O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI FANLAR AKADEMIYASI
MATEMATIKA VA INFORMATSION
TEXNOLOGIYALAR INSTITUTI

# O‘ZBEKISTON MATEMATIKA JURNALI

Jurnalga 1957 yilda asos solingan (1991 yilgacha "O‘zbekiston fanlar akademiyasining axboroti. Fizika-matematika fanlari seriyasi"deb nomlangan). Yilda 4 marta chiqadi

**2. 2008**

# УЗБЕКСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

# УзМЖ

Основан в 1957 г. (до 1991 г. под названием "Известия Академии наук Узбекистана. Серия физико-математических наук"). Выходит 4 раза в год

ТАШКЕНТ. ИЗДАТЕЛЬСТВО "ФАН"АКАДЕМИИ НАУК РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН. 2008

Адрес редколлегии: 100125. Ташкент, Ф.Ходжаева, 29,
Институт математики и информационных технологий АН РУз,
телефон: 162-75-44

Адрес редакции: 100047, Ташкент, ул. акад. Я.Гулямова, 70,
телефон: 133-41-88

Uzbek Mathematical
Journal, 2008,№2, pp.3-11

УДК 517.98

# Измеримое расслоение проекторозначных мер

**А.Д.Арзиев**

Mazkur maqolada qiymatlari Gilbert-Kaplanski moduli proektorlari panjarasida bo'lgan Bul algebralaridagi o'lchovlar o'rganilgan. Bunday o'lchovlarning Gilbert fazosining proektorlari panjarasida qiymatlar qabul qiluvchi o'lchovlarning o'lchovli taxlamasi ko'rinishida tavfsifi olingan.

In the paper are investigated projector valued measures, taking values on the lattice of projectors in the Hilbert-Kaplansky module. The representation of these measures is obtained in the form of measurable bundle of projector valued measures, taking values in the lattice of projectors in the Hilbert space.

Проекторозначные меры играют важную роль в спектральной теории самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.

Связь проекторозначной меры с расширенными $K$-пространствами установил Л.В.Канторович (см. [1]). Спектральные меры на булевых алгебрах со значениями в решетке проекторов на модуле Гильберта-Капланского изучены М.Райтом (см.[2]).

В связи развитием теории модулей Банаха-Канторовича над кольцом измеримых функций и измеримых банаховых расслоений возникает задача о разложении проекторозначных мер.

В настоящей работе исследуется измеримые расслоения проекторозначных мер. В частности, дано разложение проекторозначной меры со значениями в решетке проекторов модуля Гильберта-Капланского в измеримое расслоение проекторозначных мер со значениями в решетке проекторов гильбертово пространства.

Пусть $(\Omega, \Sigma, \mu)$ – измеримое пространство с полной конечной мерой $\mu$, $L_0 = L_0(\Omega, \Sigma, \mu)$ – алгебра классов комплексных измеримых функций на $(\Omega, \Sigma, \mu)$.

Пусть $H$ векторное пространство над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Отображение $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \to L_0$ называется $L_0$-значным внутренним произведением, если для любых $x, y, z \in H$ и $\lambda \in \mathbb{C}$, выполнены условия:

1) $\langle x, x\rangle \geqslant 0, \langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$; 2) $\langle x, y + z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$;

3) $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$; 4) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$.

Тогда, формула $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ задает на $H$ $L_0$-значную норму.

Если $(H, \|\cdot\|)$ есть пространство Банаха-Канторовича, то $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ называется модулем Гильберта-Капланского над $L_0$ (см. [3],[4]).

Пусть $\mathcal{H}$ – отображение, ставящее в соответствие каждой точке $\omega \in \Omega$ некоторое гильбертово пространство $\mathcal{H}(\omega)$, где $\mathcal{H}(\omega) \neq \{0\}$ для всех $\omega \in \Omega$.

Сечением $\mathcal{H}$ называют функцию $u$, определенную почти всюду в $\Omega$ и принимающую значение $u(\omega) \in \mathcal{H}(\omega)$ для всех $\omega \in \mathrm{dom}\, u$, где dom $u$ есть область определения $u$.

Пусть $L$ – некоторое множество сечений.

Следуя [5], пару $(\mathcal{H}, L)$ назовем измеримым расслоением гильбертовых пространств над $\Omega$, если

1) $\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 \in L$ для всех $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ и $c_1, c_2 \in L$, где $\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 : \omega \in \mathrm{dom}\, c_1 \bigcap \mathrm{dom}\, c_2 \to \lambda_1 c_1(\omega) + \lambda_2 c_2(\omega)$;

2) функция $\omega \in \mathrm{dom}\, c \to \|c(\omega)\|_{\mathcal{H}(\omega)}$ измерима при всех $c \in L$;

3) для каждой точки $\omega \in \Omega$ множество $\{c(\omega) : c \in L, \omega \in \mathrm{dom}\ c\}$ плотно в $\mathcal{H}(\omega)$.

Сечение $s$ называется ступенчатым, если $s(\omega) = \sum\limits_{i=1}^{n} \chi_{A_i}(\omega) c_i(\omega)$, где $c_i \in L, A_i \in \Sigma, i = \overline{1, n}, n \in \mathbb{N}$.

Сечение $u$ называется измеримым, если найдется такая последовательность $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ступенчатых сечений, что $\|s_n(\omega) - u(\omega)\|_{\mathcal{H}(\omega)} \to 0$ для почти всех $\omega \in \Omega$.

Пусть $M(\Omega, \mathcal{H})$ – множество всех измеримых сечений. Символом $L_0(\Omega, \mathcal{H})$ обозначим факторизацию множества $M(\Omega, \mathcal{H})$ по отношению равенства почти всюду. Через $\widehat{u}$ обозначим класс из $L_0(\Omega, \mathcal{H})$, содержащий сечение $u$. Отметим, что функция $\omega \to \langle u(w), v(w)\rangle_{\mathcal{H}(\omega)}$, измерима при всех $u, v \in M(\Omega, \mathcal{H})$.

На $L_0(\Omega, \mathcal{H})$ определим $L_0$-значное внутреннее произведение по правилу

$$\langle u, v\rangle = \langle \widehat{u(w), v(w)}\rangle_{\mathcal{H}(\omega)}.$$

$(L_0(\Omega, \mathcal{H}), \langle\cdot,\cdot\rangle)$ является модулем Гильберта-Капланского над $L_0$.

Пусть $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$ – множество всех существенно ограниченных измеримых функции на $\Omega$, $L^\infty(\Omega) = \{f \in L_0 : \exists \lambda > 0, |f| \le \lambda \cdot \mathbf{1}\}$, где $\mathbf{1}$ – единица в $L_0$.

Положим

$$\mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathcal{H}) = \{u \in M(\Omega, \mathcal{H}) : \|u(\omega)\|_{\mathcal{H}(\omega)} \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)\}$$

и

$$L^\infty(\Omega, \mathcal{H}) = \{u \in L_0(\Omega, \mathcal{H}) : \|u\| \in L^\infty(\Omega)\}.$$

Пусть $p : L^\infty(\Omega) \to \mathcal{L}^\infty(\Omega)$ лифтинг (см.[5]).

**Определение 1**. [5] *Отображение $\rho : L^\infty(\Omega, \mathcal{H}) \to \mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathcal{H})$ называется векторнозначным лифтингом на $L^\infty(\Omega, \mathcal{H})$, ассоциированным с числовым лифтингом $p$, если :*

а) для всех $\widehat{u} \in L^\infty(\Omega, \mathcal{H})$ выполнено $\rho(\widehat{u}) \in \widehat{u}, dom\rho(\widehat{u}) = \Omega$;

б) $\|\rho(\widehat{u})(\omega)\|_{\mathcal{H}(\omega)} = p(|\widehat{u}|)(\omega)$ для всех $\widehat{u} \in L^\infty(\Omega, \mathcal{H})$;

в) если $\widehat{u}, \widehat{v} \in L^\infty(\Omega, \mathcal{H})$, то $\rho(\widehat{u} + \widehat{v}) = \rho(\widehat{u}) + \rho(\widehat{v})$;

г) если $\widehat{u} \in L^\infty(\Omega, \mathcal{H})$ и $e \in L^\infty(\Omega)$, то $\rho(e\widehat{u}) = p(e)\rho(\widehat{u})$;

д) множество $\{\rho(\widehat{u})(\omega) : \widehat{u} \in L^\infty(\Omega, \mathcal{H})\}$ плотно в $\mathcal{H}(\omega)$ для всех $\omega \in \Omega$.

Отметим, что $L^\infty(\Omega, \mathcal{H})$ является банаховым пространством относительно *смешанной нормы*

$$\|x\|_\infty = \|\|x\|\|_{L^\infty(\Omega)}, \quad x \in L^\infty(\Omega, \mathcal{H}).$$

Для любого модуля Гильберта-Капланского $H$ над $L_0$ существует измеримое расслоение гильбертовых пространств $(\mathcal{H}, L)$, с векторнозначным лифтингом такое, что $H$ изометрически изоморфно $L_0(\Omega, \mathcal{H})$.

Пусть $U$ – произвольная $*$-алгебра над полем комплексных чисел и $U$ есть модуль над $L_0$, причем $(fu)^* = \overline{f}u^*,\ (fu)v = f(uv) = u(fv)$ для всех $f \in L_0,\ u, v \in U$. Рассмотрим на $U$ $L_0$-значную норму $\|\cdot\|$, наделяющую $U$ структурой пространства Банаха-Канторовича, в частности, $\|fu\| = |f|\,\|u\|$ для всех $f \in L_0,\ u \in U$.

Говорят [6], что $(U, \|\cdot\|)$ является $C^*$-алгеброй над $L_0$, если для любых $u, v \in U$ имеют место соотношения:

1) $\|u \cdot v\| \le \|u\|\,\|v\|$;

2) $\|u^*u\| = \|u\|^2$.

Пусть $(X, L)$ измеримое расслоение $C^*$–алгебр (см. [6]). Аналогично как и выше определим множества $M(\Omega, X)$ и $L_0(\Omega, X)$ Для элементов $\hat{u}, \hat{v} \in L_0(\Omega, X)$ положим $\hat{u} \cdot \hat{v} = \widehat{u(\omega) \cdot v(\omega)}$ и $\hat{u}^* = \widehat{u(\omega)^*}$. Известно [6], что $L_0(\Omega, X)$ является $C^*$-алгеброй над $L_0$.

**Определение 2**. [6] *Отображение* $\ell : L^\infty(\Omega, X) \to \mathcal{L}^\infty(\Omega, X)$ *называется векторнозначным лифтингом, ассоциированным с числовым лифтингом* $p$, *если для любых* $\hat{u}, \hat{v} \in L^\infty(\Omega, X)$ *и* $e \in L^\infty(\Omega)$ *имеют место соотношения*

1) $\ell(\hat{u}) \in \hat{u}$ и $dom\ell(\hat{u}) = \Omega$;
2) $\|\ell(\hat{u})(\omega)\|_{X(\omega)} = p(\|\hat{u}\|)(\omega)$;
3) $\ell(\hat{u} + \hat{v}) = \ell(\hat{u}) + \ell(\hat{v})$;
4) $\ell(\hat{u} \cdot \hat{v}) = \ell(\hat{u}) \cdot \ell(\hat{v})$;
5) $\ell(\hat{u}^*) = \ell(\hat{u})^*$;
6) $\ell(e\hat{u}) = p(e)\ell(\hat{u})$;
7) множество $\{\ell(\hat{u})(\omega) : \hat{u} \in L^\infty(\Omega, X)\}$ плотно в $X(\omega)$ для всех $\omega \in \Omega$.

Для любой $C^*$-алгебры $U$ над $L_0$ существует единственное с точностью до изометрии измеримое расслоение $C^*$-алгебр с векторнозначным лифтингом такое, что $U$ -изометрически $*$ изоморфно $L_0(\Omega, X)$.

Для всякого модуля Гильберта-Капланского $H$ существует измеримое расслоения $C^*$-алгебр $(\mathcal{B}(\mathcal{H}), L^{'})$ с векторозначным лифтингом $\ell$ такое, что $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ изометрически $^*$– изоморфна $L_0(\Omega, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$, где $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ – алгебра всех $L_0$-линейных $L_0$-ограниченных операторов в $H$.

**Определение 3.** [3] *Пусть* $\nabla$ *– булева алгебра. Отображение* $\mu : \nabla \to L_0$ *называется* $L_0$*-значной мерой, если*

1) $\mu(e) \geq 0$ для любого $e \in \nabla$;
2) $\mu(e \vee g) = \mu(e) + \mu(g)$, если $e, g \in \nabla,\ e \wedge g = 0$;
3) если $e_n \downarrow 0,\ e_n \in \nabla,\ n = 1, 2....$, то $\mu(e_n) \downarrow 0$.

$L_0$-значная мера называется строго положительной, если из $\mu(e) = 0,\ e \in \nabla$ следует $e = 0$. Отображение $\mu : \nabla \to L_0$ называется квазимерой, если выполнены условия 1)и 2) из определения $L_0$–значной меры.

Пусть $P(H)$ – решетка ортопроекторов модуля Капланского-Гильберта $H$ над $L_0$, $\nabla$ – произвольная булева алгебра, $\nabla(\Omega)$– булева алгебра всех идемпотентов, причем $\nabla(\Omega)$ правильная подалгебра $\nabla$.

