

$$L^\omega(M,\psi)=L^\omega(M,\nu)=L^\omega(M,\mu).$$

Это противоречит неравенству (4).

Полученное противоречие доказывает, что

$$L^\omega(M,\psi)\neq L^\omega(M,\nu)$$

для любого точного нормального конечного следа ν. Теорема доказана.

Следствие 1. Для любого точного нормального состояния ψ на алгебре фон Неймана M типа I существует точный нормальный конечный след μ такой, что $L^\omega(M,\mu)\subset L^\omega(M,\psi)$.

В качестве μ можно взять след, который удовлетворяет условию $\mu_z=\psi_z$.

Следствие 2. Из $L^\omega(M_z,\psi_z)=L^\omega(M_z,\mu_z)$ вообще говоря не следует $L^\omega(M,\psi)=L^\omega(M,\mu)$.

Утверждение 1. *Если ψ – точное нормальное состояние на M, и μ – точный нормальный полуконечный след на M, то $L^\omega(M,\psi)\neq L^\omega(M,\mu)$, более того, они не изоморфны.*

Действительно, $L^\omega(M,\psi)$ содержит единицу, $L^\omega(M,\mu)$ не содержит единицу.

Пусть $B(H)$ – алгебра линейных ограниченных операторов в гильбертовом пространстве H, ψ – точное нормальное состояние на $B(H)$.

Утверждение 2. *Если $dim H < \infty$, то $L^\omega(B(H),\psi) = B(H)$.*

Доказательство. Для конечных алгебр фон Неймана точность эквивалентна регулярности ([3], стр.66, следствие). Из регулярности нормального состояния φ следует, что $\dfrac{d\psi}{dTr}, \left(\dfrac{d\psi}{dTr}\right)^{-1} \in B(H)$ ([3], стр.65, следствие). Отсюда из теоремы 1 получаем

$$L_p(B(H),\psi) = L_p(B(H),Tr) = B(H).$$

Поэтому получаем $L^\omega(B(H),\psi) = B(H)$ для любого точного нормального состояния ψ на $B(H)$. Утверждение доказано.

Замечание. Пусть $M = L_\infty(X,\mu_0) \otimes B(H_2)$, где μ_0 $(\mu_0(X) = \mathbf{1})$ — фиксированная мера на X.

Легко видеть, что существует единственный точный нормальный конечный след μ на M, удовлетворяющий условию $\mu_z = \mu_0$. Этот след имеет вид $\mu_0 \otimes Tr$.

Следует отметить, что точное нормальное состояние ψ с таким условием $(\psi_z = \mu_0)$ не единственно. Точнее, любое точное нормальное состояние, для которого $\Phi(h) = \mathbf{1}$, удовлетворяет условию $\psi_z = \mu_0$ $\left(h = \dfrac{d\psi}{d\mu}\right)$.

а) Среди этих состояний есть такие, что ψ представимо как $\psi = \psi_z \otimes \psi_0 = \mu_0 \otimes \psi_0$, где ψ_0 — точное нормальное состояние на $B(H_2)$. Тогда $h = \mathbf{1} \otimes a$, где $\mathbf{1}$ — единица в $L_\infty(X,\mu_0)$ и $a = \dfrac{d\psi_0}{dTr}$ — положительная матрица из $B(H_2)$.

Для этого состояния $\psi = \psi_z \otimes \psi_0$ имеют место равенства

$$L^\omega(M,\psi) = L^\omega(L_\infty(X) \otimes B(H_2), \psi_z \otimes \psi_0). \tag{8}$$

Для следа $\mu = \mu_0 \otimes T_r$

$$L^\omega(M,\mu) = L^\omega(L_\infty(X) \otimes B(H_2), \mu_0 \otimes T_r) =$$

$$= L^\omega(X,\mu_0) \otimes B(H_2) = L^\omega(X,\psi_z) \otimes L^\omega(B(H_2),\psi_0). \tag{9}$$

Т.к. h, h^{-1} - ограничены, то из теоремы 1 следует, что $L^\omega(M,\psi) = L^\omega(M,\mu)$. Теперь из равенств (8), (9) получаем

$$L^\omega(L_\infty(X) \otimes B(H_2), \psi_z \otimes \psi_0) = L^\omega(X,\psi_z) \otimes L^\omega(B(H_2),\psi_0). \tag{10}$$

б) Но есть такие нормальные состояния, которые не представимы в виде $\psi_z \otimes \psi_0$. Например, состояние, построенное в доказательстве теоремы 2. Для них равенства (10) не выполняются.

в) В силу теоремы 1 можно утверждать, что существуют точные нормальные состояния, непредставимые в виде $\psi_z \otimes \psi_0$, для которых верно равенство (10).

Литература

1. Inoue A. On a class of unbounded operator algebras. II. Pacific Jour. of Math. 1976, v.66, №2, p.411-431.

2. Абдуллаев Р.З. Изоморфизмы алгебр Аренса. Сибирский журнал индустриальной математики. 1998, том 1, №2, с.3-13.

3. Трунов Н.В. К теории нормальных весов на алгебрах Неймана. Изв. вузов. Матем., 1982, №9, с.61-70.

4. Абдуллаев Р.З., Хикметов Б. О некоммутативном аналоге алгебр Аренса. Узбекский математический журнал. 2007, №1. с.5-14.

Ташкентский государственный
педагогический университет им. Низами

Дата поступления
10.01.07

Uzbek Mathematical
Journal, 2007,№2, pp.21-31

УДК 517.947.5

Обратная задача на полуоси для оператора Штурма-Лиувилля с конечнозонным потенциалом

О.Р.Аллаберганов

Mazkur ishda yarim o'qda berilgan chekli zonali potensialli Shturm-Liuvill operatori uchun teskari masala o'rganilgan, izlar formulasi, chegaraviy shartni spektral berilganlar orqali ifodalaydigan formula hamda Dubrovin-Trubovits differensial tenglamalar sistemasi keltirib chiqarilgan.

In this paper inverse problem for Sturm-Liouvill's operators with finit-zone potential in half line is studied, the trace formulas, formula for boundary condition from spectral data's and differentials equations Dubrovin-Trubovitz's is deduced.

Обратная задача на полуоси для оператора Штурма-Лиувилля с конечнозонным-периодическим и конечнозонным не обязательно периодическим потенциалом изучена в работах [1-3], а на всей оси с периодическим и конечнозонным потенциалом исследована в работах [4-8].

Обратная задача на полуоси несколько отличается от обратной задачи на всей прямой. В случае полупрямой, кроме потенциала требуется восстановить и граничное условие через спектральные данные.

В настоящей статье изучается обратная задача на полуоси для оператора Штурма-Лиувилля с конечнозонным потенциалом, а именно выводятся формула следов, формула выражающая граничное условие по спектральным данным и система дифференциальных уравнений Дубровина-Трубовица.

Отметим, что примененный в этой статье метод для вывода граничного условия, отличается от метода работы [3]. В цели получения формулы для граничного условия, двумя способами выводим асимптотики функции Вейля- Титчмарша и сопоставляем их.

1.Обозначим через $-\infty < \lambda_0 < \lambda_1 < \mu_1 < \ldots < \lambda_N < \mu_N < \infty$ произвольные точки на вещественной прямой. За счет сдвига спектрального параметра можно предположить, не нарушая общности, что $\lambda_0 = 0$. Пусть $\xi_k \in [\lambda_k, \mu_k]$, $k = 1,\ 2,\ ...,\ N$ произвольные числа и $\sigma_k = \pm 1$, $k = 1,\ 2,\ ...,\ N$ произвольные знаки. Положим

$$R(\lambda) = \lambda(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \mu_1)\dots(\lambda - \lambda_N)(\lambda - \mu_N), \quad P(\lambda) = (\lambda - \xi_1)(\lambda - \xi_2)\dots(\lambda - \xi_N),$$

$$Q(\lambda) = P(\lambda)\sum_{k=1}^{N}\frac{\sigma_k\sqrt{-R(\xi_k)}}{(\lambda - \xi_k)P'(\xi_k)}, \quad S(\lambda) = \frac{Q^2(\lambda) + R(\lambda)}{P(\lambda)}.$$

Нетрудно показать (см. [9]), что $S(\lambda)$ есть многочлен степени $N+1$ со старшим коэффициентом, равным единице, и его корни τ_k, $k = 0,\ 1,\ 2,\ ...,N$, лежат в интервалах $(-\infty,\ 0], [\lambda_1,\ \mu_1],\ \dots,\ [\lambda_N,\ \mu_N]$ соответственно. Положим

$$\frac{d\xi(\lambda)}{d\lambda} = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{P(\lambda)}{\pm\sqrt{R(\lambda)}}, & \lambda \in E \\ 0, & \lambda \notin E, \end{cases} \qquad \frac{d\eta(\lambda)}{d\lambda} = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{Q(\lambda)}{\pm\sqrt{R(\lambda)}}, & \lambda \in E \\ 0, & \lambda \notin E, \end{cases}$$

$$\frac{d\zeta(\lambda)}{d\lambda} = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{S(\lambda)}{\pm\sqrt{R(\lambda)}}, & \lambda \in E \\ 0, & \lambda \notin E. \end{cases}$$

Здесь $E = (0,\ \lambda_1) \cup (\mu_1,\ \lambda_2) \cup ... \cup (\mu_N,\ \infty)$. Знак перед радикалом берется так, что $\xi'(\lambda) > 0$, при $\lambda \in (0,\ \lambda_1)$, а в остальных интервалах знаки определяются аналитическим продолжением корня.

Определение. *Конечнозонным потенциалом называется функция $q(x)$, для которой уравнение*

$$-y'' + q(x)y = \lambda\, y, \quad x \in R^1 \tag{1}$$

имеет своей спектральной матрицей-функцией матрицу-функцию

$$\Re(\lambda) = \begin{pmatrix} \xi(\lambda) & \eta(\lambda) \\ \eta(\lambda) & \zeta(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $\theta(x,\lambda)$и $\varphi(x,\lambda)$решения уравнения (1), удовлетворяющие начальным условиям

$$\theta(x,\lambda) = 1, \quad \theta'(x,\lambda) = 0, \quad \varphi(x,\lambda) = 0, \quad \varphi'(x,\lambda) = 1.$$

Для задачи (1) функции Вейля-Титчмарша однозначно определяются условиями

$$\psi^{+}(x,\lambda)=\theta(x,\lambda)+m^{+}(\lambda)\varphi(x,\lambda)\in L_2(0,\ \infty),$$

$$\psi^{-}(x,\lambda)=\theta(x,\lambda)+m^{-}(\lambda)\varphi(x,\lambda)\in L_2(-\infty,0)$$

и имеют вид

$$m^{\pm}(\lambda)=\frac{Q(\lambda)\pm i\sqrt{R(\lambda)}}{P(\lambda)}. \tag{2}$$

2. Рассмотрим следующую граничную задачу

$$-y''+q(x)y=\lambda\, y,\quad 0<x<\infty, \tag{3}$$

$$y(0)\cos\alpha+y'(0)\sin\alpha=0,\quad \alpha\in(0,\pi). \tag{4}$$

Обозначим через $\theta_\alpha(x,\lambda)$, $\varphi_\alpha(x,\lambda)$ решения уравнения (3), удовлетворяющие начальным условиям

$$\theta_\alpha(x,\lambda)=\cos\alpha,\quad \theta'_\alpha(x,\lambda)=\sin\alpha,\quad \varphi(x,\lambda)=-\sin\alpha,\quad \varphi'_\alpha(x,\lambda)=\cos\alpha.$$

Легко видеть, что

$$\theta(x,\lambda)=\theta_\alpha(x,\lambda)\cos\alpha-\varphi_\alpha(x,\lambda)\sin\alpha,$$

$$\varphi(x,\lambda)=\theta_\alpha(x,\lambda)\sin\alpha+\varphi_\alpha(x,\lambda)\cos\alpha.$$

Отсюда имеем

$$\psi^{+}(x,\lambda)=[\cos\alpha+m^{+}(\lambda)\sin\alpha]\theta_\alpha(x,\lambda)+[-\sin\alpha+m^{+}(\lambda)\cos\alpha]\varphi_\alpha(x,\lambda).$$

Поэтому функция Вейля-Титчмарша для задачи (3)+(4) имеет вид

$$m_\alpha(\lambda)=\frac{-\sin\alpha+m^{+}(\lambda)\cos\alpha}{\cos\alpha+m^{+}(\lambda)\sin\alpha}. \tag{5}$$

Подставляя в формулу (5) выражение (2), находим

$$m_\alpha(\lambda)=\frac{C(\lambda)}{A(\lambda)}+i\frac{\sqrt{R(\lambda)}}{A(\lambda)}, \tag{6}$$

где

$$A(\lambda)=P(\lambda)\cos^2\alpha+S(\lambda)\sin^2\alpha+2Q(\lambda)\sin\alpha\cos\alpha, \tag{7}$$

$$(\lambda) = \sin\alpha\cos\alpha[S(\lambda) - P(\lambda)] + (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)Q(\lambda). \qquad (8)$$

Если ввести функцию

$$B(\lambda) = P(\lambda)\sin^2\alpha + S(\lambda)\cos^2\alpha - 2Q(\lambda)\sin\alpha\cos\alpha, \qquad (9)$$

то (7), (8), (9) можно написать в виде одного матричного равенства:

$$\begin{pmatrix} A(\lambda) & C(\lambda) \\ C(\lambda) & B(\lambda) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(\lambda) & Q(\lambda) \\ Q(\lambda) & S(\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Переходя к определителям, получим тождество $A(\lambda)B(\lambda) - C^2(\lambda) = R(\lambda)$.

Из вида (6) функции Вейля-Титчмарша вытекает, что непрерывный спектр задачи (3)+(4) имеет вид:

$$E_{ess} = R^1 \backslash \left\{ (-\infty, 0) \cup \bigcup_{k=1}^{N} (\lambda_k,\ \mu_k) \right\}.$$

Обозначим через $\xi_k,\ \ k = 0,\ 1,\ 2,\ \dots, N$ нули функции $A(\lambda)$. Используя теорему Руше нетрудно показать, что $\xi_0 \in (-\infty,\ 0]$, $\xi_k \in [\lambda_k, \mu_k],\ \ k = 1,\ 2,\ \dots, N$.

Определение. Числа $\xi_k,\ \ k = 0,\ 1,\ 2,\ \dots, N$ и знаки $\sigma_k = \mathrm{sign} C(\xi_k)$, $k = 0,\ 1,\ 2, \dots, N$ называются спектральными параметрами задачи (3)+(4).

Определение. *Спектральные параметры* $\xi_k,\ \sigma_k,\ k = 0,\ 1,\ 2,\ \dots, N$ *и границы* $\lambda_0,\ \lambda_k,\ \mu_k,\ \ k = 1,\ 2\ ,\dots, N$ *непрерывного спектра назовем спектральными данными задачи (3)+(4).*

Восстановление коэффициента $q(x)$ и граничного условия задачи (3)+(4) по спектральным данным называют обратной задачей.

Теорема 1. *Пусть* $\xi_n,\ \sigma_n,\ n = 0,\ 1,\ 2,\ \dots, N$ *спектральные параметры и* E_{ess} *непрерывный спектр задачи (3)+(4). Тогда непрерывный спектр следующей задачи*

$$\begin{cases} -y'' + q(x+t)y = \lambda y, \quad 0 < x < \infty \\ y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0, \quad \alpha \in (0,\pi) \end{cases} \qquad (10)$$

не зависит от действительного параметра t и спектральные параметры $\xi_n(t)$, $n = 0, \ 1, \ 2, \ \dots, N$ удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений Дубровина-Трубовица

$$\xi'_n(t) = \frac{-2[ctg^2\alpha + \xi_n(t) - q(t)]\sigma_n(t)\sqrt{-R(\xi_n(t))}}{\prod\limits_{\substack{k=0 \\ k \neq n}}^{N} (\xi_n(t) - \xi_k(t))}, \quad n = 0, \ 1, \ 2, \ \dots, \ N, \tag{11}$$

а также начальным условиям

$$\xi_n(0) = \xi_n, \quad n = 0, \ 1, \ 2, \ \dots, \ N \quad . \tag{12}$$

Знак $\sigma_n(t)$ меняется при каждом столкновении $\xi_n(t)$ с границами своей лакуны ($n = 0, \ 1, \ 2, \ \dots, N$).

Доказательство. Для задачи (10) функции $P(\lambda)$, $Q(\lambda)$, $S(\lambda)$, $A(\lambda)$, $B(\lambda), C(\lambda)$ зависят от t, поэтому их обозначим через $P(\lambda, t)$, $Q(\lambda, t)$, $S(\lambda, t)$ $A(\lambda, t)$, $B(\lambda, t)$, $C(\lambda, t)$. Рассмотрим тождества

$$\begin{pmatrix} P(\lambda,t) & Q(\lambda,t) \\ Q(\lambda,t) & S(\lambda,t) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \theta(t,\lambda) & \varphi(t,\lambda) \\ \theta'(t,\lambda) & \varphi'(t,\lambda) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P(\lambda) & Q(\lambda) \\ Q(\lambda) & S(\lambda) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \theta(t,\lambda) & \varphi(t,\lambda) \\ \theta'(t,\lambda) & \varphi'(t,\lambda) \end{pmatrix}^T, \tag{13}$$

$$\begin{pmatrix} A(\lambda) & C(\lambda) \\ C(\lambda) & B(\lambda) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P(\lambda) & Q(\lambda) \\ Q(\lambda) & S(\lambda) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^T. \tag{14}$$

Если вместо $q(x)$ рассмотреть $q(x + t)$, то равенство (14) примет вид:

$$\begin{pmatrix} A(\lambda,t) & C(\lambda,t) \\ C(\lambda,t) & B(\lambda,t) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P(\lambda,t) & Q(\lambda,t) \\ Q(\lambda,t) & S(\lambda,t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^T. \tag{15}$$

Из (14) следует, что

$$\begin{pmatrix} P(\lambda) & Q(\lambda) \\ Q(\lambda) & S(\lambda) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} A(\lambda) & C(\lambda) \\ C(\lambda) & B(\lambda) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Комбинируя тождества (16), (13) и (15) имеем

$$\begin{pmatrix} A(\lambda,t) & C(\lambda,t) \\ C(\lambda,t) & B(\lambda,t) \end{pmatrix} = G \cdot \begin{pmatrix} A(\lambda) & C(\lambda) \\ C(\lambda) & B(\lambda) \end{pmatrix} \cdot G^T, \tag{17}$$

где

$$G = \begin{pmatrix} \theta_\alpha\cos\alpha + \theta'_\alpha\sin\alpha & \varphi_\alpha\cos\alpha + \varphi'_\alpha\sin\alpha \\ -\theta_\alpha\sin\alpha + \theta'_\alpha\cos\alpha & -\varphi_\alpha\sin\alpha + \varphi'_\alpha\cos\alpha \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Из (17) и (18) находим, что

$$A(\lambda,t) = A(\lambda)(\theta_\alpha\cos\alpha + \theta_\alpha\sin\alpha)^2 + 2C(\lambda)(\theta_\alpha\cos\alpha + \theta_\alpha\sin\alpha)\times$$

$$\times(\varphi_\alpha\cos\alpha + \varphi'_\alpha\sin\alpha) + B(\lambda)(\varphi_\alpha\cos\alpha + \varphi'_\alpha\sin\alpha)^2, \tag{19}$$

$$(\lambda,t) = A(\lambda)(\theta_\alpha\cos\alpha + \theta'_\alpha\sin\alpha)(-\theta_\alpha\sin\alpha + \theta'_\alpha\cos\alpha)+$$

$$+C(\lambda)(\varphi_\alpha\cos\alpha + \varphi'_\alpha\sin\alpha)(-\theta_\alpha\sin\alpha + \theta'_\alpha\cos\alpha)+$$

$$+C(\lambda)(\theta_\alpha\cos\alpha + \theta'_\alpha\sin\alpha)(-\varphi_\alpha\sin\alpha + \varphi'_\alpha\cos\alpha)+$$

$$+B(\lambda)(\varphi_\alpha\cos\alpha + \varphi_\alpha\sin\alpha)(-\varphi_\alpha\sin\alpha + \varphi'_\alpha\cos\alpha), \tag{20}$$

$$B(\lambda,t) = A(\lambda)(-\theta_\alpha\sin\alpha + \theta'_\alpha\cos\alpha)^2+$$

$$+2C(\lambda)(-\varphi_\alpha\sin\alpha + \varphi'_\alpha\cos\alpha)(-\theta_\alpha\sin\alpha + \theta'_\alpha\cos\alpha)+$$

$$+B(\lambda)(-\varphi_\alpha\sin\alpha + \varphi'_\alpha\cos\alpha)^2.$$

В силу формул (19) и (20) получим, что

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial A(\lambda,t)}{\partial t} = A(\lambda)(\theta_\alpha\cos\alpha + \theta'_\alpha\sin\alpha)(\theta'_\alpha\cos\alpha + (q(t)-\lambda)\theta_\alpha\sin\alpha)+$$

$$+C(\lambda)(\theta'_\alpha\cos\alpha + (q(t)-\lambda)\theta_\alpha\sin\alpha)(\varphi_\alpha\cos\alpha + \varphi'_\alpha\sin\alpha)+$$

$$+C(\lambda)(\theta_\alpha\cos\alpha + \theta'_\alpha\sin\alpha)(\varphi'_\alpha\cos\alpha + (q(t)-\lambda)\varphi_\alpha\sin\alpha)+$$

$$+B(\lambda)(\varphi_\alpha\cos\alpha+\varphi'_\alpha\sin\alpha)(\varphi'_\alpha\cos\alpha+(q(t)-\lambda)\varphi_\alpha\sin\alpha)=$$

$$=C(\lambda,t)+(q(t)-\lambda+1)\sin\alpha[A(\lambda,t)\cos\alpha-C(\lambda,t)\sin\alpha]. \qquad (21)$$

Перепишем тождество (21) в виде:

$$\frac{\partial A(\lambda,t)}{\partial t}=2(\lambda,t)[\cos^2\alpha+(\lambda-q(t))\sin^2\alpha]+A(\lambda,t)(q(t)-\lambda+1)\sin 2\alpha. \quad (22)$$

Теперь используя (22) и следующие равенства

$$A(\lambda,t)=\sin^2\alpha\cdot\prod_{k=0}^{N}(\lambda-\xi_k(t)), \qquad (23)$$

$$A(\lambda,t)B(\lambda,t)-C^2(\lambda,t)=R(\lambda), \qquad (24)$$

выводим систему уравнений Дубровина-Трубовица. В силу (23) имеем

$$\left.\frac{\partial A(\lambda,t)}{\partial t}\right|_{\lambda=\xi_n(t)}=-\sin^2\alpha\cdot\xi'_n(t)\cdot\prod_{\substack{k=0\\k\neq n}}^{N}(\xi_n(t)-\xi_k(t)),\ \ n=0,\ 1,\ 2,\ \dots,N. \qquad (25)$$

Из (24) получим, что

$$C(\xi_n(t),t)=\sigma_n(t)\sqrt{-R(\xi_n(t))},\quad n=0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ N. \qquad (26)$$

Полагая в (22) $\lambda=\xi_n(t)$, и учитывая равенства (25), (26) выводим тождества (11).

Не зависимость от параметра t непрерывного спектра задачи (10), следует из того, что функция Вейля-Титчмарша для задачи (10) имеет вид

$$m_\alpha(\lambda,t)=\frac{C(\lambda,t)}{A(\lambda,t)}+i\frac{\sqrt{R(\lambda)}}{A(\lambda,t)}.$$

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Имеют места следующие формулы:*

$$ctg\alpha=-\sum_{k=0}^{N}\frac{\sigma_k\sqrt{-f(\xi_k)}}{\tilde{P}'_(\xi_k)}, \qquad (27)$$

$$q(t)=2ctg^2\alpha+2\xi_0(t)-\sum_{k=1}^{N}(\lambda_k+\mu_k-2\xi_k(t)),\tag{28}$$

где

$$R(\lambda)=\lambda\prod_{k=1}^{N}(\lambda-\lambda_k)\cdot(\lambda-\mu_k),\quad \tilde{P}(\lambda)=\prod_{k=0}^{N}(\lambda-\xi_k)$$

и $\xi_k(t),\ k=0,1,2,\ ...,N$ *спектральные параметры задачи (10).*

Доказательство.Выводим двумя способами асимптотические формулы для функции Вейля-Титчмарша задачи (3)+(4) и сопоставляем их. Из равенств (7), (8) получим

$$\frac{C(\lambda)}{A(\lambda)}=ctg\alpha+\underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{\lambda}\right),\quad |\lambda|\to\infty.$$

В силу теоремы Миттаг-Леффлера имеем

$$\frac{C(\lambda)}{A(\lambda)}=ctg\alpha+\sum_{k=0}^{N}\frac{C(\xi_k)}{A'(\xi_k)(\lambda-\xi_k)}.\tag{29}$$

В тождестве $A(\lambda)B(\lambda)-C^2(\lambda)=R(\lambda)$положив $\lambda=\xi_k$и учитывая обозначение $\sigma_k=signC(\xi_k)$, находим $C(\xi_k)=\sigma_k\sqrt{-R(\xi_k)}$. Нетрудно видеть, что $A(\lambda)=\sin^2\alpha\cdot\tilde{P}(\lambda)$. Используя равенство (29), выводим следующую асимптотическую формулу

$$\frac{C(\lambda)}{A(\lambda)}=ctg\alpha+\frac{1}{\lambda\sin^2\alpha}\cdot\sum_{k=0}^{N}\frac{\sigma_k\sqrt{-R(\xi_k)}}{\tilde{P}'(\xi_k)}+\underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{\lambda^2}\right),\quad |\lambda|\to\infty.\tag{30}$$

Изучим асимптотику для функции $\frac{\sqrt{R(\lambda)}}{\tilde{P}(\lambda)}$:

$$\frac{\sqrt{R(\lambda)}}{\tilde{P}(\lambda)}=\frac{\sqrt{\lambda}}{\lambda-\xi_0}\sqrt{\prod_{k=1}^{N}\left(1+\frac{\lambda_k-\xi_k}{\xi_k-\lambda}\right)\cdot\left(1+\frac{\mu_k-\xi_k}{\xi_k-\lambda}\right)}=$$

$$=\frac{\sqrt{\lambda}}{\lambda-\xi_0}\sqrt{\prod_{k=1}^{N}\left(1+\frac{2\xi_k-\lambda_k-\mu_k}{\lambda-\xi_k}+\frac{(\xi_k-\lambda_k)(\xi_k-\mu_k)}{(\lambda-\xi_k)^2}\right)}=$$

$$=\frac{\sqrt{\lambda}}{\lambda-\xi_0}\sqrt{\exp\left\{\sum_{k=1}^{N}\ln\left(1-\frac{1}{\lambda}(\lambda_k+\mu_k-2\xi_k)+\underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)\right)\right\}}=$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\lambda}} - \frac{1}{2\lambda\sqrt{\lambda}} \left\{ -2\xi_0 + \sum_{k=1}^{N} (\lambda_k + \mu_k - 2\xi_k) \right\} + \underline{\underline{O}} \left(\frac{1}{\lambda^2\sqrt{\lambda}} \right). \qquad (31)$$

Подставляя в формулу (6) выражения (30), (31), получим следующую асимптотику

$$m_\alpha(\lambda) = ctg\alpha + \frac{i}{\sqrt{\lambda}\sin^2\alpha} + \frac{1}{\lambda\sin^2\alpha} \cdot \sum_{k=0}^{N} \frac{\sigma_k\sqrt{-R(\xi_k)}}{\tilde{P}'(\xi_k)} -$$

$$- \frac{i}{2\lambda\sqrt{\lambda}\sin^2\alpha} \cdot \left\{ -2\xi_0 + \sum_{k=1}^{N} (\lambda_k + \mu_k - 2\xi_k) \right\} + \underline{\underline{O}} \left(\frac{1}{\lambda^2} \right), \quad |\lambda| \to \infty. \qquad (32)$$

Теперь для функции $m_\alpha(\lambda)$ выводим асимптотическую формулу другим способом. В начале выводим асимптотическую формулу для функции $m(\lambda)$ Вейля-Титчмарша следующей задачи:

$$\begin{cases} -y'' + q(x)y = \lambda\, y, \quad 0 < x < \infty \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Известно, что уравнение Штурма-Лиувилля обладает решениями следующих видов (см. [10]):

$$y_1(x,\lambda) = \exp\left\{ i\sqrt{\lambda}x + \int_0^x \sigma_1(t,\lambda)dt \right\} \in L_2(0,\infty), \quad Im\lambda \neq 0,$$

$$y_2(x,\lambda) = \exp\left\{ -i\sqrt{\lambda}x + \int_0^x \sigma_2(t,\lambda)dt \right\} \in L_2(-\infty,0), \quad Im\lambda \neq 0.$$

При $q(x) \in C^1[0,\infty)$ для $\sigma_1(t,\lambda)$ имеет место равенство

$$\sigma_1(0,\lambda) = \frac{1}{2i\sqrt{\lambda}} \cdot q(0) + \underline{\underline{O}} \left(\frac{1}{\lambda} \right), \quad |\lambda| \to \infty. \qquad (33)$$

Представим решение $\psi(x,\lambda) = \varphi(x,\lambda) + m(\lambda)\theta(x,\lambda)$ в виде линейной комбинации решений $y_1(x,\lambda)$ и $y_2(x,\lambda)$:

$$\psi(x,\lambda) = y_1(x,\lambda) \cdot \frac{1 + m(\lambda)\cdot(i\sqrt{\lambda} + \sigma_2(0,\lambda))}{2i\sqrt{\lambda} + \sigma_1(0,\lambda) - \sigma_2(0,\lambda)} +$$

$$+y_2(x,\lambda)\cdot\frac{-1+m(\lambda)\cdot(i\sqrt{\lambda}+\sigma_1(0,\lambda))}{2i\sqrt{\lambda}+\sigma_1(0,\lambda)-\sigma_2(0,\lambda)}.$$

Отсюда находим, что $m(\lambda)=\frac{1}{i\sqrt{\lambda}+\sigma_1(0,\lambda)}$. Из асимптотики (33) функции $\sigma_1(0,\lambda)$ получим

$$m(\lambda)=-\frac{i}{\sqrt{\lambda}}+\frac{1}{2i\lambda\sqrt{\lambda}}\cdot q(0)+\underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{\lambda^2}\right). \tag{34}$$

Подставляя (34) в равенство

$$m_\alpha(\lambda)=\frac{\cos\alpha-m(\lambda)\sin\alpha}{\sin\alpha+m(\lambda)\cos\alpha}$$

имеем

$$m_\alpha(\lambda)=ctg\alpha+\frac{i}{\sqrt{\lambda}\sin^2\alpha}-\frac{ctg\alpha}{\lambda\sin^2\alpha}+$$

$$+\frac{i}{2\lambda\sqrt{\lambda}\sin^2\alpha}(q(0)-2ctg^2\alpha)+\underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{\lambda^2}\right),\quad |\lambda|\to\infty. \tag{35}$$

Сопоставляя (32) и (35) выводим (27) и следующее равенство

$$q(0)=2ctg^2\alpha+2\xi_0-\sum_{k=1}^{N}(\lambda_k+\mu_k-2\xi_k). \tag{36}$$

Если в место потенциала $q(x)$ рассмотрим потенциал $q(x+t)$, то равенство (36) принимает вид (28). Теорема 2 доказана.

Замечание. Для решения обратной задачи на полуоси по спектральным данным $\xi_n,\ \sigma_n,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \dots,N$ и $\lambda_0,\ \lambda,\ \mu,\ \ =1,2,\dots,N$ задачи (3)+(4), в начале по формуле (27) находим $ctg\alpha$, после этого подставляя выражения (27) и (28) в систему (11) находим решение $\xi_n(t),\ \ n=0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ N$ полученной системы удовлетворяющая начальным условиям (12), у которой каждая компонента нестационарная. На конец, по формуле (28) находим функцию $q(t)$.

Литература

1. Ахиезер Н.И. Континуальный аналог ортогональных многочленов на системе интервалов.// ДАН СССР, 1961, т. 141, №2, с. 262-266.

2. Hochstadt H., Goldberg W. An inverse problem for a differential operator with a mixed spectrum.// J. Math. Anal. and Appl. 1985, 105, p. 206-221.

3. Левитан Б.М., Савин А.В. Обратная задача на полупрямой для конечнозонных потенциалов.// Вестн. Моск. Ун-та, сер. 1, математика, механика, 1988, №1, с. 21-28.

4. Марченко В.А., Островский И.В. Характеристика спектра оператора Хилла.// Мат. сб. 1975, 97, вып. 4, с. 540-606.

5. Итс А.Р., Матвеев В.Б. Операторы Шредингера с конечнозонным спектром и N-солитонные решения уравнения Кортевега-де Фриза.// Теор. и мат. физика, 1975, т. 23, №1, с. 51-68.

6. Trubowitz E. The inverse problem for periodic potentials.// Comm. Pure Appl. Math., 1977, v. 30, p. 321-337.

7. Дубровин Б.А. Периодическая задача для уравнения Кортевега-де Фриза в классе конечнозонных потенциалов. // Функц. анал и прилож., 1975, т.9, №3, с. 41-51.

8. Новиков С.П. Периодическая задача Кортевега-де Фриза I.// Функ. анал. и прилож., 1974, т. 8, №3, с. 54-66.

9. Левитан Б.М. Обратные задачи Штурма-Лиувилля. М.: "Наука"1984.

10. Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. Киев: "Наукова думка", 1977.

Ургенчский государственный университет

Дата поступления 20.11.06

Uzbek Mathematical
Journal, 2007,№2, pp.32-44

УДК 517.98

Норма Люксембурга в решетке Орлича-Канторовича

Б.С.Закиров

Orlich-Kantorovich panjaralaridagi L_0-qiymatli Lyuksemburg normasining xossalari o‘rganilgan va ushbu norma bo‘yicha yaqinlashish bilan o‘rtacha yaqinlashish o‘rtasidagi bog‘liqlik o‘rnatilgan.

In the paper are studied properties of the L_0-valuable Luxemburg norm on the Orlich-Kantorovich lattice and relations between convergence by this norm and mean convergence.

Важную роль в изучении свойств функциональных пространств Орлича и их сопряженных пространств играет норма Люксембурга, которая эквивалентна исходной норме Орлича. В связи с построением решеток Орлича-Канторовича, являющихся "векторнозначным" вариантом пространств Орлича [1], естественно рассматривать аналог такой нормы Люксембурга и в этом классе банаховых модулей. Настоящая работа посвящена описанию и изучению свойств нормы Люксембурга в решетках Орлича-Канторовича. Кроме того, устанавливается связь сходимости по этой норме со сходимостью в среднем.

Используются терминология и обозначения теории булевых алгебр из [2], теории векторных решеток из [3], теории векторного интегрирования из [4], [5], теории решеточно нормированных пространств из [5], а также терминология для решеток Орлича-Канторовича, данная в [1].

1. Предварительные сведения

Пусть (Ω, Σ, μ) — пространство с σ-конечной мерой, $L_0(\Omega)$ — кольцо всех измеримых действительных функций на Ω (равные μ-почти всюду функции отождествляются), $\nabla(\Omega)$ — булева алгебра всех идемпотентов в $L_0(\Omega)$, ∇ — произвольная полная булева алгебра, содержащая $\nabla(\Omega)$

как правильную подалгебру, $m : \nabla \to L_0(\Omega)$ — строго положительная L_0-значная мера на ∇, причем выполняется условие модульности, т.е. $m(ge) = gm(e)$ для всех $e \in \nabla$, $g \in \nabla(\Omega)$.

Пусть $X(\nabla)$ — стоуновский компакт, соответствующий булевой алгебре ∇ и $L_0(\nabla) := C_\infty(X(\nabla))$ — алгебра всех непрерывных действительных функций, заданных на $X(\nabla)$, принимающих значение $\pm\infty$ лишь на нигде неплотных множествах из $X(\nabla)$.

Обозначим через $L_1(\nabla, m)$ пространство всех функций из $L_0(\nabla)$, интегрируемых по L_0-значной мере m. Для любого $x \in L_1(\nabla, m)$ отображение $\|x\|_1 = \int |x|dm$ определяет L_0-значную норму в $L_1(\nabla, m)$, относительно которой $L_1(\nabla, m)$ является пространством Банаха-Канторовича (см. [5], п.6.1.10).

Для элемента $x \in L_0(\Omega)$ через $s\,(x)$ обозначается его носитель, т.е.

$$s\,(x) = \sup_{n\geq 1} \left\{|x| > n^{-1}\right\},$$

где $\left\{|x| > n^{-1}\right\} = \chi_{\{\omega\in\Omega:\ |x(\omega)|>n^{-1}\}}$, $n \in \mathbb{N}$.