**Определение 4.** *Отображение* $E : \nabla \to P(H)$ *называется проекторозначной мерой, если*

1) $E(\mathbf{1}_\nabla) = \mathbf{1}_H$, где $\mathbf{1}_\nabla \in \nabla$, $\mathbf{1}_H \in P(H)$;

2)$E(e_1 \vee e_1) = E(e_1) + E(e_2)$ для любых $e_1, e_2 \in \nabla$, $e_1 \wedge e_2 = 0$;

3) $E(e_1 \wedge e_2) = E(e_1)E(e_2,)$ для любых $e_1, e_2 \in \nabla$;

4) $E(ge) = gE(e)$ для всех $g \in \nabla(\Omega), e \in \hat{\nabla}$;

5) $(bo) - \sum\limits_{i=1}^{\infty} E(e_i)(x) = E(\bigvee\limits_{i=1}^{\infty} e_i)(x)$, где $e_i \in \nabla$, $e_i \wedge e_j = 0, i \neq j$, $x \in L_0(\Omega, \mathcal{H})$, $i \in \mathbb{N}$.

**Предложение 1.** *Пусть $E$ – проекторозначная мера, $x, y \in H$. Тогда*

1) функция множества, определенная равенством

$$\mu_{x,y}(e) = \langle E(e)x, y \rangle,$$

является $L_0$-значным зарядом;

2) заряд $\mu_{x,y}$ является $L_0$–модульным;

3) $\mu_x(e) = \mu_{x,x}(e)$ является $L_0$–значной мерой;

4) функция множества $E(e)x$ является $H$-значной мерой.

Доказательство. 1) Пусть $e, g \in \nabla$, $e \wedge g = 0$. Тогда

$\mu_{x,y}(e \vee g) = \langle E(e \vee g)x, y \rangle = \langle (E(e)+E(g))x, y \rangle = \langle E(e)x+E(g)x, y \rangle = \langle E(e)x, y \rangle + \langle E(g)x, y \rangle = \mu_{x,y}(e) + \mu_{x,y}(g)$, т.е

$$\mu_{x,y}(e \vee g) = \mu_{x,y}(e) + \mu_{x,y}(g).$$

2) Пусть $g \in \nabla(\Omega)$ и $e \in \nabla$. Тогда из аксиомы 4) определения проекторозначной меры имеем, что

$$\mu_{x,y}(ge) = \langle E(ge)x, y \rangle = \langle gE(e)x, y \rangle = g\langle E(e)x, y \rangle = g\mu_{x,y}(e).$$

3) Так как $E(e)$ – проектор для каждого $e \in \nabla$, то

$$\mu_x(e) = \langle E(e)x, x \rangle = \|E(e)x\|^2,$$

отсюда $\mu_x(e) \geq 0$. Из аксиомы 5) определения 4 следует, что если $e_n \downarrow 0$, то $\mu_x(e_n) \downarrow 0$.

4) Доказательство этого пункта следует непосредственно из аксиомы 5) определения 4.

Пусть $\hat{\nabla}$ – булева алгебра, $\nabla(\Omega)$ – булева алгебра идемпотентов $L_0$, $\mu$ – строго положительная $L_0$-значная мера на $\hat{\nabla}$, причем $\nabla(\Omega)$ является правильной подалгеброй в $\hat{\nabla}$ и $\mu(ge) = g\mu(e)$ для всех $g \in \nabla(\Omega)$, $e \in \hat{\nabla}$. Тогда для каждого $\omega \in \Omega$ существуют булевы алгебры $\nabla_\omega$ со строго положительной числовой мерой $\mu_\omega$ и сюръективные гомоморфизмы $\gamma_\omega : \hat{\nabla} \to \nabla_\omega$ такие, что для всех $e \in \hat{\nabla}$ имеет место равенство

$$\mu(e)(\omega) = \mu_\omega(\gamma_\omega(e))$$

для почти всех $\omega \in \Omega$ ([7],[8]).

Пусть $E_\omega : \nabla_\omega \to P(\mathcal{H}(\omega))$ проекторозначная мера при всех $\omega \in \Omega$.

Пусть $(\nabla_\omega, E_\omega)$ – булевы алгебры $P(\mathcal{H}(w))$ значной мерой для всех $\omega \in \Omega$.

**Определение 5.** *Семейство проекторозначных мер $\{E_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ назовем измеримым расслоением проекторозначных мер,*
*если $E_\omega(e(\omega))x(\omega) \in M(\Omega, \mathcal{H})$ для любых $e \in M(\Omega, \nabla)$ и $x \in M(\Omega, \mathcal{H})$.*

Если $\{E\}_{\omega\in\Omega}$ – измеримое расслоение проекторозначных мер, то $E_\omega(\widehat{e(\omega))}x(\omega) \in H$, и оператор определенный равенством $E_\omega\widehat{(e(\omega))}\hat{x} = E_\omega(\widehat{e(\omega))}x(\omega)$ является $L_0$–линейным $L_0$–ограниченным оператором в $H$ (см.[9]). Поскольку $E_\omega(e(\omega)) \in P(\mathcal{H}(\omega))$, то $\widehat{E_\omega(e(\omega))} \in P(H)$.

Определим отображение $E : \hat{\nabla} \to P(H)$ следующим образом

$$\hat{E}(\hat{e}) = \widehat{E_\omega(e(\omega))}. \tag{1}$$

**Теорема 1.** *Отображение $E : \hat{\nabla} \to P(H)$ определенное равенством (1) является проекторозначной мерой.*

Доказательство. Ясно, что $E(\mathbf{1}_{\hat{\nabla}}) = \mathbf{1}_H, E(\emptyset) = 0$.

Пусть $e_1, e_2 \in \hat{\nabla}$, $e_1 \wedge e_2 = 0$. Тогда $e_1(\omega) \wedge e_2(\omega) = 0$ для почти всех $\omega \in \Omega$. Поэтому $E_\omega(e_1(\omega) \vee e_2(\omega)) = E_\omega(e_1(\omega)) + E_\omega(e_2(\omega))$ для почти всех $\omega \in \Omega$. Отсюда

$$\hat{E}(\hat{e_1} \vee \hat{e_2}) = E_\omega(e_1\widehat{(\omega) \vee} e_2(\omega)) = \widehat{E_\omega(e_1(\omega))} + \widehat{E_\omega(e_2(\omega))} = \hat{E}(\hat{e_1}) + \hat{E}(\hat{e_2}),$$

т.е

$$\hat{E}(\hat{e_1} \vee \hat{e_2}) = \hat{E}(\hat{e_1}) + \hat{E}(\hat{e_2})$$

Аналогично,

$$\hat{E}(\hat{e} \wedge \hat{g}) = \hat{E}(\hat{e})\hat{E}(\hat{g}).$$

Пусть $e \in \hat{\nabla}$ и $g \in \nabla(\Omega)$. Поскольку $g(\omega) = 0$ или 1, то $E_\omega(g(\omega)e(\omega)) = g(\omega)E_\omega(e(\omega))$ для почти всех $\omega \in \Omega$. Отсюда

$$\hat{E}(ge) = E_\omega(\widehat{g(\omega)e}(\omega)) = g(\omega)\widehat{E_\omega(e}(\omega)) = g\hat{E}(\hat{e}).$$

Пусть $e_i \in \hat{\nabla}$, $i \in \mathrm{N}$, $e_i \wedge e_j = 0,\ i \neq j$. Тогда $e_i(\omega) \wedge e_j(\omega) = 0$, $i \neq j$ для почти всех $\omega \in \Omega$. В силу сильной счетной аддитивности $E_\omega$ имеем, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} E_\omega(e_i(\omega))(x(\omega)) = E_\omega(\bigvee_{i=1}^{\infty} e_i)(x(\omega))$$

для всех $x \in L_0(\Omega, \mathcal{H})$.

Отсюда,

$$(bo) - \sum_{i=1}^{\infty} \hat{E}(\hat{e_i})(x) = \sum_{i=1}^{\infty} E_\omega(e_i\widehat{(\omega))(}x(\omega)) = E_\omega((\widehat{\bigvee_{i=1}^{\infty} e_i})(\omega)) = \hat{E}(\bigvee_{i=1}^{\infty} \hat{e_i})(x). \triangleright$$

для всех $x \in L_0(\Omega, \mathcal{H})$.

**Определение 6.** *Проекторозначную меру $E$ назовем равномерно сильно счетно-аддитивной, если*

$$\lim_{n \to \infty} \|E(\bigvee_{i=n}^{\infty} e_i)(x))\|_\infty = 0$$

*для любых $x \in L^\infty(\Omega, \mathcal{H})$ и $e_i \in \nabla,\ e_i \wedge e_j = 0,\ i \neq j$.*

**Теорема 2.** *Если $E$ равномерно сильно счетно-аддитивная проекторозначная мера, то существует измеримое расслоение проекторозначных мер $\{E_\omega : \omega \in \Omega\}$ такое, что $E(e) = \widehat{E_\omega(e(\omega))}$ для любого $e \in \nabla$*

Доказательство. Определим отображение $E_\omega : \nabla_\omega \to P(\mathcal{H}(\omega))$ по правилу

$$E_\omega(\gamma_\omega(e)(\omega)) = \ell(E(e))(\omega),\ \ e \in \nabla \tag{2}$$

где $\gamma_\omega : \nabla \to \nabla_\omega$ сюръективный гомоморфизм и $\ell$ – лифтинг на $\mathcal{B}(\mathcal{H}(\omega))$.

Покажем, что $E_\omega$ определяемая формулой (2) является проекторозначной мерой на $\nabla_\omega$ со значениями в $P(\mathcal{H}(\omega))$ для всех $\omega \in \Omega$.

Сначала покажем, что $\ell(E(e))(\omega)$ проектор на $\mathcal{H}(\omega)$. Действительно

$$(\ell(E(e))(\omega))^2 = \ell(E(e))(\omega)\ell(E(e))(\omega) = \ell(E(e)E(e))(\omega) = \ell(E(e))(\omega),$$

$(\ell(E(e))(\omega)^*\rho(x)(\omega), \rho(y)(\omega)) = (\rho(x)(\omega), \ell(E(e))(\omega)\rho(y)(\omega))_{\mathcal{H}(\omega)} =$
$(\rho(x)(\omega), \rho(E(e)y)(\omega))_{\mathcal{H}(\omega)} = p\langle x, E(e)y\rangle(\omega) = p\langle E(e)x, y\rangle(\omega) =$
$(\rho(E(e)x)(\omega), \rho(y)(\omega))_{\mathcal{H}(\omega)} = (\ell(E(e))(\omega)\rho(x)(\omega), \rho(y)(\omega))_{\mathcal{H}(\omega)} =$

$(\ell(E(e))(\omega)x(\omega), y(\omega))_{\mathcal{H}(\omega)}$,
отсюда

$$(\ell(E(e))(\omega))^* = \ell(E(e))(\omega)).$$

Ясно, что $E_\omega(\mathbf{1}) = \mathbf{1}_{\mathcal{B}(\mathcal{H}(\omega))}, \mathrm{E}_\omega(\emptyset) = 0$ для всех $\omega \in \Omega$.

Фиксируем $\omega \in \Omega$. Пусть $e_\omega^{(1)}, e_\omega^{(2)} \in \nabla_\omega$.Тогда существуют такие $e^{(1)}, e^{(2)} \in \nabla$ что $\gamma_\omega(e^{(i)}) = e_\omega^{(i)}, i = 1, 2$.

Покажем, что

$$E_\omega(e_\omega^{(1)} \wedge e_\omega^{(2)}) = E_\omega(e_\omega^{(1)})E_\omega(e_\omega^{(2)}).$$

По определению $E_\omega$ и свойств лифтинга $\ell$ получим,

$$E_\omega(\gamma_\omega(e^{(1)})(\omega) \wedge \gamma_\omega(e^{(2)})(\omega)) = E_\omega(\gamma_\omega(e^{(1)} \wedge e^{(2)})(\omega)) = \ell(E(e^{(1)} \wedge e^{(2)})(\omega)) =$$

$$\ell(E(e^{(1)})E(e^{(2)}))(\omega) = \ell(E(e^{(1)}))(\omega)\ell(E(e^{(2)}))(\omega) = E_\omega(e_\omega^{(1)})E_\omega(e_\omega^{(2)})$$

Аналогично, $E_\omega(e_\omega^{(1)} \vee e_\omega^{(2)}) = E_\omega(e_\omega^{(1)}) + E_\omega(e_\omega^{(2)})$, если $e_\omega^{(1)} \wedge e_\omega^{(2)} = 0$.

Покажем, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} E_\omega(e_\omega^i)(x(\omega)) = E_\omega(\bigvee_{i=1}^{\infty} e_\omega^i)(x(\omega))$$

для любого $x \in L^\infty(\Omega, \mathcal{H})$ .