Для любого $x \in L_0(\Omega)$ рассмотрим элемент x_s^{-1}, обратный к x на его носителе, т.е.

$$x_s^{-1}(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{x(\omega)}, & \text{если } \ x(\omega) \neq 0, \\ 0, & \text{если } x(\omega) = 0. \end{cases}$$

Ясно, что $x_s^{-1} \in L_0(\Omega)$ и $x_s^{-1}x = s(x)$.

Пусть $x, y \in L_0(\Omega)$. Говорят, что x строго больше, чем y (пишут $x > y$), если $x(\omega) > y(\omega)$ для μ-почти всех $\omega \in \Omega$, для которых $x(\omega) \neq 0$.

Непрерывная выпуклая четная функция $M : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ называется N-функцией, если $\lim\limits_{t\to 0} \frac{M(t)}{t} = 0$ и $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{M(t)}{t} = \infty$. Всякая N-функция M имеет вид $M(t) = \int\limits_0^{|t|} p(s)ds$, где $p(t)$ — положительная при $t > 0$, непрерывная справа при $t \geq 0$, неубывающая функция, для которой $p(0) = 0$ и $\lim\limits_{t\to\infty} p(t) = \infty$ [6]. Положим $q(s) := \sup\{t :\ p(t) \leq s\}$, $s \geq 0$. Тогда функция $M^*(t) := \int\limits_0^{|t|} q(s)ds$ также является N-функцией, и она называется дополнительной N-функцией к M [6].

Говорят, что N-функция M удовлетворяет Δ_2-условию, если существуют такие постоянные $k > 0$, $t_0 > 0$, что $M(2t) \leq kM(t)$ при $t \geq t_0$.

Для каждой N-функции M множество

$$L_M^0 := L_M^0(\nabla, m) = \{x \in L_0(\nabla) : M(x) \in L_1(\nabla, m)\}$$

называется L_0-классом Орлича, а линейное пространство

$$L_M := L_M(\nabla, m) = \left\{x \in L_0(\nabla) : xy \in L_1(\nabla, m) \ \text{ для всех } \ y \in L_{M^*}^0\right\}$$

называется L_0-пространством Орлича [1].

На $L_M(\nabla, m)$ определим L_0-значную норму Орлича, полагая

$$\|x\|_M := \sup\left\{\left|\int xydm\right| : y \in A\left(M^*\right)\right\}, \quad x \in L_M(\nabla, m),$$

где $A\left(M^*\right) := \left\{y \in L_{M^*}^0 : \ \int M^*(y)dm \leq \mathbf{1}\right\}$. Пара $(L_M(\nabla, m), \|\cdot\|_M)$ является решеткой Банаха-Канторовича и ее естественно назвать решеткой Орлича-Канторовича (см. [1]).

2. Норма Люксембурга в решетке Орлича-Канторовича

Для введения нормы Люксембурга на L_0-модуле $L_M(\nabla, m)$ нам понадобятся некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 2.1. *Пусть $p(t)$ — правая производная N-функции $M(t)$, $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$, $\lambda_i \geq 0$, — неотрицательный простой элемент из L_M, $\|x\|_M \leq \mathbf{1}$, $y = \sum\limits_{i=1}^{n} p(\lambda_i) e_i$, $e_i \in \nabla$, $e_i e_j = 0$, $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, n$. Тогда $y \in A(M^*)$*

Доказательство. Покажем сначала, что если
$z \in L_{M^*}$, $e = \left\{\int M^*(z)dm \leq \mathbf{1}\right\}$, то

$$\left|\int xzdm\right| \leq \|x\|_M e + \|x\|_M \int M^*(z)dm(\mathbf{1} - e).$$

Элемент $\int M^*(z)dm(\mathbf{1} - e) + e$ обратим в $L_0(\Omega)$, поэтому определен элемент $z_1 = z\left(\int M^*(z)dm(\mathbf{1} - e) + e\right)^{-1}$, при этом, очевидно,

$$\left(\int M^*(z)dm(\mathbf{1} - e) + e\right)^{-1} \leq \mathbf{1}.$$

Поскольку $M^*(z_1) \leq \left(\int M^*(z)dm(\mathbf{1}-e)+e\right)^{-1} M^*(z)$, то

$$\int M^*(z_1)dm \leq \left(\int M^*(z)dm(\mathbf{1}-e)+e\right)^{-1} \int M^*(z)dm \leq \mathbf{1}.$$

Поэтому

$$\|x\|_M \geq \left|\int xz_1 dm\right| = \left|\int xzdm\right| \left(\int M^*(z)dm(\mathbf{1}-e)+e\right)^{-1},$$

и следовательно,

$$\left|\int xzdm\right| \leq \|x\|_M \left(\int M^*(z)dm(\mathbf{1}-e)+e\right) =$$

$$= \|x\|_M e + \|x\|_M \int M^*(z)dm(\mathbf{1}-e).$$

Предположим теперь, что $y = \sum\limits_{i=1}^{n} p(\lambda_i)e_i \notin A(M^*)$. Тогда

$$e_0 = \left\{\int M^*(y)dm \leq \mathbf{1}\right\} \neq \mathbf{1},$$

т.е. $\mathbf{1}-e_0 \neq 0$. Если $M(x)(\mathbf{1}-e_0)=0$, то $x(\mathbf{1}-e_0)=0$, и тогда $y(\mathbf{1}-e_0)=0$ и $M^*(y)(\mathbf{1}-e_0)=0$, в частности, $\int M^*(y)dm(\mathbf{1}-e_0)=0$, что не так. Следовательно, $M(x)(\mathbf{1}-e_0) \neq 0$. Тогда

$$M^*(y)(\mathbf{1}-e_0) < M(x)(\mathbf{1}-e_0) + M^*(y)(\mathbf{1}-e_0).$$

Отсюда и из известного равенства (см. [6], стр.24)

$$|t|p(|t|) = M(t) + M^*(p(|t|))$$

получаем, что $M^*(y)(\mathbf{1}-e_0) < xy(\mathbf{1}-e_0)$. Следовательно,

$$\int \left(M^*(y)(\mathbf{1}-e_0)\right) dm < \int xydm(\mathbf{1}-e_0) \leq$$

$$\leq \left(\|x\|_M e_0 + \|x\|_M \int M^*(y)dm(\mathbf{1}-e_0)\right)(\mathbf{1}-e_0) =$$

$$= \|x\|_M \int M^*(y)dm(\mathbf{1}-e_0) \leq \int M^*(y)dm(\mathbf{1}-e_0).$$

Из полученного противоречия вытекает, что предположение $\mathbf{1} - e_0 \neq 0$ неверно. Это означает, что $\int M^*(y)dm \leq \mathbf{1}$.

Лемма 2.2. *Если $x \in L_M$ и $\|x\|_M \leq \mathbf{1}$, то $x \in L_M^0$ и $\int M(x)dm \leq \|x\|_M$.*

Доказательство. Можно считать, что $x \geq 0$. Выберем последовательность простых элементов $x_n \geq 0$ так, чтобы $x_n \uparrow x$. Тогда $x_n \in L_M$ и $\|x_n\|_M \leq \mathbf{1}$. Пусть $x_n = \sum\limits_{i=1}^{k(n)} \lambda_i^{(n)} e_i^{(n)}$ и $y_n = \sum\limits_{i=1}^{k(n)} p\left(\lambda_i^{(n)}\right) e_i^{(n)}$, где $p(t)$ — правая производная N-функции M. В силу леммы 2.1 имеем, что $\int M^*(y_n)dm \leq \mathbf{1}$. Из равенства (см. [6], стр.24) $x_n y_n = M(x_n) + M^*(y_n)$ вытекает, что

$$\int M(x_n)dm \leq \int M(x_n)dm + \int M^*(y_n)dm = \int x_n y_n dm \leq \|x_n\|_M \leq \|x\|_M.$$

Поскольку $x_n \uparrow x$, то $M(x_n) \uparrow M(x)$ (см. [1], лемму 2.4); поэтому из теоремы о монотонной сходимости ([5], п.6.1.5) следует, что $M(x) \in L_1(m)$, т.е. $x \in L_M^0$ и $\int M(x)dm \leq \|x\|_M$.

Следствие 2.3. *Для того, чтобы $x \in L_M$, необходимо и достаточно, чтобы $\lambda^{-1}x \in L_M^0$ для некоторого обратимого положительного $\lambda \in L_0(\Omega)$.*

Доказательство. Пусть $x \in L_M$, $\lambda = \|x\|_M + \varepsilon \cdot \mathbf{1}$, где ε — некоторое положительное число. Тогда λ — положительный обратимый элемент из $L_0(\Omega)$ и $\left\|\lambda^{-1}x\right\|_M = \lambda^{-1}\|x\|_M \leq \mathbf{1}$, откуда, в силу леммы 2.2, получим, что $\lambda^{-1}x \in L_M^0$.

Обратно, пусть $\lambda^{-1}x \in L_M^0 \subset L_M$ для некоторого обратимого $\lambda \in L_0(\Omega)$. Поскольку L_M — L_0-модуль (см. [1], лемма 2.6 (ii)), то $x = \lambda\left(\lambda^{-1}x\right) \in L_M$.

Следствие 2.4. Если N-функция M удовлетворяет Δ_2-условию, то $L_M^0 = L_M$.

Доказательство. Пусть $x \in L_M$. В силу следствия 2.3 существует обратимый положительный элемент $\lambda \in L_0(\Omega)$, для которого $\lambda^{-1}x \in L_M^0$. Так как L_M^0 является L_0-подмодулем в $L_0(\nabla)$ (см. [1], лемма 2.6 (i)), то $x = \lambda\left(\lambda^{-1}x\right) \in L_M^0$. Таким образом, $L_M \subset L_M^0$, и потому $L_M = L_M^0$.

Следствие 2.5. *Для любой пары элементов $x \in L_M$, $y \in L_{M^*}$ справедливо неравенство*

$$\left|\int xydm\right| \leq \|x\|_M \|y\|_{M^*}.$$

Доказательство. Пусть $x \in L_M$, $y \in L_{M^*}$. Положим $z = (\|y\|_{M^*} + \varepsilon \cdot \mathbf{1})^{-1} y$, где ε — некоторое положительное число. Тогда $z \in L_{M^*}$ и $\|z\|_{M^*} \leq \mathbf{1}$, и поэтому, в силу леммы 2.2, $z \in L^0_{M^*}$ и $\int M^*(z)dm \leq \mathbf{1}$, т.е. $z \in A(M^*)$. Следовательно, $\left|\int xzdm\right| \leq \|x\|_M$, т.е.

$$\left|\int x \left(\|y\|_{M^*} + \varepsilon \cdot \mathbf{1}\right)^{-1} ydm\right| \leq \|x\|_M,$$

и потому

$$\left|\int xzdm\right| \leq \|x\|_M \left(\|y\|_{M^*} + \varepsilon \cdot \mathbf{1}\right).$$

В силу произвольности ε получим, что

$$\left|\int xzdm\right| \leq \|x\|_M \|y\|_{M^*}.$$

Также, как и в случае числовой меры m, неравенство, установленное в следствии 2.5, будем называть *неравенством Гельдера.*

В силу следствия 2.3 на L_M можно определить следующую L_0-значную функцию

$$\|x\|_{(M)} := \inf \left\{ \lambda \in L_0(\Omega) : \int M\left(\lambda^{-1}x\right) dm \leq \mathbf{1}, \right.$$
$$\left. \lambda \text{ — обратимый положительный элемент} \right\}.$$

Предложение 2.6. $\|x\|_{(M)} \leq \|x\|_M \leq 2\|x\|_{(M)}$ *для любых* $x \in L_M$.

Доказательство. Пусть $x \in L_M$, ε — произвольное положительное число. Тогда

$$y = \left(\|x\|_M + \varepsilon\mathbf{1}\right)^{-1} x \in L_M, \quad \|y\|_M \leq \mathbf{1} \quad \text{и} \quad \int M(y)dm \leq \mathbf{1}$$

(см. лемму 2.2).
Следовательно, $\|x\|_{(M)} \leq \|x\|_M + \varepsilon\mathbf{1}$, и в силу произвольности ε, $\|x\|_{(M)} \leq \|x\|_M$.

Пусть $z \in L^0_{M^*}$ и $\int M^*(z)dm \leq \mathbf{1}$. Возьмем произвольный обратимый элемент $\lambda \in L_0(\Omega)$, для которого $\int M\left(\lambda^{-1}x\right) dm \leq \mathbf{1}$. Так как $|xz| = \lambda\left(\lambda^{-1}|x|\right)|z| \leq \lambda M\left(\lambda^{-1}x\right) + \lambda M^*(z)$, то $\int |xz|dm \leq 2\lambda$, и поэтому

$$\|x\|_M = \sup_{z \in A(M^*)} \int |xz|dm \leq 2\lambda,$$

т.е. $\|x\|_M \le 2\|x\|_{(M)}$.

Предложение 2.7. $\|\cdot\|_{(M)}$ *является монотонной L_0-нормой на L_M, т.е. $\left(L_M, \|\cdot\|_{(M)}\right)$ является нормированной L_0-векторной решеткой.*

Доказательство. Ясно, что $\|x\|_{(M)} \ge 0$ для всех $x \in L_M$, и, в силу ([1], лемма 2.9) и предложения 2.6, $\|x\|_{(M)} = 0$ в том и только в том случае, когда $x = 0$. Покажем, что $\|ex\|_{(M)} = e\|x\|_{(M)}$ для любого идемпотента $e \in L_0(\Omega)$ и $x \in L_M$. Возьмем положительные обратимые $\lambda_0, \lambda \in L_0(\Omega)$ так, чтобы $\int M\left(\lambda_0^{-1}x\right) dm \le \mathbf{1}$, $\int M\left(\lambda^{-1}xe\right) dm \le \mathbf{1}$. Тогда $\beta = \lambda e + \lambda_0(\mathbf{1}-e)$ — обратимый положительный элемент в $L_0(\Omega)$, $\beta^{-1} = \lambda^{-1}e + \lambda_0^{-1}(\mathbf{1}-e)$ и

$$\int M\left(\beta^{-1}x\right) dm = \int M\left(\beta^{-1}xe\right) dm + \int M\left(\beta^{-1}x(\mathbf{1}-e)\right) dm =$$

$$= \int M\left(\lambda^{-1}xe\right) dm + \int M\left(\lambda_0^{-1}x(\mathbf{1}-e)\right) dm = e\int M\left(\lambda^{-1}x\right) dm +$$

$$+(\mathbf{1}-e)\int M\left(\lambda_0^{-1}x(\mathbf{1}-e)\right) dm \le e + (\mathbf{1}-e) = \mathbf{1}.$$

Следовательно, $\|x\|_{(M)} \le \beta = \lambda e + \lambda_0(\mathbf{1}-e)$, и потому $e\|x\|_{(M)} \le \|ex\|_{(M)}$.

С другой стороны, если $|x| \le |z|$, $x, z \in L_M$ и $\int M\left(\lambda^{-1}z\right) dm \le \mathbf{1}$, λ — положительный обратимый элемент из $L_0(\Omega)$, то $\left|\lambda^{-1}x\right| \le \left|\lambda^{-1}z\right|$ и $\int M\left(\lambda^{-1}x\right) dm \le \int M\left(\lambda^{-1}z\right) dm \le \mathbf{1}$, и потому $\|x\|_{(M)} \le \|z\|_{(M)}$. Отсюда, поскольку $|ex| \le |x|$, имеем, что $\|ex\|_{(M)} \le \|x\|_{(M)}$. Следовательно, $e\|x\|_{(M)} \le e\|ex\|_{(M)} \le e\|x\|_{(M)}$, т.е. $e\|x\|_{(M)} = e\|ex\|_{(M)}$.

Далее, если $\lambda \in L_0(\Omega)$, λ положителен, обратим и $\int M\left(\lambda^{-1}ex\right) dm \le \mathbf{1}$, то для $\beta = \lambda e + \varepsilon(\mathbf{1}-e)$ имеем, что $\int M\left(\beta^{-1}ex\right) dm = \int M\left(\lambda^{-1}ex\right) dm \le \mathbf{1}$, где ε — произвольное положительное число. В силу произвольности ε получим, что $\|xe\|_{(M)}(\mathbf{1}-e) = 0$. Это означает, что $\|ex\|_{(M)} = e\|ex\|_{(M)} = e\|x\|_{(M)}$.

Покажем теперь, что $\|\alpha x\|_{(M)} = |\alpha|\|x\|_{(M)}$ для любого $\alpha \in L_0(\Omega)$.

Пусть α — обратимый элемент из $L_0(\Omega)$. Тогда $\|\alpha x\|_{(M)} = \inf\Big\{\lambda \in L_0(\Omega) : \int M\left(\lambda^{-1}\alpha x\right) dm \le \mathbf{1}$, λ обратим и положителен $\Big\} = \inf\Big\{|\alpha|\gamma : \int M\left(\gamma^{-1}x\right) dm \le \mathbf{1}$, $\gamma \in L_0(\Omega)$, γ — обратим и положителен $\Big\} = |\alpha| \cdot \|x\|_{(M)}$.

Пусть теперь α — произвольный элемент из $L_0(\Omega)$, $e = \mathbf{1} - s(\alpha)$. Тогда $\alpha + e$ обратим в $L_0(\Omega)$, и потому

$$\|\alpha x\|_{(M)} = \|(\alpha+e)(\mathbf{1}-e)x\|_{(M)} = (|\alpha|+e)\|(\mathbf{1}-e)x\|_{(M)} =$$

$$= (|\alpha|+e)(\mathbf{1}-e)\|x\|_{(M)} = |\alpha| \cdot \|x\|_{(M)}.$$

Осталось проверить неравенство треугольника для $\|\cdot\|_{(M)}$. Пусть $x, z \in L_M$, ε — положительное число. Используя выпуклость функции M, получим

$$M\left(\left(\|x\|_{(M)} + \|z\|_{(M)} + \varepsilon\mathbf{1}\right)^{-1}(x+z)\right) \leq$$

$$\leq \left(\|x\|_{(M)} + 2^{-1}\varepsilon\mathbf{1}\right)\left(\|x\|_{(M)} + \|z\|_{(M)} + \varepsilon\mathbf{1}\right)^{-1} M\left(\left(\|x\|_{(M)} + 2^{-1}\varepsilon\right)^{-1} x\right) +$$

$$+ \left(\|z\|_{(M)} + 2^{-1}\varepsilon\mathbf{1}\right)\left(\|x\|_{(M)} + \|z\|_{(M)} + \varepsilon\mathbf{1}\right)^{-1} M\left(\left(\|z\|_{(M)} + 2^{-1}\varepsilon\right)^{-1} z\right).$$

Отсюда

$$\int M\left(\left(\|x\|_{(M)} + \|x\|_{(M)} + \varepsilon\mathbf{1}\right)^{-1}(x+z)\right) \leq \left(\|x\|_{(M)} + 2^{-1}\varepsilon\mathbf{1}\right) \times$$

$$\times \left(\|x\|_{(M)} + \|z\|_{(M)} + \varepsilon\mathbf{1}\right)^{-1} \int M\left(\left(\|x\|_{(M)} + 2^{-1}\varepsilon\right)^{-1} x\right) dm +$$

$$+ \left(\|z\|_{(M)} + 2^{-1}\varepsilon\mathbf{1}\right)\left(\|x\|_{(M)} + \|z\|_{(M)} + \varepsilon\mathbf{1}\right)^{-1} \times$$

$$\times \int M\left(\left(\|z\|_{(M)} + 2^{-1}\varepsilon\right)^{-1} z\right) dm.$$

Положим

$$B(x) = \left\{\lambda \in L_0(\Omega) : \int M\left(\lambda^{-1}x\right) dm \leq 1,\ \lambda \text{ обратим и положителен}\right\}.$$

Пусть $\lambda_1, \lambda_2 \in B(x)$, $e = \{\lambda_1 \leq \lambda_2\}$. Тогда $\beta = \lambda_1 \wedge \lambda_2 = \lambda_1 e + \lambda_2(\mathbf{1}-e)$ положителен и обратим, при этом

$$\int M\left(\beta^{-1}x\right) dm = \int M\left(\left(\lambda_1^{-1}e + \lambda_2^{-1}(\mathbf{1}-e)\right)x\right) dm =$$

$$= e\int M\left(\lambda_1^{-1}x\right) dm + (\mathbf{1}-e)\int M\left(\lambda_2^{-1}x\right) dm \leq e + (\mathbf{1}-e) = \mathbf{1},$$

т.е $\beta \in B(x)$. Используя метод математической индукции, получим, что $\inf\limits_{1\le i\le n} \lambda_i \in B(x)$ для любого конечного подмножества $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} \subset B(x)$. Отсюда и из того, что $L_0(\Omega)$ имеет счетный тип, следует, что существует последовательность $\{\lambda_n\} \subset B(x)$ такая, что $\lambda_n \downarrow \inf B(x) = \|x\|_{(M)}$. Так как $\beta_n = \lambda_n + 2^{-1}\varepsilon\mathbf{1} \in B(x)$ и $\beta_n \downarrow \|x\|_{(M)} + 2^{-1}\varepsilon\mathbf{1}$, то

$$\left(|x|\beta_n^{-1}\right) \uparrow |x| \left(\|x\|_{(M)} + 2^{-1}\varepsilon\mathbf{1}\right)^{-1},$$

и потому (см. [1], лемму 2.4)

$$\int M\left(\left(\|x\|_{(M)} + 2^{-1}\varepsilon\mathbf{1}\right)^{-1} x\right) dm = \sup \int M\left(\beta_n^{-1} x\right) dm \le \mathbf{1}.$$

Аналогично $\int M\left(\left(\|z\|_{(M)} + 2^{-1}\varepsilon\mathbf{1}\right)^{-1} z\right) dm \le \mathbf{1}$. Поэтому

$$\int M\left(\left(\|x\|_{(M)} + \|z\|_{(M)} + \varepsilon\mathbf{1}\right)^{-1}(x+z)\right) dm \le \mathbf{1},$$

т.е. $\|x\|_{(M)} + \|z\|_{(M)} + \varepsilon\mathbf{1} \in B(x+z)$. Это означает, что

$$\|x+z\|_{(M)} \le \|x\|_{(M)} + \|z\|_{(M)} + \varepsilon\mathbf{1}.$$

В силу произвольности ε получим, что $\|x+z\|_{(M)} \le \|x\|_{(M)} + \|z\|_{(M)}$.

Из предложений 2.6, 2.7 и ([1], теоремы 2.3) вытекает

Теорема 2.8. *Пара* $\left(L_M(\nabla, m), \|\cdot\|_{(M)}\right)$ *является решеткой Банаха-Канторовича.*

L_0-норму $\|\cdot\|_{(M)}$ назовем *нормой Люксембурга* на $L_M(\nabla, m)$, а решетку Банаха-Канторовича $\left(L_M(\nabla, m), \|\cdot\|_{(M)}\right)$ будем также называть *решеткой Орлича-Канторовича, ассоциированной с L_0-значной мерой.*

Отметим еще несколько полезных свойств нормы Люксембурга.

Предложение 2.9. *Если* $\|x\|_{(M)}$ *— ненулевой элемент в* $L_0(\Omega)$, *то имеет место неравенство*

$$\int M\left(\left(\|x\|_{(M)}\right)_s^{-1} x\right) dm \le s\left(\|x\|_{(M)}\right).$$

Доказательство. Из доказательства предложения 2.7 вытекает существование последовательности $\{\lambda_n\} \subset B(x)$ такой, что $\lambda_n \downarrow \|x\|_{(M)}$.

Пусть $e = s\left(\|x\|_{(M)}\right)$. Тогда $\lambda_n e \downarrow e\|x\|_{(M)}$ и $\lambda_n^{-1} e \uparrow e\left(\|x\|_{(M)}\right)_s^{-1}$. Поскольку $\int M\left(\lambda_n^{-1} x\right) dm \leq \mathbf{1}$, то $\int M\left(\lambda_n^{-1} e x\right) dm \leq e$, и в силу теоремы Фату (см. [4]) имеем, что

$$\int M\left(\left(\|x\|_{(M)}\right)_s^{-1} x\right) dm \leq e.$$

Положим $(L_M)_{\mathbf{1}} := \{x \in L_M : \ \|x\|_{(M)} \leq \mathbf{1}\}$.

Теорема 2.10. $(L_M)_{\mathbf{1}} = A(M) = \left\{x \in L_M^0 : \ \int M(x) dm \leq \mathbf{1}\right\}$.

Доказательство. Пусть $x \in (L_M)_{\mathbf{1}}$ и $e = s\left(\|x\|_{(M)}\right)$. Поскольку $\left(\|x\|_{(M)}\right)_s^{-1} \geq e$, то из предложения 2.9 следует, что

$$e \int M(x) dm = \int M(ex) dm \leq \int M\left(\left(\|x\|_{(M)}\right)_s^{-1} x\right) dm \leq e.$$

Так как $\|x - ex\|_{(M)} = (\mathbf{1} - e)\|x\|_{(M)} = 0$, то $x = ex$, и поэтому

$$\int M(x) dm = \int M\left(ex\right) dm \leq e \leq \mathbf{1}.$$

Таким образом,

$$(L_M)_{\mathbf{1}} \subset A(M).$$

Пусть теперь $x \notin (L_M)_{\mathbf{1}}$. Тогда существуют ненулевой идемпотент $e \in L_0(\Omega)$, $\varepsilon > 0$, такие, что $e\|x\|_{(M)} \geq (1 + \varepsilon)e$, т.е. $e\|x\|_{(M)} - \varepsilon \cdot e \geq e$. Имеем

$$\|ex\|_{(M)} = e\|x\|_{(M)} = \inf\left\{e\lambda : \ \int M\left(e\lambda^{-1} x\right) dm \leq e;\right.$$

$$\left.\lambda \ - \ \text{положительный обратимый элемент из } L_0(\Omega)\right\}.$$

Поскольку $s\left(\|x\|_{(M)}\right) \geq e$, то из предложения 2.9 получим, что

$$\int M\left(\left(\|ex\|_{(M)}\right)_s^{-1} ex\right) dm \leq e.$$

Так как $e \leq e\|x\|_{(M)} - \varepsilon e < e\|x\|_{(M)}$, то неравенство

$$\int M\left(\left(\|ex\|_{(M)} - \varepsilon e\right)_s^{-1} ex\right) dm \leq e$$

неверно. Следовательно, найдется ненулевой идемпотент $g \le e$ такой, что

$$g < g\int M\left(\left(\|ex\|_{(M)} - \varepsilon e\right)_s^{-1} ex\right) dm \le g\int M(ex)dm.$$

Это означает, что неравенство $\int M(x)dm \le \mathbf{1}$ неверно, т.е. $x \notin A(M)$.

Следовательно, $A(M) = (L_M)_{\mathbf{1}}$.

Из теоремы 2.10 вытекает следующее полезное свойство нормы Орлича.

Следствие 2.11. *Для всех* $x \in L_M$

$$\|x\|_M = \sup\left\{\left|\int xydm\right| : \ y \in L_{M^*}, \ \|y\|_{(M^*)} \le \mathbf{1}\right\}.$$

Повторяя доказательство следствия 2.5 и используя следствие 2.11, получим усиленный вариант неравенств Гчльдера.

Следствие 2.12. *Для* $x \in L_M$, $y \in L_{M^*}$ *верны следующие неравенства*

$$\left|\int xydm\right| \le \|x\|_M \|y\|_{(M^*)}$$

и

$$\left|\int xydm\right| \le \|x\|_{(M)} \|y\|_{M^*}.$$

3. Сходимость в среднем в решетке Орлича-Канторовича

Последовательность $\{x_n\}$ из L_M называется (o)-*сходящейся в среднем* (t-*сходящейся в среднем*) к элементу $x \in L_M$, если $\int M(x_n - x)dm \xrightarrow{(o)} 0$ (соответственно $\int M(x_n - x)dm \xrightarrow{t} 0$).

Ясно, что для любой t-сходящейся в среднем к x последовательности $\{x_n\}$ существует подпоследовательность x_{n_k}, которая (o)-сходится в среднем к x. В случае конечной меры μ, из (o)-сходимости в среднем всегда следует t-сходимость в среднем.

Теорема 3.1. *Пусть* N-*функция* $M(t)$ *удовлетворяет* Δ_2-*условию при* $t_0 = 0$ (*т.е.* $M(2t) \le kM(t)$ *для всех* $t \ge 0$ *и некоторого* $k > 0$), $x_n, x \in L_M = L_M^0$. *Следующие условия эквивалентны:*

1) $\|x_n - x\|_M \xrightarrow{(o)} 0$ (*соответственно* $\|x_n - x\|_M \xrightarrow{t} 0$).

2) $\int M(x_n - x)dm \xrightarrow{(o)} 0$ (*соответственно*$\int M(x_n - x)dm \xrightarrow{t} 0$).

3) $\|x_n - x\|_{(M)} \xrightarrow{(o)} 0$ (соответственно $\|x_n - x\|_{(M)} \xrightarrow{(t)} 0$).

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть $\|x_n - x\|_M \xrightarrow{(o)} 0$. Положим $e_n = \{\|x_n - x\|_M \leq \mathbf{1}\}$. Тогда $e_n \in L_0(\Omega)$ и $\|e_n(x_n - x)\|_M = e_n\|x_n - x\|_M \leq \mathbf{1}$. В силу ([1], леммы 2.4) имеем, что

$$\int M(e_n(x_n - x))dm \leq e_n\|x_n - x\|_M \leq \|x_n - x\|_M,$$

и потому

$$e_n \int M(x_n - x)dm = \int M(e_n(x_n - x))dm \xrightarrow{(o)} 0.$$

Далее,

$$(\mathbf{1} - e_n) \leq (\mathbf{1} - e_n)\|x_n - x\|_M \leq \|x_n - x\|_M,$$

т.е. $(\mathbf{1} - e_n) \xrightarrow{(o)} 0$. Положим $f_n = \sup\limits_{i \geq n}(\mathbf{1} - e_i)$. Тогда $(\mathbf{1} - e_n) \leq f_n$, $f_n \downarrow 0$ и

$$(\mathbf{1} - e_n) \int M(x_n - x)dm \leq f_n \int M(x_n - x)dm.$$

Так как (o)-сходимость в $L_0(\Omega)$ эквивалентна сходимости почти всюду относительно меры μ [3], то из $f_n \downarrow 0$ вытекает, что $f_n \int M(x_n - x)dm \xrightarrow{(o)} 0$. Поэтому $(\mathbf{1} - e_n) \int M(x_n - x)dm \xrightarrow{(o)} 0$, и, следовательно,

$$\int M(x_n - x)dm = e_n \int M(x_n - x)dm + (\mathbf{1} - e_n) \int M(x_n - x)dm \xrightarrow{(o)} 0.$$

Если $\|x_n - x\|_M \xrightarrow{t} 0$, то $e_n \int M(x_n - x)dm \xrightarrow{t} 0$ и $(\mathbf{1} - e_n) \xrightarrow{t} 0$, что, в свою очередь, влечет сходимость

$$(\mathbf{1} - e_n) \int M(x_n - x)dm \xrightarrow{t} 0.$$

Таким образом,

$$\int M(x_n - x)dm = e_n \int M(x_n - x)dm + (\mathbf{1} - e_n) \int M(x_n - x)dm \xrightarrow{t} 0.$$

2) $\Rightarrow$ 1). Пусть $\int M(x_n - x)dm \xrightarrow{(o)} 0$. Так как $M(2t) \leq kM(t)$ для всех $t \geq 0$, то $M(2y) \leq kM(y)$ для любого $y \in L_0(\nabla)$, в частности, $M\left(2^i(x_n - x)\right) \leq k^i M(x_n - x)$ при всех $i = 1, 2, \ldots$. Поэтому

$$\int M\left(2^i(x_n - x)\right)dm \leq k^i \int M(x_n - x)dm,$$

откуда $\int M\left(2^i(x_n-x)\right)dm \xrightarrow{(o)} 0$ при $n\to\infty$ и любом фиксированном i.

Из неравенства Юнга (см. [6], стр.24) вытекает, что для $y\in L^0_{M^*}$ с $\int M^*(y)dm\le \mathbf{1}$ имеет место неравенство

$$\left|\int \left(2^i(x_n-x)y\right)dm\right| \le \int M\left(2^i(x_n-x)\right)dm+\mathbf{1}.$$

Поэтому $\|(x_n-x)\|_M \le 2^{-i}\int M\left(2^i(x_n-x)\right)dm+2^{-i}\mathbf{1}$. Отсюда

$$(o)\text{-}\overline{\lim}\|x_n-x\|_M=\bigwedge_{k=1}^{\infty}\bigvee_{n\ge k}\|x_n-x\|_M\le 2^{-i}\mathbf{1}$$

для любого $i=1,2,\ldots$. Это означает, что $(o)\text{-}\overline{\lim}\|x_n-x\|_M=0$, т.е. $\|x_n-x\|_M\xrightarrow{(o)}0$.

Аналогично показывается, что если
$\int M(x_n-x)dm\xrightarrow{t}0$,
то $\int M\left(2^i(x_n-x)\right)dm \xrightarrow{t} 0$ при $n\to\infty$ и любом фиксированном i. Повторяя предыдущие рассуждения, получим, что $\|x_n-x\|_M\xrightarrow{t}0$.

Импликации 1) $\Leftrightarrow$ 3) вытекают из предложения 2.7.

Литература

1. Закиров Б.С. Решетки Орлича-Канторовича, ассоциированные с L_0-значной мерой. // Узб. матем. журнал. 2007, №2.

2. Владимиров Д.А. Булевы алгебры. М.: Наука, 1969. 319 с.

3. Вулих Б.З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств. М.: Физматгиз, 1961. 407 с.

4. Сарымсаков Т.А. Топологические полуполя и их приложения. Ташкент: Фан, 1989. 192 с.

5. Кусраев А.Г. Мажорируемые операторы. М.: Наука, 2003. 619 с.

6. Красносельский М.А., Рутицкий Я.Б. Выпуклые функции и пространства Орлича. М.: Физматгиз, 1958. 272 с.

Институт математики
им. В.И.Романовского АН РУз

Дата поступления
08.09.06

Uzbek Mathematical
Journal, 2007,№2, pp.45-55

УДК 517.956.6

Краевая задача для нагруженного уравнения третьего порядка с параболо-гиперболическим оператором

Б.Исломов, У.И.Балтаева

Maqolada parabolik-giperbolik operatorli uchinchi tartibli yuklangan tenglama uchun qo'yilgan chegaraviy masala echimning mavjudligi va yagonaligi isbotlangan.

In this paper unique solvability is proved for the solution of a loaded third order equation with a parabolic-hyperbolic operator.

Теория краевых задач для нагруженных уравнений гиперболического, эллиптико-гиперболического типов второго порядка, когда нагруженная часть содержит след искомого решения, построена в работах [1-3].

Как нам известно, краевые задачи для нагруженного уравнения третьего порядка изучены сравнительно мало, отметим лишь работы [3] и [4].

В настоящей работе исследуется краевая задача для нагруженного уравнения третьего порядка с параболо-гиперболическим оператором вида

$$0 = \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}(L_2 u) - \mu u(x,0), \ y > 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial x}(L_1 x) - \mu u(x,0), \ y < 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $L_2 u = u_{xx} - u_y - \lambda u$, $L_1 u = u_{xx} - u_{yy} - \lambda u$; λ, μ — действительные постоянные, причем $\lambda \neq 0$, в области D, ограниченной отрезками AB, BB_0, B_0A_0, A_0A прямых $y = 0$, $x = 1$, $y = h$, $x = 0$ при $y > 0$ и характеристиками:

$$AC: \ x + y = 0, \quad BC: \ x - y = 1$$

уравнения (1) при $y<0$.