Пусть, $e_\omega^{(1)} \wedge e_\omega^{(2)} = 0$ при $i \neq j$. Возьмем элементы $e^i \in \nabla$ такие, что $\gamma_\omega(e^i) = e_\omega^i$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\| \sum_{i=1}^{n} E_\omega(e_\omega^i)(x(\omega)) - E_\omega(\bigvee_{i=1}^{\infty} e_\omega^i)(x(\omega)) \|_{\mathcal{H}(\omega)} =$$

$$= \| \sum_{i=1}^{n} \ell(E(e^i))(\omega)(x(\omega)) - \ell(E(\bigvee_{i=1}^{\infty} e^i))(\omega)(x(\omega)) \|_{\mathcal{H}(\omega)} =$$

$$= \|\ell(\sum_{i=1}^{n} E(e^i)(x) - E(\bigvee_{i=1}^{\infty} e^i)(x))(\omega)\|_{\mathcal{H}(\omega)} = \|\ell(E(\bigvee_{i=n+1}^{\infty} e^i))(x)\|_{\mathcal{H}(\omega)} \leq$$

$$\leq \|\ell(E(\bigvee_{i=n+1}^{\infty} e^i))\rho((x))(\omega)\|_{\mathcal{H}(\omega)} = p(\|E(\bigvee_{i=n+1}^{\infty} e^i)(x)\|)(\omega) = \|E(\bigvee_{i=n+1}^{\infty} e^i)(x)\|_\infty.$$

Так как $\|E(\bigvee_{i=n+1}^{\infty} e^i)(x)\|_\infty \to 0$ при $n \to \infty$, получим, что $\{E_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ является сильно счетно-аддитивной.

Из построения непосредственно следует, что $\{E_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ является измеримым расслоением проекторозначных мер. А из соотношения (2) вытекает, что $E(e) = \widehat{E_\omega(e(\omega))}$ для любого $e \in \nabla$.

**Литература**


1. Канторович Л.В., Вулих Б.З., Пинскер А.Г. Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. М.: Гостехиздат. 1950. 548 с.

2. Wright J.D.M, A Radon-Nykodim theorem for Stone algebra valued measures // Trans. Amer. Math. Soc.-1969.-V 139.-p.75-94.

3. Кусраев А. Г., Векторная двойственность и ее приложения. Новосибирск: Наука, 1985, 256 с.

4. Кусраев А. Г., Мажорирумые операторы. М: Наука. 2003, 619 с.

5. Гутман А. Е., Банаховы расслоения в теории решеточно-нормированных пространств // Линейные операторы, согласованные с порядком. – Новосибирск: Изд-во Института математики СО РАН, – 1995. – Т. 29. – С. 63-211

6. Ганиев И. Г., Чилин В. И., Измеримые расслоения $C^*$-алгебр // Владикавк. матем. журн., 2003, том 5, вып. 1, 35-38 с.

7. Ганиев И.Г., Измеримые расслоения булевых алгебр // Узб. матем. журн. 1998.№.3, 18-23 с.

8. Ганиев И.Г., Измеримые расслоения решеток и их приложения // Исследования по функциональному анализу. Наука. 2006, 10-49 с.

9. Ганиев И.Г., Кудайбергенов К.К., Теорема Банаха об обратном операторе в пространствах Банаха-Канторовича // Владикав. матем. журн. 2004. №.3, 21-25 стр.


Институт Математики и
информационной технологии АНРУз

Дата поступления
04.02.07

Uzbek Mathematical
Journal, 2008,№2, pp.12-20

УДК 517.956.6

# Об одной краевой задаче для уравнения третьего порядка с нагруженным параболо-гиперболическим оператором

**У.И.Балтаева**

Ushbu maqolada uchinchi tartibli yuklangan parabolo-giperbolik operatorli tenglama uchun qo‘yilgan chegaraviy masalaning bir qiymatli yechimining mavjudligi isbotlangan.

In the present paper the existence of unique solution of boundary- value problem for third order equation with loaded parabolic-hyperbolic operator is proved.

За последние годы существенно повысился интерес к нагруженным операторам и нагруженным уравнениям, которые возникают при изучении задач газовой динамики и гидромеханики, движения малосжимаемой жидкости, в задачах оптимального управления агроэкосистемой и других.

Краевые задачи для нагруженных уравнений параболического, гиперболо-параболического и эллиптико-параболического типов исследованы в работах Нахушева А.М., Дженалиева М.Т., Елеева В.А., Аттаева А.Х., Казиева В.М., Исломова Б., Балтаева У.И. и др. [см. [1-4] и библиографию в этих работах].

В настоящей работе исследуется краевая задача для уравнения третьего порядка с нагруженным параболо-гиперболическим оператором.

Рассмотрим уравнения

$$0=\frac{\partial}{\partial x}\left\{\begin{array}{l} u_{xx}-u_y-\lambda_1 u-\mu_1 u(x,0),\ \ y>0, \\ u_{xx}-u_{yy}+\lambda_2 u-\mu_2 u(x,0),\ \ y<0 \end{array}\right. \tag{1}$$

в области $\Omega$ , ограниченной отрезками $AA_0, BB_0, A_0B_0$ прямых $x=0,\ x=l,\ y=h$ при $y>0$ и характеристиками $AC: x+y=0,\ BC: x-y=1$ уравнения (1) при $y<0$; $\Omega_1$ и $\Omega_2$ - параболическая и гиперболическая части области $\Omega$ , $\lambda_i, \mu_i \in R\ \ (i=1,2)$ .

**Задача.** Найти регулярное в области $\Omega$ решение $u(x,y)$ уравнения (1), непрерывное в замкнутой области $\overline{\Omega}$ , $u_x\,(u_y)$ непрерывна вплоть до $AA_0 \cup AB \cup AC (AB \cup AC)$, удовлетворяющее условиям склеивания на $AB$

$$u_1(x,0)=u_2(x,0), \qquad \frac{\partial u_1(x,0)}{\partial y}=\frac{\partial u_2(x,0)}{\partial y} \tag{2}$$

и граничным условиям

$$u(0,y)=\varphi_1(y), \;\; u(1,y)=\varphi_2(y), \quad u_x(0,y)=\varphi_3(y), \quad 0\le y\le h, \tag{3}$$

$$u\big|_{AC}=\psi_1(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{AC}=\psi_2(x), \quad 0\le x\le 1, \tag{4}$$

где $n$ - внутренняя нормаль; $\varphi_1(y),\varphi_2(y),\varphi_3(y)$ и $\psi_1(x),\psi_2(x)$ - заданные функции, причем

$$\begin{gathered}\varphi_1(0)=\psi_1(0), \quad \varphi_j(y)\in C[0,h]\cap C^1(0,h), \; j=\overline{1,3}, \\ \psi_1(x)\in C^1\left[0,\tfrac{1}{2}\right]\cap C^3\left(0,\tfrac{1}{2}\right), \; \psi_2(x)\in C\left[0,\tfrac{1}{2}\right]\cap C^2\left(0,\tfrac{1}{2}\right).\end{gathered} \tag{5}$$

Нетрудно заметить, что уравнение (1) эквивалентным образом можно записать в виде [5]

$$u_{xx}-u_y-\lambda_1 u-\mu_1 u(x,0)=\omega_1(y) \quad \text{в } \Omega_1, \tag{6}$$

$$u_{xx}-u_{yy}+\lambda_2 u-\mu_2 u(x,0)=\omega_2(y) \quad \text{в } \Omega_2, \tag{7}$$

где $\omega_1(y), \; \omega_2(y)$ - произвольные непрерывные функции.

Как известно, решение задачи Коши с условиями

$$u(x,0)=\tau(x), \quad u_y(x,0)=\nu(x) \tag{8}$$

для уравнения (7) в $\Omega_2$ как для неоднородного вольного уравнения с правой частью $\omega_2(y)+\mu_2 u(x,0)$ имеет вид [6]

$$u(x,y)=\frac{1}{2}[\tau(x+y)+\tau(x-y)]+\frac{\lambda_2 y}{2}\int\limits_{x+y}^{x-y}\tau(\xi)\overline{I}_1\left[\sqrt{\lambda_2(x+y-\xi)(x-y-\xi)}\right]d\xi-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{x+y}^{x-y}\nu(\xi)I_0\left[\sqrt{\lambda_2(x+y-\xi)(x-y-\xi)}\right]d\xi- \tag{9}$$

$$-\frac{1}{4}\int\limits_{x+y}^{x-y}d\xi\int\limits_{\xi}^{x-y}I_0\left[\sqrt{\lambda_2(x+y-\xi)(\eta-x+y)}\right]\left[\mu_2\tau\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right)+\omega_2\left(\frac{\xi-\eta}{2}\right)\right]d\eta,$$

где $I_k(z),\ \ k=0,1$ - модифицированная функция Бесселя [7], $\overline{I}_1(z)=I_1(z)/z$ .

Удовлетворяя (9) первому краевому условию (4), имеем следующие функциональное соотношение

$$\tau(x)=\int\limits_0^x\nu(x)J_0\left[\sqrt{\lambda_2}(x-\xi)\right]d\xi+2\int\limits_0^x\psi_1'\left(\frac{\eta}{2}\right)J_0\left[\sqrt{\lambda_2x(x-\eta)}\right]d\eta+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^x d\xi\int\limits_{\xi}^{x}J_0\left[\sqrt{\lambda_2(\xi-x)(\eta-x)}\right]\left(\mu_2\tau\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right)+\omega_2\left(\frac{\xi-\eta}{2}\right)\right)d\eta, \tag{10}$$

где $J_k(z),\ \ k=0,1$ - функция Бесселя [7].

Теперь переходя к пределу при $y\to+0$ в уравнение (6) с учетом (2), (8) получим основное функциональное соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенное из области $\Omega_1$ на $AB$ :

$$\tau^{''}(x)-\nu(x)-(\lambda_1+\mu_1)\tau(x)=\omega_1(0), \tag{11}$$

где $\omega_1(0)$ - неизвестная константа, подлежащая определению.

Исключая из (10) и (11) функцию $\nu(x)$ , с учетом

$$\tau(0)=\varphi_1(0),\quad \tau^{'}(0)=\varphi_3(0),\quad \tau(\eta)=\varphi_1(0)+\int\limits_0^{\eta}\tau^{'}(t)dt, \tag{12}$$

считая $\omega_2(x)$ пока известным получим следующее уравнение относительно $\tau^{'}(x)$ :

$$\tau^{'}(x)-\int\limits_0^x K(x,t)\tau^{'}(t)dt=F(x)-\omega_1(0)\int\limits_0^x J_0\left[\sqrt{\lambda_2}(x-t)\right]dt-$$

$$-\int\limits_{-\frac{x}{2}}^{0}\omega_2(t)dt\int\limits_0^{x+2t}J_0\left[\sqrt{\lambda_2(\xi-x)(\xi-x-2t)}\right]d\xi, \tag{13}$$

где

$$K(x,t)=1+\lambda_2 J_1\left[\sqrt{\lambda_2}(x-t)\right]+\int_t^x\left[(\lambda_1+\mu_1)J_0\left[\sqrt{\lambda_2}(x-\xi)\right]-\mu_2 G(x,\xi)\right]d\xi,$$

$$F(x)=\varphi_1(0)\left[1+\int_0^x\Big((\lambda_1+\mu_1)J_0\left[\sqrt{\lambda_2}(x-t)\right]-\mu_2\overline{G}(x,t)\Big)dt\right]- \\ -\sqrt{\lambda_2}\varphi_3(0)J_1\left[\sqrt{\lambda_2}x\right], \tag{14}$$

$$\overline{G}(x,t)=\begin{cases}\int\limits_0^t J_0\left[\sqrt{\lambda_2(\xi-x)(2t-\xi-x)}\right]d\xi \ \text{ при } \ 0<t<\frac{x}{2},\\ \int\limits_{2t-x}^t J_0\left[\sqrt{\lambda_2(\xi-x)(2t-\xi-x)}\right]d\xi \ \text{ при } \ \frac{x}{2}<t<x.\end{cases}$$

Решение уравнения (13) имеет вид

$$\tau(x)=F_1(x)-\omega_1(0)F_2(x)-\int_{-\frac{x}{2}}^0 F_3(x,s)\omega_2(s)ds, \tag{15}$$

где

$$F_1(x)=\varphi_1(0)+\int_0^x\left[F(t)+\int_0^t R(t,\xi)F(\xi)d\xi\right]dt, \tag{16}$$

$$F_2(x)=\int_0^x\left[\int_0^t J_0\left[\sqrt{\lambda_2}(t-\xi)\right]d\xi+\int_0^t R(t,\xi)d\xi\int_0^\xi J_0\left[\sqrt{\lambda_2}(\xi-s)\right]ds\right]dt, \tag{17}$$

$$F_3(x,s)=\int_{-2s}^x\left[\int_0^{t+2s} J_0\left[\sqrt{\lambda_2(\xi-t)(\xi-t-2s)}\right]d\xi+\right. \tag{18}$$

$$\left.+\int_{-2s}^t R(t,\xi)d\xi\int_0^{\xi+2s} J_0\left[\sqrt{\lambda_2(z-\xi)(z-\xi-2s)}\right]dz\right]dt.$$

$R(x,t)-$ резольвента ядра $K(x,t)$.