Через D_1 и D_2 обозначим параболическую и гиперболическую части смешанной области D, соответственно, и пусть

$$I_1=\{(x,y);x=0,0<y<h\},\quad I_2=\{(x,y):y=0,0<x<1\}.$$

Определение. *Решение уравнения (1) будем называть регулярным, если функция $u(x,y)$ обладает непрерывными производными, входящими в оператор L_i $(i=1,2)$, и функция L_iu имеет непрерывную производную по x.*

Задача C. Требуется найти функцию $u(x,y)$, обладающую следующими свойствами:

1) $u(x,y)\in C\left(\overline{D}\right)\cap C^1(D)$,

2) $u_x(x,y)\in C\left(\overline{AA_0}\cup\overline{AC}\right)$, $u_y(x,y)\in C\left(\overline{A}C\right)$,

3) $u(x,y)$ является регулярным решением уравнения (1) в области D при $y\neq 0$,

4) $u(x,y)$ удовлетворяет условиям:

$$u|_{x=0}=\varphi_1(y),\quad u|_{x=1}=\varphi_2(y),\quad u_x|_{x=0}=\varphi_3(y),\quad 0\leq y\leq h, \tag{2}$$

$$u|_{AC}=\psi_1(y),\quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{AC}=\psi_2(x),\quad 0\leq x\leq\frac{1}{2}, \tag{3}$$

где n — внутренняя нормаль, $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$, $\varphi_3(y)$ и $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ — заданные функции, причем

$$\varphi_1(0)=\psi_1(0),\quad \varphi_j(y)\in C[0;h]\cap C^1(0;h),\quad j=\overline{1,3}, \tag{4}$$

$$\psi_1(x)\in C^1\left[0;\frac{1}{2}\right]\cap C^3\left(0;\frac{1}{2}\right),\quad \psi_2(x)\in C\left[0;\frac{1}{2}\right]\cap C^2\left(0;\frac{1}{2}\right). \tag{5}$$

Имеет место

Лемма. *Любое регулярное решение уравнения (1) (при $y\neq 0$) представляется в виде*

$$u(x,y)=v(x,y)+w(x), \tag{6}$$

где $v(x,y)$ — решение уравнения $\dfrac{\partial}{\partial x}(L_2v)=0$ при $y>0$, а при $y<0$ — $\dfrac{\partial}{\partial x}(L_1v)=0$, $w(x)$ — решение следующего обыкновенного дифференциального уравнения

$$w'''(x)-\lambda w'(x)-\mu w(x)=\mu v(x,0). \tag{7}$$

Доказательство. Пусть представленная формулой (6) функция $u(x,y)$ есть решение уравнения (1), тогда, подставляя (6) в (1), имеем

$$\frac{\partial}{\partial x}(u_{xx}-u_y-\lambda u)-\mu u(x,0)=\frac{\partial}{\partial x}(v_{xx}-v_y-\lambda v)+w'''(x)-\lambda w'(x)-$$

$$-\mu w(x)-\mu v(x,0)=0,$$

т.е. удовлетворяет уравнению (1) при $y>0$.

Теперь, наоборот, пусть $u(x,y)$ — регулярное решение уравнения (1) при $y>0$, а $w(x)$ — некоторое решение обыкновенного дифференциального уравнения

$$w'''(x)-\lambda w'(x)=\mu u(x,0). \tag{8}$$

Докажем справедливость соотношения (6). Очевидно, что функция

$$u(x,y)=v(x,y)-\frac{\mu}{2\lambda}\int\limits_0^x\left[2-e^{\sqrt{\lambda}(x-t)}-e^{-\sqrt{\lambda}(x-t)}\right]u(t,0)dt \tag{9}$$

есть решение уравнения (1), где $v(x,y)$ — решение уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x}(v_{xx}-v_y-\lambda v)=0,$$

а функция

$$u(x,y)=-\frac{\mu}{\lambda}\int\limits_0^x[1-ch\sqrt{\lambda}(x-1)]u(t,0)]dt$$

есть частное решение уравнения (1). Следовательно, из (1) следует справедливость представления (6), т.е.

$$u(x,y)=v(x,y)+w(x).$$

Из последнего представления следует, что

$$u(x,0)=v(x,0)+w(x).$$

Тогда из (8) имеем

$$w'''(x)-\lambda w'(x)-\mu w(x)=\mu v(x,0),$$

а функция $v(x,y)=u(x,y)-w(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x}(v_{xx}-v_y-\lambda v)=0.$$

Замечание. Лемма справедлива в случае, когда

$$\mu=\mu(x),\quad \mu(x)\in C[0,1].$$

Учитывая, что функция $ae^{\sqrt{\lambda}x}+be^{-\sqrt{\lambda}x}+c$ удовлетворяет уравнению $\frac{\partial}{\partial x}(L_1 v)=0$, произвольную функцию $w(x)$ можно подчинить условиям

$$w(0)=w'(0)=w''(0)=0. \tag{10}$$

Решение задачи Коши для уравнения (5) с условиями (8) и $\Delta=(27\mu^2-4\lambda^3)/108=0$ имеет вид

$$w(x)=\int\limits_0^x T(x,t)v(t,0)dt,$$

где

$$T(x,t)=\frac{2}{9}\left\{\left(\frac{\mu}{2}\right)^{\frac{1}{3}}e^{2\sqrt[3]{\frac{\mu}{2}}(x-t)}+3\left(\frac{\mu}{2}\right)^{\frac{2}{3}}te^{-\sqrt[3]{\frac{\mu}{2}}(x-t)}-\left(\frac{\mu}{2}\right)^{\frac{1}{3}}xe^{-\sqrt[3]{\frac{\mu}{2}}(x-t)}\right\},$$

причем

$$T(x,x)=T'_x(x,x)=0,\quad T''(x,x)=\mu. \tag{12}$$

Остальные случаи, когда $\Delta>0$ и $\Delta<0$, рассматриваются аналогично.

В силу представления (6), уравнение (1) и краевые условия (2), (3), с учетом (10), принимают вид

$$0=\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial x}(v_{xx}-v_y-\lambda v),\ y>0,\\ \dfrac{\partial}{\partial x}(v_{xx}-v_{yy}-\lambda v),\ y<0,\end{cases} \tag{13}$$

$$v|_{x=0}=\varphi_1(y),\ v|_{x=1}=\varphi_2(y)-w(1),\ \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=0}=\varphi_3(y),\quad 0\le y\le h, \tag{14}$$

$$v|_{AC}=\psi_1(x)-w(x)=\psi_1^*(x),\quad \left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_{AC}=\psi_2(x)-\frac{1}{\sqrt{2}}w'(x)=\psi_2^*(x). \quad (15)$$

Решение уравнения (13) в области D_2 с краевыми условиями (15) и

$$\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{y=0}=\nu(x),\quad 0\le x<1$$

дается формулой [6]

$$v(x,y)=\int\limits_0^{x+y}\nu(t)I_0\left[\sqrt{\lambda(x+y-t)(x-y-t)}\right]dt+\psi_1^*\left(\frac{x+y}{2}\right)+$$

$$+\psi_1^*\left(\frac{x-y}{2}\right)-F\left(-\frac{x+y}{2}\right)-F\left(-\frac{x-y}{2}\right)-$$

$$-\sqrt{\lambda}\int\limits_{-\frac{x+y}{2}}^{0}\sin\sqrt{\lambda}\left(-\frac{x+y}{2}-t\right)\cdot F(t)dt-\sqrt{\lambda}\int\limits_{-\frac{x-y}{2}}^{0}\sin\sqrt{\lambda}\left(-\frac{x-y}{2}-t\right)\cdot$$

$$\cdot F(t)dt-\psi_1^*(0)I_0\left[i\sqrt{\lambda(x^2-y^2)}\right]-\int\limits_0^x\left[\psi_1^*\left(\frac{z}{2}\right)-F\left(-\frac{z}{2}\right)-\right.$$

$$\left.-\sqrt{\lambda}\int\limits_{-\frac{z}{2}}^{0}\sin\sqrt{\lambda}\left(-\frac{z}{2}-s\right)F(s)ds\right]\cdot B_z(0,z;x+y,x-y)dz+F(y)+$$

$$+\sqrt{\lambda}\int\limits_y^0\sin\sqrt{\lambda}(y-t)F(t)dt; \quad (16)$$

где

$$B(t,z;x+y,x-y)=\begin{cases} I_0\left[\sqrt{\lambda(x+y-t)(x-y-z)}\right], & \text{если } z>x+y,\\ I_0\left[\sqrt{\lambda(x+y-t)(x-y-z)}\right]+ & \\ +I_0\left[\sqrt{\lambda(x+y-z)(x-y-t)}\right], & \text{если } z<x+y,\end{cases}$$

$$\psi_1^*(x)=\psi_1(x)-w(x),\quad \psi_2^*(x)=\psi_2(x)-\frac{1}{\sqrt{2}}w'(x), \quad (17)$$

$$F(y)=\sqrt{2}\int\limits_0^y \psi_2^*(-t)dt+\lambda\int\limits_0^y (y-t)\psi_1^*(-t)dt-\frac{\lambda}{2}y^2\psi_1^*(0)-\sqrt{2}y\psi_2(0).$$

Положив в (16) $y=0$, с учетом (10), (17) и (18), получим следующее функциональное соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенное из области D_2 на I_1 :

$$\tau(x)+\int\limits_0^x k(x,t)\tau\left(\frac{t}{2}\right)dt-\int\limits_0^x \nu(t)I_0\left[\sqrt{\lambda}(x-t)\right]dt=f(x), \tag{19}$$

где

$$\tau(x)=v(x,0), \tag{20}$$

$$k(x,t)=2T\left(\frac{x}{2};\frac{t}{2}\right)+\sqrt{\lambda}\int\limits_t^x \sin\sqrt{\lambda}\left(-\frac{x}{2}+\frac{s}{2}\right)T\left(\frac{s}{2};\frac{t}{x}\right)ds+$$
$$+\frac{\lambda x}{2}\int\limits_t^x \overline{I}_1\left[\sqrt{\lambda x(x-z)}\right]\left\{T\left(\frac{z}{2};\frac{t}{2}\right)+\right.$$
$$\left.+\sqrt{\lambda}\int\limits_t^z T\left(\frac{s}{2};\frac{t}{2}\right)\sin\sqrt{\lambda}\left(-\frac{z}{2}+\frac{s}{2}\right)ds\right\}dz, \tag{21}$$

$$f(x)=2\psi_1\left(\frac{x}{2}\right)-\psi_1(0)I_0\left[\sqrt{\lambda}x\right]+\sqrt{\lambda}\int\limits_0^x \psi_1\left(\frac{s}{2}\right)\sin\sqrt{\lambda}\left(-\frac{x}{2}+\frac{s}{2}\right)ds+$$
$$+\sqrt{2}\int\limits_0^x \psi_2\left(\frac{s}{2}\right)\cos\sqrt{\lambda}\left(-\frac{x}{2}+\frac{s}{2}\right)ds+\lambda x\int\limits_0^x \psi_1\left(\frac{s}{2}\right)\overline{J}_1\left[\sqrt{\lambda x(s-x)}\right]ds+$$
$$+\frac{1}{2}\lambda\sqrt{\lambda}x\int\limits_0^x \psi_1\left(\frac{s}{2}\right)ds\int\limits_s^x \overline{J}_1\left[\sqrt{\lambda x(t-x)}\right]\sin\sqrt{\lambda}\left(-\frac{t}{2}+\frac{s}{2}\right)dt+$$
$$+\frac{1}{\sqrt{2}}\lambda x\int\limits_0^x \psi_2\left(\frac{s}{2}\right)ds\int\limits_s^x \overline{J}_1\left[\sqrt{\lambda x(t-x)}\right]\cos\sqrt{\lambda}\left(-\frac{t}{2}+\frac{s}{2}\right)dt+$$
$$+2\psi_1(0)\left(1-\cos\frac{\sqrt{\lambda}x}{2}\right)+\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda}}\psi_2(0)\sin\frac{\sqrt{\lambda}x}{2}+$$

$$+\lambda x\psi_1(0)\int\limits_0^x\left(1-\cos\frac{\sqrt{\lambda}t}{2}\right)\overline{J}_1\left[\sqrt{\lambda x(t-x)}\right]dt+$$

$$+\sqrt{\lambda}x\cdot\sqrt{2}\psi_2(0)\int\limits_0^x\sin\frac{\sqrt{\lambda}t}{2}\overline{J}_1\left[\sqrt{\lambda x(t-x)}\right]dt, \qquad (22)$$

где $I_0[x]$ — модифицированная функция Бесселя, $J_0(z)$, $J_1(z)$ — функции Бесселя, где

$$I_0(x)=J_0(ix).$$

В силу непрерывности $\nu(x)$ и на основании уравнения (13) при $y>0$, получаем соотношение

$$\tau''(x)-\nu(x)-\lambda\tau(x)=k, \qquad (23)$$

где k — неизвестная постоянная, подлежащая определению.

Равенство (23) является вторым основным соотношением между $\tau(x)$ и $\nu(x)$ из области D_1 на I_2.

Считая $k+\nu(x)$ известным в (23), с условиями

$$\tau(0)=\varphi_1(0),\quad \tau'(0)=\varphi_3(0), \qquad (24)$$

решаем уравнение относительно $\tau(x)$. Тогда оно имеет вид

$$\tau(x)=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int\limits_0^x sh\sqrt{\lambda}(x-t)\nu(t)dt-\frac{k}{\lambda}(1-ch\sqrt{\lambda}x)+$$

$$+\varphi_1(0)ch\sqrt{\lambda}x+\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\varphi_3(0)sh\sqrt{\lambda}x. \qquad (25)$$

Возьмем производную по x в соотношении (19):

$$\tau'(x)+\int\limits_0^x k'(x,t)\tau\left(\frac{t}{2}\right)dt-\nu(x)-\sqrt{\lambda}\int\limits_0^x\nu(t)I_1\left[\sqrt{\lambda}(x-t)\right]dt=f'(x) \qquad (26)$$

и, подставляя вместо $\tau(x)$ его найденное выражение из (25), получаем следующее интегральное уравнение со сдвигом:

$$\nu(x)+\lambda\int\limits_0^x H(x,t)\nu(t)dt-\frac{2}{\sqrt{\lambda}}\int\limits_0^{\frac{x}{2}}\nu(t)dt\int\limits_t^{\frac{x}{2}}k'(x,2s)sh\sqrt{\lambda}(s-t)ds=$$

$$= k\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}sh\sqrt{\lambda}x - \frac{1}{\lambda}\int\limits_0^x k'(x,t)\left(1 - ch\frac{\sqrt{\lambda}t}{2}\right)dt\right) + F(x), \qquad (27)$$

где

$$H(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}I_1\left[\sqrt{\lambda}(x-t)\right] - \frac{1}{\lambda}ch\sqrt{\lambda}(x-t), \qquad (28)$$

$$F(x) = \sqrt{\lambda}\varphi_1(0)sh\sqrt{\lambda}x + \varphi_3(0)ch\sqrt{\lambda}x - f'(x) + \varphi_1(0)\int\limits_0^x k'(x,t)ch\frac{\sqrt{\lambda}t}{2}dt +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\varphi_3(0)\int\limits_0^x k'(x,t)sh\frac{\sqrt{\lambda}t}{2}dt. \qquad (29)$$

Полагая

$$A_1(x) = k\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sin\sqrt{\lambda}x - \frac{1}{\lambda}\int\limits_0^x k'(x,t)\left(1 - ch\frac{\sqrt{\lambda}t}{2}\right)dt\right) +$$

$$+\frac{2}{\sqrt{\lambda}}\int\limits_0^{\frac{x}{2}}\nu(t)dt\int\limits_t^{\frac{x}{2}}k'(x,2s)sh\sqrt{\lambda}(s-t)ds, \qquad (30)$$

уравнение (27) запишем в виде [5]

$$\nu(x) + \lambda\int\limits_0^x H(x,t)\nu(t)dt = A_1(x), \quad 0 \le x \le 1. \qquad (31)$$

Считая правую часть известной, решение уравнения (31) запишем в виде

$$\nu(x) = A_1(x) + \lambda\int\limits_0^x R_1(x,t,\lambda)A_1(t)dt, \qquad (32)$$

где $R_1(x,t,\lambda)$ — резольвента ядра интегрального уравнения (31).

Равенство (32) с учетом (30) и после некоторых вычислений принимает вид.

$$\nu(x) - \lambda\int\limits_0^x k_2(x,t)\nu\left(\frac{t}{2}\right)dt = A_2(x), \qquad (33)$$

$$k_2(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\int\limits_0^x R_1(x,s,\lambda)ds\int\limits_t^s k'(s,z)sh\sqrt{\lambda}\left(\frac{z}{2}-\frac{t}{2}\right)dz+$$

$$+\frac{1}{2\lambda\sqrt{\lambda}}\int\limits_t^x k'(x,s)sh\sqrt{\lambda}\left(\frac{s}{2}-\frac{t}{2}\right)ds, \tag{34}$$

$$A_2(x)=k\left\{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sin\sqrt{\lambda}x-\frac{1}{\lambda}\int\limits_0^x k'(x,t)\left(1-ch\frac{\sqrt{\lambda}t}{2}\right)dt\right\}+$$

$$+\lambda\int\limits_0^x R_1(x,t,\lambda)\left\{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sin\sqrt{\lambda}t-\frac{1}{\lambda}\int\limits_0^t k'(t,s)\left(1-ch\frac{\sqrt{\lambda}t}{2}\right)ds\right\}dt+$$

$$+F(x)+\lambda\int\limits_0^x R(x,t,\lambda)F(t)dt. \tag{35}$$

В силу (4), (5), (21), (28), (29), (34) и (35) заключаем, что

$$k_2(x,t)\in C\left(\left(\bar{I}_2\right)\times\left(\bar{I}_2\right)\right),\quad A_2(x)\in C\left(\bar{I}_2\right)\cap C^2(I_2). \tag{36}$$

Теперь покажем однозначную разрешимость уравнения (33) и определим неизвестную постоянную k.

Введем обозначения:

$$c\tau(x)=AB\tau(x),\quad B\tau(x)=\tau\left(\frac{x}{2}\right),\quad A\tau(x)=\int\limits_0^x k_2(x,s)\tau(s)ds,$$

$$A_2(x)=k\Phi_1(x)+\Phi_2(x), \tag{37}$$

где

$$\Phi_1(x)=\frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}}-\frac{1}{\lambda}\int\limits_0^x k'(x,t)\left(1-ch\frac{\sqrt{\lambda}t}{2}\right)dt+$$

$$+\lambda\int\limits_0^x R_1(x,t,\lambda)\left(\frac{\sin\sqrt{\lambda}t}{\sqrt{\lambda}}-\frac{1}{\lambda}\int\limits_0^t k'(t,s)\left(1-ch\frac{\sqrt{\lambda}s}{2}\right)ds\right)dt, \tag{38}$$

$$\Phi_2(x) = F(x) + \lambda \int\limits_0^x R(x,t,\lambda)F(t)dt. \tag{39}$$

В этих обозначениях равенство (33) примет вид

$$(I - \lambda c)\nu(x) = A_2(x). \tag{40}$$

Отсюда, согласно теории интегральных уравнений [5], имеем

$$(I - \lambda c)^{-1} f = f + \lambda c f + \dots + \lambda^n c^n f + \dots, \tag{41}$$

$$(I - \lambda A)^{-1} f = f + \lambda A f + \dots + \lambda^n A^n f + \dots\ . \tag{42}$$

Так как ряд (42) является рядом Неймана [5], то он сходится для всех λ ($\lambda \neq 0$).

В силу того, что $\|B\| < 1$ и

$$\|c\nu\| \leq \|A\|\|B\nu\| \leq \|A\|\|B\|\|\nu\| \leq \|A\|\|\nu\|,$$

ряд (41) с учетом (42) также сходится для всех λ ($\lambda \neq 0$) и является рядом Неймана [5] для интегрального уравнения (34).

Тогда решение (33) имеет вид

$$\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n (c^n A_2(x)). \tag{43}$$

С учетом (10) и (11) определим функции $\nu(x)$, $w(x)$.

Из условия $\tau(1) = \varphi_2(0) - w(1)$, с учетом

$$B_1(1,\lambda) + \int\limits_0^1 T(1,t)B_1(t,\lambda)dt \neq 0,$$

определим постоянную k по формуле

$$k = \frac{\lambda\varphi_2(0) - \lambda B_2(1,\lambda) - \lambda \int\limits_0^1 T(1,t)B_2(t,\lambda)dt}{B_1(1,\lambda) + \int\limits_0^1 T(1,t)B_1(t,\lambda)dt}, \tag{44}$$

где

$$B_1(t,\lambda) = \sqrt{\lambda}\int\limits_0^t \left(sh\sqrt{\lambda}(t-s)\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n(c^n\Phi_1(s))\right) ds - 1 + ch\sqrt{\lambda}tdt,$$

$$B_2(t,\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int\limits_0^t sh\sqrt{\lambda}(t-s)\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n\left(c^n\Phi_2(s)\right)ds + \varphi_1(0)ch\sqrt{\lambda}t + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\varphi_3(0)sh\sqrt{\lambda}t.$$

Из (25), с учетом (43), (44) определим функции $\tau(x)$, $\nu(x)$.

Тогда решение задачи C в областях D_2 и D_1 можно построить с помощью (6), (16) и задачи Г [6].

Таким образом, задача C для уравнения (1) однозначно разрешима.

Литература

1. Нахушев А.М. // Дифференциальные уравнения. 1983. Т.19, №1, с.86-94.

2. Казиев В.М. // Дифференциальные уравнения. 1991. Т.27, №2, с.314-319.

3. Елеев В.А. // Дифференциальные уравнения. 1994. Т.30, №2, с.230-237.

4. Исломов Б., Курьязов Д.М. // Узб. матем. журнал. 2000, №2, с.29-35.

5. Краснов И.Л. Интегральные уравнения. М.: Наука, 1976. 215 с.

6. Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамажонов М. Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа. Т.: Фан, 1986. 204 с.

Институт математики
им. В.И.Романовского АН РУз

Дата поступления
04.10.06

Uzbek Mathematical
Journal, 2007,№2, pp.56-69

УДК 517.95

Алгоритм метода нормальных форм для слабо нелинейного уравнения с нестабильным спектром

Б.Т.Калимбетов

Maqolada limit operatorining spektri nostabil bo‘lgan chiziqsiz Koshi masalasi uchun normal formalar metodining algoritmi keltirilgan.

In the paper, an algorithm of the normal forms method is given for the weakly non-linear Cauchy problem with the non-stable limit operator.

При построении асимптотических решений начальной задачи

$$\varepsilon\dot{y} = A(t)y + h(t) + \varepsilon f(y,t), y(0,\varepsilon) = y^0, t \in [0,T] \tag{1}$$

где $y = \{y_1, \ldots, y_n\}, A(t) - n \times n$ - матрица, $f(y,t)$ и $h(t)$ - вектор - функции размерности $n \times 1$, $\varepsilon > 0$ - малый параметр, особую роль играет поведение спектра $\{\lambda_j(t), j = \overline{1,n}\}$ предельного оператора $A(t)$. Если спектр стабилен, т.е. $\lambda_i(t) \neq \lambda_j(t), i \neq j, \lambda_j(t) \neq 0, \forall t \in [0,T], i,j = \overline{1,n}$, то выделение сингулярностей и регуляризация задачи (1) проводятся по известной схеме метода регуляризации Ломова [1]. Построение асимптотических решений в случае не выполнения условий стабильности спектра существенно отличается, когда спектр стабилен. На этот факт обращалось внимание при рассмотрении линейных и слабо нелинейных задач с нестабильным спектром [2,3]. В настоящей работе рассматривается случай, когда две собственные значения оператора $A(t)$ обращаются в нуль в изолированных точках отрезка $[0,T]$.

Будем предполагать, что:

1а) $A(t) \in C^\infty([0,T], C^{n^2})$, $h(t) \in C^\infty([0,T], C^n)$;

1б) каждая компонента $f(y,t)$ вектора $f(y,t)$ представляется виде

$$f_j(y,t) = \sum_{0 \le |m| \le N} f_j^{(m)}(t) y^m = \sum_{m_1+\ldots+m_n=0}^{N} f_j^{(m_1,\ldots m_n)}(t) y_1^{m_1}, \ldots, y_n^{m_n},$$

где коэффициенты $f_j^m(t) \in C^\infty[0,a]$, $0 \le |m| \le N, 0 \le N < \infty$, $j = \overline{1,n}$;

2) спектр $\{\lambda_j(t), j = \overline{1,n}\}$ оператора $A(t)$ удовлетворяет требованиям:

а) $\lambda_1(t) = -(t-t_1)^{s_1}\cdots(t-t_p)^{s_p}k_1(t), k_1(t) \ne 0$, $\lambda_2(t) = -(t-\tau_1)^{\sigma_1}\cdots(t-\tau_q)^{\sigma_q}k_2(t), k_2(t) \ne 0$ (s_p, δ_q - четные неотрицательные числа, $t_r \ne \tau_j$, $\quad r = \overline{1,q}$, $j = \overline{1,p}$;

б) $\lambda_i(t) \ne \lambda_j(t), i \ne j, i,j = \overline{1,n}$; в) $\lambda_j(t) \ne 0, j = \overline{3,n}$; г) $\mathrm{Re}\lambda_j(t) \ne 0, \quad j = \overline{1,n}$;

3) функции $h_0^s(t) \equiv (h(t), d_s(t))$, где $d_s(t)$ - собственный вектор оператора $A(t)$, соответствующий собственному значению $\bar\lambda_j(t)$, удовлетворяет условиям:

$$\frac{d^k h_0^{(1)}(t)}{dt^k} \equiv D^k h_0^{(1)}(t_r) = 0, r = \overline{1,p}, k = \overline{0, s_r - 1};$$

$$\frac{d^\nu h_0^{(2)}(t)}{dt^\nu} \equiv D^\nu h_0^{(2)}(\tau_i) = 0, i = \overline{1,q}, k = \overline{0, s_i - 1}.$$

При описанных условиях существует матрица $C(t) = (c_1(t), ..., c_n(t))$ со столбцами $c_j(t) \in C^\infty([0,T], C^n)$ такая, что

$$C^{-1}(t)A(t)C(t) = \Lambda(t) \equiv diag(\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t)) \forall t \in [0,T].$$

Условия 2а) нестабильности спектра оператора $A(t)$ приводит к тому, что в системе (1) всегда наблюдается многоточечный резонанс вида

$$\begin{gathered} m_1^1\lambda_1(t_k) = \lambda_1(t_k)\ , \ m_1^j\lambda_1(t_k) + \lambda_j(t_k) = \lambda_j(t_k), j = \overline{2,n}; \\ m_2^2\lambda_2(\tau_i) = \lambda_2(\tau_i)\ , \ m_2^j\lambda_2(\tau_i) + \lambda_j(\tau_i) = \lambda_j(\tau_i), j = 1,3,4,\dots,; \end{gathered} \tag{2}$$

где $m_1^1 \ge 2, m_2^2 \ge 2, m_1^j \ge 1, m_2^j \ge 1$ - целые числа ($k = \overline{1,p}$, $i = \overline{1,q}$).

В настоящей работе будет рассматриваться слабый резонанс [3], т.е. такой резонанс, при котором имеет место лишь равенство (2).

Введем множества Гj резонансных мультииндексов $m^j = (m_1^j, \dots, m_n^j)$:

$$\Gamma_1 = \left(\bigcup_{m_1^1=2}^{\infty} m_1^1 e_1\right) \bigcup \left(\bigcup_{m_2^1=1}^{\infty} (e_1 + m_2^1 e_2)\right),$$

$$\Gamma_2 = \left(\bigcup_{m_2^2=2}^{\infty} m_2^2 e_2\right) \bigcup \left(\bigcup_{m_1^2=1}^{\infty} (e_2 + m_1^2 e_1)\right),$$

$$\Gamma_j = \left(\bigcup_{m_1^j=1}^{\infty} (m_1^j e_1 + e_j) \right) \bigcup \left(\bigcup_{m_2^j=1}^{\infty} (m_2^j e_2 + e_j) \right), \; j = \overline{3, n},$$

где $e_k = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ - k - й единичный орт в C^n. Если $m^j \in \Gamma_j$ при некотором $j = \{1, ..., n\}$, то при таком m^j выполняется одно из соотношений (2).

Регуляризацию задачи (1) проведем с помощью вектора $u = \{u_1, ..., u_n\}$ удовлетворяющего следующей системе в нормальной форме

$$\varepsilon \frac{du}{dt} = \Lambda(t)u + \sum_{k=1}^{l+1} \varepsilon^k g_k(t, u), u(0, \varepsilon) = \bar{1}, \tag{3}$$

где $\bar{1} = \{1, ..., 1\}$, $g_k(t, u)$ - функции, являющиеся суммами резонансных мономов

$$g_k(t, u) = g_k^{(1)}(t)e_1 + g_k^{(2)}(t)e_2 + \sum_{j=1}^{n} \sum_{m^j \in \Gamma_j} g_k^{(m^j)}(t)u^{m^j} e_j,$$

в которых $g_k^{(j)}(t)$, $g_k^{(m^j)}(t)$ - скалярные функции класса $C^\infty[0, a]$, определяемые ниже, при процессе построения асимптотики.

Вместо задачи (1) рассмотрим "расширенную"задачу

$$\varepsilon \frac{\partial \tilde{y}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{y}}{\partial u}[\Lambda(t)u + \sum_{k=1}^{l+1} \varepsilon^k g_k(t, u)] - A(t)\tilde{y} - \varepsilon f(\tilde{y}, t) = h(t), \tilde{y}(0, \bar{1}, \varepsilon) = y^0, \tag{4}$$

для функции $\tilde{y} = \tilde{y}(t, u, \varepsilon)$ переменных $t, u = u_1, ..., u_n$ и ε . Если $\tilde{y} = \tilde{y}(t, u, \varepsilon)$ решение задачи (4), то его сужение на векторе $u = u(t, \varepsilon)$ регуляризирующих переменных, удовлетворяющих нормальной форме (3) будет точным решением исходной задачи (1). Определяя решение "расширенной"задачи (4) в виде ряда

$$\tilde{y}(t, u, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k y_k(t, u), \tag{5}$$

получаем следующие итерационные задачи для коэффициентов этого ряда

$$Ly_0(t, u) \equiv \frac{\partial y_0}{\partial u}\Lambda(t)u - A(t)y_0 = h(t), \; y_0(0, \bar{1}) = y^0, \tag{6_0}$$

$$Ly_1(t,u) \equiv -\frac{\partial y_0}{\partial t} - \frac{\partial y_0}{\partial u} g_1(t,u) + f(y_0,t),\ y_1(0,\bar{1}) = 0, \qquad (6_1)$$

$$Ly_k(t,u) \equiv -\frac{\partial y_{k-1}}{\partial t} - \frac{\partial y_{k-1}}{\partial u} g_k(t,u) -$$

$$-\sum_{j=1}^{k} \frac{\partial y_j}{\partial u} g_{k-j}(t,u) + Q_{k-1},\ k \geq 1,\ y_k(0,\bar{1}) = 0. \qquad (6_k)$$

Здесь $Q_{k-1} \equiv Q_k(t, y_0, \ldots, y_{k-1})$ - некоторые многочлены относительно $y_0, \ldots, y_{k-1}, g_s(t) \equiv 0$ при $s > l+1$.

Опишем класс U решений итерационных задач $(6_0), ..., (6_{k-1})$.

Определение. *Будем говорить, что функция $w(t,u) \equiv \{w_1, \ldots, w_n\} \in U$, если она представляется в виде полинома по u*

$$w(t,u) = \sum_{0 \leq |m| \leq N} w^{(m)}(t) u^m \qquad (7)$$

с векторными коэффициентами $w^{(m)} \in^\infty ([0,T), C^n)$ (N - целое неотрицательное число, $|m| \equiv m_1 + \ldots + m_n, u^m = u_1^{m_1} \ldots u_n^{m_n}$).

Рассмотрим систему уравнений в частных производных

$$Lw(t,u) \equiv \frac{\partial y}{\partial u} \Lambda(t) u - A(t) y = h(t,u), \qquad (8)$$

где $h(t,u)$ - некоторая известная вектор - функция. Каждая из итерационных задач (6) имеет вид (8). Будем говорить, что в системе (8) наблюдается слабый резонанс, если спектр $\{\lambda_j(t)\}$ оператора допускает лишь резонансные соотношения вида (2). Обозначим через $\overline{\Gamma}_j$ и $\overline{\overline{\Gamma}}_j$ подмножества множества Γ_j:

$$\overline{\Gamma}_1 = \bigcup_{m_1^2=2}^{\infty} \left(m_1^2 e_1\right),\ \overline{\Gamma}_j = \bigcup_{m_1^j=2}^{\infty} \left(m_1^j e_1 + e_j\right),\ j = \overline{2,n},\ \overline{\overline{\Gamma}}_i = \Gamma_i \backslash \overline{\Gamma}_i,\ i = \overline{1,n}.$$

Имеет место следующий результат.

Теорема 1. *Пусть в системе (8) наблюдается слабый резонанс, вектор- функция $h(t,u) = \sum\limits_{0 \leq |m| \leq N} h^{(m)}(t) u^m \in U$, оператор $A(t)$ удовлетворяет условиям 1), а его спектр $\{\lambda_j(t)\}$ условиям 2а) - 2в). Тогда для разрешимости системы (8) в пространстве U необходимо и достаточно, чтобы*

$$\langle h(t,u), d_j(t) u_j \rangle \equiv 0, \quad \forall t \in [0,T],\ j = \overline{1,n}; \qquad (9)$$

$$D^k(h^{(0)},d_1)(t_r)=0,\ r=\overline{1,p}\,,\ k=\overline{0,s_r-1} \qquad (10)$$

$$D^\nu(h^{(0)},d_2)(\tau_i)=0,\ i=\overline{1,q}\,,\ \nu=\overline{0,\sigma_i-1}; \qquad (11)$$

$$D^k(h^{(m^j)},d_j)(t_r)=0,\ r=\overline{1,p}\,,\ k=\overline{0,s_r-1},\forall m^j\in\overline{\Gamma}_j^N\,,\ j=\overline{1,n} \qquad (12)$$

$$D^\nu(h^{(m^j)},d_j)(\tau_i)=0,\ i=\overline{1,q}\,,\ \nu=\overline{0,\sigma_i-1},\forall m^j\in\overline{\overline{\Gamma}}_j^N\,,\ j=\overline{1,n}, \qquad (13)$$

где $\overline{\Gamma}_j^N=\left\{m^j\in\overline{\Gamma},\,0\le\left|m^j\right|\le N\right\},\overline{\overline{\Gamma}}_j^N=\left\{m^j\in\overline{\overline{\Gamma}}_j,\,0\le\left|m^j\right|\le N\right\},\ j=\overline{1,n}$

Доказательство. Будем определять решение системы (8) в виде суммы (7). Для коэффициентов суммы (7) получим следующие системы:

$$-A^{-1}(t)w^{(0)}(t)=h^{(0)}(t) \qquad (14)$$

$$\left[\lambda_j(t)I-A(t)\right]w^{e^j}(t)=h^{e^j}(t),\quad j=\overline{1,n} \qquad (15)$$

$$\left[(m,\lambda(t))I-A(t)\right]w^m(t)=h^m(t),\quad 2\le|m|\le N \qquad (16)$$

где I - единичная матрица, $(m,\lambda(t))\equiv m_1\lambda_1(t)+\ldots+m_n\lambda_n(t)$. Для разрешимости системы (15) необходимо и достаточно, чтобы имели место условия (9). В системах (14), (16) сделаем преобразование

$$w^{(0)}(t)=C(t)\xi^{(0)}(t),\quad w^{(m)}(t)=C(t)\xi^{(m)}(t).$$

Относительно компонент $\xi_j^{(0)}(t)$ и $\xi_j^{(m)}(t)$ - вектор - функции $\xi^{(0)}(t)$ и $\xi^{(m)}(t)$ получим следующие уравнения:

$$-\lambda_j(t)\xi_j^{(0)}(t)=(h^{(0)}(t),d_j(t)),\qquad j=\overline{1,n}; \qquad (17)$$

$$[(m,\lambda(t))-\lambda_j(t)]\xi_j^{(m)}(t)=(h^{(m)}(t),d_j(t)),\quad 2\le|m|\le N,\quad j=\overline{1,n}. \qquad (18)$$

Рассмотрим уравнение (17). Поскольку при $\lambda_j(t),\ j=\overline{3,n}$, собственные числа не обращаются в нуль на отрезке [0,T], то уравнения (17) имеют вид

$$(t-t_1)^{s_1}\cdots(t-t_p)^{s_p}k_1(t)=(h^{(0)}(t),d_1(t)),$$

$$(t-\tau_1)^{\sigma_1}\cdots(t-\tau_q)^{\sigma_q}k_2(t)=(h^{(0)}(t),d_2(t)).$$

Отсюда видно, что для разрешимости уравнения (17) в классе $C^\infty[0,T]$ необходимо и достаточно, чтобы имели место условия (10), (11).

Рассмотрим теперь уравнение (18). Поскольку в системе (18) наблюдается слабый резонанс, то коэффициенты этих уравнений могут обращаться в нуль при мультииндексах $m \in m^j \in \Gamma_j^N$. Запишем более подробно уравнения (18) при резонансных мультииндексах.