Решение уравнения (7) с первими краевими условиями (4), (8) имеет вид

$$u(x,y)=\tau(x+y)+\psi_1\left(\frac{x-y}{2}\right)-\psi_1\left(\frac{x+y}{2}\right)+$$

$$+\lambda_2 y\int\limits_0^{x-y}\tau(\xi)\overline{J}_1\left[\sqrt{\lambda_2(\xi-x-y)(\xi-x+y)}\right]d\xi-$$

$$-\frac{\lambda_2(x+y)}{2}\int\limits_0^{x-y}\psi_1\left(\frac{\eta}{2}\right)\overline{J}_1\left[\sqrt{\lambda_2(x+y)(x-y-\eta)}\right]d\eta+ \qquad (19)$$

$$+\frac{\lambda_2(x-y)}{2}\int\limits_0^{x+y}\psi_1\left(\frac{\eta}{2}\right)\overline{J}_1\left[\sqrt{\lambda_2(x-y)(x+y-\eta)}\right]d\eta+$$

$$+\frac{1}{4}\int\limits_0^{x+y}d\xi\int\limits_\xi^{x-y}J_0\left[\sqrt{\lambda_2(\xi-x-y)(\eta-x+y)}\right]\left[\omega_2\left(\frac{\xi-\eta}{2}\right)+\mu_2\tau\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right)\right]d\eta-$$

$$-\frac{1}{4}\int\limits_0^{x+y}d\xi\int\limits_\xi^{x+y}J_0\left[\sqrt{\lambda_2(\eta-x-y)(\xi-x+y)}\right]\left[\omega_2\left(\frac{\xi-\eta}{2}\right)+\mu_2\tau\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right)\right]d\eta.$$

Удовлетворяя (19) второму краевому условию (4), имеем

$$\int\limits_0^x(\omega_2(-\eta)+\mu_2\tau(\eta))\,d\eta=\lambda_2\int\limits_0^x\psi_1(\eta)d\eta+\sqrt{2}\psi_2(x)-2\tau^{'}(0)-\psi_1^{'}(0)$$

Дифференцируя последнее равенство по $x$, с четом (5) и (15) получим

$$\omega_2(-x)-\int\limits_0^x T_1^{'}(x,\eta)\omega_2\left(-\frac{\eta}{2}\right)d\eta=\Phi^{'}(x)+\mu_2\omega_1(0)F_2(x), \qquad (20)$$

где

$$\Phi(x)=\sqrt{2}\psi_2(x)-2\psi_3(0)+\psi_1^{'}(0)+\int\limits_0^x(\lambda_2\psi_1(\eta)-\mu_2F_1(\eta))d\eta, \qquad (21)$$

$$T_1(x,\eta) = \frac{\mu_2}{2}\int\limits_{\eta}^{x} F_3\left(t, -\frac{\eta}{2}\right)dt. \tag{22}$$

В силу (5), (16), (18) заключаем, что $T_1(x,\eta)$ есть непрерывная функция при $0 \le x \le 1,\ \ 0 \le \eta \le 1$, а $\Phi(x)$ - непрерывна в $0 \le x \le 1$ , по этому уравнения (20), из теории интегральных уравнений однозначно разрешимо в классе непрерывных функций и решение (20) имеет вид

$$\omega_2(x) = \Phi^{'}(-x) + \int\limits_{0}^{x} R_1(x,\eta)\Phi^{'}\left(-\frac{\eta}{2}\right)d\eta +$$

$$+\mu_2\omega_1(0)\left(F_2(-x) + \int\limits_{0}^{x} R_1(x,\eta)F_2\left(-\frac{\eta}{2}\right)d\eta\right), \tag{23}$$

где $R_1(x,\eta)$ - резольвента ядра уравнения (20).

После нахождения $\tau(x),\ \omega_2(x)$ из условия $\tau(1) = \varphi_2(0)$ определим постоянную $\omega_1(0)$ по формуле

$$\omega_1(0) = \frac{F_1(1) - \varphi_2(0) - \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{0} F_3(1,s)\left(\Phi^{'}(-s) + \int\limits_{0}^{s} R_1(s,\eta)\Phi^{'}\left(-\frac{\eta}{2}\right)d\eta\right)ds}{F_2(1) + \mu_2\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{0} F_3(1,s)\left(F_3(-s) + \int\limits_{0}^{s} R_1(s,\eta)F_2\left(-\frac{\eta}{2}\right)d\eta\right)ds}, \tag{24}$$

где

$$F_2(1) + \mu_2\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{0} F_3(1,s)\left[F_2(-s) + \int\limits_{0}^{s} R_1(s,\eta)F_2\left(-\frac{\eta}{2}\right)d\eta\right]ds \neq 0. \tag{25}$$

Таким образом, при выполнении условия (25), $\tau(x)$ полностью определяется на отрезке $AB$ . Из (11) определим функцию $\nu(x)$. После определения $\tau(x),\ \nu(x)$ решения задачи в области $\Omega_2$ восстанавливается как решения задачи Коши.

Для решения задачи в области $\Omega_1$ переходим к следующей задачи $A^*$ для уравнения (5) с краевыми условиями (3) и

$$u(x,0) = \tau(x) \tag{26}$$

Для того чтобы определить $\omega_1(x)$ , рассмотрим задачу $A^*$ для уравнения (5).

Введем новую неизвестную функцию $\upsilon(x,y)$ по формуле

$$u(x,y)=\upsilon(x,y)e^{-\lambda_1 y}$$

Тогда относительно $\upsilon(x,y)$ получим следующую задачу:

$$\upsilon_{xx}-\upsilon_y=\mu_1\upsilon(x,0)e^{\lambda_1 y}+e^{\lambda_1 y}\omega_1(y), \tag{27}$$

$$\upsilon(0,y)=e^{\lambda_1 y}\varphi_1(y), \tag{28}$$

$$\upsilon(1,y)=e^{\lambda_1 y}\varphi_2(y), \tag{29}$$

$$\upsilon_x(0,y)=e^{\lambda_1 y}\varphi_3(y). \tag{30}$$

Как известно [5], решение задачи (27), (29), (30) и

$$\upsilon(x,0)=\tau(x)$$

выписывается в виде

$$\upsilon(x,y)=\int\limits_0^y e^{\lambda_1\eta}\varphi_3(\eta)G(x,y;0,\eta)d\eta-\int\limits_0^y e^{\lambda_1\eta}\varphi_2(\eta)G_\xi(x,y;1,\eta)d\eta+$$

$$+\int\limits_0^1\tau(\xi)G(x,y;\xi,0)d\xi-\mu_1\int\limits_0^y e^{\lambda_1\eta}d\eta\int\limits_0^1\tau(\xi)G(x,y;\xi,\eta)d\xi-$$

$$-\int\limits_0^y\omega_1(\eta)e^{\lambda_1\eta}d\eta\int\limits_0^1 G(x,y;\xi,\eta)d\xi, \tag{31}$$

$$G(x,y;\xi,\eta)=\frac{1}{2\sqrt{\pi(y-\eta)}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{-\frac{(x-\xi-4n)^2}{4(y-\eta)}+\exp\left[-\frac{(x+\xi-4n)^2}{4(y-\eta)}\right]-\right.$$

$$\left.+\exp\left[-\frac{(x+\xi-4n)^2}{4(y-\eta)}\right]-\exp\left[-\frac{(x-\xi-2-4n)^2}{4(y-\eta)}\right]-\exp\left[-\frac{(x+\xi-2-4n)^2}{4(y-\eta)}\right]\right\}.$$

Подставляя (31) в (28) имеем

$$\int\limits_0^y\left(\int\limits_0^1 G(0,y;\xi,\eta)d\xi\right)e^{\lambda_1\eta}\omega_1(\eta)d\eta=g(y), \tag{32}$$

где

$$g(y)=\int\limits_0^y e^{\lambda_1\eta}\varphi_3(\eta)G(0,y;0,\eta)d\eta-\int\limits_0^y e^{\lambda_1\eta}\varphi_2(\eta)G_\xi(0,y;1,\eta)d\eta+$$

$$+\int\limits_0^1 \tau(\xi)G(0,y;\xi,0)d\xi-\mu_1\int\limits_0^y e^{\lambda_1\eta}d\eta\int\limits_0^1 \tau(\xi)G(0,y;\xi,\eta)d\xi-\varphi_1(y)e^{\lambda_1 y}. \tag{33}$$

Точно также как в работе [5], левую часть интегрального уравнения (32) представим в виде

$$I(y)=\int\limits_0^y\left(\int\limits_0^1 G(0,y;\xi,\eta)d\xi\right)e^{\lambda_1\eta}\omega_1(\eta)d\eta=$$

$$=I_1(y)+\int\limits_0^y\left(\int\limits_0^1 e^{\lambda_1\eta}G_1(0,y;\xi,\eta)d\xi\right)\omega_1(\eta)d\eta,$$

здесь

$$I_1(y)=\int\limits_0^y\left[\int\limits_0^1\frac{1}{\sqrt{\pi(y-\eta)}}\exp\left[\lambda_1\eta-\frac{\xi^2}{4(y-\eta)}\right]d\xi\right]\omega_1(\eta)d\eta. \tag{34}$$

Производя замену переменной во внутреннем интеграле $I_1(y)$ по формуле $\frac{\xi}{2\sqrt{y-\eta}}=s$ и дифференцируя полученное выражение, имеем

$$I_1^{'}(y)=4e^{\lambda_1 y}\omega_1(y)-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_0^y\frac{1}{(y-\eta)^{3/2}}\exp\left[\lambda_1\eta-\frac{1}{4(y-\eta)}\right]\omega_1(\eta)d\eta. \tag{35}$$

Учитывая (32) и (35), имеем

$$\omega_1(y)-\int\limits_0^y K_1(y,\eta)\omega_1(\eta)d\eta=\frac{g^{'}(y)}{R(y)}, \tag{36}$$

где

$$K_1(y,\eta) = \frac{1}{R(y)}\left\{ \frac{1}{2\sqrt{\pi}(y-\eta)^{3/2}} \exp\left(\lambda_1\eta - \frac{1}{4(y-\eta)}\right) - \right.$$

$$\left. - \int_0^1 e^{\lambda_1\eta} G_{1y}(y,\xi,\eta)d\xi \right\}. \tag{37}$$

$$R_1(y) = e^{\lambda_1 y} + \int_0^1 e^{\lambda_1 y} G_1|_{\eta=y}(y,\xi,\eta)d\xi.$$

Таким образом, интегральное уравнение (36) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода, которое с учетом (5), (33) и (37) из теории интегральных уравнений допускает единственное решение. Следовательно, в силу эквивалентности поставленная задача также будет однозначно разрешима.

**Литература**

1. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. М.: Высш. шк., 1995. 301 с.

2. Елеев В.А. // Дифференц. уравнения. 1994 Т.30,№2, с. 230-237.

3. Казиев В.М. // Дифференц. уравнения. 1978 Т.14, №1, с. 181-185.

4. Исламов Б., Балтаева У.И. Узб. мат. журнал. 2007. №2, с. 45-55.

5. Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамажанов М. Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа. Т.: Фан, 1986. 204 с.

6. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977, 736 с.

7. Бейтмен Г., Эрдийи А. Высшие транцендентные функции М.: Наука. Т 2. 1966. 295 с..

Национальный Университет
Узбекистана им. М.Улугбека

Дата поступления
04.12.06

Uzbek Mathematical
Journal, 2008,№2, pp.21-25

УДК 517.98

# Пространства с порядковой единицей с p-аддитивной нормой

**М.А.Бердикулов, Ф.М.Закиров**

Tartib bo‘yicha birlik elementi bor fazolarda $p-$additivlik xossasiga ega bo‘lgan normalar o‘rganilgan. Vitali- Xan- Cakc teoremasining o‘xshashi isbotlangan.

In the paper, we studu order unit spaces with the $p-$ additive norm. An analog of the Vitali- Han- Saks theorem is proved.

В работе изучаются пространства с порядковой единицей, в которых задана норма, обладающая свойством $p$-аддитивности. Доказан, аналог теоремы Витали-Хана-Сакса.

Используемую терминологию можно найти в [1].

Пусть $(A, \mathbf{e})$ пространство с порядковой единицей.

**Определение 1.** *Положительное проекционное отображение $R : A \to A$ с единичной нормой называется* $P$-проектором, *если существует единственное положительное проекционное отображение $R' : A \to A$ с единичной нормой, такое, что*

$$Im^+R = ker^+R', \quad ker^+R = im^+R'.$$

Элементы множества $U = \{u = R\mathbf{e} :\ R$ произвольный $P$-проектор в $A\}$ называются *проективными единицами.*

Пусть $r(a) = \wedge\{u : u \in U,\ a \leq \|a\|u\}$ - носитель элемента $A$. Два элемента $a$ и $b$ называются *ортогональными*, если $r(a) \perp r(b)$, т.е. $r(a) + r(b) \leq \mathbf{e}$.

Пусть $A$ - спектральное пространство с порядковой единицей [1].

**Определение 2.** *Норма $\|\cdot\|_A$, заданная на $A$, обладает* свойством $p$-аддитивности *для некоторого $p \in [1, \infty]$, если*

$$\|a + b\|_A^p = \|a\|_A^p + \|b\|_A^p$$

*для любых $a$ и $b$ из $A$, $a \geq 0$, $b \geq$ и $a \perp b$ [1,2].*

Согласно [1], если, $A$ - спектральное пространство, то множество $U$ является полной ортомодулярной решеткой и произвольный элемент $a \in A$ допускает спектральное разложение по элементам $U$.

**Теорема 1.** *Пусть $A$-спектральное пространство с порядковой единицей, с нормой $\|\cdot\|_A$, обладающей свойством $p$-аддитивности, и $\|\mathbf{e}\| = 1$. Тогда существует положительный линейный функционал $\tau$ на $A$, такой, что $\tau(\boldsymbol{e}) = 1$ и $\|a\|_A^p = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\lambda|^p d\tau(e_\lambda)$ $\forall a \in A$, где $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda de_\lambda$ - спектральное разложение элемента $a$ [1].*

Перед доказательством теоремы приведем один результат, доказанной в [3].

**Предложение 1.** Пусть $(X, m)$-пространство с мерой и $m(X) = 1$. Если -непрерывный положительный функционал на $L_p(X, m)$, $p \in [1, \infty]$ и $\|\varphi\| = \varphi(\mathbf{1}) = 1$, то $\varphi(f) = \int\limits_X f(x)dm(x)$, $f \in L_p(X, m)$.

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим одномерное подпространство $B = \{\lambda\mathbf{e}, \lambda \in \mathbf{R}\} \subset A$. Положим $\tau_0(\lambda\mathbf{e}) = \lambda$. Очевидно, что $\tau_0$ - линейный функционал на $B$ и $\|\tau_0\| = 1$. Тогда по теореме Хана-Банаха, существует линейный функционал $\tau$, заданный на $A$, такой, что $\|\tau\| = 1$ и $\tau() = \tau_0()$ для любого $x$ из $B$.

Исследуем теперь свойства функционала на произвольно взятом максимальном абелевом [1] подпространстве $A_0$ из $A$. По теореме Хана-Банаха, $|\tau()| \leq \|\|$, т.е. $\|\tau|_{A_0}\| \leq 1$. Поскольку $\mathbf{e} \in A_0$ и $\tau(\mathbf{e}) = \tau_0(\mathbf{e}) = 1$, то $\|\tau|A_0\| = 1$. Так как $A_0$ - нормированная решетка с $p$-аддитивной нормой, то по теореме 2 из [2], ее замыкание $[A_0]$ по норме $\|\cdot\|_A$ является банаховой решеткой с $p$-аддитивной нормой в $A$.

Следовательно, $[A_0]$-абстрактное $L_p$ -пространство в смысле определения 1 из [2]. Тогда по теореме 3 из [2], существует хаусдорфово пространство $X$ и регулярная борелевская мера $m$, такая, что $[A_0]$ изометрически изоморфно $L_p(X, m)$.

Пусть $\varphi$ - изоморфизм между $[A_0]$ и $L_p(X, m)$. Тогда для любого $a$, из $A_0$ имеем $\|a\|_A^p = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\lambda|^p dm(\varphi(e_\lambda))$ (здесь $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda de_\lambda$ - спектральное разложение элемента $a$).

Так как $\|\tau|_{A_0}\| = \tau(\mathbf{e}) = 1$, то в силу предложения 1 $\tau(a) = \int\limits_X \varphi(a)(x)dm(x)$, в частности, $\tau(u) = m(\varphi(u))$ для любой проективной единицы $u$ из $A_0$. Отсюда $\|a\|_A^p = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\lambda|^p d\tau(e_\lambda)$. Теорема доказана.

**Определение 3.** *Пусть* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$, $x_n \downarrow 0$ *и* $\varepsilon > 0$. *Проективная единица* $u$ *называется* $\varepsilon$-единицей *для последовательности* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, *если существует число* $n_0$, *такое, что для всех* $n \geq n_0$ *справедливо неравенство* $Rx_n \leq \varepsilon u$, *где* $R$ *-* $P$*-проектор, соответствующий* $u$, *т.е.* $u = R\mathbf{e}$.

**Предложение 2.** Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ - последовательность из пространства с порядковой единицей $A$ и $x_n \downarrow 0$. Для любой проективной единицы $u \neq 0$ из $A$ существует проективная единица $v \neq 0$, такая, что $v \leq u$ и $v$ является $\varepsilon$-единицей для $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Доказательство. Если $Q$ является - проектором соответствующим $u$, т.е. $Q\mathbf{e} = u$, то все рассуждения проводимые ниже можно провести в пространстве $Q(A)$. Поэтому, не нарушая общности, можно предположить, что $u = \mathbf{e}$. Положим

$$e_n = \{x_n \leq \varepsilon\} = \left\{ \int\limits_{-\infty}^{\varepsilon} de_\lambda^{(n)} \right\},$$

где $\{e_\lambda^{(n)}\}$ -спектральное семейство элемента $x_n$. Если $e_n \neq 0$, для некоторого $n$ и $R_n\mathbf{e} = e_n$, то $R_n x_n \leq \varepsilon e_n$. То есть $e_n$ является $\varepsilon$-единицей для $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Предположим, что $e_n = 0$ для всех $n$. Тогда $e'_n = \mathbf{e} - e_n = \{x_n \geq \varepsilon\} = \mathbf{e}$ и $x_n \geq \varepsilon e$ для любого $n$, поэтому $\inf x_n \geq \varepsilon\mathbf{e}$, что противоречит условию предложения $x_n \downarrow 0$. Полученное противоречие завершает доказательство предложения.

Напомним, что линейный функционал $\tau$ называется *следом*, если он положителен и обладает свойством, $\tau(a) = \tau(Ra) + \tau(R'a)$ для всех $a \in A$ и $P$-проектора $R$. Здесь $R'$ -квазидополнение $R$.

**Предложение 3.** Пусть $\tau$-след на $A$. Если $\{u_i\}_{i=1}^{n} \subset A$ произвольный набор проективных единиц с условиями $u_i \perp u_j$ и $\sum u_i = e$, то

$$\tau(a) = \sum_{i=1}^{n} \tau(R_n a),$$

где $R_i$, - проектор, соответствующий к $u_i$.

Доказательство вытекает из леммы 5 работы [4].

**Теорема 2.** *Пусть $\tau$ точный вполне аддитивный линейный функционал на $A$. Если $\tau$-след, то он нормален.*

Доказательство. Пусть последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ такая, что $_n \downarrow 0$. Очевидно, что можно считать $\|a_n\| \leq 1$ для всех $n$.

Из предложения 2 вытекает, что для последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ существует семейство попарно ортогональных проективных единиц $\{u_i\} \subset A$, каждый элемент которого является $\varepsilon$-единицей для $\{_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\sup u_i = \mathbf{e}$. Так как $\tau$ точный функционал и $\sum \tau(u_i) = \tau(e)$, то имеем, что $\{u_i\}$ - счетное семейство. Можно считать, что $\tau(e) = 1$, т.е. $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \tau(u_i) = 1$. Тогда для всех $\varepsilon > 0$ существует номер $n$, такой, что выполняется неравенство

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} \tau(u_i) < \varepsilon.$$

Если положим $R_i\mathbf{e} = u_i$, $Q_n\mathbf{e} = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k$, то по предложению 3 имеем

$$\tau(a_m) = \tau(R_1 a_m) + \tau(R_2 a_m) + ... + \tau(R_n a_m) + \tau(Q_n a)m). \qquad (*)$$

Так как $u_i$ является $\varepsilon$-единицей для $\{_n\}_{n=1}^{\infty}$, то существует номер $m_i$, такой, что $R_i a_m \leq u_i$ при $m \geq m_i$. Тогда для $m \geq \max\{m_i : i \leq n\}$ можно оценить правую часть (*):

$$\tau(R_1 a_m) + \tau(R_2 a_m) + ... + \tau(R_n a_m) \leq \varepsilon\tau(a_1) + \varepsilon\tau(a_2) + ... + \varepsilon\tau(a_m) \leq \varepsilon\tau(\mathbf{e}) = \varepsilon.$$

Теперь, оценим последний член

$$\tau(Q_n a_m) \leq \|a_m\| \tau(Q_n e) \leq \tau(Q_n \mathbf{e}) = \sum_{=n+1}^{\infty} \tau(u_) < \varepsilon.$$

Из полученных соотношений следует, что $\tau(a_m) < \varepsilon$, т.е. $\tau$ нормален. Теорема доказана.

Пусть на логике проективных единиц $U$ задана счетно-аддитивная, строго положительная мера $\mu$ [5].

**Следствие.** *Пусть $a = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda de_\lambda$ - спектральное разложение элемента $a$. Предположим, что величина $\|a\| = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\lambda| d\mu(_\lambda)$ обладает* *свойством:* $\|a_1 + a_2\| \leq \|a_1\| + \|a_2\|$ *для всех* $a_1$ *и* $a_2$ *из* $A$. *Тогда мера* $\mu$ *однозначно продолжается до нормального линейного положительного функционала* $\tau$ *на* $A$.

Доказательство. Не ограничивая общности рассуждений, предположим, что $\|\mathbf{e}\| = 1$. Тогда по теореме 1, существует положительный линейный функционал $\tau$ на $A$, такой, что $\tau() = 1$ и $\|a\| = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\lambda| d\tau(_\lambda)$ для любого $a \in A$.

Если $u \in A$ - проективная единица, то очевидно, что $||u|| = \tau(u) = \mu(u)$, т.е. $\tau|_U = \mu$. Нормальность $\tau$ вытекает из счетной аддитивности $\mu$. Следствие доказано.

**Литература**


1. Alfsen E.M., Shultz F.W. Non commutative spectral theory for affine functions on convex sets. // Mem. Amer. Math. Soc., 172. Providence R.I.:AMS,1976. 122. p.

2. Lacey H.E. The isometric theory of classical Banach spaces. Berlin: Springer Verlag. 1974. 270 p.

3. Аюпов Ш.А.,Гольдштейн М.Ш.,Таджибаев Б.Р. Монотонно полные йордановы алгебры с p-аддитивной нормой.// Операторные алгебры и функциональные пространства. Ташкент: Фан,1988, с. 12-17.

4. Тихонов О.Е. Пространства Lp( ), ассоциированные с пространствами в спектральной двойственности. Деп. ВИНИТИ, №8487 - B87, 17.11.1987.

5. Sakai S. C*-algebras and W*-algebras. Berlin: Springer Verlag. 1971. 256 p.


Институт математики и информационных технологий

Дата поступления 09.01.07

Uzbek Mathematical
Journal, 2008,№2, pp.26-34

УДК 519.27+ 517.95

# Об одном классе непрерывных квадратичных стохастических операторов

**Н.Н.Ганиходжаев, О.У.Аноров**

Absolyut uzluksiz k.s.o ta'rifi kiritilgan. Diskret k.s.o ning absolyut uzluksiz bo'lishi zarur va yetarlik sharti topilgan. Chekli grafda, cheksiz (sanoqli yoki sanoqsiz) to'plamdan qiymat qabul qiluvchi funksiyalar to'plamida k.s.o konstruksiyasi berilgan.

A notion of absolute Continuous quadratic stochastic operator is introduced. For the discreet q.s.o a sufficient and necessary conditions of absolutely continuously are found.
On a set of functions defined on a finite graph and with the infinite countable and uncountable set of values a construction of q.s.o is given.

## 1. Введение.

Понятие квадратичного стохастического оператора (к.с.о) было введено С.Н.Бернштейном [1], при изучении некоторых математических проблем связанных с теорией наследственности. В [2] понятие к.с.о. было обобщено следующим образом.

Пусть $(E, \Im)$-измеримое пространство, где $E$- некоторое фиксированное множество и $\Im$- $\sigma$ - алгебра подмножеств множество . Положим $S(E, \Im)$-множество всех вероятностных мер определённых на измеримом пространстве $(E, \Im)$. Пусть $\{P(x, y, A) : x, y \in E, A \in \Im\}$ семейство функций определённых на $E \times E \times \Im$ и удовлетворяющих следующим условиям:

(i) для любых фиксированных $x, y \in E$,

$$P(x, y, \cdot) \in S(E, \Im) \tag{0.1}$$

(ii) для любого фиксированного измеримого множества $A \in \Im$, отображение

$$P(\cdot, \cdot, A) \to R \tag{0.2}$$

является измеримой функцией двух переменных.

(iii) Для любых фиксированных $x, y \in E$ и $A \in \Im$

$$P(x, y, A) = P(y, x, A) \tag{0.3}$$

Из условия (0.1) следует, что

$$P(x, y, E) = 1, \quad \forall x, y \in E \qquad (0.4).$$

**Определение 1.** Отображение $V : S(E, \Im) \to S(E, \Im)$ называется квадратичным стохастическим оператором (к.с.о.), если для произвольной меры $\lambda \in S(E, \Im)$, её образ $\lambda^{'} = V\lambda$ определяется равенством

$$\lambda^{'}(A) = \int\limits_E \int\limits_E P(x, y, A) d\lambda(x)\ d\lambda(y) \tag{0.5}$$

где $A \in \Im$ и семейство переходных вероятностей $\{P(x, y, A) : x, y \in E, A \in \Im\}$ удовлетворяет условиям (0.1)-(0.3).

Если $E$- конечное множество и $E = \{1, 2, ..., n\}$, а $\Im$- множество всех подмножеств $E$, тогда

$$S(E, \Im) = S^{n-1} = \{x = (x_1, x_2......., x_n) \in R^n : x_i \geq 0, \quad \forall i, \ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\} \tag{0.6}$$

и к.с.о. (0.5) имеет вид

$$x_n^{'} = \sum_{i,j=1}^{n} P_{ij,k} x_i x_j \tag{0.7}$$

где $P_{ij,k} = P(i, j, k)$. Очевидно $P_{ij,k} = P_{ji,k}$, $P_{ij,k} \geq 0$ и из условия (0.4) следует, что $\sum\limits_{k=1}^{n} P_{ij,k} = 1$, для любых $i, j, k \in E$.

Таким образом, если $E$- конечное множество, определение к.с.о. данное выше совпадает с определением к.с.о. приведённым в [1].

**Определение 2.** Квадратичный стохастический оператор $V$ (0.5) назовем дискретным, если множество $E$ не более чем счетно и в противном случае - непрерывным.

Дискретный к.с.о. (0.5) определяется кубической матрицей $\{P_{ij,k}\}_{i,j,k=1}^{n}$ или $\{P_{ij,k}\}_{i,j,k=1}^{\infty}$.

Приведём примеры непрерывных к.с.о.