При $m \in m^1 \in \overline{\Gamma}_1$ уравнения (18) имеют вид

$$(m_1^1 - 1)\lambda_1(t)\xi_1^{(m^1)}(t) = (h^{(m^1)}(t), d_1(t)), \tag{19_1}$$

$$[m_1^1\lambda_1(t) - \lambda_j(t)]\xi_j^{(m^1)}(t) = (h^{(m^1)}(t), d_j(t)), \quad j = \overline{2, n}. \tag{19_j}$$

При $m \in m^1 \in \overline{\overline{\Gamma}}_1$ уравнения (18) имеют вид

$$m_2^1\lambda_2(t)\xi_1^{(m^1)}(t) = (h^{(m^1)}(t), d_1(t)), \tag{20_1}$$

$$[\lambda_1(t) + (m_2^1 - 1)\lambda_2(t)]\xi_2^{(m^1)}(t) = (h^{(m^1)}(t), d_2(t)), \tag{20_2}$$

$$[\lambda_1(t) + m_2^1\lambda_2(t) - \lambda_j(t)]\xi_j^{(m^1)}(t) = (h^{(m^1)}(t), d_j(t)),\ j = \overline{3, n}. \tag{20_j}$$

Уравнения (19_j) и (20_j) однозначно разрешимы в классе $C^\infty[0, T]$, так как их коэффициенты не равны нулю. Для разрешимости уравнения (19_1) необходимо и достаточно, чтобы

$$D^k(h^{(m^1)}, d_1)(t_r) = 0,\ r = \overline{1, p}\,,\ k = \overline{0, s_r - 1}, \forall m^1 \in \overline{\Gamma}_1^N, \tag{21}$$

Для разрешимости уравнения (20_1) необходимо и достаточно, чтобы

$$D^\nu(h^{(m^1)}, d_1)(\tau_i) = 0,\ i = \overline{1, q}\,,\ \nu = \overline{0, \sigma_i - 1},\ \forall m^1 \in \overline{\overline{\Gamma}}_1^N. \tag{22}$$

Уравнения (20_2) при $m_2^1 \geq 2$ однозначно разрешимо в классе $C^\infty[0, T]$. При $m_2^1 = 2$ получаем уравнение

$$\lambda_1(t)\xi_2^{e_1+e_2}(t) = (h_2^{e_1+e_2}(t), d_2(t)).$$

Для разрешимости этого уравнения необходимо и достаточно, чтобы

$$D^k(h^{e_1+e_2}, d_2)(x_r) = 0,\ r = \overline{1, p}\,,\ k = \overline{0, s_r - 1} \tag{23}$$

При $m \in m^1 \in \overline{\overline{\Gamma}}_2$ уравнения (18) имеют вид

$$[(m_1^2 - 1)\lambda_1(t) + \lambda_2(t)]\xi_1^{(m^2)}(t) = (h^{(m^2)}(t), d_1(t)), \tag{24_1}$$

$$m_1^2\lambda_1(t)\xi_2^{(m^2)}(t) = (h^{(m^2)}(t), d_2(t)), \qquad (24_2)$$

$$[m_1^2\lambda_1(t) + \lambda_2(t) - \lambda_j(t)]\xi_j^{(m^2)}(t) = (h^{(m^2)}(t), d_j(t)), \quad j = \overline{3,n}. \qquad (24_j)$$

При $m = m^2 \in \overline{\overline{\Gamma}}_2$ уравнения (18) имеют вид

$$[m_2^2\lambda_2(t) - \lambda_1(t)]\xi_1^{(m^2)}(t) = (h^{(m^2)}(t), d_1(t)), \qquad (25_1)$$

$$(m_2^2 - 1)\lambda_2(t)\xi_2^{(m^2)}(t) = (h^{(m^2)}(t), d_2(t)), \qquad (25_2)$$

$$[m_2^2\lambda_2(t) - \lambda_j(t)]\xi_j^{(m^2)}(t) = (h^{(m^2)}(t), d_j(t)), \ j = \overline{3,n}. \qquad (25_j)$$

Уравнения (24_j), (25_1) и (25_j) однозначно разрешимы в классе $C^\infty[0,T]$, так как их коэффициенты не равны нулю. Для разрешимости уравнения (24_2) необходимо и достаточно, чтобы

$$D^k(h^{(m^2)}, d_2)(x_r) = 0, \ r = \overline{1,p}, \ k = \overline{0, s_r - 1}, \ \forall m^2 \in \overline{\Gamma}_2^N. \qquad (26)$$

Для разрешимости уравнения (25_2) необходимо и достаточно, чтобы

$$D^\nu(h^{(m^2)}, d_2)(\tau_i) = 0, \ i = \overline{1,q}, \ \nu = \overline{0, \sigma_i - 1}, \ \forall m^2 \in \overline{\overline{\Gamma}}_2^N. \qquad (27)$$

При $m_1^2 \geq 1$ уравнения (24_1) однозначно разрешимо в классе $C^\infty[0,T]$. При $m_1^2 = 2$ получаем уравнение

$$\lambda_2(t)\xi_2^{e_1+e_2}(t) = (h_2^{e_1+e_2}(t), d_1(t)).$$

Для разрешимости этого уравнения необходимо и достаточно, чтобы

$$D^\nu(h^{e_1+e_2}, d_1)(\tau_i) = 0, \qquad i = \overline{1,q}, \quad \nu = \overline{0, \sigma_i - 1}, \qquad (28)$$

При $m = m^j \in \overline{\Gamma}_j, \ j > 2$ уравнения (18) имеют вид

$$[m_1^j\lambda_1(t) + \lambda_j(t) - \lambda_s(t)]\xi_s^{(m^j)}(t) = (h^{(m^j)}(t), d_s(t)), \ s \neq j, \quad s = \overline{1,n},$$

$$m_1^j\lambda_1(t)\xi_j^{(m^j)}(t) = (h^{(m^j)}(t), d_j(t)).$$

Для разрешимости этих уравнений, необходимо и достаточно, чтобы

$$D^k(h^{(m^j)}, d_j)(t_r) = 0, \ r = \overline{1,p}, \ k = \overline{0, s_r - 1}, \ \forall m^j \in \overline{\Gamma}_j^N. \qquad (29)$$

При $m = m^j \in \overline{\overline{\Gamma}}_j,\ j > 2$ уравнения (18) имеют вид

$$m_2^j \lambda_2(t) \xi_j^{(m^j)}(t) = (h^{(m^j)}(t), d_j(t)),$$

$$[m_2^j \lambda_2(t) + \lambda_j(t) - \lambda_s(t)] \xi_s^{(m^j)}(t) = (h^{(m^j)}(t), d_s(t)),\ \ s \neq j,\ \ s = \overline{1, n}.$$

Для разрешимости этих уравнений необходимо и достаточно, чтобы

$$D^\nu (h^{(m^j)}, d_j)(\tau_i) = 0,\ i = \overline{1, q}\,,\ \nu = \overline{0, \sigma_i - 1},\ \forall m^j \in \overline{\overline{\Gamma}}{}_j^N. \tag{30}$$

Таким образом, для разрешимости системы (18) при $m \in \left(\bigcup\limits_{j=1}^{n} \overline{\Gamma}_j \right) \bigcup$ $\bigcup \left(\bigcup\limits_{j=1}^{n} \overline{\overline{\Gamma}}_j \right)$, необходимо и достаточно, чтобы имели место условия (29) и (30) для всех $j = \overline{1, n}$. Теорема доказана.

Замечание. При выполнении условии теоремы 1 система (8) имеют следующее решение в классе U:

$$\begin{gathered} w(t,u) = -\sum_{j=1}^{n} \frac{\left(h^{(0)}(t), d_j(t)\right)}{\lambda_j(t)} c_j(t) + \sum_{j=1}^{n} \left[\gamma_j(t) c_j(t) + \tilde{w}^{e_j}(t)\right] u_j + \\ + \sum_{m_1^1=2}^{N} \frac{\left(h^{m_1^1 e_1}(t), d_1(t)\right)}{(m_1^1 - 1)\lambda_1(t)} c_1(t) u_1^{m_1^1} + \sum_{m_2^1=2}^{N} \frac{\left(h^{m_2^1 e_2 + e_1}(t), d_1(t)\right)}{m_2^1 \lambda_1(t)} c_1(t) u_1 u_2^{m_2^1} + \\ + \sum_{m_2^2=2}^{N} \frac{\left(h^{m_2^2 e_2}(t), d_2(t)\right)}{(m_2^2 - 1)\lambda_2(t)} c_2(t) u_2^{m_2^2} + \sum_{m_1^2=2}^{N} \frac{\left(h^{m_1^2 e_1 + e_2}(t), d_2(t)\right)}{m_1^2 \lambda_2(t)} c_2(t) u_1^{m_1^2} u_2 + \\ + \sum_{j=3}^{n} \sum_{m_1^j=1}^{N} \frac{\left(h^{m_1^j e_1 + e_j}(t), d_j(t)\right)}{m_1^j \lambda_1(t)} c_j(t) u_1^{m_1^j} u_j + \\ + \sum_{j=3}^{n} \sum_{m_2^j=1}^{N} \frac{\left(h^{m_2^j e_2 + e_j}(t), d_j(t)\right)}{m_2^j \lambda_1(t)} c_j(t) u_2^{m_2^j} u_j + \\ + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{m^i} \frac{\left(h^{(m^i)}(t), d_j(t)\right)}{(m^i, \lambda(t)) - \lambda_j(t)} c_j(t) u^{m_i^j} + \end{gathered} \tag{31}$$

$$+\sum_{\substack{0\le |m|\le N,\\ m\notin \bigcup \Gamma_j}} \left[(m,\lambda(t))\,I-A(t)\right]^{-1} h^{(m)}(t)u^m, i\neq j,$$

где $\gamma_j(t)$ - произвольные скалярные функции класса $C^\infty\,[0,T]$, $\tilde{w}^{e_j}$ - частное решение системы (15) (здесь и всюду далее выражение типа

$$H(t)/\lambda_1(t)\equiv H(t)/k_1(t)\prod_{j=1}^{p}(t-t_j)^{s_j},\, H(t)/\lambda_2(t)\equiv H(t)/k_2(t)\prod_{i=1}^{q}(t-t_i)^{\sigma_i}$$

понимаются в предельном смысле), $c_j(t)$ -собственный вектор оператора $A(t)$, соответствующий собственному значению $\lambda_j(t), j=\overline{1,n}$.

Прежде чем перейти к формулировке условий однозначной разрешимости итерационных задач (6_k), вычислим решение $y_0(t,u)$ первой итерационной задачи (6_0). Ее правая часть $h(t,u)\equiv h(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 1, поэтому система (6_0) имеет решение в классе U вида (см. (31)):

$$y_0(t,u)=\sum_{j=1}^{n}\gamma_j^{(0)}(t)c_j(t)u_j+y_0^{(0)}(t), \tag{32}$$

где $\gamma_j^{(0)}(t)\in C^\infty\,[0,T]$ - произвольные функции, $y_0^{(0)}(t)$ - гладкое решение системы (14) при $h^{(0)}(t)\equiv h(t)$, т.е.

$$y_0^{(0)}(t)=\frac{(h(t),d_1(t))}{k_1(t)\prod\limits_{j=1}^{p}(t-t_j)^{s_j}}c_1(t)+\frac{(h(t),d_2(t))}{k_2(t)\prod\limits_{i=1}^{q}(t-t_i)^{\sigma_i}}c_2(t)-$$

$$-\sum_{j=3}^{n}\frac{(h(t),d_j(t))}{\lambda_j(t)}c_j(t)\equiv\frac{g_1(t)}{k_1(t)}c_1(t)+\frac{g_2(t)}{k_2(t)}c_2(t)-\sum_{j=3}^{n}\frac{(h(t),d_j(t))}{\lambda_j(t)}c_j(t), \tag{33}$$

где $g_1(t)$ и $g_2(t)$ функции класса $C^\infty\,[0,T]$. Подставляя в (32) значение $t=0$ и учитывая, что $y_0(0,\bar{1})=y^0$, будем иметь $C(0)\gamma^{(0)}(0)=y^{(0)}-y_0^{(0)}(0)$, где $\gamma^{(0)}\equiv\{\gamma_1^{(0)},\ldots,\gamma_n^{(0)}\}$. Отсюда находим однозначно вектор $\gamma^{(0)}(0)$:

$$\gamma_0(0)=\left[(y^0,d_1(0))-\frac{g_1(0)}{k_1(0)}\right]e_1+\left[(y^0,d_2(0))-\frac{g_2(0)}{k_2(0)}\right]e_2+$$

$$+\sum_{j=3}^{n}\left[(y^0+\frac{h(0)}{\lambda_j(0)}),d_j(0)\right]e_j. \qquad (34)$$

Для окончательного вычисления функции $\gamma_j^{(0)}(t)$ перейдем к следующей задаче (6_1). Ее правая часть имеют вид

$$h(t,u)\equiv-\sum_{j=1}^{n}(\gamma_j^{(0)}(t)c_j(t))^{\cdot}u_j-(y_0^{(0)}(t))^{\cdot}-C(t)\Gamma_0(t)g_1(t,u)+$$

$$+f(y_0^{(0)}(t),t)+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f(y_0^{(0)}(t),t)}{\partial y}(\gamma_j^{(0)}(t)c_j(t))u_j+\sum_{2\le|m|\le N_1}f^{(m)}(t)u^m,$$

где $\Gamma_0(t)=diag(\gamma_1^{(0)}(t),\ldots,\gamma_n^{(0)}(t))$, $\sum\limits_{2\le|m|\le N_1}f^{(m)}(t)u^m\equiv$

$$\equiv f(y_0(t),t)-f(y_0^{(0)}(t),t)-\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f(y_0^{(0)}(t),t)}{\partial y}(\gamma_j^{(0)}(t)c_j(t))u_j$$

N_1 - некоторое натуральное число.

Функцию $g_1(t,u)$ выберем в виде суммы резонансных мономов, т.е. в виде

$$g_1(t,u)=g_1^{(1)}(t)e_1+g_1^{(2)}(t)e_2+\sum_{j=1}^{n}\sum_{m^j\in_j^N}g_1^{(m^j)}(t)u^{m^j}. \qquad (35)$$

Условия (9) для системы (6_1) приводят к уравнениям

$$-\dot\gamma_j^{(0)}(t)-(\dot c_j(t)-\dot f_y(y_0^{(0)}(t),t)c_j(t),d_j(t))\gamma_j^{(0)}(t)=0,\quad j=\overline{1,n}.$$

Присоединяя к этим уравнениям начальные условия (34), находим однозначно функции $\gamma_j^{(0)}(t)$:

$$\begin{aligned}\gamma_i^{(0)}(t)&=\left[(y^0,d_i(0))-\tfrac{g_i(0)}{k_i(0)}\right]e^{\int\limits_0^t\mu_i(x)dx},\ i=1,2,\\ \gamma_j^{(0)}(t)&=\left[(y^0+\tfrac{h(0)}{\lambda_j(0)}\right]e^{\int\limits_0^t\mu_j(x)dx},\ j=\overline{3,n}.\end{aligned} \qquad (36)$$

Тем самым решение (6_0) определяется в классе $C^\infty[0,T]$ однозначным образом. Выбор вектор - функции (35) обусловлен требованиями (11) - (13) для правой части $h(t,u)$ системы (6_1).

Перейдем к формулировке однозначной разрешимости итерационных задач (6) при $k \geq 1$. Запишем для этого две системы

$$Lw(t,u) = h(t,u),\ w(0,\bar{1}) = w^0, \tag{37}$$

$$Lv(t,u) = -\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial u} g(t,u) + H(t,u), \tag{38}$$

где $h(t,u)$, $H(t,u)$ - известные вектор - функции класса U, $g(t,u)$ - функции типа (35), подлежащая к определению, w^0 - постоянный вектор. Такой вид имеют две последовательные системы (6_k) и $(6_{k+1}), k \geq 1$. Имеет место

Теорема 2. *Пусть все $\gamma_j^{(0)}(t) \neq 0$, выполнены условия теоремы 1, функция $h(t,u) \in U$ удовлетворяет условиям (9) - (13), а функция $H(t,u) \in U$ условиям (9). Тогда существует функция типа*

$$g(t,u) = g^{(1)}(t)e_1 + g^{(2)}(t)e_2 + \sum_{j=1}^{n} \sum_{m^j \in_j^N} g^{(m^j)}(t) u^{m^j} e_j, \tag{39}$$

в которой суммирование производится по всем резонансным мономам правой части системы (38) такая, что (38) разрешима в классе U. При этом система (37) однозначно разрешима в классе U.

Доказательство. Поскольку правая часть системы (37) удовлетворяет условиям (9) - (13), то она имеет решение в классе U в виде функции (31), в которой все коэффициенты, кроме $\gamma_j(t)$ определены однозначно. Для вычисления начальных условий $\gamma_j^{(0)}(0) = \gamma_j^{(0)}$, воспользуемся условием $w(0,\bar{1}) = w^0$. Это позволит найти $\gamma_j^{(0)}(0) = \gamma_j^{(0)}$ - однозначным образом. Подставляя функцию (31), а также функцию (39) в правую часть системы (38), запишем последнюю в виде

$$\begin{gathered} Lv = -\sum_{j=1}^{n} \left(\gamma_j(t) c_j(t)\right)^{\cdot} u_j - \sum_{j=1}^{n} H^{e_j}(t) u_j - P_0(t) - \\ -\sum_{j=1}^{n} \sum_{m^j \in_j} P^{(m^j)} u^{m^j} - \sum_{0 \leq |m| \leq N, m \notin \bigcup_j} P^{(m)}(t) u^m - \\ -C(t)\Gamma_0(t) \left[g^{(1)}(t)e_1 + g^{(2)}(t)e_2 + \sum_{j=1}^{n} \sum_{m^j \in_j} g^{(m^j)}(t) u^{m^j} e_j \right], \end{gathered} \tag{40}$$

где $\quad H(t,u) =$

$$= \sum_{j=1}^{n} H^{e_j}(t)u_j + P_0(t) + \sum_{j=1}^{n}\sum_{m^j\in_j} P^{(m^j)}u^{m^j} + \sum_{0\le|m|\le N, m\notin\bigcup\Gamma_j} P^{(m)}(t)u^m.$$

Подчиняя правую часть системы (40) условиям (9), получим уравнение

$$-\dot\gamma_j(t) - (\dot c_j(t), d_j(t))\gamma_j(t) - (H^{e_j}(t), d_j(t)) = 0, \qquad j = \overline{1,n},$$

которые в совокупности с начальными условиями $\gamma_j^{(0)}(0) = \gamma_j^{(0)}$, $j = \overline{1,n}$, найденными ранее, определяют функции $\gamma_j^{(0)}(t)$ однозначным образом. Следовательно, решение (31) системы (37) вычисляется однозначно.

Для разрешимости (38) необходимо и достаточно, чтобы кроме условий (9), выполнялись еще условия (10) - (13), которые имеет вид

$$D^k((P_0 + \gamma_1^{(0)}g^{(1)}c_1), d_1)(t_r) = 0,\ r = \overline{1,p},\ k = \overline{0, s_r - 1};$$

$$D^\nu((P_0 + \gamma_2^{(0)}g^{(2)}c_{2'}), d_2)(\tau_i) = 0,\ i = \overline{1,q},\ \nu = \overline{0,\sigma_i - 1}; \tag{41}$$

$$D^k((P^{(m^j)} + \gamma_j^{(0)}g^{(m^j)}c_j), d_j)(t_r) = 0, \quad r = \overline{1,p}, \quad k = \overline{0, s_r - 1},$$

$$\forall m^j \in \overline{\Gamma}_j^N,\ j = \overline{1,n};$$

$$D^\nu((P^{(m^j)} + \gamma_j^{(0)}g^{(m^j)}c_j), d_j)(\tau_i) = 0,\ i = \overline{1,q}, \quad \nu = \overline{0,\sigma_i - 1},$$

$$\forall m^j \in \overline{\overline{\Gamma}}_j^N,\ j = \overline{1,n}.$$

Выполняя здесь скалярное умножение и обозначая

$$-\left(\frac{P_0}{\gamma_1^{(0)}}, d_1\right) \equiv \varphi_1, -\left(\frac{P_0}{\gamma_2^{(0)}}, d_2\right) \equiv \varphi_2, -\left(\frac{P^{(m^j)}}{\gamma_j^{(0)}}, d_j\right) \equiv \varphi^{(m^j)},$$

получим (учитывая, что $\gamma_j^{(0)}(t) \ne 0\ \ \forall t \in [0,T], j = \overline{1,n}$) интерполяционные условия для функций

$$D^k g^{(1)}(t_r) = D^k\varphi_1(t_r),\ r = \overline{1,p},\ k = \overline{0, s_r - 1},$$

$$D^\nu g^{(2)}(\tau_i) = D^\nu\varphi_2(\tau_i),\ i = \overline{1,q},\ \nu = \overline{0,\sigma_i - 1} \tag{42}$$

$$D^k g^{(m^j)}(t_r) = D^k \varphi^{(m^j)}(t_r), \quad r = \overline{1,p}, \quad k = \overline{0, s_r - 1}, \quad \forall m^j \in \overline{\Gamma}_j^N, \ j = \overline{1,n},$$

$$D^\nu g^{(m^j)}(\tau_i) = D^\nu \varphi^{(m^j)}(\tau_i), \ i = \overline{1,q}, \quad \nu = \overline{0, \sigma_i - 1}, \quad \forall m^j \in \overline{\overline{\Gamma}}_j^N, \ j = \overline{1,n},$$

Выбрав в качестве $g^{(1)}(t), \ g^{(2)}(t), \ g^{(m^j)}(t)$ интерполяционные полиномы Лагранжа - Сильвестра (см. [4]), найдем, что эти функции определяется однозначно, и значить однозначно построим функцию (40). Это позволить удовлетворит условиям (10) - (13) и сделать систему (38) разрешимый в классе U. Теорема доказана.

Применяя теоремы 1 и 2 к итерационным задачам (6_k), $k = \overline{0, l+1}$ построим решения $y_0(t,u), ..., y_l(t,u)$ этих систем в классе U. При этом соответствующая регуляризирующая система (3) будет иметь вид

$$\begin{gathered}
\varepsilon \dot{u}_1 = \lambda_1(t) u_1 + \sum_{k=1}^{l+1} \varepsilon^k [g_k^{(1)}(t) + \sum_{m_1^1=2}^{N_{k1}} g_k^{m_1^1 e_1}(t) u_1^{m_1^1} + \\
+ \sum_{m_2^1=1}^{N_{k2}} g_k^{e_1 + m_2^1 e_2}(t) u_1 u_2^{m_2^1}], \ u_1(0, \bar{1}) = 1, \\
\varepsilon \dot{u}_2 = \lambda_2(t) u_2 + \sum_{k=1}^{l+1} \varepsilon^k [g_k^{(2)}(t) + \sum_{m_2^2=2}^{N_{k3}} g_k^{m_2^2 e_2}(t) u_2^{m_2^2} + \\
+ \sum_{m_1^2=1}^{N_{k4}} g_k^{m_1^2 e_1 + e_2}(t) u_1^{m_1^2} u_2], \ u_2(0, \bar{1}) = 1, \\
\varepsilon \dot{u}_j = \lambda_j(t) u_j + \sum_{k=1}^{l+1} \varepsilon^k [g_k^{(1)}(t) + \sum_{m_1^j=1}^{N_{k,2j-1}} g_k^{m_1^j e_1 + e_j}(t) u_1^{m_1^j} u_j + \\
+ \sum_{m_2^j=1}^{N_{k,2j}} g_k^{m_2^j e_2 + e_j}(t) u_2^{m_2^j} u_j], \ u_j(0, \bar{1}) = 1.
\end{gathered} \tag{43}$$

где $N_{k,j}$ - некоторые неотрицательные целые числа, $g^{(m^j)}(t)(m^j \in_j, \ j = \overline{1,n})$, $g_k^{(j)}(t), \ j = 1, 2$ - полиномы Лагранжа - Сильвестра, определяемые условиями типа (42). Если система первых двух уравнений (43) разрешима в целом на отрезке [0,T], то последние уравнения имеют решения вида

$$u_j(t,\varepsilon) = e^{\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t \{\lambda_j(x)dx+\sum\limits_{k=1}^{l+1}\varepsilon^k[\sum\limits_{m_1^j=2}^{N_{k,2j-1}} g_k^{m_1^j e_1+e_j}(x)u_1^{m_1^j}(x,\varepsilon)+}$$

$$+\sum_{m_2^j=1}^{N_{k,2j}} g_k^{m_2^j e_2+e_j}(t)u_2^{m_2^j}(x,\varepsilon)\}dx,\ j=\overline{3,n}.$$

Литература

1. Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Наука, 1981.- 400 с.

2. Ломов С.А., Сафонов В.Ф. Регуляризация и асимптотические решения сингулярно возмущенных задач с точечными особенностями спектра предельного оператора// Укр. мат. журн. Т. 36, №32, 1984.- С. 172-180.

3. Ломов С.А., Сафонов В.Ф. Алгоритм нормальных форм в нелинейных сингулярно возмущенных системах с нестабильным спектром// Укр. мат. журн. Т. 38, №4, 1986.- С. 453-464.

4. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1967.- 575 с.

Институт математики
им. В.И.Романовского АН РУз

Дата поступления
20.02.06

Uzbek Mathematical
Journal, 2007,№2, pp.70-80

УДК 517.984

О числе и местонахождении собственных значений одночастичного гамильтониана на одномерной решетке

С.Н.Лакаев, И.Н.Бозоров

Bir o‘lchamli panjaradagi bir kvant zarrachaning tashqi maydon ta’siridagi harakatini ifodalovchi $\hat{h}_{\mu\lambda}$ gamiltonian qaraladi. Bu operatorning uzluksiz spektridan chapdagi xos qiymatlari soni va o‘rni ta’sir energiyalaridan bog‘liqligi o‘rganilgan.

The one-particle Hamiltonian $\hat{h}_{\mu\lambda}$, describing the quantum particle moving in the potential field on one-dimensional lattice, is considered. The dependence of the number and location of the discrete spectrum of $\hat{h}_{\mu\lambda}$ on the interaction energies is studied.

Спектральные свойства одночастичных гамильтонианов, описывающих движение одной квантовой частицы, движущейся в потенциальном поле $\widehat{v}$ и двухчастичных дискретных операторов Шредингера, ассоциированных с гамильтонианами системы двух одинаковых и произвольных частиц на решетке, взаимодействующих с помощью парных короткодействующих потенциалов изучены в [1], [3] и [4].

В [5] исследованы связанные состояния гамильтониана системы двух квантовых частиц (бозонов) на $\nu-$ мерной ($\nu = 1, 2$) решетке с взаимодействием на соседних узлах. В [6] гамильтониан системы двух квантовых частиц на одномерной решетке с контактным взаимодействием и с взаимодействием на соседних узлах рассматривается как ограниченный самосопряженный оператор, действующий в гильбертовом пространстве. Исследованы число собственных значений этого оператора, а также их зависимость от полного квазиимпульса двух частиц и от энергий взаимодействий.

В настоящей работе рассматривается гамильтониан $\hat{h}_{\mu\lambda}$, описывающий движение одной квантовой частицы на одномерной решетке во внешнем поле. Исследуется зависимость числа собственных значений этого оператора от энергии взаимодействий.

Основным результатом работы является теорема о числе и местоположение собственных значений, лежащих ниже непрерывного спектра гамильтониана $\hat{h}_{\mu\lambda}$.

Пусть $\ell_2(\mathbb{Z}^1)$– гильбертово пространство квадратично-суммируемых функций, определенных на одномерной целочисленной решетке $\mathbb{Z}^1$.

В координатном представлении свободный гамильтониан одной квантовой частицы, движущийся на решетке $\mathbb{Z}^1$ ассоциируется с ограниченным самосопряженным оператором, действующим в пространстве $\ell_2(\mathbb{Z}^1)$ по формуле:

$$(\hat{h}_0\hat{\varphi})(x) = \sum_{s\in\mathbb{Z}^1} \hat{\varepsilon}(x-s)\hat{\varphi}(x), \quad \hat{\varphi} \in \ell_2(\mathbb{Z}^1),$$

Здесь функция $\hat{\varepsilon}(s)$ определена на $\mathbb{Z}^1$ по формуле

$$\hat{\varepsilon}(s) = \begin{cases} 1, & \text{при} \quad s = 0 \\ -\frac{1}{2}, & \text{при} \quad |s| = 1 \\ 0, & \text{при} \quad |s| > 1. \end{cases}$$

В координатном представлении полный гамильтониан одной частицы в потенциальном поле $\hat{v}_{\mu\lambda}$ определяется как ограниченное возмущение свободного гамильтониана $\hat{h}_0$:

$$\hat{h}_{\mu\lambda} = \hat{h}_0 - \hat{v}_{\mu\lambda},$$

где

$$(\hat{v}_{\mu\lambda}\hat{\varphi})(x) = \hat{v}_{\mu\lambda}(x)\hat{\varphi}(x), \quad \hat{\varphi} \in \ell_2(\mathbb{Z}^1).$$

Функция $\hat{v}_{\mu\lambda}(s)$ определена на $\mathbb{Z}^1$ следующим образом

$$\hat{v}_{\mu\lambda}(s) = \begin{cases} \mu, & \text{при} \quad s = 0 \\ \frac{\lambda}{2}, & \text{при} \quad |s| = 1 \\ 0, & \text{при} \quad |s| > 1 \end{cases},$$

где μ и λ положительные числа.

Пусть $\mathbb{T}^1 = (-\pi; \pi]$– одномерный тор. Заметим, что всюду операции сложения и умножения на действительное число элементов множества $\mathbb{T}^1 \subset \mathbb{R}^1$ понимается как операции на $\mathbb{R}^1$ по модулю $2\pi\mathbb{Z}^1$.

Пусть $L_2(\mathbb{T}^1)-$ гильбертово пространство квадратично-интегрируемых функций, определенных на $\mathbb{T}^1$, $L_2^e(\mathbb{T}^1) \subset L_2(\mathbb{T}^1)-$ подпространство четных функций.

Используя стандартное преобразование Фурье $\mathcal{F} : L_2(\mathbb{T}^1) \longrightarrow \ell_2(\mathbb{Z}^1)$ изучение спектральных свойств гамильтониана $\widehat{h}_{\mu\lambda}$ сводится к исследованию спектральных свойств ограниченного самосопряженного оператора $h_{\mu\lambda}$ (см. [1]), действующего в пространстве $L_2^e(\mathbb{T}^1)$ по формуле

$$h_{\mu\lambda} = h_0 - v_{\mu\lambda},$$

где h_0- оператор умножения на функцию ε :

$$(h_0 f)(p) = \varepsilon(p)f(p), \quad \varepsilon(p) = 1 - \cos p, \quad f \in L_2^e(\mathbb{T}^1),$$

и $v_{\mu\lambda}-$ интегральный оператор ранга 2

$$(v_{\mu\lambda}f)(p) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}^1}(\mu + \lambda\cos p\cos t)f(t)dt, \quad f \in L_2^e(\mathbb{T}^1).$$

Так как возмущенный оператор $v_{\mu\lambda}-$ есть интегральный оператор ранга 2, согласно теореме Вейля (см.[7]), существенный спектр $\sigma_{ess}(h_{\mu\lambda})$ оператора $h_{\mu\lambda}$, не зависит от $\mu, \lambda \in (0, +\infty)$ и совпадает со спектром $\sigma(h_0)$ оператора h_0. Таким образом, имеет место равенство

$$\sigma_{ess}(h_{\mu\lambda}) = \sigma(h_0) = [0,\, 2].$$

Лемма 1. *Оператор $v_{\mu\lambda}$ положителен.*

Доказательство. Действительно, для любого $f \in L_2^e(\mathbb{T}^1)$ имеем

$$(v_{\mu\lambda}f, f) = \int\limits_{\mathbb{T}^1}(v_{\mu\lambda}f)(p)\overline{f(p)}dp = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}^1}\big[\int\limits_{\mathbb{T}^1}(\mu+\lambda\cos p\cos t)f(t)dt\big]\overline{f(p)}dp =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\big[\mu\int\limits_{\mathbb{T}^1}f(t)dt\overline{\int\limits_{\mathbb{T}^1}f(p)dp} + \lambda\int\limits_{\mathbb{T}^1}\cos t f(t)dt\overline{\int\limits_{\mathbb{T}^1}\cos p f(p)dp}\big] =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\big[\mu\big|\int\limits_{\mathbb{T}^1}f(t)dt\big|^2 + \lambda\big|\int\limits_{\mathbb{T}^1}\cos t f(t)dt\big|^2\big] \geq 0.$$

Отсюда вытекает, что оператор $h_{\mu\lambda}$ не имеет собственных значений, лежащих выше чем $z = 2$.

Из представления интегрального оператора $v_{\mu\lambda}$ и единственности квадратного корня положительного оператора вытекает, что квадратный корень $v_{\mu\lambda}^{\frac{1}{2}}$ оператора $v_{\mu\lambda}$ имеет вид

$$(v_{\mu\lambda}^{\frac{1}{2}}f)(p) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}^1}(\sqrt{\mu}+\sqrt{2\lambda}\cos p\cos t)f(t)dt.$$

Пусть $\mathbb{C}-$ комплексная плоскость. Для любых фиксированных $\mu,\lambda\in(0,+\infty)$ и $z\in\mathbb{C}\backslash[0,2]$ определим интегральный оператор $G_{\mu\lambda}(z)$, действующий в пространстве $L_2^e(\mathbb{T}^1)$ по формуле

$$G_{\mu\lambda}(z) = v_{\mu\lambda}^{\frac{1}{2}}r_0(z)v_{\mu\lambda}^{\frac{1}{2}},$$

где $r_0(z)-$ резольвента оператора h_0. Легко можно увидеть, что $G_{\mu\lambda}(z)$ представляется в виде

$$(G_{\mu\lambda}(z)f)(p) = \frac{1}{(2\pi)^2}[\mu\int\limits_{\mathbb{T}^1}\frac{dt}{\varepsilon(t)-z}\int\limits_{\mathbb{T}^1}f(q)dq+\sqrt{2\mu\lambda}\int\limits_{\mathbb{T}^1}\frac{\cos t dt}{\varepsilon(t)-z}\int\limits_{\mathbb{T}^1}\cos q f(q)dq+ \tag{1}$$

$$+\cos p(\sqrt{2\mu\lambda}\int\limits_{\mathbb{T}^1}\frac{\cos t dt}{\varepsilon(t)-z}\int\limits_{\mathbb{T}^1}f(q)dq+2\lambda\int\limits_{\mathbb{T}^1}\frac{\cos^2 t dt}{\varepsilon(t)-z}\int\limits_{\mathbb{T}^1}\cos q f(q))dq].$$

Поэтому оператор $G_{\mu\lambda}(z)$ является интегральном оператором ранга 2.

Проблема сведения собственных значений к факторизованному однородному уравнению Липмана-Швингера является стандартным хотя бы начиная с Бирмана и Швингера (см.[8]).

Лемма 2. *(Принцип Бирмана-Швингера). Для любых $\mu,\lambda\in(0,+\infty)$ число собственных значений оператора $h_{\mu\lambda}$, лежащих левее точки $z<0$, совпадает с числом собственных значений оператора $G_{\mu\lambda}(z)$, лежащих правее точки 1.*

Для любых фиксированных $\mu,\lambda\in(0,+\infty)$ определим функцию $\Delta(\mu,\lambda;z)$ (определитель Фредгольма, оператора $I-G_{\mu\lambda}(z)$) по формуле

$$\Delta(\mu,\lambda;z) = det(I-G_{\mu\lambda}(z)).$$

Очевидно, что для любых $\mu, \lambda \in (0, +\infty)$ функция $\Delta(\mu, \lambda; \cdot)$ является аналитической в области $\mathbb{C} \backslash [0, 2]$.

Связь между собственными значениями самосопряженного оператора $h_{\mu\lambda}$ и нулями функции $\Delta(\mu, \lambda; z)$ устанавливается следующей леммой (см.[2]).