*Пример 1.* Пусть $(E, \Im)$- измеримое пространство и

$$P(x, y, A) = \frac{\chi_A(x) + \chi_A(y)}{2} \tag{0.8}$$

где $x, y \in E, A \in \Im$ и $\chi_A(\cdot)$- индикатор множество $A$, т.е.

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, \text{если} & x \in A \\ 0, \text{если} & x \notin A \end{cases}$$

Очевидно, семейство функций (0.8) удовлетворяет условиям (0.1)-(0.3).

*Пример 2.* Пусть $(R, \Re)$-измеримое пространство, где $R$ - множество вещественных чисел, $\Re$ - борелевская $\sigma$ - алгебра и

$$\rho(x, y, z) = \frac{\exp(-(z - \frac{x+y}{2})^2)}{\sqrt{2\pi}}.$$

Для любого $z \in R$, положим $A_z = (-\infty, z]$ и

$$P(x, y, A_z) = \int\limits_{-\infty}^{z} \rho(x, y, z)dz \tag{0.9}$$

где $dz$ -обычная мера Лебега. Мера (0.9) определённая на множествах вида $(-\infty, z]$ естественным образом продолжается на всю $\sigma$ - алгебру $\Re$. Легко проверить, что определённое таким образом семейство функции $\{P(x, y, A) : x, y \in R, \quad A \in \Re\}$ удовлетворяет условиям (0.1)-(0.3).

**2. Абсолютно непрерывные квадратичные стохастические операторы.**

**Определение 3.** К.с.о. оператор $V$ (0.5) назовчм абсолютно непрерывным, если для любой меры $\lambda \in S(E, \Im)$, мера $V\lambda$ абсолютно непрерывна относительно меры $\lambda$, т.е. $V\lambda \prec \lambda$.

Напомним, что квадратичный оператор (0.7) называется вольтерровским если $P_{ij,k} = 0$ для $k \notin \{i, j\}, \quad i, j, k = \overline{1, n}$.

В настоящее время теория вольтерровских квадратичных операторов достаточно хорошо развита [4, 5, 6].

**Теорема 1.** *Дискретный к.с.о. $V$ абсолютно непрерывен тогда и только тогда, когда $V$ является вольтерровским оператором.*

Доказательство. Пусть $V$-дискретный вольтерровский оператор. Известно, что вольтерровские операторы имеют вид

$$x'_k = x_k(1+\sum_{i=1}^{n} a_{ki}x_i), \quad k = 1,2,...,n.$$

где $a_{ki} = -a_{ik,}$ $|a_{ki}| \leq 1$, для любого $k \in \{1,2,...,n\}$, так что равенство $x_k = 0$ влечёт $x'_k = 0$, откуда следует что дискретная мера $V_x = (x'_1,\ x'_2,...,x'_n)$ абсолютно непрерывна относительно меры $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

Пусть теперь $V$-абсолютно непрерывный к.с.о. определённый на конечном или счётном множестве $E$. Предположим, что $E$- конечно и $|E| = n$. Рассмотрим крайние точки симплекса $S^{n-1}$ т. е. $x^{(1)} = (1,0,...,0)$, $x^{(2)} = (0,1,0,...,0),...,x^{(n)} = (0,0,......0,1)$.

Так как

$$(Vx^{(1)})_k = P_{11,k}$$

и мера $Vx^{(1)}$ абсолютно непрерывна относительно $x^{(1)}$, то $P_{11,1} = 1$.

Аналогично можно показать, что $P_{kk,k} = 1$ для любого $k$. Покажем теперь, что $P_{ij,k} = 0$, если $k \neq i$ и $k \neq j$. Пусть $x^{(i,j)} = \lambda x^{(i)} + (1-\lambda)x^{(j)}$, $0lt;\lambda lt;1$ то есть $(x^{(i,j)})_k = 0$ для любого $k \neq i$ и $k \neq j$. Так как

$$(Vx^{(i,j)})_k = P_{ii,k}\lambda^2 + P_{jj,k}(1-\lambda)^2 + 2P_{ij,k}\lambda(1-\lambda) = 2P_{ij,k}\lambda(1-\lambda)$$

и $(Vx^{(i,j)}) \prec x^{(i,j)}$, то $P_{ij,k} = 0$ для $k \neq i$ и $k \neq j$. Случай счетного $E$ рассматривается аналогично. Теорема доказана.

**Определение 4.** Непрерывный к.с.о. $V$ назовём вольтерровским, если $P(x, y, A) = 0$ для любого измеримого множества $A$ не содержащего точек $x$ и $y$.

К.с.о. приведённый в примере 1 является непрерывным вольтерровским оператором, если $E$ более чем счётное множество.

**3. Конструкция непрерывных к.с.о.**

Пусть $G = (\Lambda, L)$ - конечной граф без кратных ребер и петель, где $\Lambda$ - множество вершин и $L$- множество ребер. Пусть далее $(\Phi, \Re)$-измеримое пространство, где $\Re$ - $\sigma$ - алгебра подмножеств множества $\Phi$. Функцию $\sigma : \Lambda \to \Phi$ назовём клеткой и пусть $\Omega$ -множество всех клеток, т.е. $\Omega = \Phi^{\Lambda}$. Обозначим через $\Im$ $\sigma$ - алгебру подмножества $\Omega$ порожденную $\sigma$ - алгеброй $\Re$. Положим $S(\Omega, \Im)$ -множество всех вероятностных мер, определённых на измеримом пространстве $(\Omega, \Im)$.

Если Ф- конечное или счётное множество, тогда к.с.о. $V$ (0.5) определённый на $S(\Omega, \Im)$ является дискретным. В дальнейшем будет предполагать, что Ф- бесконечное, несчётное множество. Приведём необходимые факты из теории измеримых разбиений.

Пусть $\xi = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$ конечное измеримое разбиение пространства Ф ,т.е.$A_i \in \Re$ для всех $i$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ при $i \neq j$ и $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \Phi$.

Существует естественное взаимно-однозначное соответствие между измеримыми разбиениями $\xi$ и $\sigma$ - под алгебрами $\sigma$ - алгебры $\Re$. Именно, сопоставим разбиению $\xi$, минимальную $\sigma$ - алгебру $R(\xi)$ порожденную элементами разбиения $\xi$. Очевидно, если $\xi$ - конечное измеримое разбиение,тогда $R(\xi)$-конечная $\sigma$ - под алгебра $\sigma$ - алгебры $\Re$.

Частичный порядок на множестве измеримых разбиений задается следующим образом : $\xi \leq \eta$ ($\xi$ не мельче $\eta$), если каждый элемент разбиения $\xi$ есть объединение некоторого числе элементов разбиения $\eta$. Очевидно для измеримых конечных разбиений $\xi$ и $\eta$ из неравенства $\xi \leq \eta$, следует $R(\xi) \subseteq R(\eta)$; а если $\xi_1 \leq \xi_2 \leq ... \leq \xi_n \leq ...$ -неубывающая последовательность конечных измеримых разбиений такая, что $\xi_n \to \varepsilon$, где $\varepsilon$ - разбиение множества Ф, каждый элемент которого состоит из единственной точки, тогда $R(\xi_1) \subseteq R(\xi_2) \subseteq ... \subseteq R(\xi_n) \subseteq ...$ и $R(\xi_n) \to \Re$.

Пусть Ф- бесконечное, несчётное множество, $\Re$- $\sigma$ - алгебра подмножеств множества Ф и $|\Lambda| = n$. Для произвольного конечного измеримого разбиения $\xi = \{A_1, ..., A_m\}$ пространства Ф, определим конечное измеримое разбиение $\zeta$ пространства $\Omega$, элементы которого имеют следующий вид:

$$\{\sigma \in \Omega : \sigma(1) \in A_{j_1}, \quad \sigma(2) \in A_{j_2}, ..., \sigma(n) \in A_{j_n}\},$$

где $A_{j_1}, A_{j_2}, ..., A_{j_n}$ -произвольные элементы разбиения $\xi$.

Так например, если $|\Lambda| = 2$ и $\xi = \left\{A, A^C\right\}$ -измеримое разбиение, где $A^C = \Phi \setminus A, \quad A \in \Re$, разбиение $\zeta$ пространства $\Omega$ имеет вид $\xi = \{\overline{\sigma_1}, \ \overline{\sigma_2}, \ \overline{\sigma_3}, \ \overline{\sigma_4}\}$, где

$$\overline{\sigma_1} = \{\sigma \in \Omega : \sigma(1) \in A, \ \sigma(2) \in A\}$$

$$\overline{\sigma_2} = \{\sigma \in \Omega : \sigma(1) \in A, \ \sigma(2) \in A^c\}$$

$$\overline{\sigma_3} = \{\sigma \in \Omega : \sigma(1) \in A^c, \ \sigma(2) \in A\}$$

$$\overline{\sigma_4} = \{\sigma \in \Omega : \sigma(1) \in A^c,\ \sigma(2) \in A^c\}.$$

В общем случае, если $|\Lambda| = n$ и $\xi = \{A_1, A_2, ..., A_m\}$ измеримое разбиение $\Phi$, тогда разбиение $\zeta$ пространства $\Omega$ имеет вид $\zeta = \{\overline{\sigma}_1, ..., \overline{\sigma_N}\}$ где $N = n^m$.

В этой статье ограничимся случаем, когда граф $G$ связен. Пусть $\mu$ - вероятностная мера на $(\Omega, \Im)$ такая, что $\mu(\overline{\sigma_k}) gt; 0$ для любого $k$.

Положим

$$b_{ij,k} = \begin{cases} 1, & amp; \text{если} \quad i = j = k \\ \frac{\mu(\overline{\sigma_k})}{\mu(\overline{\sigma_i}) + \mu(\overline{\sigma_j})}, & amp; \text{если} \quad k = i \quad \text{или} \quad k = j,\ \ i \neq j \\ 0, & amp; \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Определим семейство мер $\{P(\sigma_1, \sigma_2, B) : \sigma_1, \sigma_2 \in \Omega : B \in \Im\}$ следующим образом. Пусть

$$\rho_{\sigma_1\sigma_2,\sigma} = b_{ij,k}, \ \text{если} \ \ \sigma_1 \in \overline{\sigma_i}, \quad \sigma_2 \in \overline{\sigma_j} \quad \text{и} \ \ \sigma \in \overline{\sigma_k}.$$

Положим

$$P(\sigma_1, \sigma_2, B) = \frac{1}{Z(\sigma_1, \sigma_2)} \int\limits_B \rho_{\sigma_1\sigma_2,\sigma} d\mu(\sigma)$$

где нормирующий множитель $Z(\sigma_1, \sigma_2)$ имеет вид

$$Z(\sigma_1, \sigma_2) = \int\limits_\Omega \rho_{\sigma_1\sigma_2,\sigma} d\mu(\sigma).$$

Очевидно

$$Z(\sigma_1, \sigma_2) = \begin{cases} \mu^2(\overline{\sigma_i}) + \mu^2(\overline{\sigma_j}), & amp; \text{если} \ \ \sigma_1 \in \overline{\sigma_i},\ \sigma_2 \in \overline{\sigma_j},\ i \neq j \\ \mu(\overline{\sigma_i}), & amp; \text{если} \ \ \sigma_1, \sigma_2 \in \overline{\sigma_j} \end{cases}$$

и

$$P(\sigma_1, \sigma_2, B) = \begin{cases} \frac{\mu(B \cap \overline{\sigma}_i) \cdot \mu(\overline{\sigma_i}) + \mu(B \cap \overline{\sigma}_j) \cdot \mu(\overline{\sigma_j})}{\mu^2(\overline{\sigma_i}) + \mu^2(\overline{\sigma_j})}, & amp; \text{если} \quad \sigma_1 \in \overline{\sigma_i}, \\ & \sigma_2 \in \overline{\sigma_j}, \quad i \neq j \\ \frac{\mu(B \cap \overline{\sigma_i})}{\mu(\overline{\sigma_i})}, & amp; \text{если} \quad \sigma_1, \sigma_2 \in \overline{\sigma_i}. \end{cases}$$

Легко проверить, что семейство вероятностных мер

$$\{P\ (\sigma_1, \sigma_2, B) : \sigma_1, \sigma_2 \in \Omega, B \in \Im\} \tag{1.1}$$

удовлетворяет условиям (0.1)-(0.3).

К.с.о. $V$ действующий на множестве $S(\Omega, F)$ и определенный семейством вероятностных мер (1.1) имеет следующий вид: для произвольной меры $\lambda \in S(\Omega, \Im)$, мера $\lambda^{'} = V\lambda$, задаётся равенством

$$\lambda^{'}(B) = \int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Omega} P(\sigma_1, \sigma_2, B) d\lambda(\sigma_1) d\lambda(\sigma_2) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\mu(B \cap \overline{\sigma_i})}{\mu(\overline{\sigma_i})} \lambda^2(\overline{\sigma_i}) +$$

$$+2 \sum_{1 \le i \le j \le N} \frac{\mu(B \cap \overline{\sigma_i})\mu(\overline{\sigma_i}) + \mu(B \cap \overline{\sigma_j})\mu(\overline{\sigma_j})}{\mu^2(\overline{\sigma_i}) + \mu^2(\overline{\sigma_j})} \cdot \lambda(\overline{\sigma_i})\lambda(\overline{\sigma_j}) \qquad (1.2)$$

Для данного $\lambda \in S(\Omega, \Im)$ траектория $\left\{\lambda^{(n)}\right\}, \quad n = 1, 2...$ оператора (1.2) определяется равенством $\lambda^{(n+1)}(A) = V(\lambda^{(n)})(A)$, где $n = 0, 1, 2, ...$ и $\lambda^{(0)} = \lambda$, $A \in \Im$.

Из (1.2) имеем

$$\lambda^{'}(\overline{\sigma_i}) = \lambda^2(\overline{\sigma_i}) + 2\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \frac{\mu^2(\overline{\sigma_i})}{\mu^2(\overline{\sigma_i}) + \mu^2(\overline{\sigma_j})} \lambda(\overline{\sigma_i})\lambda(\overline{\sigma_j}) \qquad (1.3)$$

Обозначая $\lambda_i = \lambda(\overline{\sigma_i}), \quad a_{ij} = \frac{\mu^2(\overline{\sigma_i}) - \mu^2(\overline{\sigma_j})}{\mu^2(\overline{\sigma_i}) + \mu^2(\overline{\sigma_j})}$ из (1.3) получим

$$\lambda_i' = \lambda_i(1 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} a_{ij}\lambda_j), \quad i = 1, ..., N \qquad (1.4)$$

Легко видеть, что $a_{ij} = -a_{ji}, \quad |a_{ij}|\, lt; 1$.

Заметим, что $n$ - ая итерация $\lambda^{(n)} = V^{(n)}\lambda^{(0)}$ оператора (1.2) имеет вид

$$\lambda^{(n)}(A) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\mu(A \cap \bar{\sigma}_i)}{\mu(\bar{\sigma}_i)} \left(\lambda_i^{(n-1)}\right)^2 +$$

$$+2 \sum_{1 \le i \le j \le N} \frac{\mu(A \cap \bar{\sigma}_i)\mu(\bar{\sigma}_i) + \mu(A \cap \bar{\sigma}_j)\mu(\bar{\sigma}_j)}{\mu^2(\bar{\sigma}_i) + \mu^2(\bar{\sigma}_j)} \lambda_i^{(n-1)}\lambda_j^{(n-1)} \qquad (1.5)$$

где $\lambda_j^{(n)}, \quad j = 1, ..., N$, координаты траектории оператора (1.3).

Следующие теоремы доказываются аналогично теоремам 4, 5 работы [3].

**Теорема 2.** *Существует* $r \geq 1$ *такое, что для* $\forall\lambda \in S^{N-1}$ *траектория оператора* (1.3) *имеет следующий предел*
$\lim\limits_{n\to\infty} \lambda^{(n)} = (\lambda_1^*, \quad \lambda_2^*, ..., \lambda_r^*, 0, ..., 0)$ *где* $\lambda_i^* = \frac{\lambda_i}{\sum\limits_{j=1}^{r} \lambda_j}$.

**Теорема 3.** *Для* $\forall\lambda \in S(\Omega, F)$ *траектория* $\left\{\lambda^{(n)}(A)\right\}$ *оператора* (1.2) *имеет следующий предел*

$$\lambda(A) = \lim_{n\to\infty} \lambda^{(n)}(A) = \sum_{i=1}^{r} \frac{\mu(A \cap \overline{\sigma_i})}{\mu(\overline{\sigma_i})} (\lambda_i^*)^2 +$$

$$+2 \sum_{1\leq i\leq j\leq r} \frac{\mu(\overline{\sigma_i})\mu(A \cap \overline{\sigma_i}) + \mu(\overline{\sigma_j})\mu(A \cap \overline{\sigma_j})}{\mu^2(\overline{\sigma_i}) + \mu^2(\overline{\sigma_j})} \lambda_i^* \lambda_j^*.$$

Рассмотрим теперь неубывающую последовательность конечных измеримых разбиений $\xi_1 \leq \xi_2 \leq ... \leq \xi_n \leq ...$, такую что $\xi_n \to \varepsilon_\Phi$, где $\varepsilon_\Phi$ - разбиение множества $\Phi$, каждый элемент которого состоит из единственной точки. Тогда $R(\xi_1) \subseteq R(\xi_2) \subseteq ... \subseteq R(\xi_n) \subseteq ...$ и $R(\xi_n) \to \Re$. Для каждого конечного измеримого разбиения $\xi_n$ пространства $\Phi$ как показано выше построим конечное измеримое разбиение $\zeta_n$ пространства $\Omega$.

**Предложение 1.** *Последовательность* $\{\zeta_n\}$ *являетcя неубывающей последовательностью конечных измеримых разбиений и* $\zeta_n \to \varepsilon_\Omega$, *где* $\varepsilon_\Omega$ *- разбиение множества* $\Omega$, *каждый элемент которого состоит из единственной точки .При этом* $F(\zeta_1) \subseteq F(\zeta_2) \subseteq ... \subseteq F(\zeta_n) \subseteq ...$ и $F(\zeta_n) \to \Im$, где $F(\zeta_n)$*-алгебра ,порожденная элементами разбиения* $\zeta_n$.

Доказательство.Конечность, измеримость и неубываемость последовательности разбиений $\{\zeta_n\}$ следует из построения. Так как $\sigma$ - алгебра $\Im$ порождена $\sigma$ - алгеброй $\Re$, отсюда непосредственно следует, что $\zeta_n \to \varepsilon_\Omega$, $F(\zeta_1) \subseteq F(\zeta_2) \subseteq ... \subseteq F(\zeta_n) \subseteq ...$ и $F(\zeta_n) \to \Im$.Теорема доказана.

Пусть

$$\{P_n\ (\sigma_{1,}\sigma_2, B) : \sigma_{1,}\sigma_2 \in \Omega, B \in \Im\} \qquad (1.6),$$

семейство функций (1.1) построенных по измеримому разбиению $\zeta_n$.

**Теорема 4.** *Пусть* $\{\zeta_n\}$ *неубывающая последовательностью конечных измеримых разбиений такая, что* $\zeta_n \to \varepsilon_\Omega$ *и*

$$\{P_n\left(\sigma_{1,}\sigma_2, B\right) : \sigma_{1,}\sigma_2 \in \Omega, B \in \Im\}$$

*соответствующая последовательность переходных вероятностей. Тогда для такой последовательности существует предел и предельные переходные вероятности определяют непрерывный к.с.о.*

Доказательство. Так как $\{\zeta_n\}$ неубывающая последовательность конечных измеримых разбиений ,тогда

$$\{P_n\left(\sigma_{1,}\sigma_2, B\right) : \sigma_{1,}\sigma_2 \in \Omega, B \in \Im\},$$

является неубывающей последовательностью при фиксированных $\sigma_{1,}\sigma_2, B$,так что предел существует. Для предельных переходных вероятностей справедливость условий (0.1)-(0.3) очевидно.

**Замечание.** В отличие от работы [3] (см. Remark 3) в рассматриваемом случае не возникает проблемы существования предела.

**Литература**

1. Бернштейн С.Н. Решение математической проблемы связанной с теорией наследственности. Учен. запис.Научно- Иссл.Каф.Укр. Отд. Мат. (1924) 1, 83-115.

2. Ганиходжаев Н.Н., Сарымсаков Т.А. Аналитические методы в теории к.с.о.// ДАН СССР, 1989, Т.305, №5, 1052-1056

3. Ganikhodjaev N.N., Rozikov U.A. On quadratic stochastic operators generated by Gibbs distributions// Regular and Chaotic Dyn. V.11, №4, 2006 , 467-473.

4. Ганиходжаев Р.Н. Квадратичные стохастические операторы, функции Ляпунова и турниры.// Матем. Сб. 1992, Т.183, №8, 121-140

5. Ганиходжаев Р.Н., Эшмаматова Д.Б. Квадратичные автоморфизми симплекса и асимптотическое поведение их траекторий.// Владикавк. матем. журнал, 2006, Т.8. вып. 2. С.12-28.

Институт Математики и
информационной технологии АНРУз

Дата поступления
04.04.07

Uzbek Mathematical
Journal, 2008,№2, pp.35-45

УДК 517.98 + 519.21

## Регулярность $F-$ квадратичных стохастических операторов

**У.У.Жамилов**

$F-$ Kvadratik stoxastik operatorlarning bir sinfi uchun bu sinfdagi har bir operatorning qo‘zg‘olmas nuqtasi yagonaligi isbotlangan. Bunday operatorlarning ixtiyoriy trayektoriyasi bu ko‘zg‘olmas nuqtaga eksponensial tez yaqinlashishi ko‘rsatilgan.

For a class $F-$ quadratic stochastic operators we show that each operator of the class has unique fixed point. Also we prove that any trajectory of the $F-$ quadratic stochastic operators converges to the fixed point exponentially fast.

### Введение

Понятие квадратичных стохастических операторов было сформулировано в работе [1]. Ряд задач прикладного характера приводят к необходимости изучения асимптотического поведения траекторий квадратичных стохастических операторов.Квадратичный стохастический оператор часто возникает во многих моделях математической генетики [1, 3-5], [6], [7]. Квадратичный стохастический оператор (КСО), отображающий симплекс

$$S^{m-1} = \{x = (x_1, ..., x_m) \in R^m : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^{m} x_i = 1\} \tag{1}$$

в себя, имеет вид

$$V : x'_k = \sum_{i,j=1}^{n} p_{ij,k} x_i x_j, \quad (k = 1, ..., m), \tag{2}$$

где $p_{ij,k}$ коэффициент наследственности и

$$p_{ij,k} \geq 0, \quad \sum_{k=1}^{m} p_{ij,k} = 1, \quad (i, j, k = 1, ..., m). \tag{3}$$

Траектория $\{x^{(n)}\}, n = 0, 1, 2, ...$ для $x^{(0)} \in S^{m-1}$ под действием КСО (2) определяется $x^{(n+1)} = V(x^{(n)})$, где $n = 0, 1, 2, ...$

Одна из основных задач для данного оператора в математической биологии состоит в изучении асимтотического поведения траекторий. Эта проблема была полностью решена для вольтерровских КСО (см. [3], [4], [5]), который определяется равенствами (2), (3) и дополнительным предположением

$$p_{ij,k} = 0, \quad \text{если} \quad k \notin \{i, j\}. \tag{4}$$

В статьях [3]- [5] теория КСО (5) была развита, используя теорию функции Ляпунова и турниры . Но невольтерровкие КСО (т.е. которые не удовлетворяют условию (4)) не были полностью изученными, поскольку нет общей теории, которая может быть применена для исследования невольтерровских операторов. Есть несколько статьей, посвященных таким операторам (см.например[2],[8]).

В этой работе рассмотрим другой тип невольтерровских операторов. Они называются $F-$ квадратичными стохастическими операторами. Для одного класса таких операторов покажем единсвенность неподвижной точки и , что все траектории будут стремиться к этой неподвижной точке экспоненциально быстро.

**Определение $F-$ КСО**

Заметим, что каждый элемент $x \in S^{m-1}$ является вероятностной мерой на множестве $E = \{1, ..., m\}$, его можно интерпретировать как состояние биологической системы,состоящей из $m$ элементов.
В этой статье расширяем множество $E$ добавлением элемента "0", т.е. мы рассматриваем $E_0 = \{0, 1, ..., m\}$. Фиксируем множество $F \subset E$ и называем его множеством "женщин"и множество $M = E \setminus F$ будем называть множеством "мужчин". Элемент 0 будеть играть роль "пустое -тело".

Коэффициенты $p_{ij,k}$ матрицы $\mathbf{P}$ мы определим следующим образом

$$p_{ij,k} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad k = 0, i, j \in F \cup \{0\} \quad \text{или} \quad i, j \in M \cup \{0\}; \\ 0, & \text{если} \quad k \neq 0, i, j \in F \cup \{0\} \quad \text{или} \quad i, j \in M \cup \{0\}; \\ \geq 0, & \text{если} \quad i \in F, j \in M, \forall k. \end{cases} \tag{5}$$

Биологическая интерпритация коэффициентов (5) ясна: "потачок"$k$ можеть рождаться , если его родители взяты из различных классов $F$ и $M$. Вообще $p_{ij,0}$ может быть строго положительным для $i \in F$ и

$j \in M$, это соотвутсвует, случаю, когда "женщина"$i$ с "мужчиной"$j$ не могут иметь "потамства", так как один из них ( или оба они) больны.

**Определение 1.[9]** *Для любого фиксированного $F \subset E$, КСО с условиями (2),(3) и (5) называется $F-$ квадратичным стохастическим оператором.*

**Замечание.** 1. Любой $F-$ КСО невольтерровский , так как $p_{ii,0} = 1$ для любого $i \neq 0$.
2. Для $m = 1$ существует единственный $F-$ КСО (независимо от $F = \{1\}$ и $F = \emptyset$), который является постоянным, т.е. $V(x) = (1, 0)$ для любого $x \in S^1$.

**$F$- КСО для** $m = 2$

В этом пункте мы рассматриваем $m = 2$, т.е. $E_0 = \{0, 1, 2\}$.