Лемма 3. *Для любых $\mu, \lambda \in (0, +\infty)$ число $z \in \mathbb{C} \backslash [0, 2]$ является $m-$ кратным собственным значением оператора $h_{\mu\lambda}$ тогда и только тогда, когда оно является $m-$ кратным нулем функции $\Delta(\mu, \lambda; z) = 0$.*

Положим

$$a(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{T}^1} \frac{dq}{\varepsilon(q) - z}, \quad b(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{T}^1} \frac{\cos q dq}{\varepsilon(q) - z}, \quad c(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{T}^1} \frac{\cos^2 q dq}{\varepsilon(q) - z}. \tag{2}$$

Предложение 1. a). *Функции $a(\cdot)$, $b(\cdot)$ и $c(\cdot)$ аналитичны в $\mathbb{C} \backslash [0, 2]$, положительны и монотонно возрастают в интервале $(-\infty, 0)$;*
b) функция $\Delta(\mu, \lambda; z)$ представляется в виде

$$\Delta(\mu, \lambda; z) = \Delta^{(1)}(\mu; z)\Delta^{(2)}(\lambda; z) - \mu\lambda b^2(z), \tag{3}$$

где $\Delta^{(1)}(\mu; z) = 1 - \mu a(z), \quad \Delta^{(2)}(\lambda; z) = 1 - \lambda c(z)$.

Доказательство. a). Положительность функций $a(z)$ и $c(z)$, определенных по (2), непосредственно вытекают из положительности подынтегральных функций и монотонности интеграла Лебега.

Используя элементарные преобразования, функцию $b(z)$ можно представить в виде

$$b(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^\pi \frac{2\cos^2 q}{(1-z)^2 - \cos^2 q} dq.$$

Теперь из положительности подынтегральной функции и монотонности интеграла Лебега вытекает положительность $b(\cdot)$.

Так как производные функций $a(z)$, $b(z)$ и $c(z)$ положительны, они являются монотонно возрастающими в $(-\infty, 0)$.

b). Оператор $G_{\mu\lambda}(z)$ отображает все пространство $L_2^e(\mathbb{T}^1)$ в подпространство S, натянутое на функции 1 и $\cos p$ и пространство S является инвариантным относительно оператора $G_{\mu\lambda}(z)$. Поэтому из (1) следует, что сужение $G_{\mu\lambda}(z)|_S$ оператора $G_{\mu\lambda}(z)$ на S представляется в виде матрицы

$$G_{\mu\lambda}(z)|_S = \begin{pmatrix} \mu a(z) & \lambda b(z) \\ \mu b(z) & \lambda c(z) \end{pmatrix}.$$

Отсюда вытекает, что детерминант оператора $I|_S - G_{\mu\lambda}(z)|_S$ имеет вид

$$det(I|_S - G_{\mu\lambda}(z)|_S) = \Delta(\mu,\lambda;z) = \begin{vmatrix} 1-\mu a(z) & -\lambda b(z) \\ -\mu b(z) & 1-\lambda c(z) \end{vmatrix},$$

где $I|_S-$ единичный оператор в S.

Предложение 2. *При любых $\mu,\lambda \in (0,+\infty)$ имеет место равенство (асимптотическое разложение)*

$$\Delta(\mu,\lambda;z) = C_{-\frac{1}{2}}(\mu,\lambda)(-z)^{-\frac{1}{2}} + C_0(\mu,\lambda) + O((-z)^{\frac{1}{2}}), \quad z\to 0-, \qquad (4)$$

где

$$C_{-\frac{1}{2}}(\mu,\lambda) = \frac{\mu\lambda-(\mu+\lambda)}{\sqrt{2}}, \quad C_0(\mu,\lambda) = 1-\lambda(\mu-1).$$

Доказательство. Вычисляя интегралы в (2) мы приходим к следующим равенствам

$$a(z) = \frac{(-z)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}} f(z), \quad b(z) = \frac{(-z)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}} f(z) - 1 + \frac{(-z)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}} f(z),$$

$$c(z) = \frac{(-z)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}} f(z) - 1 + \sqrt{2}(-z)^{\frac{1}{2}} g(z) + z,$$

где $\quad f(z) = \frac{1}{\sqrt{1+(-\frac{z}{2})}}, \quad g(z) = \sqrt{1+(-\frac{z}{2})}.$

Далее, разлагая функции $f(z)$ и $g(z)$ в ряд Тейлора в некоторой окрестности точки $z=0$, имеем:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{1+(-\frac{z}{2})}} = 1 - \frac{1}{4}(-z) + o(-z) \quad z\to 0-,$$

$$g(z) = \sqrt{1+(-\frac{z}{2})} = 1 + \frac{1}{4}(-z) + o(-z), \quad z\to 0-.$$

Используя эти разложения, получим следующие асимптотические разложения

$$a(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-z)^{-\frac{1}{2}} + O(-z)^{\frac{1}{2}}, \quad z \to 0-,$$

$$b(z) = c(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-z)^{-\frac{1}{2}} - 1 + O(-z)^{\frac{1}{2}}, \quad z \to 0- .$$

Подставляя эти разложения в выражение для $\Delta(\mu, \lambda; z)$, получим разложение (4).

Предложение 3. *Пусть* $\mu, \lambda \in (0, +\infty)$. *Тогда верны следующие утверждения*

a) если $\mu\lambda < \mu + \lambda$, *то* $\lim\limits_{z\to 0-} \Delta(\mu, \lambda; z) = -\infty$;

b) если $\mu\lambda > \mu + \lambda$, *то* $\lim\limits_{z\to 0-} \Delta(\mu, \lambda; z) = +\infty$;

c) если $\mu\lambda = \mu + \lambda$, *то* $\lim\limits_{z\to 0-} \Delta(\mu, \lambda; z) = 1 - \mu < 0$.

Доказательство. a). Пусть $\mu\lambda < \mu + \lambda$. Тогда $C_{-\frac{1}{2}}(\mu, \lambda) < 0$, и поэтому из асимптотического разложения (4) получим

$$\lim_{z\to 0-} \Delta(\mu, \lambda; z) = -\infty.$$

b). Пусть $\mu\lambda > \mu + \lambda$. Тогда $C_{-\frac{1}{2}}(\mu, \lambda) > 0$. Как и в случае a) получим

$$\lim_{z\to 0-} \Delta(\mu, \lambda; z) = +\infty.$$

c). Пусть $\mu\lambda = \mu + \lambda$. Тогда $C_{-\frac{1}{2}}(\mu, \lambda) = 0, \quad C_0(\mu, \lambda) = 1 - \mu$ и $\lambda = \frac{\mu}{\mu - 1}$. Тогда из $\mu, \lambda \in (0, +\infty)$ следует, что $\mu > 1$. Следовательно, из (4) имеем

$$\lim_{z\to 0-} \Delta(\mu, \lambda; z) = 1 - \mu < 0.$$

Лемма 4. *Оператор* $h_{\mu\lambda}$ *имеет не более чем двух собственных значений, лежащих ниже точки* $z = 0$.

Доказательство. В силу разложения (4) (Предложения 2) при любых фиксированных $\mu, \lambda \in (0, +\infty)$ функция $\Delta(\mu, \lambda; z)$ не имеет нулей в интервале $(-\delta, 0)$ при достаточно малых $\delta > 0$. Следовательно в силу леммы 3 оператор $h_{\mu\lambda}$ не имеет собственных значений на интервале

$(-\delta, 0)$. Пусть $z_0 \in (-\delta, 0)$. $G_{\mu\lambda}(z_0)$ является оператором ранга 2, т.е. его область значений есть двумерное подпространство, натянутое на векторы 1 и $\cos p$. Поэтому он не имеет более чем двух собственных значений (учитывая кратности), лежащих в интервале $(1, +\infty)$. В силу принципа Бирмана-Швингера (лемма 2) оператор $h_{\mu\lambda}$ не имеет более чем двух собственных значений в интервале $(-\infty, z_0)$. Как уже отмечано, оператор $h_{\mu\lambda}$ в интервале $(-\delta, 0)$ не имеет собственных значений. Поэтому мы приходим к заключению, что $h_{\mu\lambda}$ может иметь только не более чем двух собственных значений, лежащих на интервале $(-\infty, z_0)$.

Предложение 4. *Для любого* $\mu \in (0, +\infty)$ *(соотв.* $\lambda \in (0, +\infty)$*) существует единственное число* $\zeta_1(\mu) \in (-\infty, 0)$ *(соотв.* $\zeta_2(\lambda) \in (-\infty, 0)$*) такое, что*

$$\Delta^{(1)}(\mu; \zeta_1(\mu)) = 0 \qquad (\textit{соотв.} \quad \Delta^{(2)}(\lambda; \zeta_2(\lambda)) = 0). \tag{5}$$

Доказательство. В силу предложения 1 при фиксированном $\mu \in (0, +\infty)$ (соотв. $\lambda \in (0, +\infty)$) функция $\Delta^{(1)}(\mu; \cdot)$ (соотв. $\Delta^{(2)}(\lambda; \cdot)$) непрерывна и монотонно убывает на $(-\infty, 0)$. Кроме того, имеют места равенства

$$\lim_{z \to 0-} \Delta^{(1)}(\mu; z) = -\infty, \quad \lim_{z \to -\infty} \Delta^{(1)}(\mu; z) = 1$$

и

$$\lim_{z \to 0-} \Delta^{(2)}(\lambda; z) = -\infty, \quad \lim_{z \to -\infty} \Delta^{(2)}(\lambda; z) = 1.$$

Поэтому из свойств непрерывной функции сменяющий знак следует утверждение предложения 4.

Положим
$\zeta_{min}(\mu, \lambda) = min\{\zeta_1(\mu), \zeta_2(\lambda)\}, \quad \zeta_{max}(\mu, \lambda) = max\{\zeta_1(\mu), \zeta_2(\lambda)\}.$

Основным результатом данной работы является следующая

Теорема 1. a). *Пусть* $\mu\lambda \leq \mu + \lambda$. *Тогда оператор* $h_{\mu\lambda}$ *имеет единственное собственное значение* $z^{(1)}(\mu, \lambda) \in (-\infty, 0)$. *При этом выполняется неравенство* $z^{(1)}(\mu, \lambda) < \zeta_{min}(\mu, \lambda)$;

b) *Пусть* $\mu\lambda > \mu + \lambda$. *Тогда оператор* $h_{\mu\lambda}$ *имеет два собственных значений* $z^{(1)}(\mu, \lambda) \in (-\infty, 0)$ *и* $z^{(2)}(\mu, \lambda) \in (-\infty, 0)$. *При этом выполняются соотношения*

$$z^{(1)}(\mu, \lambda) < \zeta_{min}(\mu, \lambda) \leq \zeta_{max}(\mu, \lambda) < z^{(2)}(\mu, \lambda).$$

Доказательство. a) Пусть $z < 0$. Функции $\Delta^{(1)}(\mu; \cdot)$ и $\Delta^{(2)}(\lambda; \cdot)$ монотонно убывают на $(-\infty, 0)$ и поэтому для любого $z < \zeta_{min}(\mu, \lambda)$ имеем

$$\Delta^{(1)}(\mu; z) > \Delta^{(1)}(\mu; \zeta_1(\mu)) = 0, \qquad \Delta^{(2)}(\lambda; z) > \Delta^{(2)}(\lambda; \zeta_2(\lambda)) = 0.$$

Отсюда и из предложения 1 следуют, что неравенство

$$\frac{\partial \Delta(\mu, \lambda; z)}{\partial z} = -\mu a^{'}(z)\Delta^{(2)}(\lambda; z) - \lambda c^{'}(z)\Delta^{(1)}(\mu; z) - 2\mu\lambda b(z)b^{'}(z) < 0$$

выполняется при всех $z < \zeta_{min}(\mu, \lambda)$, т.е. функция $\Delta(\mu, \lambda; \cdot)$ монотонно убывает на интервале $(-\infty, \zeta_{min}(\mu, \lambda))$. Из равенств (2) и (5) следуют неравенства

$$\Delta(\mu, \lambda; \zeta_{min}(\mu, \lambda)) = \Delta(\mu, \lambda; \zeta_{max}(\mu, \lambda)) = -\mu\lambda b^2(z) < 0. \qquad (6)$$

Из предложения детерминанта Фредгольма следует равенство

$$\lim_{z \to -\infty} \Delta(\mu, \lambda; z) = 1.$$

Поэтому существует единственное число $z^{(1)}(\mu, \lambda) \in (-\infty, \zeta_{min}(\mu, \lambda))$ такое, что

$$\Delta(\mu, \lambda; z^{(1)}(\mu, \lambda)) = 0.$$

В силу леммы 3 число $z^{(1)}(\mu, \lambda)$ является собственным значением оператора $h_{\mu\lambda}$.

Для доказательства пункта a) покажем, что в этом случае функция $\Delta(\mu, \lambda; \cdot)$ не имеет нулей в интервале $[\zeta_{min}(\mu, \lambda), 0)$, т.е.,

$$\Delta(\mu, \lambda; z) < 0 \quad \text{при} \quad z \in [\zeta_{min}(\mu, \lambda), 0). \qquad (7)$$

Действительно. В силу условия a) теоремы и предложения 3 имеет место неравенство

$$\lim_{z \to 0-} \Delta(\mu, \lambda; z) < 0$$

Поэтому, если бы выполнялось неравенство $\Delta(\mu, \lambda; z') \geq 0$ в некоторой точке $z^{'} \in [\zeta_{min}(\mu, \lambda), 0)$, то в силу аналитичности функции $\Delta(\mu, \lambda; z)$ и неравенства (6) функция $\Delta(\mu, \lambda; \cdot)$ имела бы не менее двух нулей (с учетом кратности) на интервале $[\zeta_{min}(\mu, \lambda), 0)$. Тогда в силу (см. леммы 3), оператор $h_{\mu\lambda}$ имеел бы не менее трех собственных значений на интервале $(-\infty, 0)$, что противоречит утверждению леммы 4.

В силу леммы 4, из неравенства (7) вытекает, что оператор $h_{\mu\lambda}$ не имеет собственных значений на интервале $[\zeta_{min}(\mu, \lambda), 0)$, что и закончивает часть a) теоремы.

b). Выше мы уже доказали, что оператор $h_{\mu\lambda}$ имеет единственное собственное значение в интервале $(-\infty, \zeta_{min}(\mu, \lambda))$. По условию b) теоремы и в силу утверждения b) предложения 3 имеем

$$\lim_{z \to 0-} \Delta(\mu, \lambda; z) = +\infty.$$

Отсюда и из (5), рассуждая как выше, приходим к заключению, что функция $\Delta(\mu, \lambda; \cdot)$ на интервале $(\zeta_{max}(\mu, \lambda), 0)$ имеет единственную нуль $z^{(2)}(\mu, \lambda)$. (Если бы она имела больше чем одного нуля, то это противоречила бы к лемме 4.)

Таким образом $z^{(1)}(\mu, \lambda)$ и $z^{(2)}(\mu, \lambda)$ являются собственными значениями оператора $h_{\mu\lambda}$ на интервале $(-\infty, 0)$, что доказывает утверждение b) теоремы.

Теорема 1 доказана.

Литература

1. Albeverio S., Lakaev S.N., Makarov K.A. and Muminov Z.I. The Threshold effects for the two-particle Hamiltonians. Communications in Mathematical Physics, 262 (2006), 91-115.

2. Альбеверио С., Гестези Ф., Хеэг-Крон Р., Хольден, Решаемые модели в квантовой механике. М.; Мир, 1991.

3. Лакаев С.Н. Об эффекте Ефимова в системе трех одинаковых квантовых частиц. Функ. анализ и его прил. Т. 27. Вып. 3. 15-28.(1993).

4. Лакаев С.Н., Тилавова Ш.М., Слияния собственных значений и резонансов двухчастичного оператора Шредингера. ТМФ. Т.101.№2, 235-251.(1994).

5. Халхужаев А.М. О числе собственных значений двухчастичного оператора Шредингера на решетке с взаимодействием на соседних узлах. УзМЖ. №3, 32-39.(2000).

6. Лакаев С.Н., Бозоров И.Н. О числе собственных значений двухчастичного дискретного оператора Шредингера на одномерной решетке. Труды международной конференции "Современные проблемы математической физики и информационных технологий", Т. №1, с. 101-105. (2005).

7. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. T.IV: Анализ операторов. М. Мир, 1982.

8. Klaus M., Simon B. Coupling constants thresholds in non-relativistic quantum mechanics. I. Short range two body Case. Ann. Phys. 130, 251-281 (1980).

Самаркандское отделение
АН РУз

Дата поступления
29.05.06

Uzbek Mathematical
Journal, 2007,№2, pp.81-89

УДК 512.7 +514.7

Эквивалентность кривых относительно действия симплектической группы

К.К.Муминов

Egri chiziqlarning chekli sistemasi uchun (simplektik gruppaga nisbatan) ekvivalentlik belgisi keltirilgan.

In this paper for finite system of curves sign of equivalence (with respect to symplectic group) is reduction.

Пусть V- неприводимое аффинное алгебраическое многообразие, G- алгебраическая группа, регулярно действующая на V, $\{x_i\}$, $\{y_i\}$-две конечные системы точек в V, $i = \overline{1,\ n}$. Одной из важных задач теории инвариантов является нахождение условий, при которых системы $\{x_i\}$ и $\{y_i\}$ - G - эквивалентны (т.е. $y_i = x_i g$, $i = \overline{1,\ n}$ для некоторого $g \in G$). В [1-3] указывается способ решения этой задачи, для реализация которого необходимо:

a) установление конечной порождаемости кольца G - инвариантных многочленов систем конечного число точек;

b) описание рационального базиса поля G-инвариантных рациональных функций систем конечного числа точек и базисных соотношение между ними.

Решение задач a) и b) позволяет описывать условия для G-эквивалентности систем конечного числа точек в терминах G-инвариантных рациональных функций.

Аналогичная ситуация возникает и при рассмотрении следующей важной задачи дифференциальной геометрии кривых. Пусть V-гладкое многообразие, G-группа Ли, гладко действующая на V, $x,\ y$ -две гладкие кривые в V. Необходимо найти условия, обеспечивающая G-эквивалентности кривых $x,\ y$. Эта задача в более общей постановке (для пары подмногообразий) была поставлена Э. Картаном в начале 20 века и известна в настоящее время как проблем эквивалентности Картана.

Глубокое исследование этой проблемы методом подвижной репера проведено самим Э. Картаном [4].

Развитие методов теории инвариантов позволяет активно использовать их в решении указанной задачи дифференциальной геометрии как для пары кривых, так и для конечных систем кривых. Для этой цели рассматриваются и изучаются дифференциальные поля всех дифференциальных G-инвариантных рациональных функций конечной системы кривых и для них решаются задачи типа а) и b). Этот подход рассматривался в работах [5,6] для действия некоторых специальных групп и подробно обсуждался в [7]. В случае симплектической группы решена в [8] задача об эквивалентности путей. В настоящей работе с использованием результатов работ [7], [8] дается решение задачи об эквивалентности кривых и конечной системы кривых относительно действия симплектической группы $Sp(2n, R)$. Используется терминология и обозначения из [1], [7], [8], [9], [10].

Пусть $V = R^n$ -n- мерное векторное пространство над полем R действительных чисел. Элементы из V представляются в виде n - мерных вектор строк.

$\Im$ - путем $x(t)$ назовем бесконечно дифференцируемое отображение x из отрезка $\Im = [a, b] \subset R$ в V. В координатах такой путь задается вектор-функций $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$, где $t \in \Im$, а $(x_1, \ldots, x_n)$ -декартовы координаты в V. Образ отрезка $\Im$ при отображение $x : t \to x\,(t)$ называется носителем для $x(t)$ и обозначается через $\tilde{x} = \{(x_1(t), \ldots, x_n(t)) \in R^n, t \in \Im\}$. $\Im$ - путь $x(t)$ называется простым, если $x(t)$ инъективное отображение из $\Im$ в V.

Пусть $GL(n, R)$ группа всех обратимых линейных преобразований V, G - некоторая ее подгруппа. Будем рассматривать правое действия $(g, x) \to x\,g$ группы G в V, т.е. обычное умножение сроки на матрицу.

Два $\Im$ - пути $x\,(t)$ и $y\,(t)$ называются G - эквивалентными если существует такой элемент $g \in G$, что $x\,(t)g = y\,(t)$ для любого $t \in \Im$.

Производной r - го порядка от $\Im$ - пути $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ назовем вектор $\overset{(r)}{x}(t) = \left(\overset{(r)}{\underset{1}{x}}(t), \ldots, \overset{(r)}{\underset{n}{x}}(t)\right)$, где $\overset{(r)}{\underset{i}{x}}(t) - r$ - ая производная координатной функций $x_i\,(t)$, $i = 1, \ldots, n$.

Для каждого $\Im$ - пути $x\,(t)$ рассмотрим $n \times n$ матрицу $M(x)$, в которой r - строкой служит координаты вектора $\overset{(r-1)}{x}$ $r = 1, \ldots, n$. Определитель для матрицы $M(x)$ запишем в виде $[x\,x'\,x''\cdots\overset{(n-1)}{x}]$. В дальнейшем будут рассматриваться только простые $\Im$- пути $x\,(t)$, обладающие следующим свойством регулярности $[x\,x'\,x''\cdots\overset{(n-1)}{x}](t)\neq 0$ при всех $t\in\Im$. Заметим, что два $\Im$ - пути $x\,(t)$ и $y\,(t)$ являются G - эквивалентными в том и только в том случае, когда $M(x)=M(x)\,g$ для некоторого $g\in G$.

Два пути $x:\Im_1\to V,\quad y:\Im_2\to V$ называются D - эквивалентными, если существует такой C^∞ - диффеоморфизм $\varphi:\Im_2\to\Im_1$, что $y(t)=x\,(\varphi(t))$ и $\varphi'(t)\neq 0$ для всех $t\in\Im_2$.

Класс $\gamma=\hat{x}$ путей, D - эквивалентных пути x называется кривой, порожденной путем $x\,(t)$ ([7], стр. 25), а путь $y\in\gamma$ называется параметризация кривой γ.

Кривая называется простой (соответственно регулярной), если она является классом эквивалентности простого (соответственно, регулярного) пути.

Ясно, что D - эквивалентные пути $x\,(t)$ и $y\,(t)$ имеют один и тот же носитель, т.е. $\tilde{x}=\tilde{y}$. Потому носителем кривой γx будем называть множество $\tilde{x}$. Отметим, что переход от одного эквивалентного пути к другому означает, что, не меняя траектории движения точки в R^n, мы изменяем скорость, с которой она пробегает эту траекторию.

Заметим, что из равенства носителей $\tilde{x}=\tilde{y}$ путей $x\,(t)$ и $y\,(t)$, вообще говоря, не следует их D - эквивалентность. Однако в классе простых и регулярных путей обратная импликация также верна.

Утверждение 1. ([11], стр. 25). *Если пути $x\,(t)$ и $y\,(t)$ просты, регулярны и имеют один и тот же носитель (т.е. $\tilde{x}=\tilde{y}$), то эти пути D - эквивалентны.*

Таким образом, с точностью до D - эквивалентности простые регулярные пути однозначно определяются их носителями, и поэтому кривые, порождаемые такими путями могут быть отождествлены со своими носителями.

Если $g\in G$, и $x-\Im$ - путь в R^n, то $x\,g$ также $\Im$ -путь в R^n. Кривую порожденную $\Im$ - путем $x\,g$ будем обозначать через $\gamma\,g$, где $\gamma=\hat{x}$, т.е. $\gamma\,g=\widehat{x\,g}$.

Утверждение 2. *Пусть $\gamma_1=\hat{x},\ \ \gamma_2=\hat{y}$ простые регулярные кривые, порожденные $\Im_1$ - путем x и $\Im_2$ - путем y. Следующие условия эквивалентны:*

1. *Существует такое $g \in G$ что $\gamma_2 = \gamma_1 g$.*

2. *Существуют такие $g \in G$ и C^∞ - диффеоморфизм $\varphi : \Im_2 \to \Im_1$ такие, что $y(t) = x(\varphi(t)) \cdot g$ для любого $t \in \Im_2$.*

Доказательство. $1 \to 2$. Равенство $\hat{y} = \gamma_2 = \hat{x} g$ означает, что $\tilde{y} = \tilde{x}\, g$, $g = (g_{i_j})_{i,j=1}^n \in G$, т.е. носители простых регулярных путей $y\,(t) = (y_1\,(t), \ldots, y_n(t))$ и $z(t) = \left(\sum\limits_{j=1}^{n} g_{j\,1}\, x_j(t), \ldots, \sum\limits_{j=1}^{n} g_{j\,n}\, x_j(t)\right)$ совпадают. Из утверждения 1 следует, что существует такой C^∞ - диффеоморфизм $\varphi : \Im_2 \to \Im_1$, что $y(t) = z(\varphi(t))$, т.е. $y(t) = x(\varphi(t)) \cdot g$.

$2 \to 1$. Пусть $y(t) = x(\varphi(t)) \cdot g$ для любого $t \in \Im_2$ и некоторых $g \in G$, C^∞ - диффеоморфизма $\varphi : \Im_2 \to \Im_1$.

Пути $x\,(t)$ и $x(\varphi(t))$ - D - эквивалентны, и потому $\hat{x} = \widehat{x \circ \varphi}$. Следовательно, $\gamma_2 = \hat{y} = (\widehat{x \circ \varphi)} g = \widehat{x\, g} = \gamma_1 g$.

Кривые γ_1 и γ_2 будем называть G - эквивалентными, если существует такое $g \in G$, что $\gamma_2 = \gamma_1 g$.

Ясно, что G - эквивалентность путей $x\,(t)$ и $y\,(t)$ влечет G - эквивалентности кривых $\hat{x}$ и $\hat{y}$. Обратное, вообще говоря, неверно.

Основная цель настоящей работы - нахождение необходимых и достаточных условий для G - эквивалентности кривых в случае симплектической группы $G = Sp(2n, R) = \{g \in GL(2n, R) : g\, I\, g^T = I\}$, где g^T - транспонированная матрица для g , а $I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Напомним, что $[x, y] = x\, I\, y = x_1 y_2 - x_2 y_1 + \cdots + x_{2n-1} y_{2n} - x_{2n} y_{2n-1}$ есть кососимметрическое произведение векторов x и y из R^{2n}.

Для решения этой задачи нам понадобится следующий критерий $Sp(2n, R)$ - эквивалентности путей из [8].

Теорема 1. ([8]). *Два $\Im$ - пути $x\,(t)$ и $y\,(t)$ $Sp(2n, R)$ - эквивалентны тогда и только тогда, когда $\left[\overset{(m-1)}{x}(t),\ \overset{(m)}{x}(t)\right] = \left[\overset{(m-1)}{y}(t),\ \overset{(m)}{y}(t)\right]$ для всех $t \in \Im$ и $m = 1, \ldots, 2n$.*

Пусть $x\,(t) : [a, b] \to R^{2n}$ простой регулярный путь (предполагается, что $[x(t), x'(t)] \neq 0$ для всех $t \in [a, b]$). Рассмотрим бесконечно дифференцируемую функцию, $s_x(t) = \int\limits_a^t [x(\tau),\ x'(\tau)]\, d\tau$ отображающую отрезок $[a,b]$ в отрезок $\Im = s_x([a,b])$ (здесь $\Im = [0,d]$, если $[x(t),\ x'(t)] > 0, \quad t \in [a,b]$, либо $[d,0]$, если $[x(t),\ x'(t)] < 0, \quad t \in [a,b]$, где $d = \int\limits_a^b [x(\tau),\ x'(\tau)]\, d\tau$). Поскольку $s'_x(t) = [x(t),\ x'(t)] \neq 0$ для всех $t \in [a,b]$, то существует обратная к $s_x(t)$ функция $t_x(s) : \Im \to [a,b]$.

Утверждение 3. *Пусть $x\,(t)$ простой регулярный путь, тогда*

(i) $s_{x\,g}(t) = s_x(t)$ *(и потому $t_{x\,g}(s) = t_x(s)$) для любого $g \in Sp(2n,R)$.*

(ii) *Для любого C^∞ - диффеоморфизма*

$\varphi : [a_1,b_1] \to [a,b]$ верны равенства.

$s_{x\circ\varphi} = s_x\left(\varphi\left(r\right)\right), \quad r \in [a_1,b_1]$;

$\varphi\left(t_{x(\varphi)}(s)\right) = t_x(s)$, *для всех s.*

Доказательство.

(i) Для каждого $g \in Sp(2n,R)$ имеем, что

$$S_{xg}(t) = \int\limits_a^t [x(\tau)g, x'(\tau)g]d\tau = \int\limits_a^t x(\tau)gI(x'(\tau)g)^T d\tau =$$

$$= \int\limits_a^t x(\tau)gIg^T(x'(\tau))^T d\tau = \int\limits_a^t x(\tau)I(x'(\tau))^T d\tau = \int\limits_a^t [x(\tau),x'(\tau)]d\tau = S_x(t).$$

(ii) Сделав замену переменных $t = \varphi(r)$, получим

$$S_{x(\varphi)}(r) = \int\limits_{a_1}^r \left[x(\varphi(r)), \frac{d}{dr}x(\varphi(r))\right] dr = \int\limits_{a_1}^r \left[x(\varphi(r)), \frac{d\varphi}{dr}\cdot\frac{d}{d\varphi}x(\varphi(r))\right] dr =$$

$$\int\limits_{\varphi(a_1)}^{\varphi(r)} \left[x(t), \frac{d}{dt}x(t)\right] dt = S_x(\varphi(r))$$

В частности, это означает, что области значений функций $s_{x(\varphi)}$ и s_x совпадают (обозначим эту область через I). Кроме того, для каждого, $s \in I$ имеем, что $t_{x(\varphi)}(s) = \left(s_x \circ \varphi\right)^{-1}(s) = \left(\varphi^{-1}\cdot s_x^{-1}\right)(s) = \varphi^{-1}\left(s_x^{-1}(s)\right)$, т.е. $\varphi\left(t_{x(\varphi)}(s)\right) = t_x(s)$.

В случае, когда группа $G = R^n \triangleleft SL(n,R)$, есть полупрямые произведение групп R^n и $SL(n,R) = \{g \in GL(R^n) : \det g = 1\}$ вариант утверждения 3 получен в [5].

Следствие 1. *Пусть γ простая регулярная кривая, $x - \Im_1$ - путь, $y - \Im_2$ - путь из класса γ. Тогда $x\left(t_x(s)\right) = y\left(t_y(s)\right)$ для всех $s \in I$, где $I = s_x(\Im_1) = s_y(\Im_2)$.*

Доказательство. Согласно утверждению 1 существует такой C^∞ - диффеоморфизм $\varphi : \Im_2 \to \Im_1$ что $y = x \circ \varphi$. В силу утверждения 3 (ii) имеем, что $y\left(t_y(s)\right) = x\left(\varphi\left(t_y(s)\right)\right) = x\left(\varphi\left(t_{x(\varphi)}(s)\right)\right) = x\left(t_x(s)\right)$ для всех $s \in I$.

Замечание 1. Из утверждения 3 (i) следует, что параметризация $y(s) = x\left(t_x(s)\right)$ кривой $\gamma = \hat{x}$, порожденной простым регулярным $\Im$ - путем x, обладает следующим свойством $Sp(2n,R)$ - инвариантности: $t_{x\,g}(s) = t_x(s)$ для всех $g \in Sp(2n,R)$, $\quad s \in s_x(\Im)$.

Параметризации кривой γ вида $y(s) = x\left(t_x(s)\right)$, $x \in \gamma$ естественно называть инвариантными.

Укажем следующие полезные свойства параметризации $y(s) = x\left(t_x(s)\right)$ кривой $\gamma = \hat{x}$.

Утверждение 4. *Пусть x простой регулярный $\Im$ - путь, порождающий кривую γ, $y(s) = x\left(t_x(s)\right)$, $s \in I = s_x(\Im)$. Тогда*

(i) $s_y(s) = s$ и $[y(s), y'(s)] = 1$ для всех $s \in I$.

(ii) *Если $z(s)$, $y(s)$ - инвариантные параметризации кривой γ, то $z(s) = y(s)$.*

Доказательство. (i) Согласно утверждению 3 (ii) имеем, что $\int\limits_0^s [y, y']\, d\tau = s_y(s) = s_{x(t_x)}(s) = s_x\left(t_x(s)\right) = s$. Поэтому $[y(s), y'(s)] = \frac{ds_y(s)}{ds} = 1$ для любого s.

Доказательство. (ii) непосредственно вытекает из следствия 1.

Теорема 2. *Пусть γ, β -простые регулярные кривые и x, y их инвариантные параметризации, $G \in Sp(2n,R)$. Следующие условия эквивалентны: (i) x и y - G - эквивалентны;*

(ii) γ и β - G - эквивалентны.

Доказательство. Импликация $(i) \to (ii)$ очевидна.

$(ii) \to (i)$. Пусть γ и β - G - эквивалентны, $z \in \gamma$. Тогда существует такое $g \in G$, что $\beta = \gamma\, g$, в частности, $zg \in \beta$. Поскольку $x(s), y(s)$ инвариантные параметризации кривых γ и β, то, согласно утверждениям 3(i), 4(ii) имеем, что $x(s) = z\,(t_z(s))$, $y(s) = (zg)\,(t_{zg}(s))$ и $x\,g(s) = g\,(z\,(t_z(s))) = (zg)\ (t_z(s)) = (zg)\,(t_{zg}(s)) = y(s)$. Следовательно, пути x и y - G - эквивалентны.

Замечание 2. В случая группы $G = R^n \lhd SL(n,R)$ вариант утверждение теоремы 2 получен в [5]. Для общих линейных подгрупп в $GL(n,R)$, в случае существования инвариантной параметризация кривых проблематика теоремы 2 обсуждалась в [7].

Из теорем 1, 2 и утверждения 4 (i) вытекает следующая

Теорема 3. *Пусть γ и β кривые, порожденные соответственно простыми регулярными $\Im_1$ - путем x и $\Im_2$ - путем y. Пусть $u(s) = x\,(t_x(s))\,,\quad \vartheta(\tau) = y\,(t_y(\tau))$ - инвариантная параметризации кривых γ и β соответственно, где $s \in s_x(\Im_1),\quad \tau \in s_y(\Im_2)$.*

Тогда γ и β - $Sp(2n,R)$ - эквивалентны в том и только в том случае, когда $\int\limits_{\Im_1} [x\,(\tau), x'\,(\tau)]d\tau = \int\limits_{\Im_2} [y\,(\tau), y'\,(\tau)]d\tau$ и $\left[\overset{(m)}{u}(s),\ \overset{(m+1)}{u}(s)\right] = \left[\overset{(m)}{\vartheta}(s),\ \overset{(m+1)}{\vartheta}(s)\right]$ для любых $m = 1,\ldots,2n-1$, и всех $s \in s_x(\Im_1) = s_y(\Im_2)$.

Замечание 3. В [12] методами дифференциальной геометрии даны $2n-1$ функций (кривизны и кручений кривой), которые восстанавливают кривую с точностью до $Sp(2n,R)$ - эквивалентности. Наш алгебраический подход дает другой набор из $(2n-1)$ инвариантов, определяющих кривую в R^{2n} с точностью до $Sp(2n,R)$ - эквивалентности.

Рассмотрим теперь вопрос о $Sp(2n,R)$ - эквивалентности конечных систем кривых. Напомним (см. например [8]), что конечные системы $\Im$ - путей $\{x_1,\ldots,x_k\}$ и $\{y_1,\ldots,y_k\}$ называются $Sp(2n,R)$ - эквивалентными, если существует такое $g \in Sp(2n,R)$, что $y_i(t) = x_i(t)g$ для всех $t \in \Im,\quad i \in \overline{1,k}$. Из результатов работ ([7], теорема 13.3), ([8], теорема 5) вытекает

Теорема 4. *Пусть x_j, y_j - простые регулярные $\Im_j$ - пути $j = 1,\ldots,k$. Системы $\{x_j\}_{j=1}^k$ и $\{y_j\}_{j=1}^k$ $Sp(2n,R)$ - эквивалентны тогда и только тогда, когда $\left[\overset{(m-1)}{x_1}(t_1),\ \overset{(m)}{x_1}(t_1)\right] = \left[\overset{(m-1)}{y_1}(t_1),\ \overset{(m)}{y_1}(t_1)\right]$, $\left[\overset{(m-1)}{x_1}(t_1),\ x_j(t_j)\right] = \left[\overset{(m-1)}{y_1}(t_1), y_j(t_j)\right]$ для всех $m = 1,\ldots,2n,\quad j =$*

$2, \ldots, k$, *где* $t_i \in \Im_i, \quad i = 1, \ldots, k$.

Пусть $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_k\}, \quad \{\beta_1, \ldots, \beta_k\}$ две конечные системы простых регулярных кривых. Будем говорить, что эти системы кривых $Sp(2n, R)$ - эквивалентны, если существует такое $g \in Sp(2n, R)$, что $\beta_i = \gamma_i g, \quad i = 1, \ldots, k$. Следующая теорема дает критерий $Sp(2n, R)$ - эквивалентности конечных систем кривых.

Теорема 5. *Пусть* γ_j *и* β_j *кривые, порожденные, соответственно простыми регулярными* $\Im_j$ *- путями* $x_j(t)$ *и* $\Im'_j$ *- путями* $y_j(t), \quad j = 1, \ldots, k$. *Пусть* $u_j(s) = x_j\left(t_{x_j}(s)\right), \quad \vartheta_j(\tau) = y_j\left(t_{y_j}(\tau)\right)$ *- инвариантные параметризации кривых* γ_j *и* β_j *соответственно.*

Тогда конечные системы кривых $\{\gamma_j\}_{j=1}^k$ *и* $\{\beta_j\}_{j=1}^k$ *-* $Sp(2n, R)$ *- эквивалентны в том и только в том случае, когда*

$$\int\limits_{\Im_j} \left[x_j(\tau),\ x'_j(\tau)\right] d\tau = \int\limits_{\Im' j} \left[y_j(\tau),\ y'_j(\tau)\right] d\tau, \quad j = 1, \ldots, k$$

и

$$\left[\overset{(m)}{u_1}(s_1),\ \overset{(m+1)}{u_1}(s_1)\right] = \left[\overset{(m)}{\vartheta_1}(s_1),\ \overset{(m+1)}{\vartheta_1}(s_1)\right], \quad \left[\overset{(r)}{u_1}(s_1),\ u_j(s_j)\right] =$$

$$= \left[\overset{(r)}{\vartheta_1}(s_1), \vartheta_j(s_j)\right]$$

для всех, $m = 1, \ldots, 2n-1, \quad r = 0, \ldots, 2n-1 \quad j = 1, \ldots, k$, *где* $s_i \in s_{x_i}(\Im_i) = s_{y_i}(\Im'_i), \quad i = 1, \ldots, k$.

Доказательство следует непосредственно из теорем 2 и 4.

Литература

1. Вейль Г. Классические группы, их инварианты и представления -М: Ин.лит., 1947.-408 с.

2. Дьҷдонне Ж., Керрол Дж., Мамфод Д. Геометрическая теория инвариантов. -М: Мир, 1974.-408 с.

3. Винберг Э.Б., Попов В.Л. Теория инвариантов. Итоги науки и техн. Современ. пробл. Матем. М: ВИНИТИ, 1989.-Т.55.-С.137-309.

4. Картан Э. Теория конечных непрерывных групп и дифференциальная геометрия, изложенные методом подвижного репера. -Волгоград: ПЛАТОН, 1998.-367с.

5. Djawat Khadjiev. Omer Peksen. The complete system of global integral and differential invariants for equi-affine curves. Differential Geometry and Applications 2004.v 20 №2.p. 167-175.

6. Хаджиев Дж. Об инвариантном параметре для кривых. Докл. УзССР. 1986. №7. С. 5-6.

7. Хаджиев Дж. Приложение теория инвариантов к дифференциальной геометрии кривых. -Ташкент: ФАН,1988. -136 с.

8. Муминов К.К. Эквивалентность путей относительно действия симплектической групп. Известия ВУЗ. Математика. 2002. №7 С. 27-38.

9. Kolchin E.R. Differential algebra and algebraic groups. -New York-London: Academic press, 1973-448 p.

10. Капланский И. Введение в дифференциальную алгебру. -М: Ин.лит., 1959.-88с.

11. Постников М.М. Гладкие многообразия М.:Наука Ф-М 1987.-478с.

12. Яглом И.М. Кривые в симплектическом пространстве. Труды семинара по векторному и тензорному анализу. Вып. X-1956. С. 119-137.

Национальный университет
Узбекистана им. М.Улугбека

Дата поступления
20.12.06

Uzbek Mathematical
Journal, 2007,№2, pp.90-101

УДК 515.12

О некоторых характеризациях суперпаракомпактных экстремально несвязных пространств и групп

Д.К.Мусаев, С.Д.Мусаева

Ushbu maqolada (bo‘sh) superparakompaktli fazolar bilan ekstremal bog’lanmagan fazolar orasidagi o’zoro munosabatlar o’rganilgan. Ekstremal bog‘lanmagan superparakompaktli hamda ekstremal bog‘lanmagan lokal bikompaktli parakompakt fazolarining tashqi va ichki tavsiflanishlari berilgan.

In the paper, mutual relations between (weakly) superparacompactness and extremely unconnectness are studied. Exterior and interior characterizations are given for extremely unconnected superparacompact and extremely unconnected local bicompact paracompact spaces. In addition, it is proved existence of a superparacompact unconnected group, the space of which is not discrete. It is shown that non-every diadic superparacompact extremely unconnected group is discrete.

Всюду ниже под пространством понимается топологическое пространство, под отображением — непрерывное отображение пространств.

Для системы $\omega = \{O_\alpha : \alpha \in A\}$ подмножеств пространства X и $M \subseteq X$ считаем $\cup\omega = \cup\{O_\alpha : \alpha \in A\}$; $[\omega] = [\omega]_X = \{[O_\alpha]_X : \alpha \in A\}$; $M\Lambda\omega = \{M \cap O_\alpha : \alpha \in A\}$.

Напомним основные необходимые определения для этой работы.

Определение 1. [1]. *а) Для пространства X, его подпространства A и множества $B \subset X \setminus A$ (точки $x \in X \setminus A$) будем говорить, что покрытие λ пространства A выкалывает множество B (точку x) в X, если $B \cap (\cup[\lambda]_X) = \emptyset$ $(x \notin \cup[\lambda]_X)$; б) При этом для кардинала $\tau \geq \chi_0$ покрытие пространства X назовем τ - покрытием, если мощность покрытия λ не больше τ, т.е. $|\lambda| \leq \tau$, в) Покрытие Ω пространства X*

имеет кратность $\leq k$ [2], если всякая точка пространства X принадлежит не более, чем k элементам покрытия Ω. В частности, однократные покрытия пространства X - это в точности дизъюнктные покрытия пространства X.

Определение 2. *а) Система ω подмножеств множества X называется звездно-счетной (конечной) (см.[6]), если каждый элемент системы ω пересекается не более чем со счетным (конечным) числом элементов этой системы; б) Пространство X называется счетно (сильно) паракомпактным, если в любое его открытое покрытие можно вписать звездно-счетное (конечное) открытое покрытие; в) Пространство X называется полурегулярным [5], если оно обладает базой, состоящей из канонически открытых множеств; г) Для пространства X будем считать* $\dim^* X = 0$ [3], *если во всякое его открытое покрытие можно вписать однократное открытое покрытие; д) пространство X называется индуктивно нульмерным, т.е.* $\mathrm{ind} X = 0$, *если оно имеет базу из открыто-замкнутых множеств.*

Определение 3. [3]. *а) Звездно-конечное открытое покрытие пространства называется конечнокомпонентным, если все его компоненты сцепленности конечны; б) пространство называется суперпаракомпактным, если в любое его открытое покрытие можно вписать конечнокомпонентное покрытие; в) хаусдорфовы суперпаракомпактные пространства называются суперпаракомпактами.*

Определение 4. [3]. *Тихоновское пространство X называется (A_1) $(\tau-)$ П-полным; (A_2) слабо $(\tau-)$ П-полным; (A_3) слабо $(\tau-)$ суперпаракомпактным, если, соответственно, выполняются следующие условия: (a_1) для любой точки $x \in \beta X \setminus X$ существует $(\tau-)$ конечнокомпонентное покрытие пространства X, выкалывающее точку x в βX, (a_2) для любой точки $X \in \beta X \setminus X$ существует открыто-замкнутое $(\tau-)$ покрытие пространства X, выкалывающее точку x в βX, (a_3) для любого бикомпакта $B \subseteq \beta X \setminus X$ существует открыто-замкнутое $(\tau-)$ покрытие пространства X, выкалывающее бикомпакт B в βX.*

Определение 5. [4]. *1) Пространство X называется (A_1) K- компонентным, (A_2) пространством класса K, если, соответственно, выполняются следующие условия: (a_1) все компоненты пространства X бикомпактны, (a_2) X является $K-$ компонентным и в любой окрестности каждой компоненты содержится ее открыто-замкнутая окрест-*

ность.

2) Пространство X называется экстремально несвязным [5], если замыкание каждого его открытого подмножества открыто в X.

Замечание 1. Под телом $\tilde{\omega}$ системы ω подмножеств множества понимается объединение $\cup\omega$ ее элементов.

Пусть ω есть звездно-счетное, в частности, конечнокомпонентное открытое покрытие пространства X. Тогда тело $\tilde{\omega}_\lambda$ любой компоненты ω_λ покрытия ω открыто-замкнуто в X (см.[6]). Отсюда следует, что пространство X является дискретным объединением тел $\tilde{\omega}_\lambda$ компонент ω_λ покрытия ω, т.е. $X = d \cup \{\tilde{\omega}_\lambda : \lambda \in L\}$.

Поскольку любое однократное открытое покрытие пространства X конечнокомпонентно, то следующее утверждение очевидно.

Предложение 1. *Любое пространство X с $\dim^* X = 0$ суперпаракомпактно и нормально.*

Рассмотрим, как соотносятся между собой классы суперпаракомпактных и экстремально несвязных пространств.

Следующий пример показывает, что не всякое суперпаракомпактное пространство экстремально несвязно.

Пример 1. Поскольку пространство всех рациональных чисел числовой прямой есть нульмерный в смысле dim паракомпакт, то оно суперпаракомпактно (см. [3, предложение 2, 4]) и не экстремально несвязно (см. [7, предложение 168, гл.VI, § 5]).

Напомним, что пространство $\dot{X}$ называется абсолютом (см. [7, гл.6]) регулярного пространство X, если, во-первых, $\dot{X}$- совершунный неприводимый (см. [7, гл.6])прообраз пространства X, а во-вторых, всякий совершенный неприводимый прообраз пространства X гомеоморфен $\dot{X}$.

Предложение 2. *Абсолют $\dot{X}$ регулярного непаракомпактного пространства X является экстремально несвязным вполне регулярным непаракомпактным пространством.*

Доказательство. Если X есть регулярное непаракомпактное пространство, то его абсолют $\dot{X}$ вполне регулярен и экстремально не связан (см.[7, предложение 222, гл.VI, § 6]), но не паракомпактен.

В самом деле, во-первых, $\dot{X}$ есть совершенный неприводимый прообраз пространства X и, во-вторых, если бы абсолют был паракомпактом, то в силу инвариантности паракомпактности относительно совершенных отображений и пространство X являлось бы паракомпактом, чего в действительности нет. Предложение доказано.

Следствие 1. *Абсолют $\dot{X}$ регулярного непаракомпактного пространства X является экстремально несвязным вполне регулярным несуперпаракомпактным пространством.*

Предложение 3. *Полурегулярное (в частности, регулярное) экстремально несвязное пространство X слабо суперпаракомпактно.*

Доказательство. Если полурегулярное пространство X экстремально несвязно, то оно является (см.[8, предложение 5.11]) регулярным. Поэтому пространство X как регулярное экстремально несвязное пространство является (см.[7, предложение 170, гл.VI, § 5]) индуктивно нульмерным, следовательно, слабо суперпаракомпактным (см.[3, следствие 1.1]). Предложение доказано.

Следующая теорема дает необходимое и достаточное условия (слабой) суперпаракомпактности экстремально несвязных пространств.

Теорема 1. *а) Экстремально несвязное пространство X слабо суперпаракомпактно тогда и только тогда, когда пространство X полурегулярно; б) экстремально несвязное пространство X суперпаракомпактно тогда и только тогда, когда пространство X паракомпактно.*

Доказательство. а) Если экстремально несвязное пространство X слабо суперпаракомпактно, то пространство X, согласно определению 4, является тихоновским, следовательно, регулярным и потому полурегулярным. Пусть теперь экстремально несвязное пространство X полурегулярно. Тогда оно слабо суперпаракомпактно, согласно предложению 3.

б) Если экстремально несвязное пространство X суперпаракомпактно, то очевидно, что оно паракомпактно. Пусть теперь экстремально несвязное пространство X является паракомпактом. Тогда пространство X сильно нульмерно (см.[7, предложение 246, гл.VI, § 5]), т.е. $\dim^* X = 0$. Следовательно, пространство X суперпаракомпактно, согласно предложению 1. Теорема доказана.

Поскольку абсолют $\dot{X}$ любого паракомпакта X является (см.[7, предложения 205, 246 гл.VI, § 5]) экстремально несвязным паракомпактом, то из теоремы 1 вытекает

Следствие 2. *а) Абсолют $\dot{X}$ любого паракомпакта X (в частности, вполне паракомпакта [9], сильно паракомпакта и линделефова пространства) суперпаракомпактен; б) любой экстремально несвяз-*

ный вполне паракомпакт (в частности, сильный паракомпакт или линделефово пространство) суперпаракомпактен.

Следующий пример демонстрирует существенность условия паракомпактности пространства X в пункте б) теоремы 1.

Пример 2. Пространство $X = \beta N \setminus \{x\}$, $x \in \beta N \setminus N$ (см.[5, пример 3.10.18]) счетно компактно, но не бикомпактно. Поэтому пространство X не паракомпактно (см.[5, теорема 5.1.20]), следовательно, и не суперпаракомпактно. Поскольку X есть открытое и всюду плотное подмножество экстремально несвязного (см.[5, следствие 6.2.29]) бикомпакта βN, то пространство X локально бикомпактно (см.[6, предложение 12]) и экстремально несвязно (см.[7, предложение 156, гл.VI, § 5]). В силу тихоновости и экстремально несвязности пространства X имеем (см.[5, теорема 6.2.25]), что $\dim X = 0$, следовательно, *и* $\mathrm{ind} X = 0$. Поэтому пространство X как регулярное экстремально несвязное пространство слабо суперпаракомпактно, согласно предложению 3. Таким образом, $X = \beta N \setminus \{x\}$ есть локально бикомпактное экстремально несвязное слабо суперпаракомпактное пространство, которое не суперпаракомпактно и даже не паракомпактно.

Определение 6. *Покрытие ω пространства X называется экстремально несвязным, если каждый элемент покрытия ω является экстремально несвязным подпространством пространства X.*

Следующая теорема дает внешнюю характеризацию экстремально несвязных суперпаракомпактов.

Теорема 2. *Тихоновское пространство X суперпаракомпактно и экстремально несвязно тогда и только тогда, когда для любого бикомпакта $B \subseteq \beta X \setminus X$ существует такое однократное открытое экстремально несвязное покрытие ω пространства X, выкалывающее бикомпакт B в βX.*

Доказательство. Пусть тихоновское пространство X суперпаракомпактно и экстремально несвязно и $B \subseteq \beta X \setminus X$ — какой-нибудь бикомпакт, лежащий в $\beta X \setminus X$. Тогда, согласно лемме 1.1 [3], для бикомпакта $B \subseteq \beta X \setminus X$ существует такое однократное открытое покрытие $\omega = \{O_\alpha, \alpha \in A\}$ пространства X, выкалывающее бикомпакт B в βX.

Поскольку пространство X экстремально несвязно и ω — его открытое покрытие, то βX экстремально несвязно (см.[5, теорема 6.2.27]) и каждый элемент $O_\alpha \in \omega$, $\alpha \in A$ является (см.[7, предложение 156, гл.VI, § 5]) экстремально несвязным подпространством пространства X. Поэтому ω является однократным открытым экстремально несвязным покрытием пространства X, выкалывающим бикомпакт B в βX. Пусть теперь X есть тихоновское пространство и для любого бикомпакта $B \subseteq \beta X \setminus X$ существует такое однократное открытое экстремально несвязное покрытие ω пространства X, выкалывающее бикомпакт B в βX. Тогда, согласно предложению 4, пространство X суперпаракомпактно и является (см.[5, теорема 6.2.30]) экстремально несвязным пространством, как дискретная сумма своих экстремально несвязных подпространств. Теорема доказана.

Предложение 5. *Локально бикомпактное экстремально несвязное T_2-пространство X является теоретико-множественным объединением своих открытых экстремально несвязных нульмерных подбикомпактов.*

Доказательство. Поскольку локально бикомпактное T_2-пространство является (см.[5, теорема 3.3.1]) тихоновским, то в силу экстремальной несвязности пространства X оно сильно нульмерно (см. [5, теорема 6.2.25]), т.е. $\dim X = 0$. Для каждой точки $x \in X$ выбираем такую окрестность O_x, замыкание которой $[O_x]$ бикомпактно. В силу экстремальной несвязности пространства X каждый бикомпакт $[O_x]$, $x \in X$ не только замкнут, но и открыт в X, т.е. открыто-замкнут в X.

Так как экстремальная несвязность и размерность в смысле $\dim$ монотонна (см.[7, предложение 156, гл.VI, § 5]) по его открыто-замкнутым подпространствам, то каждый бикомпакт $[O_x]$ экстремально несвязен и нульмерен. Таким образом, пространство X является объединением своих открытых экстремально несвязных нульмерных подбикомпактов $[O_x]$, $x \in X$, т.е. $X = \cup \{[O_x]\,,\ x \in X\}$. Предложение доказано.

Для локально бикомпактных паракомпактных экстремально несвязных T_2-пространств предложение 5 имеет следующее уточнение.

Предложение 6. *Для паракомпакта X следующие утверждения равносильны: а) X локально бикомпактно и экстремально несвязно; б) X является дискретной суммой своих открытых экстремально несвязных нульмерных подбикомпактов.*

Доказательство. а) $\Longrightarrow$ б). Если X локально бикомпактно и экстремально несвязно, то, согласно предложению 5, пространство X является объединением своих открытых экстремально несвязных нульмерных подбикомпактов V_x, $x \in X$. Поскольку X есть экстремально несвязный паракомпакт, то оно совершенно нульмерно (см.[7, предложение 246, гл.VI, § 5]), т.е. $\dim^* X = 0$. Поэтому в покрытие $\Omega = \{V_x,\, x \in X\}$ пространства X впишем дизъюнктное открытое покрытие $\omega = \{U_\alpha,\, \alpha \in A\}$ пространства X.

Так как покрытие ω вписано в Ω и в экстремально несвязном пространстве X для любых дизъюнктных открытых в X множеств их замыкания также дизъюнктны (см.[7, предложение 155, гл.VI, § 5]), то для любого $\alpha \in A$ существует такое $V_{x(\alpha)} \in \Omega$, что $[U_\alpha] \subseteq V_{x(\alpha)}$, и поэтому множества $[U_\alpha]\,,\, \alpha \in A$ бикомпактны, нульмерны (см.[6, теорема 1]) и $[\omega] = \{[U_\alpha]\,,\, \alpha \in A\}$ является дизъюнктным открытым покрытием пространства X, состоящим из нульмерных бикомпактов $[U_\alpha]\,,\, \alpha \in A$, т.е. $X = d \cup \{\{U_\alpha\}\,,\, \alpha \in A\}$.

б) $\Longrightarrow$ а). Если X является дискретной суммой своих открытых экстремально несвязных нульмерных подбикомпактов, то очевидно, что пространство X локально бикомпактно и является (см.[5, теорема 6.2.30]) экстремально несвязным. Предложение доказано.

Поскольку любое линделефово пространство (см.[5, следствие 5.3.11]) сильно паракомпактно и любое сильно паракомпактное пространство (см.[9, теорема 3]) вполне паракомпактно, а любое вполне паракомпактное пространство (см.[9, теорема 3]) паракомпактно, то из предложения 6 вытекает

Предложение 7. *Для локально связного хаусдорфова пространства X следующие утверждения равносильны: а) X дискретно; б) X экстремально несвязно.*

Доказательство. Следование а) $\Longrightarrow$ б) очевидно.

б) $\Longrightarrow$ а). Если локально связное хаусдорфово пространство X экстремально несвязно, то оно (см.[5, гл.VI]) вполне несвязно, т.е. все его компоненты одноточечны.

Поскольку любое локально связное пространство X является (см.[7, предложение 369, гл.III, § 6]) дискретной суммой своих компонент, то пространство X дискретно. Предложение доказано.

Так как любое дискретное пространство суперпаракомпактно, то из предложения 7 вытекает

Теорема 3. *Для отделимой группы G следующие утверждения равносильны: а) G есть локально бикомпактная $K-$ компонентная* *(см. [4, определение 9]) группа; б) в любой окрестности C компоненты единицы группы G содержится открытая бикомпактная подгруппа B группы G ; в) пространство группы G гомеоморфно топологическому произведению $B \times G/B$ пространства бикомпактной открытой подгруппы B на дискретное пространство G/B, являющееся пространством смежных классов группы G по подгруппе B.*

Доказательство. а) $\Longrightarrow$ б). Пусть G есть локально бикомпактная $K-$ компонентная группа. Тогда в любой окрестности компоненты C единицы группы G содержится (см.[4, теорема 4]) открытая бикомпактная подгруппа В группы G.

б) $\Longrightarrow$ в). Пусть в любой окрестности компоненты C единицы группы G содержится открытая бикомпактная подгруппа B группы G. Тогда пространство группы G распадается на дискретную сумму бикомпактов B_α, $\alpha \in A$, каждый из которых гомеоморфен пространству подгруппы B группы G. Поэтому пространство группы G гомеоморфно топологическому произведению $B \times G/B$ пространства открытой бикомпактной подгруппы B на дискретное пространство G/B, являющееся пространством смежных классов группы G по подгруппе B.

в) $\Longrightarrow$ а). Если пространство группы G гомеоморфно топологическому произведению $B \times G/B$ пространства открытой бикомпактной подгруппы В на дискретное пространство G/B, являющееся пространством смежных классов группы G по подгруппе B, то очевидно, что группа G локально бикомпактна. Поскольку в этом случае для компоненты C единицы группы G всегда $C \subseteq B$ и B бикомпактна, то компонента C единицы группы G бикомпактна, т.е. группа G является K-компонентной. Теорема доказана.

Поскольку любое вполне несвязное пространство является $K-$ компонентным и любое вполне несвязное локально бикомпактное хаусдорфово пространство является (см.[4, предложение 6, теорема 2]) нульмерным, то из теоремы 5 вытекает

Следствие 3. *Отделимая группа G локально бикомпактна и вполне несвязна (в.ч. нульмерна) тогда и только тогда, когда пространство группы G гомеоморфно топологическому произведению пространства нульмерной открытой бикомпактной группы на дискретное пространство.*

Так как пространство бесконечной вполне несвязной бикомпактной группы гомеоморфно (см.[10]) D^τ, то из следствия 5 вытекает

Следствие 4. [11]. *Пространство бесконечной отделимой вполне несвязной локально бикомпактной группы гомеоморфно топологическому произведению дискретного пространства на* D^τ.

А.В.Архангельский заметил (см.[12]), что каждый бикомпакт, лежащий в экстремально несвязной группе, и, в частности, любая экстремально несвязная бикомпактная группа конечны, то есть дискретны.

Замечание 1. Так как при любом кардинальном числе пространство D^τ является (см.[13, гл.VI, § 10]) отделимой нульмерной бикомпактной топологической группой, то очевидно, что группа D^τ экстремально несвязна тогда и только тогда, когда τ конечна.

Оказывается, для отделимых экстремально несвязных локально бикомпактных групп имеет место следующая

Теорема 4. *Любая бесконечная отделимая локально бикомпактная группа* G *экстремально несвязна тогда и только тогда, когда группа* G *дискретна.*

Доказательство. Пусть бесконечная отделимая локально бикомпактная группа G экстремально несвязна. Тогда пространство группы G является (см.[5, теоремы 3.3.1 и 6.2.25]) тихоновским сильно нульмерным пространством, т.е. $\dim X = 0$. Следовательно, G есть отделимая локально бикомпактная нульмерная группа. Поэтому, по следствию 6, пространство группы G гомеоморфно топологическому произведению дискретного пространства на D^τ. Поскольку D^τ есть бикомпакт, лежащий в экстремально несвязной группе G, то по вышеупомянутому предложению А.В.Архангельского D^τ конечна, т.е. дискретна. Следовательно, пространство группы G дискретно, как топологическое произведение двух дискретных пространств. Поэтому группа G дискретна.

Обратное утверждение теоремы очевидно, т.к. любая дискретная группа локально бикомпактна и экстремально несвязна. Теорема доказана.

Поскольку любая дискретная группа суперпаракомпактна (см.[4, определение 9]), то из теоремы 4 вытекает

Следствие 5. *Любая отделимая локально бикомпактная экстремально несвязная группа суперпаракомпактна.*

А.В.Архангельским была сформулирована (см.[14]) проблема существования недискретных топологических групп, пространства которых экстремально несвязны.

В 1969 г. С.Сирота дал частичный ответ на этот вопрос, построив (см.[15, теорема 2]) в предположении континуум-гипотезы CH счетную недискретную отделимую экстремально несвязную топологическую группу $G_C = \sigma D_\alpha$.

В связи с проблемой А.В.Архангельского, теоремы 4 и дискретности любой бикомпактной экстремально несвязной группы естественно возникают следующие задачи:

1. Существуют ли недискретные суперпаракомпактные топологические группы, пространства которых экстремально несвязны.

2. Любая ли диадическая суперпаракомпактная (см.[4, определение 10]) экстремально несвязная группа дискретна.

На первую задачу положительный ответ дает следующая

Теорема 5. *Счетная недискретная отделимая экстремально несвязная топологическая группа G_C Сироты является суперпаракомпактной.*

Доказательство. Поскольку пространство топологической группы G_C вполне регулярно (см.[16, теорема 10]) и счетно, то очевидно, что оно линделефово. Но, кроме того, пространство группы G_C еще экстремально несвязно, поэтому группа G_C суперпаракомпактна, согласно пункта б) следствия 2. Теорема доказана.

Из теоремы 5 вытекает следующее

Следствие 6. *Не всякая суперпаракомпактная экстремально несвязная группа дискретна.*

Поскольку любая суперпаракомпактная группа является диадически суперпаракомпактной (см.[4, теорема 5]), то из следствия 8 вытекает дающее отрицательное рещение второй задачи

Следствие 7. *Не всякая диадическая суперпаракомпактная экстремально несвязная группа дискретна.*

Литература

1. Мусаев Д.К. О характеризации полных отображений посредством морфизмов в нульмерные. // Мат. Труды, Новосибирск, 2004, т.7, №2, с.72-97.

2. Федорчук В.В., Филиппов В.В. Общая топология. Основные конструкции. — М.: Изд-во МГУ, 1988. 252 с.

3. Мусаев Д.К., Пасынков Б.А. О свойствах компактности и полноты топологических пространств и непрерывных отображений. — Ташкент: ФАН, 1994.

4. Мусаев Д.К. Диадические отображения и диадические суперпаракомпактные топологические группы. - Сибир. мат. журнал, 2005, т.46, №4, с.851-859.

5. Энгелькинг Р. Общая топология. - М.: Мир, 1986.

6. Александров П.С., Пасынков Б.А. Введение в теорию размерности. — М.: Наука, 1973.

7. Архангельский А.В., Пономарев В.И. Основы общей топологии в задачах и упражнениях. — М.: Наука, 1979.

8. Александрян Р.А., Мирзаханян Э.А. Общая топология. — М.: Высшая школа, 1979.

9. Зарелуа А.В. О теореме Гуревича. // Матем. сб., 1963, т.60(102), №1, с.17-28.

10. Кузьминов В.И. О гипотезе П.С.Александрова в теории топологических групп. // Доклады АН СССР, 1959, т.125, №4, с.727-729.

11. Скляренко Е.Г. О топологическом строении локально бикомпактных групп и их фактор-пространств. //Матем.сб., т.60(102), №1, с.63-88.

12. Archangelski A. Groups topologiques extremalement discontinus. - C.R. Acad. Sc. Paris, 1967, 265, p.822-825.

13. Александров П.С. Введение в теорию множеств и общую топологию. — М.: Наука, 1977.

14. Архангельский А.В. Экстремально несвязный бикомпакт веса с неоднороден. // ДАН СССР, 1967, т.175, №4, с.751-755.

15. Сирота С. Произведение топологических групп и экстремальная несвязность. // Матем. сб., 79:2 (1969), с.179-192.

16. Понтрягин Л.С. Непрерывные группы. — М.: Наука, 1973.

Институт математики
им. В.И.Романовского АН РУз

Дата поступления
10.01.07

Uzbek Mathematical
Journal, 2007,№2, pp.102-111

УДК 517.96

Задача Бицадзе-Самарского для уравнения параболо-гиперболического типа с двумя характеристическими и нехарактеристическими линиями вырождения

Н.К.Очилова

Ushbu maqolada bir xil darajali ikkita xarakteristik va noxarakteristik buzilish chizig'iga ega bol'gan parabolo-giperbolik tipdagi tenglama uchun Bisadze-Samarskiy tipidagi nolokal masala yechimining mavjudligi va yagonaligi isbotlangan.

In the paper existence and uniqueness of the solution of the non-local boundary value problem on the Bisadze-Samarsky type for the parabolic-hyperbolic equation with two characteristic and non-characteristic lines and identically order of degeneration.

Рассмотрим уравнение

$$0=\begin{cases} y^{m_0}u_{xx}-x^{n_0}u_y & \text{в } \Delta_0, \\ y^{m_1}u_{xx}-(-x)^{m_1}u_{yy} & \text{в } \Delta_1, \\ -(-y)^{n_1}u_{xx}+x^{n_1}u_{yy} & \text{в } \Delta_2. \end{cases} \tag{1}$$

где $m_i, n_i = const$, $i = 0, 1$, Δ_0 — область, ограниченная отрезками AB, BB_0, B_0A_0, A_0A прямых $y = 0$, $x = 1$, $y = 1$,$x = 0$, соответственно при $x > 0$, $y > 0$; Δ_1 (Δ_2) — характеристический треугольник, ограниченный отрезком AA_0 (AB) оси $0y$ ($0x$) и двумя характеристиками

$$AC_1:\ y^{p_1}-(-x)^{p_1}=0,\quad A_0C_1:\ y^{p_1}+(-x)^{p_1}=1$$

$$(AC_2:\ x^{q_1}-(-y)^{q_1}=0,\quad BC_2:\ x^{q_1}+(-y)^{q_1}=1)$$

уравнения (1) при $x < 0$, $y > 0$ ($x > 0$, $y < 0$), здесь

$$2p_0=m_0+2,\quad 2p_1=m_1+2,\quad 2q_1=n_1+2,$$

$$\text{где} \qquad m_0 > 0, \quad n_1 > 0, \quad m_1 > 0, \tag{2}$$

Введем обозначения:

$$J_1 = \{(x, y) : x = 0,\ 0 < y < 1\}; \quad J_2 = \{(x, y) : 0 < x < 1,\ y = 0\};$$

$$\Delta = \Delta_0 \cup \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup J_1 \cup J_2, \quad \Omega_1 = \Delta_0 \cup \Delta_1 \cup J_1, \quad \Omega_2 = \Delta_0 \cup \Delta_2 \cup J_2,$$

$$2\alpha_1 = \frac{n_1}{n_1 + 2}; \quad 2\beta_1 = \frac{m_1}{m_1 + 2}; \quad \alpha_0 = \frac{n_0 + 1}{n_0 + 2},$$

причем

$$0 < \beta_1 < \frac{1}{2}, \quad 0 < \alpha_1 < \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2} < \alpha_0 < 1, \tag{3}$$

Через

$$\theta(y) = -\left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{1}{p_1}} + i\left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{1}{p_1}} \tag{4}$$

$$\theta(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{q_1}} - i\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{q_1}}, \tag{5}$$

– обозначим аффиксы точек пересечения характеристик уравнения (1), выходящих из точек $(0, y) \in J_1$ и $(x, 0) \in J_2$, с характеристиками AC_1 и AC_2, соответственно.

Задача БС. *Требуется определить функцию $u(x, y)$, обладающую свойствами:*

1) $u(x, y) \in C\left(\overline{\Delta}\right) \cap C^{2,1}(\Delta_0) \cap C^{2,2}(\Delta_1 \cup \Delta_2)$;

2) $u(x, y)$ удовлетворяет уравнению (1) в областях Δ_0, Δ_1 и Δ_2;

3) $u_x, u_y \in C(\Omega_1)$, причем $u_y(+0, y)$ может иметь особенность порядка меньше единицы при $y \to 0$ и $y \to 1$, а $u_x(+0, y)$ может иметь особенность порядка меньше $\dfrac{m_0 + 1}{n_0 + 2}$ при $y \to 0$ и ограничена при $y \to 1$;

4) $u_x \in C(\Omega_2)$, причем $u_x(x, +0)$ может иметь особенность порядка меньше единицы при $x \to 0$ и $x \to 1$;

5) $y^{-m_0} u_y \in C(\Delta_0)$, $u_y \in C(\Delta_2)$, причем эти функции непрерывны вплоть до границы AB. Кроме того, на AB выполняются условия склеивания

$$\nu_2^+(x) \equiv \lim_{y \to +0} y^{-m_0} u_y(x, y) = \lim_{y \to -0} u_y(x, y) \equiv \nu_2^-(x), \quad (x, 0) \in J_2 \tag{6}$$

при условии, что эти пределы существуют причем $\nu_2^{\pm}(x)$ и может иметь особенность порядка меньше единицы при $x \to 0$ и ограничена при $x \to 1$;

б) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям:

$$u(x,y)|_{BB_0} = \varphi(y), \quad 0 \le y \le 1; \tag{7}$$

$$D_{0y}^{\beta_1} y^{2\beta_1-1} u[\theta(y)] = \widetilde{a}_1(y) u(0, y^{1/2p_1}) + \widetilde{b}_1(y), \quad (0,y) \in J_1; \tag{8}$$

$$D_{0x}^{1-\alpha_1} u[\theta(x)] = \widetilde{a}_2(x) u_y(x^{1/2q_1}, 0) + \widetilde{b}_2(x), \quad (x,0) \in J_2, \tag{9}$$

где

$$\widetilde{a}_1(y) = a_1(y^{1/2p_1}),\ \widetilde{b}_1(y) = b_1(y^{1/2p_1}),$$

$$\widetilde{a}_2(x) = a_2(x^{1/2q_1}),\ \widetilde{b}_2(x) = b_2(x^{1/2q_1}),$$

здесь $\varphi(y)$, $\widetilde{a}_1(y)$, $\widetilde{a}_2(x)$, $\widetilde{b}_1(y)$, $\widetilde{b}_2(x)$ — заданные непрерывные функции, причем

$$\varphi(y) \in C[0,1] \cap C^2(0,1), \tag{10}$$

$$\widetilde{a}_1(y) \in C^1[0,1] \cap C^3(0,1), \quad \widetilde{b}_1(y) \in C[0,1] \cap C^2(0,1), \tag{11}$$

$$\widetilde{a}_2(x) \in C^1[0,1] \cap C^3(0,1), \quad \widetilde{b}_2(x) \in C[0,1] \cap C^2(0,1), \tag{12}$$

Решение задачи Коши, удовлетворяющее условиям $u(-0,y) = \tau_1^-(y)$, $(-0,y) \in \overline{J}_1$, $u_x(-0,y) = \nu_1^-(y)$, $(0,y) \in J_1$, для уравнения (1) в области Δ_1 дается формулой [1], [2]

$$u(\xi,\eta) = \gamma_1 \int\limits_{\xi}^{\eta} (\eta-\xi)^{1-2\beta_1} (\eta-t)^{\beta_1-1} (t-\xi)^{\beta_1-1} \tau_1^-(t^{1/2q_1}) dt -$$

$$-\gamma_2 (2p_1)^{-1/p_1} \int\limits_{\xi}^{\eta} t^{-1/2q_1} (\eta-t)^{-\beta_1} (t-\xi)^{-\beta_1} \nu_1^-(t^{1/2q_1}) dt, \tag{13}$$

где $\gamma_1 = \frac{\Gamma(2\beta_1)}{\Gamma^2(\beta_1)}$, $\gamma_2 = 2^{2\beta_1-1} p_1^{-2\beta_1} \frac{\Gamma(1-2\beta_1)}{\Gamma^2(1-\beta_1)}$,
$\sqrt{\xi} = y^{p_1} - (-x)^{p_1}$, $\sqrt{\eta} = y^{p_1} + (-x)^{p_1}$.

В силу (4) из (13) имеем

$$u[\theta(y)] = \gamma_1 y^{1-2\beta_1} D_{0y}^{-\beta_1} y^{\beta_1-1} \widetilde{\tau}_1^-(y) - \gamma_2 D_{0y}^{\beta_1-1} y^{-\beta_1-\frac{1}{2p_1}} \widetilde{\nu}_1^-(y). \tag{14}$$

Подставляя (14) в (8) получим соотношение между $\widetilde{\tau}_1^-(y)$ и $\widetilde{\nu}_1^-(y)$ на отрезке J_1, принесенное из области Δ_1 :

$$\overline{a_1}(y) \widetilde{\tau}_1^-(y) = \gamma_2 D_{0y}^{2\beta_1-1} y^{\beta_1-\frac{1}{2}} \widetilde{\nu}_1^-(y) + y^{1-\beta_1} \widetilde{b}_1(y), \quad 0 \le y \le 1, \tag{15}$$

где

$$\widetilde{\tau}_1^-(y) \equiv \tau_1^-\left(y^{1/2p_1}\right), \quad \widetilde{\nu}_1^-(y) \equiv \nu_1^-\left(y^{1/2p_1}\right), \overline{a_1}(y) = \gamma_1 - y^{1-\beta_1}\widetilde{a_1}(y),$$

Используя решение задачи Коши с начальными данными

$$u(x,-0) = \tau_2^-(x), \quad (x,-0) \in \overline{J}_2, \quad u_y(x,-0) = \nu_2^-(x), \quad (x,-0) \in J_2,$$

для уравнения (1) в области Δ_2, с учетом (5) и подставляя (9), получим функциональное соотношение между $\widetilde{\tau}_2^-(x)$ и $\widetilde{\nu}_2^-(x)$ на отрезке J_2, принесенное из области Δ_2 :

$$\overline{a}_2(x)\widetilde{\nu}_2^-(x) = \gamma_1 x^{\frac{1-2\alpha_1}{2}} D_{0x}^{1-2\alpha_1}\widetilde{\tau}_2^-(x) + x^{\frac{1}{2}}\widetilde{b}_2(x), \tag{16}$$

где

$$\widetilde{\tau}_2^-(x) \equiv \tau_x^-\left(x^{1/2q_1}\right), \quad \widetilde{\nu}_2^-(x) \equiv \nu_2^-\left(x^{1/2q_1}\right), \quad \overline{a}_2(x) = \gamma_2 + x^{\frac{1}{2}}\widetilde{a_2}(x).$$

Переходим к доказательству единственности решения задачи БС.

Имеет место аналог принципа экстремума А.В. Бицадзе.

Лемма. *Если выполнены условия (3),*

$$\overline{a_2}(x) > 0, \quad \overline{a_1}(y) > 0, \quad \overline{a_1}'(y) \geq 0 \tag{17}$$

и $b_1(y) \equiv b_2(x) \equiv 0$, *то решение* $u(x,y)$ *задачи БС свой положительный максимум и отрицательный минимум достигает только на отрезке* BB_0 *в области* $\overline{\Delta}_0$.

Доказательство. В силу принципа экстремума для параболических уравнений [3], [4], решение $u(x,y)$ уравнения (1) внутри области Δ_0 и на отрезке A_0B_0 не может достигать своего положительного максимума и отрицательного минимума. В точке $A(0,0)$ в силу (3)из (15) имеем $\tau_1^-(0) = 0$ т.е $u(0,0) = 0$. Покажем, что решение $u(x,y)$ уравнения (1) не достигает своего положительного максимума и отрицательного минимума на интервалах J_1 и J_2. Предположим обратное. Пусть $u(x,y)$ в некоторой точке $P(x_0,0)$ интервала J_2 достигает своего положительного максимума (отрицательного минимума). Тогда равенство (16) при $b_2(x) \equiv 0$ можно представить в виде

$$\overline{a}_2(x)\widetilde{\nu}_2^-(x_0) = \gamma_1 x_0^{\frac{1-2\alpha_1}{2}} D_{0x_0}^{1-2\alpha_1}\widetilde{\tau}_2^-(x_0), \tag{18}$$

Отсюда пользуясь, тем что дробные производные $D_{0x_0}^{1-2\alpha_1}\widetilde{\tau}_2^-(x_0)$ в точке положительного максимума (отрицательного минимума) сторого положительно (отрицательно)[1]. т.е $D_{0x_0}^{1-2\alpha_1}\widetilde{\tau}_2^-(x_0) > 0$ $(D_{0x_0}^{1-2\alpha_1}\widetilde{\tau}_2^-(x_0) < 0)$. Следовательно из (18) с учетом $\overline{a_2}(x) > 0$ получим, что $\widetilde{\nu}_2^-(x_0) > 0$ $(\widetilde{\nu}_2^-(x_0) < 0)$. в силу (6) $\widetilde{\nu}_2^+(x_0) > 0$ $(\widetilde{\nu}_2^+(x_0) < 0)$ Это неравенство противоречит неравенству $\widetilde{\nu}_2^+(x_0) < 0$ $(\widetilde{\nu}_2^+(x_0) > 0)$ ([5], [6]). Таким образом $u(x,y)$ не достигает своего положительного максимума (отрицательного минимума) на интервале J_2. Аналогично доказывается,что функция $u(x,y)$ не достигает своего положительного максимума (отрицательного минимума) на интервале J_1. Лемма доказана.

На основании леммы, с учетом (8) при $\varphi(y) \equiv 0$, имеем $u(x,y) \equiv 0$ в $\overline{\Delta}_0$.

В силу единственности решения задачи Коши в областях Δ_1 и Δ_2 для уравнения (1) получаем, что $u(x,y) \equiv 0$ в $\overline{\Delta}_1$ и $\overline{\Delta}_2$. Следовательно, $u(x,y) \equiv 0$ в $\overline{\Delta}$. Тем самым доказана единственность решения задачи БС.

Переходим к доказательству существования решения задачи БС. Пусть $m_0 = m_1 + 1$ тогда имеет место

Теорема. *Если выполнены условия* (2), (3),(10), (11) и $n_0 > m_1$, то решение задачи БС существует.

Доказательство. Согласно условиям задачи БС, при $y \to +0$ из уравнения (1) в Δ_0 получаем

$$\tau_2''^+(x) - x^{n_0}\nu_2^+(x) = 0, \quad (x,0) \in J_2, \tag{19}$$

$$\tau_2^+(0) = \tau_1^-(0), \quad \tau_2^+(1) = \varphi(0), \tag{20}$$

где $\tau_1^-(0) = u(-0,0)$, $\nu_2^+(x) = \lim\limits_{y\to+0} y^{-m_0}u_y(x,y)$.

Решая задачу (19), (20) получим функциональное соотношение между $\tau_2^+(x)$ и $\nu_2^+(x)$, принесенное на J_2 из области Δ_0 :

$$\tau_2^+(x) = \int\limits_0^1 G(x,t)t^{n_0}\nu_2^+(t)dt + f(x), \quad 0 \le x \le 1, \tag{21}$$

где

$$G(x,t) = \begin{cases} t(x-1), \ 0 \le t \le x, \\ x(t-1), \ x \le t \le 1, \end{cases} \tag{22}$$

$$f(x)=\tau_1^-(0)+x(\varphi(0)-\tau_1^-(0)). \tag{23}$$

Исключая $\tau_2^-(x)$ из соотношения (16), (21) получим интегральное уравнение

$$\widetilde{\nu}_2^+(x)=\int\limits_0^1 \widetilde{S}(x,z)\widetilde{\nu}_2(z)dz+\widetilde{\Phi}(x), \tag{24}$$

где

$$\widetilde{S}(x,z)=\widetilde{S}_1(x,z)+\widetilde{S}_2(x,z), \tag{25}$$

$$\widetilde{S}_1(x,z)=\frac{\gamma_1 2\alpha_1 x^{\alpha_1-\frac{1}{2}}}{\overline{a_2}(x)}\int\limits_0^1(1-\mu)^{2\alpha_1-1}\widetilde{G}(x\mu,z)d\mu, \tag{26}$$

$$\widetilde{S}_2(x,z)=\frac{\gamma_1 2\alpha_1 x^{\alpha_1+\frac{1}{2}}}{\overline{a_2}(x)}\int\limits_0^1(1-\mu)^{2\alpha_1-1}\frac{d}{dx}\widetilde{G}(x\mu,z)d\mu, \tag{27}$$

$$\widetilde{\Phi}(x)=\frac{\gamma_1 2\alpha_1 x^{\alpha_1-\frac{1}{2}}}{\overline{a_2}(x)}\int\limits_0^1(1-\mu)^{2\alpha_1-1}\Big\{\left[\tau_1^-(0)+x\mu(\varphi(0)-\tau_1^-(0)\right]+$$

$$+\frac{\gamma_1 2\alpha_1 x^{\alpha_1+\frac{1}{2}}}{\overline{a_2}(x)}\int\limits_0^1(1-\mu)^{2\alpha_1-1}\frac{d}{dx}\left[\tau_1^-(0)+x\mu(\varphi(0)-\tau_1^-(0)\right]\Big\}d\mu-x^{\frac{1}{2}}\frac{\widetilde{b}_2(x)}{\overline{a}_2(x)}, \tag{28}$$

где

$\widetilde{G}(x\mu,z)=\dfrac{1}{2q_1}z^{\frac{n_0+1}{n_1+2}-1}G\left((x\mu)^{\frac{1}{2q_1}},z^{\frac{1}{2q_1}}\right)$,

$\widetilde{\tau}_2^-(x)=\tau_2^-\left(x^{\frac{1}{2q_1}}\right)$, $\widetilde{\nu}_2^-(x)=\nu_2^-\left(x^{\frac{1}{2q_1}}\right)$, $\widetilde{\Phi}(x)=\Phi\left(x^{\frac{1}{2q_1}}\right)$.

В силу (2), (3), (10), (11) из (25) и (28) следует, что

$$|\widetilde{S}(x,z)|\le c_1x^{\alpha_1-\frac{1}{2}}z^{\frac{n_0+1}{n_1+2}-1}, \tag{29}$$

$$\left|\widetilde{\Phi}(x)\right|\le c_2x^{\alpha_1-\frac{1}{2}}, \tag{30}$$

Таким образом, в силу (29), (30) заключаем, что интегральное уравнение (24) является интегральным уравнением Фредгольма второго рода со слабой особенностью, разрешимость которого следует из единственности решения задачи БС. После определения $\nu_2^+(x)$ из (16), с учетом (7) находим

$$\widetilde{\tau}_2^+(x) = \int\limits_0^1 t^{n_0}\widetilde{G}(x,t)\Phi_1^*(t)dt + \dot{\widetilde{\Phi}}(x), \tag{31}$$

где $\Phi_1^*(t) = \widetilde{\Phi}(t) + \int\limits_0^1 \widetilde{\Phi}_1(z)\widetilde{R}(t,z)\,dz$, а $\widetilde{R}(t,z)$ – резольвента ядра $\widetilde{S}(t,z)$.

Второй функциональное соотношение между $\tau_1^+(y)$ и $\nu_1^+(y)$, принесенное на J_1 из области Δ_0 представимо в виде ([7]):

$$\nu_1^+(y) = y^{-m_0}\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_0^y z(y-t)\tau_1^+(t)t^{m_0}dt + F(y,\tau_2), \tag{32}$$

где

$$F(y,\tau_2^+) = \lim_{x\to 0}\frac{\partial}{\partial y}\left\{\int\limits_0^1 G_1(x,\xi,y,\alpha_0)\tau_2^+(\xi)\xi^{n_0}d\xi + \right.$$

$$\left. + y^{-m_0}\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_0^y G^{(2)}(x,y-t;\alpha_0)\varphi(t)t^{m_0}dt\right\}, \tag{33}$$

здесь

$$G^{(2)}(x,y,\alpha_0) = (1-\alpha_0)^{2(1-\alpha_0)}x\int\limits_0^1 G_1(x,\xi,y,\alpha_0)(1-\alpha_0)^{2(1-\alpha_0)}\xi^{n_0}d\xi$$

а $G_1(x,\xi,y,\alpha_0)$ - функция Грина первой краевой задачи для уравнения (1) в области Ω_0 [6].

$$z(y-t) \equiv (1-\alpha_0)^{2\alpha_0-1}\lim_{x\to 0}\frac{\partial}{\partial x}G^{(1)}(x,y-t;\alpha_0) = -(1-\alpha_0) -$$

$$-\sum_{k=0}^{\infty}\exp\left\{-\frac{\lambda_k^2\left(y^{m_0+1}-t^{m_0+1}\right)}{4(m_0+1)}\right\}\cdot\frac{2^{2\alpha_0}\lambda_k^{-2\alpha_0}}{\Gamma^2(1-\alpha_0)J^2_{1-\alpha_0}\lambda_k}\ .$$

На основании свойств функции $J_\nu(z)$ функцию $z(y-t)$ можно представить в виде [6, с.12]

$$z(y-t) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha_0)}\left[\frac{y^{m_0+1}}{m_0+1} - \frac{t^{m_0+1}}{m_0+1}\right]^{\alpha_0-1} + B(y-t), \tag{34}$$

где $B(y-t)$ – непрерывно дифференцируемая функция при $y \geq t$.

Заменяя y на $(p_1^2 y)^{\frac{1}{2p_1}}$ в (15), (32), получим

$$\overline{\tau}_1^-(y) = \frac{\gamma_2 p_1^{1-2\beta_1}}{\overline{\overline{a}}_1(y)\Gamma(1-\beta_1)} \int\limits_0^y (y-t)^{-2\beta_1} t^{\frac{2\beta_1-1}{2}} \overline{\nu}_1^-(t)dt + \frac{\overline{b}_1(y)y^{1-\beta_1}}{\overline{\overline{a}}_1(y)}. \quad (35)$$

$$\overline{\nu}_1^-(y) = \frac{\partial}{\partial y} \int\limits_0^y \overline{z}(y-t)\overline{\tau}_1^-(y)dt + +\overline{F}\left[y, \tau_2\right], \quad (36)$$

где

$$\overline{z}(y-t) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha_0)}(y-t) + \widetilde{B}(y-t), \quad \overline{\tau}_1^-(y) = \tau_1^-\left[(p_1^2 y)^{\frac{1}{2p_1}}\right],$$

$$\overline{\nu}_1^-(t) = \nu_1^-\left[(p_1^2 t)^{\frac{1}{2p_1}}\right], \quad \overline{b}_1(y) = \widetilde{b}_1\left[(p_1^2 y)^{\frac{1}{2p_1}}\right], \quad \overline{\overline{a}}_1(y) = \overline{a}_1\left[(p_1^2 y)^{\frac{1}{2p_1}}\right]$$

Исключив $\overline{\nu}_1^+(y)$из соотношений (34), (35), получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$\overline{\tau}_1(y) = \int\limits_0^y K(y,z)\overline{\tau}_1(z)dz + \overline{f}(y,\tau_2), \quad (37)$$

где

$$K(y,z) = K_1(y,z) + K_2(y,z), \quad (38)$$

$$K_1(y,z) = \frac{k_1}{\overline{\overline{\overline{a_1}}}(y)} \frac{\partial}{\partial z} \int\limits_z^y (y-t)^{-2\beta_1} t^{\frac{2\beta_1-1}{2}} (t-z)^{\alpha_0-1}dt, \quad (39)$$

$$K_2(y,z) = \frac{k_1}{\overline{\overline{a}}_1(y)} \left\{ \int\limits_z^y (y-t)^{-2\beta_1} t^{\frac{2\beta_1-1}{2}} \widetilde{B}'(t-z)dt + \right.$$

$$\left. +\widetilde{B}(0)\,(y-t)^{-2\beta_1} t^{\frac{2\beta_1-1}{2}} \right\}, \quad (40)$$

$$\overline{f}(y,\tau_2) = \frac{\gamma_2 p_1^{1-2\beta_1}}{\overline{\overline{a}}_1(y)\Gamma(1-\beta_1)} \int\limits_0^y (y-t)^{-2\beta_1} t^{\frac{2\beta_1-1}{2}} \times$$

$$\times\overline{F}(y,\tau_2)dt + y^{1-2\beta_1}\frac{b_1(y)}{a_1(y)}, \tag{41}$$

где

$$k_1 = \frac{\gamma_2 p_1^{1-2\beta_1}}{\Gamma(1-\alpha_0)\Gamma(1-\beta_1)},$$

$\overline{F}(y,\tau_2)$ определяется из (33).

После замену $t = z + (y-z)\sigma$ из (39) получим $K_1(y,z) =$

$$= \kappa_1 \frac{\partial}{\partial z}\left[y^{\frac{2\beta_1-1}{2}}(y-z)^{\alpha_0-2\beta_1} F(1-2\beta_1, \frac{1-2\beta_1}{2}, \alpha_0 - 2\beta_1 + 1, \frac{y-z}{y})\right]$$

где $\kappa_1 = \frac{k_1\gamma_2 p_1^{1-2\beta_1}\Gamma(\alpha_0)\Gamma(1-2\beta_1)}{\overline{\overline{\overline{a}}}_1(y)\Gamma(\alpha_0-2\beta_1+1)\Gamma(1-\beta_1)}$, а $F(a,b,c,z)$- гипергеометрическая функция [8 стр.8] Отсюда оценивая имеем

$$|K_1(y,z)| \le c_3 y^{\frac{2\beta_1-1}{2}}(y-z)^{\alpha_0-2\beta_1-1} + c_4 y^{1-\alpha_0} z^{\alpha_0+\beta_1-\frac{3}{2}}(y-z)^{\alpha_0-2\beta_1-1}. \tag{42}$$

Аналогично оценивая $K_2(y,z)$ имеем

$$|K_2(y,z)| \le c_5 y^{\frac{2\beta_1-1}{2}}(y-z)^{-2\beta_1} \tag{43}$$

В силу (42), (43), из (38) получим

$$|K(y,z)| \le c_6 y^{\frac{2\beta_1-1}{2}}(y-z)^{\alpha_0-2\beta_1-1} + c_7 y^{1-\alpha_0} z^{\alpha_0+\beta_1-\frac{3}{2}}(y-z)^{\alpha_0-2\beta_1-1}. \tag{44}$$

Так как $-1 < (\alpha_0 - \beta_1 - \frac{3}{2}) < 0$, то из оценку (44) с учетом $n_0 > m_1$ и (3) следует, что ядро $K(y,z)$ (см. (38)) имеет слабую особенность.

Принимая во внимание (10), $\tau_2^+(x) \in C[0,1] \cap C^2(0,1)$, из (33) следует, что $\overline{F}(y,\tau_2) \in C^2(0,1)$, причем функция $\overline{F}(y,\tau_2)$ может иметь особенность порядка меньше $1-\alpha_0$ при $y \to 0$, а при $y \to 1$ – ограничена.

Отсюда учитывая (3),(11) и $n_0 > m_1$ из (41) имеем

$$\overline{f}(y,\tau_2) \le c_8 y^{\alpha_0-\beta_1-\frac{1}{2}}.$$

Следовательно, $\overline{f}(y,\tau_2) \in C[0,1] \cap C^2(0,1)$.

Таким образом, из (44) заключаем, что интегральное уравнение (37) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода со слабой особеностью, и его однозначная разрешимость следует из теории интегральных уравнений Вольтерра второго рода [9].

Отсюда, учитывая однозначную разрешимость уравнения (24), заключаем, что задача БС однозначно разрешима при $m_0 = m_1 + 1$.

Замечание. При определнннных ограничениях на параметра n_0 и заданных функций параметра с учетом (2),(3) аналогично доказывается одназначная разрешимость задача БС в случаях: 1) $m_0 < m_1 + 1$ (т.е $2p_0 - 1 < 2p_1$); 2) $m_0 > m_1 + 1$ (т.е $2p_0 - 1 > 2p_1$).

Литература

1. Уринов А.К.Краевые задачи для уравнений смешанного типа с негладкими линиями вырождения. // Дисс. на соис. уч. степ. канд. физ.-мат. наук., 1983, Инст.Математики.

2. Салахитдинов М.С., Менгзияев Б. // Дифференциальные уравнения. 1977. Т.13, №1, с.133-136.

3. Бицадзе А.В. Урав.мат.физ. М.: Наука, 1982. 336 с.

4. Ильин А.М., Калашников А.С., Олейник О.А. Линейные уравнения 2-го порядка параболического типа. // Успехи матем. наук. 1962. Т.17, вып. 3(105). с.3-141.

5. Терсенов С.А. Введение в теорию уравнений, вырождающихся на границе. Новосибирск: изд-во НГУ. 1973. 144 с.

6. Терсенов С.А. Первая краевая задача для уравнения параболического типа с меняющимся направлением времени. Новосибирск, 1978. 53с.

7. Исломов Б., Очилова Н.К. // Узб. матем. журн. 2005. №3. с.53-67.

8. Смирнов М.М.Уравнения смешанного типа.М.:Выс.шк.1985. 304 с.

9. Михлин С.Г. Интегральные уравнения. М.-Л.: Гитл, 1947. 304 с.

Институт математики
им. В.И.Романовского АН РУз

Дата поступления
20.11.06

Uzbek Mathematical
Journal, 2007,№2, pp.112-118

УДК 512.552.7

Классификация комплексных нильпотентных диассоциативных алгебр малых размерностей

И.М.Рихсибоев

Ushbu maqolada kichik o'lchovli kompleks nilpotent diassotsiativ algebralarning tasnifi keltirilgan.

In this paper the classification of the low dimensional comlex nilpotent diassociateive algebras is given.

Алгебры Ли играют важную роль в теоретической физике, квантовой теории поля и в других областях физики и математики.

Активные исследования алгебр Ли привели к возникновению другого алгебраического объекта - алгебр Лейбница [1], которые являются "некоммутативным"аналогом алгебр Ли.

Алгебры Лейбница характеризуются следующим тождеством:

$$[[x, y], z] = [[x, z], y] + [x, [y, z]] \ (1)$$

Отметим, что если в алгебре Лейбница потребовать выполнение тождества $[x, y] = -[yx]$, то тождество (1) легко преобразовать в тождество Якоби.

Общеизвестна процедура получения алгебры Ли из ассоциативной алгебры введением нового умножения по формуле: $[x, y] = xy - yx$. Естественно возникает вопрос: существует ли алгебра, из которой можно получить алгебру Лейбница аналогичной процедурой как в случае алгебр Ли? Оказалось, что действительно, такая алгебра существует. Основная идея при этом состоит в рассмотрения не одной, а двух алгебраических операций на векторном пространств с некоторыми тождествами. Алгебры такого рода называются диассоциативными алгебрами [2].

Категория диассоциативных алгебр Dias тесно связана с другими категориями алгебр по следующей диаграмме:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & \Longrightarrow & \text{Dend} & \longrightarrow & & \Longrightarrow & \text{Dias} & \longrightarrow & \\
\text{Zinb} & & & & \text{Ass} & & & & \text{Lieb} \\
 & \longrightarrow & \text{Com} & \Longrightarrow & & \longrightarrow & \text{Lie} & \Longrightarrow &
\end{array}
$$

где Zinb, Dend, Com, Ass, Leib, Lie категории Зенбилевых, дендриформных, коммутативных, ассоциативных, алгебр Лейбница и алгебр Ли, соответственно. Причем, символ $A \Longrightarrow$ в диаграмме обозначает вложение категории A в категорию B, а $A \longrightarrow B$ означает, что произвольная алгебра из категории A, снабженная определенным умножением, принадлежит категории [2].

Определение 1. *Диассоциативной алгеброй (или диалгеброй) называется векторное пространство D над полем K, с заданной на ней двумя K-билинейными отображениями*

$$\dashv : D \times D \to D \text{ и } \vdash : D \times D \to D,$$

которые для любых $x, y, z \in D$ удовлетворяют следующим тождествам:

$$
\begin{array}{l}
1.(x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \dashv z) \\
2.(x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \vdash z) \\
3.(x \vdash y) \dashv z = x \vdash (y \dashv z) \\
4.(x \dashv y) \vdash z = x \vdash (y \vdash z) \\
5.(x \vdash y) \vdash z = x \vdash (y \vdash z)
\end{array}
$$

Отображения $\dashv$ и $\vdash$ называется левыми и правыми произведениями, соответственно.

Отметим, что из тождеств 1 и 5 мы имеем ассоциативность левого и правого умножений.

Определения 2. *Гомоморфизм диалгебр D_1 и D_2 называется K-линейное отоброжение $f : D_1 \to D_2$ такое, что:*

$$f(x \dashv y) = f(x) \dashv f(y)$$
$$f(x \vdash y) = f(x) \vdash f(y) \text{ для любых } x, y \in D_1.$$

Биективный гомоморфизм называется изоморфизмом.

Пусть $D \Diamond D = D \vdash D + D \dashv D$, где

$$D \vdash D = \{\Sigma\ \alpha_{ij} d_i \vdash d_j \mid \alpha_{ij} \in C, d_i, d_j \in D\} \text{ и}$$
$$D \dashv D = \{\Sigma\ \beta_{ks} d_k \dashv d_s \mid \beta_{ks} \in C, d_k, d_s \in D\}.$$

В произвольной диассоциативной алгебре D определим следующие ряды:

$D^{<1>} = D, D^{<k+1>} = D^{<k>} \lozenge D,$

$D^{\{1\}} = D, D^{\{k+1\}} = D \lozenge D^{\{k\}},$

$D^1 = D, D^{k+1} = D^1 \lozenge D^k + D^2 \lozenge D^{k-1} + ... + D^k \lozenge D^1.$

Для этих рядов справедливы следующие результаты:

Лемма 1. *Для любых $g, h \in N$ верно вложение:*

$$D^{<g>} \lozenge D^{<h>} \subseteq D^{<g+h>}$$

Доказательство: Доказательство леммы осуществляется индукцией по h для произвольного g. При h=1 и произвольном g справедливость вложения очевидна. Предположим, что вложение верно для всех значений $\leq h$ при любом g. Использование тождеств 1-5 в следующей цепочки равенств:

$$D^{<g>} \lozenge D^{<h+1>} = D^{<g>} \lozenge (D^{<h>} \lozenge D) \subseteq (D^{<g>} \lozenge D^{<h>}) \lozenge D \subseteq D^{<g+h>} \lozenge D \subseteq D^{<g+h+1>}$$

доказывает утверждение леммы для значения h+1 и любом g.

Лемма 2. *Для любых $g, h \in N$ верно вложение:*

$$D^{\{g\}} \lozenge D^{\{h\}} \subseteq D^{\{g+h\}}$$

. Доказательство: Доказательство леммы проводится аналогично доказательству леммы 1.

Лемма 3. *Для любого $g \in N$ верны равенства:*

$$D^{<g>} = D^g = D^{\{g\}}$$

Определение 3. *Диассоциативная алгебра D называется право нильпотентной (лево нильпотентной) если существует $s \in N$ (существует $t \in N$) такое, что $D^{<s>} = 0 (D^{\{t\}} = 0)$.*

Определение 4. *Диассоциативная алгебра D называется нильпотентной если существует $k \in N$ такое, что $D^k = 0$.*

Из леммы 3 вытекает, что в диассоциативных алгебрах понятия нильпотентности, правой нильпотентности и левой нильпотентности совпадают.

Предложение 1. *Пусть* $(D, \dashv, \vdash)$ *конечномерная диассоциативная алгебра и* $D_1 = (D, \dashv)$, $D_2 = (D, \vdash)$ *- ассоциативные алгебры относительно умножений* $\dashv, \vdash$, *соответственно. Тогда для диассоциативной алгебры* $(D, \dashv, \vdash)$ *следующие утверждение эквивалентны:*

A) *диассоциативная алгебра* $(D, \dashv, \vdash)$ *нильпотентна;*

B) *ассоциативная алгебра* $D_1 = (D, \dashv)$ *нильпотентна;*

C) *ассоциативная алгебра* $D_2 = (D, \vdash)$ *нильпотентна.*

Доказательство: Нетрудно видеть, что из A) следует B) и C). Докажем B) $\Rightarrow$ C) . Пусть ассоциативная алгебра $D_2 = (D, \vdash)$ нильпотентна, т.е. $D_2^k 7 = 0$ (относительно правого умножения). Рассмотрим элемент $x \in D_1^{k+1}$, где $x_1 \dashv x_2 \dashv x_3 \dashv ... \dashv x_{k+1} = x_1 \dashv (x_2 \dashv (x_3 \dashv ... \dashv x_{k+1})...)$ Тогда последовательным применением тождеств 1 - 2, мы получим

$$x_1 \dashv (x_2 \dashv (x_3 \dashv ... \dashv x_{k+1})...) = x_1 \dashv (x_2 \vdash x_3 \vdash ... \vdash x_{k+1}) = 0.$$

Следовательно, имеем $D_1^{k+1} = 0$.

Аналогичным способом доказывается импликация C) $\Rightarrow$ B).

Докажем B) $\Rightarrow$ A). Пусть выполнено условие B), тогда выполнено условие C) и мы имеем: $D_1^j = 0$ и $D_2^k = 0$. для некоторого $j, k \in N$.

Пусть x произвольный элемент пространства D^{k+j-2}, тогда, на основании леммы 3, его можно записать в виде:
$x = (((x_1 \Diamond x_2) \Diamond ... \Diamond x_t) \Diamond x_{t+1}) \Diamond ... \Diamond x_{k+j-2}$ где $t \in \{k-1, k, ..., k+j-2\}$ Ввиду того, что x разлагается в сумму произведений элементов $x_1, x_2, ..., x_{k+j-2}$ со всевозможными расположениями правых и левых умножений, то достаточно доказать равенство нулю каждого члена суммы.

Если правое умножение участвует правее элемента x_t, тогда использованием тождеств 4-5 и $D_2^k = 0$, мы получим равенство нулю данного члена. Если же все умножения правее элемента x_t являются левыми, тогда на основании $D_1^j = 0$ имеем равенство нулю данного элемента.

Таким образом, мы показали равенство нулю правонормированных произведений элементов $x_1, x_2, ..., x_{k+j-2}$ при любой расстановке правых и левых умножений. Следовательно,
$x = (((x_1 \Diamond x_2) \Diamond ... \Diamond x_t) \Diamond x_{t+1}) \Diamond ... \Diamond x_{k+j-2}$ и, значит, $D^{k+j-2} = 0$. Предложение доказано.

Пусть R_x и r_x операторы правых умножений в ассоциативных алгебрах D_1 и D_2, соответственно. Тогда справедлив аналог теоремы Энгеля [4].

Теорема (Энгеля). *Диассоциативная алгебра $(D, \dashv, \vdash)$ нильпотентна тогда и только тогда когда операторы R_x (соответственно r_x) для любого $x \in D$ нильпотентны.*

Известно, что одномерная ассоциативная комплексная алгебра либо изоморфна алгебре с умножениями: $e_1e_1 = e_1$ либо $e_1e_1 = 0$. В виду того, что разложимые алгебры, получаются прямой суммой алгебр меньших размерностей, то в дальнейшем мы будем рассматривать не разложимые алгебры.

Теорема 1. [3] *Любая двумерная комплексная не разложимая ассоциативная алгебра изоморфна одной из следующих попарно неизоморфных алгебр:*
$A_1 : e_1e_1 = e_2$; $A_2 : e_1e_1 = e_1, e_1e_2 = e_2$; $A_3 : e_1e_1 = e_1, e_2e_1 = e_2$; $A_4 : e_1e_1 = e_1, e_1e_2 = e_2, e_2e_1 = e_2$:

Отметим, что диассоциативная алгебра, у которой правое умножение совпадает с левым умножением, является ассоциативной. Приведем классификацию двумерных диассоциативных алгебр.

Теорема 2. *Любая двумерная комплексная диассоциативная алгебра либо ассоциативна либо изоморфна одной из следующих попарно неизоморфных алгебр.*

$D_1 : e_1 \dashv e_1 = e_1, e_1 \vdash e_1 = e_1, e_1 \vdash e_2 = e_2;$

$D_2 : e_1 \dashv e_1 = e_1, e_2 \dashv e_1 = e_2, e_1 \vdash e_1 = e_1;$

$D_3 : e_1 \dashv e_1 = e_2, e_1 \vdash e_1 = \alpha e_2;$

$D_4 : e_1 \dashv e_1 = e_1, e_2 \dashv e_1 = e_2, e_1 \vdash e_1 = e_1, e_1 \vdash e_2 = e_2.$

Доказательство. Для того, чтобы определить умножение в диассоциативной алгебре, мы рассмотрим пространство D относительно одной операции. Мы можем считать, что относительно одной операции векторное пространство D как ассоциативная алгебра изоморфна алгебре из теоремы 1, ассоциативную же алгебру относительно второй операции мы рассмотрим в общем виде, т.е. в виде $e_ie_j = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ij}^k e_k$, где $\alpha_{ij}^k \in C$ структурные константы. Затем, проверим выполнение аксиом диассоциативной алгебры.

Пусть $(D, \vdash)$- алгебра, имеющая таблицу умножения: $e_1 \vdash e_1 = e_1$, а умножение в алгебре $(D, \dashv)$ рассмотрим в следующем общем виде

$$e_1 \dashv e_1 = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2,\ e_1 \dashv e_2 = \alpha_3 e_1 + \alpha_4 e_2,.$$
$$e_2 \dashv e_1 = \alpha_5 e_1 + \alpha_6 e_2,\ e_2 \dashv e_2 = \alpha_7 e_1 + \alpha_8 e_2,$$

Проверка для данных алгебр выполнение аксиом диассоциативности приводит к ограничениям:
$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_7 = \alpha_8 = 0, \alpha_6(\alpha_6 - 1) = 0.$
Таким образом, в этом случае имеем диассоциативную алгебру с таблицей умножения:
$e_1 \vdash e_1 = e_1, e_1 \dashv e_1 = e_1, e_2 \dashv e_1 = \alpha_6 e_2$, где $\alpha_6(\alpha_6 - 1) = 0$
В случае, когда $\alpha_6 = 0$ умножения $\vdash = \dashv$ совпадают, и мы получим ассоциативную алгебру. Если же, $\alpha_6 = 1$ то получим диалгебру D_1.

Рассуждая аналогичным образом для других алгебр теоремы, мы получим доказательство теоремы. Приведем классификацию трехмерных комплексных ассоциативных алгебр.

Теорема 3 [3]. *Любая трехмерная не разложимая комплексная нильпо-тентная ассоциативная алгебра изоморфна одной из следующих попарно неизоморфных алгебр:*
$AN_1 : e_1e_1 = e_2, e_1e_2 = e_3, e_2e_1 = e_3,;$ $AN_2 : e_1e_1 = e_2, e_1e_3 = e_2, e_3e_3 = \alpha e_2, \alpha \in C;$ $AN_3 : e_1e_1 = e_2, e_1e_2 = e_3, e_2e_1 = e_3;$ $AN_4 : e_1e_3 = e_2, e_3e_1 = e_2.$

Теорема 3 позволяет получить классификацию трехмерных комплексных диассоциативных алгебр. А именно, верна следующая

Теорема 4. *Любая трехмерная не разложимая нильпотентная комплексная диассоциативная алгебра либо ассоциативна либо изоморфна одной из следующих попарно неизоморфных алгебр.*

$DN_1 : e_1 \dashv e_1 = e_2,\ e_1 \dashv e_2 = e_3\ e_2 \dashv e_1 = e_3$
$e_1 \vdash e_2 = e_3,\ e_2 \vdash e_1 = e_3,\ e_1 \vdash e_1 = e_2 + e_3;$
$DN_2 : e_1 \dashv e_3 = e_2,\ e_3 \dashv e_1 = e_2,$
$e_1 \vdash e_3 = \beta e_2,\ e_3 \vdash e_1 = \alpha e_2;$
$DN_3 : e_1 \dashv e_3 = e_2,\ e_3 \dashv e_1 = e_2,$
$e_1 \vdash e_3 = \beta e_2,\ e_3 \vdash e_1 = \alpha e_2,\ e_3 \vdash e_3 = e_2;$
$DN_4 : e_1 \dashv e_3 = e_2,\ e_3 \dashv e_1 = e_2,$
$e_1 \vdash e_1 = e_2,\ e_1 \vdash e_3 = \beta e_2,\ e_3 \vdash e_1 = \alpha e_2,\ e_3 \vdash e_3 = e_2;$
$DN_5 : e_1 \vdash e_1 = e_2,\ e_1 \vdash e_3 = e_2,\ e_3 \vdash e_1 = e_2,\ e_1 \dashv e_1 = \alpha e_2,$
$e_1 \dashv e_3 = \beta e_2, e_3 \dashv e_1 = \gamma e_2,\ e_3 \dashv e_3 = \delta e_2;$
$DN_6 : e_1 \vdash e_1 = e_2,\ e_1 \vdash e_3 = e_2,\ e_3 \vdash e_3 = \eta e_2,$
$e_1 \dashv e_1 = \alpha e_2,\ e_1 \dashv e_3 = \beta e_2,\ e_3 \dashv e_1 = \gamma e_2, e_3 \dashv e_3 = \delta e_2;$
где $\eta, \alpha, \beta, \gamma, \delta \in C$ и отсутствующие произведения равны нулю.

Доказательство. Доказательство данной теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 2, т.е. используем классификацию ассоциативных алгебр из теоремы 3 и проверяем два умножения (одно из которых, не ограничивая общности, можно взять из списка теоремы 3) на выполнение тождеств 1-5. Затем, получив ограничения на структурные константы второго ассоциативного умножения, рассматриваем всевозможные случаи. Следует отметить, что согласно лемме 3 в данной процедуре использование теоремы 3 исчерпывает все нильпотентные диассоциативные алгебры размерности три. Проверка изоморфности полученных алгебр, завершает доказательство теоремы. Таким образом, из теорем 2 и 3 мы имеем классификацию нильпотентных диассоциативных алгебр размерности ≤ 3.

Литература

1. Loday J.-L.Une version non commutative des algebras de Lie: les algebras de Leibniz. Enseign.Mth.1993, vol. 39, p.269-293.

2. Loday J.-L, A.Frabetti, F.Chapoton, F.Goichot. Dialgebras and Related Op-erads. Lecture Notes in Math.,2001.vol. 1763. p. 133.

3. Peirce B. Linear Associative algebra. American Journal of Mathematics, vol.4.(1881), p 97-229.

4. Джекобсон Н. Алгебры Ли. М.: Мир, 1964.356 с.

Институт математики
им. В.И.Романовского АН РУз

Дата поступления
05.01.07

Uzbek Mathematical
Journal, 2007,№2, pp.119-127

УДК 519.21

Об асимптотических свойствах процесса Гальтона-Ватсона с иммиграцией

Я.М.Хусанбаев

Maqolada deyarli kritik va immigratsiyali Galton-Watson processini asimptotik xolati o'rganilgan va uni differensial tenglama echimiga yaqinlashish shartlari aniqlangan.

In the paper, we investigate a sequence of nearly critical Galton-Watson branching process with immigration. The conditions are found for the process to converge to the solution of a differential equation.

Пусть для каждого $n \in \mathbb{N}$ $\left\{\xi_{k,j}^{(n)},\ k,j \in \mathbb{N}\right\}$ и $\left\{\varepsilon_k^{(n)},\ k \in \mathbb{N}\right\}$ — независимые совокупности независимых, неотрицательных целочисленных и одинаково распределенных случайных величин. Введем в рассмотрение для каждого $n \in \mathbb{N}$ последовательность случайных процессов $\left(X_k^{(n)},\ k \in \mathbb{N}\right)$, определенных следующими рекуррентными соотношениями

$$X_0^{(n)} \equiv 0, \quad X_k^{(n)} = \sum_{j=1}^{X_{k-1}^{(n)}} \xi_{k,j}^{(n)} + \varepsilon_k^{(n)}, \quad k,n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Такие процессы называются ветвящимися процессами Гальтона-Ватсона с иммиграцией. Причем величина $\xi_{k,j}^{(n)}$ интерпретируется как количество потомков j-го индивидуума в $k-1$-ом поколении, а $\varepsilon_k^{(n)}$ — как число иммигрирующих индивидуумов в популяцию в k-ом поколении, величина $X_k^{(n)}$ представляет собой общее количество индивидуумов в популяции в k-ом поколении. Предположим, что величины

$$m_n = \mathbf{E}\xi_{1,1}^{(n)}, \quad \lambda_n = \mathbf{E}\varepsilon_1^{(n)}, \quad \sigma_n^2 = \mathbf{var}\xi_{1,1}^{(n)}, \quad b_n^2 = \mathbf{var}\varepsilon_1^{(n)}$$

конечны для всех $n \in \mathbb{N}$. Процесс (1) называют докритическим, критическим и надкритическим, если $m_n < 1$, $m_n = 1$ и $m_n > 1$, соответственно. Последовательность (1) называют почти критической, если $m_n \to 1$ при $n \to \infty$.

Ветвящиеся процессы с иммиграцией исследованы многими авторами (см., например, [1]-[5] и литературу в них). Критические процессы Гальтона-Ватсона с убывающей иммиграцией ($\lambda_n \to 0$), зависящей от состояния процесса, изучены в [2] для дискретного случая, а в [3] те же результаты перенесены на случай непрерывного времени. В работе [4] изучен почти критический процесс Гальтона-Ватсона с иммиграцией для случая $\sigma_n^2 \to \sigma^2$ при $n \to \infty$ и доказана слабая сходимость в пространстве Скорохода процесса

$$X^{(n)}(t) := \frac{1}{n} X_{[nt]}^{(n)}, \quad t \in \mathbb{R}_+ \tag{2}$$

к решению стохастического дифференциального уравнения. В работе [5] рассмотрен случай, когда $\sigma^2 = 0$, и установлены условия, при которых процесс (2) сходится к решению детерминированного дифференциального уравнения.

Пусть $T > 0$, $\gamma > 0$ — фиксированные числа. Определим процесс $X_n(t)$, полагая $X_n(t) = \dfrac{X_{[nt]}^{(n)}}{n^\gamma}$ при $t \in [0, T]$.

В данной работе исследуются предельные теоремы для процессов $X_n(t)$ при различных асимптотических поведениях величин $m_n - 1$, λ_n, σ_n^2, b_n^2.

Теорема 1. *Пусть для некоторых $\delta \geq 1$ и $\gamma > 0$ выполнены следующие условия:*

A) Для некоторого $\alpha \in \mathbb{R}$

$$m_n = 1 + \frac{\alpha}{n^\delta} + o\left(\frac{1}{n^\delta}\right),$$

B) $n^{1-\gamma}\lambda_n \to \lambda \geq 0$ при $n \to \infty$;
C) $n^{1-\gamma}\sigma_n^2 \to 0$ при $n \to \infty$;
D) $n^{1-\gamma}b_n^2 \to b^2 \geq 0$ при $n \to \infty$.

Тогда

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |X_n(t) - \eta(t)| \xrightarrow{P} 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

где $\eta(t)$ является решением уравнения

$$d\eta(t) = (\lambda + \alpha\beta\eta(t))dt, \quad \eta(0) = 0, \tag{3}$$

здесь $\beta = 0$, если $\delta > 1$ и $\beta = 1$, если $\delta = 1$.

Доказательство Величину $X_{k+1}^{(n)}$ запишем в следующем виде:

$$X_{k+1}^{(n)} = X_k^{(n)} + (m_n - 1)X_k^{(n)} + \lambda_n + M_k^{(n)}, \tag{4}$$

где

$$M_k^{(n)} = \sum_{j=1}^{X_k^{(n)}} \left(\xi_{k+1,j}^{(n)} - m_n\right) + \varepsilon_{k+1}^{(n)} - \lambda_n.$$

Очевидно, что последовательность $M_k^{(n)}$ образует мартингал-разность относительно потока $\mathcal{F}_k^{(n)} = \sigma\left\{X_0^{(n)}, \ldots, X_k^{(n)}\right\}$. Положим $\eta_{nk} = \dfrac{X_k^{(n)}}{n^\gamma}$. В силу соотношения (4) имеем

$$\eta_{nk+1} = \eta_{nk} + \left(n(m_n - 1)\eta_{nk} + \lambda_n n^{1-\gamma}\right) \cdot \frac{1}{n} + \frac{M_k^{(n)}}{n^\gamma}. \tag{5}$$

Условие A влечет, что

$$n(m_n - 1) \to \begin{cases} \alpha, & \text{если} \quad \delta = 1, \\ 0, & \text{если} \quad \delta > 1. \end{cases} \tag{6}$$

Предположим, мы доказали, что

$$\sup_{0 \le t \le T} \left| \sum_{k=1}^{[nt]} \frac{M_k^{(n)}}{n^\gamma} \right| \xrightarrow{P} 0. \tag{7}$$

Тогда в силу условий A, B и согласно теореме 3.1 [6]

$$\max_{1 \le k \le nT} |\eta_{nk} - Z_{nk}| \xrightarrow{P} 0, \tag{8}$$

где величины Z_{nk} удовлетворяют соотношению

$$Z_{nk+1} = Z_{nk} + \left(n(m_n - 1)Z_{nk} + \lambda_n n^{1-\gamma}\right) \cdot \frac{1}{n}\ . \tag{9}$$

Далее, применяя теорему 3.2 [6], имеем

$$\sup_{0\le t\le T}|Z_n(t)-\eta(t)| = \max_{1\le k\le nT}\left|Z_{nk}-\eta\left(\frac{k}{n}\right)\right| \xrightarrow{P} 0, \tag{10}$$

где $Z_n(t) = Z_{n[nt]}$. Теперь из (6), (7), (8), (9) и (10) имеем

$$\sup_{0\le t\le T}|X_n(t)-\eta(t)| \le \max_{1\le k\le nT}|\eta_{nk}-Z_{nk}| + \max_{1\le k\le nT}\left|Z_{nk}-\eta\left(\frac{k}{n}\right)\right| \xrightarrow{P} 0$$

при $n\to\infty$, что и требуется доказать. Поэтому докажем соотношение (7).

Рассмотрим случай $\alpha\ne 0$. Применяя лемму 2.1 [5] имеем

$$\mathbf{E}\left(\sum_{k=1}^{[nt]}\frac{M_k^{(n)}}{n^\gamma}\right)^2 = \frac{\sigma_n^2}{n^{2\gamma}}\sum_{k=1}^{[nt]}\mathbf{E}X_k^{(n)} + \frac{[nt]}{n^{2\gamma}}b_n^2 = \frac{\sigma_n^2}{n^{2\gamma}}\sum_{k=1}^{[nt]}\frac{m_n^k-1}{m_n-1}\lambda_n +$$

$$+\frac{[nt]}{n}\cdot\frac{b_n^2 n^{1-\gamma}}{n^\gamma} = \frac{\sigma_n^2\lambda_n m_n}{n^{2\gamma}(m_n-1)}\cdot\left(\frac{m_n^{[nt]}-1}{m_n-1}-[nt]\right) + \frac{[nt]}{n}\cdot\frac{b_n^2 n^{1-\gamma}}{n^\gamma}\ . \tag{11}$$

Для достаточно больших $n\in\mathbb{N}$ имеем

$$m_n^{[nt]} \sim e^{\frac{\alpha}{n^{\delta-1}}t} \sim \begin{cases} 1, & \delta>1, \\ e^{\alpha t}, & \delta=1 \end{cases} \quad \text{при } n\to\infty.$$

Тогда из (11), условий теоремы и $e^x\sim 1+x$, $x\to 0$ имеем для достаточно больших n

$$\mathbf{E}\left(\sum_{k=1}^{[nt]}\frac{M_k^{(n)}}{n^\gamma}\right)^2 \sim \begin{cases} \dfrac{\sigma_n^2 n^{1-\gamma}\lambda}{\alpha}\left(\dfrac{e^{\alpha t}-1}{\alpha}-t\right) + \dfrac{b^2 t}{n^\gamma} + o(1) \text{ для } \delta=1, \\ \dfrac{b^2 t}{n^\gamma} + o(1) \text{ для } \delta>1. \end{cases} \tag{12}$$

Отсюда и из условия C имеем

$$\mathbf{E}\left(\sum_{k=1}^{[nt]}\frac{M_k^{(n)}}{n^\gamma}\right)^2 \to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty \tag{13}$$

для любого $t\in[0,T]$.

Теперь рассмотрим случай, когда $\alpha = 0$, т.е. критический случай. Применяя лемму 2.1 из [5] имеем

$$\mathbf{E}\left(\sum_{k=1}^{[nt]}\frac{M_k^{(n)}}{n^\gamma}\right)^2 = \frac{\sigma_n^2}{n^{2\gamma}}\sum_{k=1}^{[nt]}\mathbf{E}X_k^{(n)} + \frac{[nt]}{n^{2\gamma}}b_n^2 = \frac{\sigma_n^2}{n^{2\gamma}}\sum_{k=1}^{[nt]}k\lambda_n + \frac{b_n^2 n^{1-\gamma}}{n^\gamma}t =$$

$$= \frac{\sigma_n^2\lambda_n}{n^{2\gamma}}\frac{([nt]+1)[nt]}{2} + \frac{b_n^2 n^{1-\gamma}}{n^\gamma}t + o(1) = \frac{1}{2}n^{2-2\gamma}\sigma_n^2\lambda_n t^2 + \frac{b_n^2 n^{1-\gamma}}{n^\gamma}t + o(1).$$

Отсюда и из условий B, C, D также получаем (13).

Из (13) и неравенства Чебышева следует, что

$$\sum_{k=1}^{[nt]}\frac{M_k^{(n)}}{n^\gamma} \xrightarrow{P} 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

для любого $t \in [0, T]$. Далее, так как $M_k^{(n)}$ — мартингал-разность, то очевидно, что

$$\sum_{k=1}^{[nt]}\mathbf{E}\left(\frac{M_k^{(n)}}{n^\gamma}\Big/\mathcal{F}_{k-1}^{(n)}\right) = 0.$$

Если теперь мы установим, что

$$\begin{gathered}\sum_{k=1}^{[nt]}\mathbf{E}\left(\left(\frac{M_k^{(n)}}{n^\gamma}\right)^2\Big/\mathcal{F}_{k-1}^{(n)}\right) \xrightarrow{P} 0,\\ \mathcal{J}_n(t) = \sum_{k=1}^{[nt]}\mathbf{E}\left(\left(\frac{M_k^{(n)}}{n^\gamma}\right)^2 I\left(\left|\frac{M_k^{(n)}}{n^\gamma}\right| > \varepsilon\Big/\mathcal{F}_{k-1}^{(n)}\right)\right) \to 0\end{gathered} \qquad (14)$$

для любого $\varepsilon > 0$, то согласно принципу инвариантности для мартингал-разностей [7, теорема 11.1.7] будет следовать, что

$$\sum_{k=1}^{[nt]}\frac{M_k^{(n)}}{n^\gamma} \xrightarrow{J} 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

где $\xrightarrow{J}$ означает сходимость в J-топологии Скорохода. Так как предельный процесс непрерывен (равен тождественно нулю), то из J-сходимости следует U-сходимость. Тогда из этих рассуждений будет следовать (7). Поэтому мы докажем (14). Применяя лемму 2.1 [5] имеем

$$\mathcal{J}_n(t) \leq \sum_{k=1}^{[nt]} \mathbf{E}\left(\left(\frac{M_k^{(n)}}{n^\gamma}\right)^2 \Big/ \mathcal{F}_{k-1}^{(n)}\right) = \frac{\sigma_n^2}{n^{2\gamma}} \sum_{k=1}^{[nt]} X_k^{(n)} + \frac{[nt]}{n}\frac{b_n^2 n^{1-\gamma}}{n^\gamma}.$$

В силу условия D остается показать, что

$$\frac{\sigma_n^2}{n^{2\gamma}} \sum_{k=1}^{[nt]} X_k^{(n)} \xrightarrow{P} 0. \tag{15}$$

Для этого достаточно доказать, что

$$\mathbf{E}\left(\frac{\sigma_n^2}{n^{2\gamma}} \sum_{k=1}^{[nt]} X_k^{(n)}\right) \to 0 \text{ при } n \to \infty, \tag{16}$$

$$\mathbf{var}\left(\frac{\sigma_n^2}{n^{2\gamma}} \sum_{k=1}^{[nt]} X_k^{(n)}\right) \to 0 \text{ при } n \to \infty. \tag{17}$$

Аналогичными рассуждениями как в (11), (12) получаем (16). Далее, применяя лемму 2.1 [5] имеем

$$\mathbf{var}\left(\frac{\sigma_n^2}{n^{2\gamma}} \sum_{k=1}^{[nt]} X_k^{(n)}\right) = \left(U_n(t) b_n^2 + V_n(t)\lambda_n \sigma_n^2\right)\frac{\sigma_n^4}{n^{4\gamma}}, \tag{18}$$

где

$$U_n(t) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{[nt]} \frac{m_n^{2k-2}-1}{m_n^2-1}\left(2\cdot\frac{m_n^{[nt]-k+1}}{m_n-1}-1\right), & \text{если } m_n \neq 1, \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{[nt]}(k-1)(2([nt]-k+1)-1), & \text{если } m_n = 1, \end{cases}$$

$$V_n(t) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{[nt]} \frac{(m_n^{k-1}-1)(m_n^{k-2}-1)}{(m_n-1)(m_n^2-1)}\left(2\cdot\frac{m_n^{[nt]-k+1}-1}{m_n-1}-1\right), & \text{если } m_n \neq 1, \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{[nt]}\frac{1}{2}(k-1)(k-2)(2([nt]-k+1)-1), & \text{если } m_n = 1. \end{cases}$$

Из работы [5] известно, что если $m_n = 1$, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U_n(t)}{n^3} = \frac{1}{3}t^3, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{V_n(t)}{n^4} = \frac{1}{12}t^4 \tag{19}$$

для всех $t \geq 0$, и если $m_n \neq 1$, то

$$\begin{gathered} \lim_{n\to\infty} \frac{U_n(t)}{n^3} = \frac{e^{2\alpha t} - 4e^{\alpha t} + 2\alpha t + 3}{2\alpha^3}, \\ \lim_{n\to\infty} \frac{V_n(t)}{n^4} = \frac{e^{2\alpha t} - 4(\alpha t - 1)e^{\alpha t} - 2\alpha t - 5}{2\alpha^4} \end{gathered} \tag{20}$$

для всех $t \geq 0$.

Соотношение (18) запишем в виде

$$\mathbf{var}\left(\frac{\sigma_n^2}{n^{2\gamma}} \sum_{k=1}^{[nt]} X_k^{(n)}\right) = \frac{(\sigma_n^2 n^{1-\gamma})^2 b_n^2 n^{1-\gamma}}{n^\gamma} \cdot \frac{U_n(t)}{n^3} + \lambda_n n^{1-\gamma} (\sigma_n^2 n^{1-\gamma})^3 \cdot \frac{V_n(t)}{n^4}.$$

Отсюда и из (18)-(20) следует (17). Теперь последнее соотношения, условия B, C, D и соотношения (16)-(20) влекут (15). Доказательство теоремы 1 завершено.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия A, B и C теоремы 1. Если, кроме того,* $b_n^2 \to b^2 \geq 0$ *и* $\gamma > \dfrac{1}{2}$, *то верно утверждение теоремы 1.*

Теорема 3. *Пусть выполнено условие A теоремы 1. Пусть, далее,* a_n *— некоторая последовательность действительных неслучайных чисел и выполнены следующие условия:*

B_1) $n a_n \lambda_n \to \lambda \geq 0$ *при* $n \to \infty$;

C_1) $n a_n \sigma_n^2 \to 0$ *при* $n \to \infty$;

D_1) $n a_n^2 b_n^2 \to 0$ *при* $n \to \infty$.

Тогда

$$\sup_{0\leq t\leq T} \left| a_n X_{[nt]}^{(n)} - \eta(t) \right| \xrightarrow{P} 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

где $\eta(t)$ *является решением уравнения (3).*

Теоремы 2-3 доказываются аналогично теореме 1.

Из теоремы 3 получаем следующие следствия.

Следствие 1. *Пусть выполнено условие A теоремы 1 для некоторого $\delta \geq 1$. Пусть, кроме того, выполнены следующие условия*

B_2) $n\lambda_n \to \lambda \geq 0$ при $n \to \infty$;

C_2) $n\sigma_n^2 \to 0$ при $n \to \infty$;

D_2) $nb_n^2 \to 0$ при $n \to \infty$.

Тогда

$$\sup_{0\leq t\leq T} \left| X_{[nt]}^{(n)} - \eta(t) \right| \xrightarrow{P} 0 \quad \text{при } n \to \infty,$$

где $\eta(t)$ является решением уравнения (3).

Следствие 2. *Пусть выполнено условие A теоремы 1 для некоторого $\delta \geq 1$. Пусть, кроме того, для некоторого γ выполнены следующие условия*

B_3) $n^{1-\gamma}\lambda_n \to \lambda \geq 0$ *при* $n \to \infty$;

C_3) $n^{1-\gamma}\sigma_n^2 \to 0$ при $n \to \infty$;

D_3) $n^{1-2\gamma}b_n^2 \to 0$ при $n \to \infty$.

Тогда верно утверждение теоремы 1.

Если в теореме 3 положим $a_n \equiv 1$, то получим следствие 1, а если положим $a_n = n^{-\gamma}$, то получим следствие 2. Отметим, что в следствии 2 величина γ может принимать отрицательные значения.

Замечание 1. Если $\delta = 1$ и $\gamma = 1$, то из теоремы 1 следует теорема 2.1 работы [5].

Замечание 2. Случай $\gamma < 1$ соответствует процессу с убывающей иммиграцией. Если $\gamma > 1$, то иммиграция в популяцию возрастает.

Замечание 3. Очевидно, что в теореме 1 $\eta(t) = \dfrac{\lambda}{\alpha}\left(e^{\alpha t} - 1\right)$ для $\alpha \neq 0$, $\delta = 1$ и $\eta(t) = \lambda t$, если $\delta > 1$.

Замечание 4. Если $X_0^{(n)} \neq 0$ и $\dfrac{X_0^{(n)}}{n^\gamma} \xrightarrow{P} \eta_0$ при $n \to \infty$, где η_0 — некоторая конечная случайная величина, то верно утверждение теоремы 1, в котором $\eta(t)$ удовлетворяет уравнению (3) с начальным условием $\eta(0) = \eta_0$.

Литература

1. Бадалбаев И.С., Рахимов И.У. Неоднородные потоки ветвящихся процессов. Ташкент, "Фан", 1993 г. 156 с.

2. Митов К.В., Ватутин А., Янев Н.М. Критические процессы Гальтона-Ватсона с убывающей иммиграцией, зависящей от состояния процесса. СЕРДИКА Българско математическо списание. Т.10. 1984. с.412-424.

3. Митов К.В., Янев Н.М. Ветвящиеся процессы с убывающей иммиграцией, зависящей от состояния процесса. СЕРДИКА Българско математическо списание. Т.11. 1985. с.25-41.

4. Sriram T.N., Invalidity of bootstrap for critical branching process with immigration. Ann. Statist. v.22. 1994, p.1013-1023.

5. Ispany M., Pap G., Van Zuijlen M.C.A. Fluctuation limit of branching processes with immigration and estimation of the means. Adv. Appl. Probab. v.37. 2005, p.523-538.

6. Анисимов В.В., Лебедев Е.А. Стохастические сети обслуживания. Марковские модели. Киев, "Либiдь"1992 г. 207 с.

7. Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Теория мартингалов. Москва, "Наука", 1986 г. 512 с.

Институт математики
им. В.И.Романовского АН РУз

Дата поступления
10.11.06

Uzbek Mathematical
Journal, 2007,№2, pp.128-134

УДК 517.54

Представление нормы функционала погрешности весовых кубатурных формул в комплекснозначном пространстве Соболева

Х.М.Шадиметов, Б.Н.Абдукаюмов

Ushbu ishda kompleks o'zgaruvchili Sobolev fazosida vaznli kubatur formulalar xatolik funksionali normasining ko'rinishi olingan.

In this paper the representation of the norm of the error functional of a wight cubature formulas in the Sobolev comlex valued space is obtained.

1. Введение.

Пусть $L_2^{(m)}(R^n)-$ пространство Соболева, комплекснозначных функций $\varphi(x)$, m-е производные которых (в обобщенном смысле) квадратично интегрируемы со скалярным произведением

$$< f,\varphi >_m = \int\limits_{R^n} \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} D^\alpha \overline{f} D^\alpha \varphi dx. \tag{1}$$

Здесь $\alpha-$ мультииндекс $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, $\alpha! = \alpha_1!\alpha_2!...\alpha_n!$, $|\alpha| = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j$, $D^\alpha\varphi(x) = \frac{\partial^m \varphi(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}}$, $\overline{f}(x)-$ сопряженное к $f(x)$.

Предположим, что $2m > n$, норма в пространстве $L_2^{(m)}(R^n)$ задается равенством

$$\left\| \varphi | \, L_2^{(m)}(R^n) \right\| = \left[\int\limits_{R^n} \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} \left| D^\alpha \varphi \right|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Для $\varphi(x) \in L_2^{(m)}(R^n)$ рассмотрим кубатурную формулу вида

$$\int\limits_{\Omega} p(x)\varphi(x)dx \cong \sum_{k=1}^{N} C_k \varphi(x^{(k)}). \tag{2}$$

Здесь $\Omega-$ связная область с достаточно гладкой границей, $p(x) = w(x) + iv(x)-$ интегрируемая функция, точки $x^{(k)} \in \Omega$ и параметры $C_k = W_k + iV_k$ называются узлами и коэффициентами кубатурной формулы, соответственно. Погрешностью кубатурной формулы (2) называется разность

$$(\ell, \varphi) = \int\limits_{\Omega} p(x)\varphi(x)dx - \sum_{k=1}^{N} C_k \varphi(x^{(k)}) =$$

$$= \int\limits_{R^n} \left(\chi_\Omega(x)p(x) - \sum_{k=1}^{N} C_k \delta(x - x^{(k)}) \right) \varphi(x)dx,$$

где $\chi_\Omega(x)-$ характеристическая функция области Ω, $\delta(x)-$ известная дельта функция Дирака. Функционал

$$\ell(x) = \chi_\Omega(x)p(x) - \sum_{k=1}^{N} C_k \delta(x - x^{(k)}) \tag{3}$$

называется функционалом погрешности кубатурной формулы. Для того чтобы функционал погрешности был определен в $L_2^{(m)}(R^n)$ необходимо выполнение условий

$$(\ell, x^\alpha) = 0, |\alpha| < m. \tag{4}$$

Переменными параметрами кубатурной формулы являются узлы $x^{(k)}$ и коэффициенты C_k.

Оптимальной кубатурной формулой называют такую, функционал погрешности, которой при заданном числе узлов имеет наименьшую норму в $L_2^{(m)}(R^n)$.

В настоящей работе в пространстве комплекснозначных функций $L_2^{(m)}(R^n)$ вычислены нормы функционала погрешности (3) и получены система уравнений для коэффициентов оптимальной кубатурной формулы вида (1). Аналогичная задача была решена в работах [1],[2] в вещественнозначном пространстве Соболева при $p(x) = 1$.

2. Экстремальная функция и квадрат нормы функционала погрешности кубатурной формулы.

Для нахождения в явном виде нормы функционала погрешности $\ell(x)$ в пространстве $L_2^{(m)}(R^n)$ будем использовать понятие его экстремальной функции, введенной С.Л.Соболевым [1,2]. Функцию $u(x)$ из

$L_2^{(m)}(R^n)$ называют *экстремальной для данного функционала погрешности* $\ell(x)$, если выполняется равенство

$$(\ell(x), u(x)) = \|\ell(x)\|_{L_2^{(m)*}} \|u(x)\|_{L_2^{(m)}}$$

$\overset{\circ}{L}{}_2^{(m)}(R^n)-$ пространство финитных функций из $L_2^{(m)}(R^n)$. Пространство $L_2^{(m)}(R^n)$ гильбертово, а скалярное произведение в нем задается формулой (1).

В силу теоремы Рисса об общем виде линейного функционала, функционал погрешности $\ell(x)$ в пространстве $L_2^{(m)}(R^n)$ представляет собой скалярное произведение

$$(\ell, \varphi) = < \psi_\ell, \varphi >_m \qquad (5)$$

Здесь $\psi_\ell-$ функция из $L_2^{(m)}(R^n)$, определена однозначно по функционалу $\ell(x)$ и называемое экстремальной для него.

Пусть $\varphi \in \overset{\circ}{L}{}_2^{(m)}(R^n)$. Интегрируя по частям выражение в правой части формулы (5), получим

$$(\ell, \varphi) = (-1)^m \int\limits_{R^n} \Delta^m \overline{\psi_\ell}(x) \varphi(x) dx. \qquad (6)$$

Это означает, что $\psi_\ell(x)$ является обобщенным решением уравнения

$$\Delta^m \overline{\psi_\ell}(x) = (-1)^m \ell(x). \qquad (7)$$

Из плотности финитных функций в пространстве $L_2^{(m)}(R^n)$ [см. 1] следует, что (6), (7) справедливы и в пространстве $L_2^{(m)}(R^n)$. Справедлива следующая

Лемма. *Явное выражение экстремальной функции функционала погрешности (3) в комплекснозначном пространстве Соболева* $L_2^{(m)}(R^n)$ *определяется формулой*

$$\psi_\ell(x) = (-1)^m \left(\int\limits_{\Omega} \overline{p}(t) G_{m,n}(x-t) dt - \sum_{k=1}^{N} \overline{C}_k G_{m,n}(x - x^{(k)}) + P_{m-1}(x) \right), \qquad (8)$$

здесь $G_{m,n}(x)$– фундаментальное решение полигармонического уравнения [1], $P_{m-1}(x)$- произвольный многочлен степени ниже m.

Доказательство этой леммы аналогично нахождению экстремальной функции в вещественнозначном пространстве Соболева $L_2^{(m)}(R^n)$ (см [1]).

Приводим явное выражение $G_{m,n}(x)$ [2]. В пространстве нечетной размерности

$$G_{m,n}(x) = \varkappa_{m,n} \left|x\right|^{2m-n},$$

где $\varkappa_{m,n} = \frac{(-1)^m \Gamma(n/2-m)}{\Gamma(m) 2^{2m} \pi^{n/2}}$, $\Gamma(k)$– гамма функция Эйлера.
В пространстве четной размерности n имеются два разных выражения для $G_{m,n}(x)$. При $2m < n$

$$G_{m,n}(x) = \varkappa_{m,n} \left|x\right|^{2m-n}, \tag{9}$$

где $\varkappa_{m,n} = \frac{(-1)^m \Gamma(n/2-m)}{\Gamma(m) 2^{2m} \pi^{n/2}}$, а при $2m \geq n$

$$G_{m,n}(x) = \varkappa_{m,n} \left|x\right|^{2m-n} \ln|x| \tag{10}$$

с постоянной $\varkappa_{m,n} = \frac{(-1)^{(n-2)/2}}{\Gamma(m)\Gamma(m-n/2+1) 2^{2m-1} \pi^{n/2}}$.
В этих формулах $\left|x\right|^2 = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j^2$.

Нормы функционала погрешности $\ell(x)$ и функции $\psi_\ell(x)$ связаны между собой соотношением

$$\left\| \ell | \, L_2^{(m)*}(R^n) \right\|^2 = (\ell, \psi_\ell). \tag{11}$$

В силу формул (3), (4), (8), (11) и после несложных вычислений получим

$$\left\| \ell | \, L_2^{(m)}(R^n) \right\|^2 = \int\limits_{R^n} \ell(x) \psi_\ell(x) dx =$$

$$= (-1)^m \int\limits_{R^n} \left(p(x) \chi_\Omega(x) - \sum_{k=1}^{N} C_k \delta(x - x^{(k)}) \right)$$

$$\left(\int\limits_\Omega \overline{p}(t) G_{m,n}(x-t) dt - \sum_{k=1}^{N} \overline{C}_k G_{m,n}(x - x^{(k)}) \right) dx =$$

$$= (-1)^m \left[\sum_{k=1}^{N} \sum_{k'=1}^{N} \overline{C}_k C_{k'} G_{m,n}(x^{(k)} - x^{(k')}) - \right.$$

$$- \sum_{k=1}^{N} \int_{\Omega} \left(p(x)\overline{C_k} + \overline{p}(x) C_k \right) G_{m,n}(x - x^{(k)}) dx +$$

$$\left. + \int_{\Omega} \int_{\Omega} p(x)\overline{p}(t) G_{m,n}(x - t) dx dt \right]. \qquad (12)$$

Пользуясь выражением $p(x) = w(x) + iv(x)$ и $C_k = W_k + iV_k$ и учитывая свойств функции $G_{m,n}(x)$ после некоторых вычислений (12) и (4) приводим к виду, соответственно

$$\left\| \ell | \, L_2^{(m)*}(R^n) \right\|^2 = (-1)^m \left[\sum_{k=1}^{N} \sum_{k'=1}^{N} (W_k W_{k'} + V_k V_{k'}) \, G_{m,n}(x^{(k)} - x^{(k')}) - \right.$$

$$-2 \sum_{k=1}^{N} \int_{\Omega} (w(x) W_k + v(x) V_k) G_{m,n}(x - x^{(k)}) dx +$$

$$\left. + \int_{\Omega} \int_{\Omega} (w(x)w(t) + v(x)v(t)) \, G_{m,n}(x - t) dx dt \right]. \qquad (13)$$

$$\sum_{k=1}^{N} \left(x^{(k)} \right)^{\alpha^{(j)}} W_k = \int_{\Omega} x^{\alpha^{(j)}} w(x) dx,$$

$$\sum_{k=1}^{N} \left(x^{(k)} \right)^{\alpha^{(j)}} V_k = \int_{\Omega} x^{\alpha^{(j)}} v(x) dx. \qquad (14)$$

Предполагая, что узлы $x^{(k)}$ фиксированы, находим минимум (13) при условий (14). Для этого составим функцию Лагранжа

$$\Lambda \left(V, W, \lambda, \mu \right) = \left\| \ell | \, L_2^{(m)*}(R^n) \right\|^2 +$$

$$+2(-1)^m \sum_{j=1}^{M} \left[\left(\sum_{k=1}^{N} \left(x^{(k)} \right)^{\alpha^{(j)}} W_k - \int_{\Omega} x^{\alpha^{(j)}} w(x) dx \right) + \right.$$

$$+\mu_j \left(\sum_{k=1}^{N} \left(x^{(k)} \right)^{\alpha^{(j)}} V_k - \int_{\Omega} x^{\alpha^{(j)}} v(x) dx \right) \Bigg] .$$

Приравнивая к нулю частные производные от $\Lambda(V, W, \lambda, \mu)$ по V_k, W_k, λ_j, μ_j, получим две распадающиеся отдельные системы уравнений для определения W_k, λ_j и V_k, μ_j.

$$\sum_{k'=1}^{N} W_{k'} G_{m,n}(x^{(k)} - x^{(k')}) + \sum_{j=1}^{M} \lambda_j {x^{(k)}}^{\alpha^{(j)}} = \int_{\Omega} w(x) G_{m,n}(x - x^{(k)}) dx,$$

$$1 \le k \le N; \tag{15}$$

$$\sum_{k=1}^{N} W_k {x^{(k)}}^{\alpha^{(j)}} = \int_{\Omega} x^{\alpha^{(j)}} w(x) dx, \ 1 \le j \le M. \tag{16}$$

$$\sum_{k'=1}^{N} V_k G_{m,n}(x^{(k)} - x^{(k')}) + \sum_{j=1}^{M} \mu_j {x^{(k)}}^{\alpha^{(j)}} = \int_{\Omega} v(x) G_{m,n}(x - x^{(k)}) dx,$$

$$1 \le k \le N; \tag{17}$$

$$\sum_{k=1}^{N} V_k {x^{(k)}}^{\alpha^{(j)}} = \int_{\Omega} x^{\alpha^{(j)}} v(x) dx, \ \ 1 \le j \le M. \tag{18}$$

Существование и единственность решений системы (15)-(18) доказывается точно так же, как соответствующая система из работы [1]. Объединяя систем (15)-(18) имеем

$$\sum_{k'=1}^{N} C_{k'} G_{m,n}(x^{(k)} - x^{(k')}) + P_{m-1}(x^{(k)}) = \int_{\Omega} p(x) G_{m,n}(x^{(k)} - x) dx, \ \ 1 \le k \le N;$$

$$\sum_{k=1}^{N} C_k {x^{(k)}}^{\alpha^{(j)}} = \int_{\Omega} p(x) x^{\alpha^{(j)}} dx \quad 1 \le j \le M.$$

В этой системе неизвестными являются коэффициенты C_k и многочлен $P_{m-1}(x^{(k)})$.

Литература

1. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. - М.: Наука. 1974. - 808 с.

2. Соболев С.Л., Васкевич В.Л. Кубатурные формулы. - Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1996. - 484 с.

Институт математики
им. В.И.Романовского АН РУз

Дата поступления
08.01.07

Содержание

Mundarija

Компьютерная верстка: *к.ф.-м.н. А.Р.Хаётов*

Регистр. №0044. Сдано в набор 02.03.07 г. Подписано к печати 16.04.07 г.
Формат 60×90 1/16. Гарнитура литературная. Печать офсетная.
Усл.-печ.л. 7,0. Тираж 200. Заказ №76
Издательство "Фан"АН РУз: 100047, Ташкент, ул. акад. Я.Гулямова, 70
Институт математики им. В.И.Романовского АН РУз: 100125,
Ташкент, Академгородок, ул. Ф.Ходжаева, 29.

Отпечатано в ООО "Арнапринт" г.Ташкент, ул. Х.Байкаро, 41