Для $m = 2$, и $M = \{1\}$, $F = \{2\}$ $F-$ КСО определяется матрицей

$$\begin{pmatrix} p_{00,0} = 1 & p_{01,0} = 1 & p_{02,0} = 1 & p_{11,0} = 1 & p_{12,0} = a & p_{22,0} = 1 \\ p_{00,1} = 0 & p_{01,1} = 0 & p_{02,1} = 0 & p_{11,1} = 0 & p_{12,1} = b & p_{22,1} = 0 \\ p_{00,2} = 0 & p_{01,2} = 0 & p_{02,2} = 0 & p_{11,2} = 0 & p_{12,2} = c & p_{22,2} = 0 \end{pmatrix},$$

где

$$a, b, c \geq 0, \quad a + b + c = 1. \tag{6}$$

соответсвенно $F-$ КСО имеет вид

$$V_0 : \begin{cases} x'_0 = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + 2x_0x_1 + 2x_0x_2 + 2ax_1x_2 = 1 - 2(1-a)x_1x_2, \\ x'_1 = 2bx_1x_2, \\ x'_2 = 2cx_1x_2. \end{cases} \tag{7}$$

Неподвижная точка для $V$ определяется как решение уравнения $V(x) = x$.
Следующая теорема полностью описывает поведение траектории оператора (7).

**Теорема 1.** 1) *Для любых $a, b, c$ с условием (6) оператор (7) имеет единственную неподвижную точку* (1,0,0).

2) *Для любого $x^{(0)} \in S^2$ траектория $\{x^{(n)}\}$ стремится к неподвижной точке* $(1, 0, 0)$ *экспоненциально быстро* .

Доказательство. 1) Легко видеть, что решение уравнения $V_0(x) = x$, только $x = e_1 = (1,0,0)$ и $x = x^* = (x_0^*, x_1^*, x_2^*) = (\frac{2bc-b-c}{2bc}, \frac{1}{2c}, \frac{1}{2b})$, если $bc \neq 0$ и только $x = e_1$, если $bc = 0$. Заметим,что $x^* \notin S^2$. Действительно из $0 \leq \frac{1}{2b} \leq 1$ и $0 \leq \frac{1}{2c} \leq 1$ получим $b \geq \frac{1}{2}$ и $c \geq \frac{1}{2}$. Тогда из (6) имеем $b = c = \frac{1}{2}$, т.е. $x_1^* = x_2^* = 1$, это противоречит условию $x_0^* + x_1^* + x_2^* = 1$.

2) Для $x \in S^2$ обозначим $\varphi(x) = x_1x_2$. Мы имеем

$$\varphi(x^{(n)}) = \begin{cases} 0, \quad \text{если} \quad bc = 0, \\ (2bc)^{-1}(4bcx_1x_2)^{2^n}, \quad \text{если} \quad bc \neq 0. \end{cases} \tag{8}$$

Теперь оценим $4bcx_1x_2$. Имеем

$$0 \leq 4bcx_1x_2 \leq 4\frac{(b+c)^2}{4} \cdot \frac{(x_1+x_2)^2}{4} \leq \frac{1}{4}. \tag{9}$$

Из второго равенство (6) получим

$$x_1^{(n)} = 2b\varphi(x^{(n-1)}). \tag{10}$$

Из (7)-(10) имеем

$$\lim_{n\to\infty} x_1^{(n)} = \lim_{n\to\infty} x_2^{(n)} = 0.$$

Теорема доказана.

**Случай** $F-$ **КСО для** $m = 3$ Для $m = 3$, и $M = \{1\}, F = \{2,3\}$, $F-$ КСО имеет вид

$$V_1 : \begin{cases} x_0' = 1 - 2(1-a_0)x_1x_2 - 2(1-b_0)x_1x_3 \\ x_1' = 2a_1x_1x_2 + 2b_1x_1x_3, \\ x_2' = 2a_2x_1x_2 + 2b_2x_1x_3, \\ x_3' = 2a_3x_1x_2 + 2b_3x_1x_3, \end{cases} \tag{11}$$

где

$$a_i, b_i \geq 0, \quad a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = b_0 + b_1 + b_2 + b_3 = 1. \tag{12}$$

**Теорема 2.** 1) *Для любых $a_i, b_i$ с условием (12) оператор (11) имеет единственную неподвижную точку* (1,0,0,0).

2) *Для любого $x^{(0)} \in S^3$ траектория $\{x^{(n)}\}$ стремится к неподвижной точке $(1,0,0,0)$ экспоненциально быстро, т.е. оператор (11)регулярен.*

Доказательство. 1)Рассмотрим несколько случаев.
a)Пусть $a_1 = b_1 = 0$, остальные элементы матрицы удолетворяют условию (12).Тогда соответсвенно $F-$ КСО имеет вид

$$V_1 : \begin{cases} x_0' = 1 - 2(1-a_0)x_1x_2 - 2(1-b_0)x_1x_3 \\ x_1' = 0, \\ x_2' = 2a_2x_1x_2 + 2b_2x_1x_3, \\ x_3' = 2a_3x_1x_2 + 2b_3x_1x_3. \end{cases}$$

Решение уравнения $V_1(x) = x$, только лишь $e_1 = (1,0,0,0)$.

b)Пусть $a_2 = b_2 = 0$ остальные элементы матрицы удовлетворяют условию (12).Тогда легко видеть, что решение уравнения $V_1(x) = x$, только $e_1 = (1,0,0,0)$ и $x^* = (x_0^*, x_1^*, x_2^*) = (1 - \frac{2(1-b_0)}{2b_1b_3}, \frac{1}{2b_3}, 0, \frac{1}{2b_1})$, если $b_1b_3 \neq 0$ и только $x = e_1$, если $b_1b_3 = 0$. Заметим,что $x^* \notin S^3$. Действительно от $0 \leq \frac{1}{2b_1} \leq 1$ и $0 \leq \frac{1}{2b_3} \leq 1$ получим $b_1 \geq \frac{1}{2}$ и $b_3 \geq \frac{1}{2}$. Тогда из (12) имеем $b_1 = b_3 = \frac{1}{2}$ т.е. $x_1^* = x_3^* = 1$, что противоречит условию $x_0^* + x_1^* + x_2^* + x_3^* = 1$.
Аналогично доказывается случай $a_3 = b_3 = 0$.

c)Пусть $a_1 = a_2 = 0$, остальные элементы матрицы удовлетворяют условию (12).Тогда легко видеть, что решение уравнения $V_1(x) = x$, только $x = e_1 = (1,0,0,0)$ и

$$x = x^* = (x_0^*, x_1^*, x_2^*, x_3^*) =$$

$$= \left(1 - (x_1^* + x_2^* + x_3^*), \frac{\sqrt{b_3^2 + 4a_3b_2} - b_3}{4a_3b_2}, \frac{\sqrt{b_3^2 + 4a_3b_2} - b_3}{4a_3b_1}, \frac{1}{2b_1}\right)$$

Заметим,что $x^* \notin S^3$. Действительно от $0 \leq x_0 \leq 1$ получим

$$\left(\sqrt{b_3^2 + 4a_3b_2} - b_3\right)(b_1 + b_2) + 2a_3(1 - 2b_2) \leq 0.$$

Тогда из $0 \leq x_3 \leq 1$ и (11) имеем $1 - 2b_2 > 0$, т.е.

$$\left(\sqrt{b_3^2 + 4a_3b_2} - b_3\right)(b_1 + b_2) + 2a_3(1 - 2b_2) \leq 0$$

неравенство не имеет решения и следует $x^* \notin S^3$.
Аналогично доказываются случаи

$$a_1 = a_3 = 0, a_2 = a_3 = 0, b_1 = b_3 = 0, b_2 = b_3 = 0.$$

d)Пусть $a_1 = b_2 = 0$, остальные элементы матрицы удовлетворяют условию (12).Тогда ясно, что решение уравнения $V_1(x) = x$, только $x = e_1 = (1, 0, 0, 0)$ и

$$x = x^* = (x_0^*, x_1^*, x_2^*, x_3^*) = \left(1 - (x_1^* + x_2^* + x_3^*), \frac{1}{2a_2}, \frac{a_2 - b_3}{2a_3b_1}, \frac{1}{2b_1}\right)$$

Заметим,что $x^* \notin S^3$. Действительно, из $0 \leq x_0 \leq 1$ получим

$$(a_2 + b_1 - 2a_2b_1)a_3 + a_2(a_2 - b_3) \leq 0.$$

Тогда из $0 \leq x_2 \leq 1$ и (12) имеем $a_2 - b_3 \geq 0$ и из $(a_2 + b_1 - 2a_2b_1) \geq 0$, значит

$$\left(\sqrt{b_3^2 + 4a_3b_2} - b_3\right)(b_1 + b_2) + 2a_3(1 - 2b_2) \leq 0$$

неравенство не имеет решения и следует $x^* \notin S^3$.
Аналогично доказываются случаи

$$a_1 = b_3 = 0, a_2 = b_1 = 0, a_2 = b_3 = 0, a_3 = b_1 = 0, a_3 = b_2 = 0.$$

e)Пусть $a_i = b_i \neq 0$ и элементы матрицы удовлетворяют условию (12).Тогда соответсвенно $F-$ КСО имеет вид

$$V_1 : \begin{cases} x_0' = 1 + 2(a_0 - 1)x_1(x_2 + x_3), \\ x_1' = 2a_1x_1(x_2 + x_3), \\ x_2' = 2a_2x_1(x_2 + x_3), \\ x_3' = 2a_3x_1(x_2 + x_3). \end{cases}$$

Возьмем $y = x_2 + x_3$, тогда для решения уравнения $V_1(x) = x$ получим $e_1 = (0, 1, 0)$ и $x = x^* = (1 + \frac{a_0 - 1}{2(a_2+a_3)}, \frac{1}{2(a_2+a_3)}, \frac{1}{2a_1})$. Но $x^* \notin S^3$. Действительно, из $\frac{1}{2a_1} \geq 1$ и $\frac{1}{2(a_2+a_3)} \geq 1$ следует $\frac{1}{2} \leq a_1$ и $\frac{1}{2} \leq a_2 + a_3$, что противоречит условиям $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 1$ и $a_i = b_i \neq 0$.

f)Случай $a_1 \neq b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_3, a_i, b_i \neq 0$ доказывается аналогично.

h)Пусть $a_i b_i \neq 0, i = 1, 2, 3$ и элементы матрицы удолетворяют условию (12).Тогда соотвественно $F-$ КСО имеет вид

$$V_1 : \begin{cases} x_0' = 1 + 2(a_0 - 1)x_1x_2 + 2(b_0 - 1)x_1x_3, \\ x_1' = 2a_1x_1x_2 + 2b_1x_1x_3, \\ x_2' = 2a_2x_1x_2 + 2b_2x_1x_3, \\ x_3' = 2a_3x_1x_2 + 2b_3x_1x_3. \end{cases} \tag{13}$$

Легко видеть, что уравнение $V_1(x) = x$ имеет решение $e_1 = (1, 0, 0, 0, )$. Найдем второе решение системы. Для этого из третьего равенства системы

$$\begin{cases} x_0 = 1 + 2(a_0 - 1)x_1x_2 + 2(b_0 - 1)x_1x_3, \\ x_1 = 2a_1x_1x_2 + 2b_1x_1x_3, \\ x_2 = 2a_2x_1x_2 + 2b_2x_1x_3, \\ x_3 = 2a_3x_1x_2 + 2b_3x_1x_3, \end{cases} \tag{14}$$

имеем

$$x_2 = \frac{2b_2x_1x_3}{1 - 2a_2x_1}. \tag{15}$$

Вставим в последнее равенство системы и получим

$$x_3 = 2a_3x_1\frac{2b_2x_1x_3}{1 - 2a_2x_1} + 2b_3x_1x_3, \tag{16}$$

$x_3 = 0$ решение удовлетворяет (16), из (15) имеем решение $e_1 = (1, 0, 0, 0)$.

Пусть $x_3 \neq 0$. Тогда

$$1 = \frac{4a_3b_2x_1^2}{1 - 2a_2x_1} + 2b_3x_1$$

$$4(a_2b_3 - a_3b_2)x_1^2 - 2(a_2 + b_3)x_1 + 1 = 0. \tag{17}$$

Уравнение (17) имеет два решения , так как

$$D = 4(a_2 + b_3)^2 - 16(a_2b_3 - a_3b_2) = 4[(a_2 - b_3)^2 + 4a_3b_2] \geq 0 \tag{18}$$

$$x_{1,1}=\frac{1}{(a_2+b_3)+\sqrt{(a_2-b_3)^2+4a_3b_2}},x_{1,2}=\frac{1}{(a_2+b_3)-\sqrt{(a_2+b_3)^2+4a_3b_2}} \qquad (19)$$

Заметим, что если $a_2b_3-a_3b_2>0$, решение $x_1=x_{1,2}>0$, но из (15) следует

$$x_2=\frac{2b_2x_3}{b_3-a_2-\sqrt{(a_2-b_3)^2+4a_3b_2}}<0,$$

так как

$$b_3-a_2-\sqrt{(a_2-b_3)^2+4a_3b_2}<0.$$

Итак, можно рассмотреть только решение $x_1=x_{1,1}>0$. Ясно, что $x_1=x_{1,1}>0$, из (15) получим

$$x_2=\frac{2b_2x_3}{b_3-a_2+\sqrt{(a_2-b_3)^2+4a_3b_2}}. \qquad (20)$$

Второе уравнение системы (14) делим на $x_1$, предполагая, что $x_1\neq 0$ (если $x_1=0$, тогда получим решение $e_1$)

$$1=2a_1x_2+2b_1x_3. \qquad (21)$$

Из (20) и (21) находим

$$\begin{array}{l} x_0=1-x_1-x_2-x_3 \\ x_1=\frac{1}{(a_2+b_3)+\sqrt{(a_2-b_3)^2+4a_3b_2}} \\ x_2=\frac{b_2}{b_1(b_3-a_2+\sqrt{(a_2-b_3)^2+4a_3b_2}))+2a_1b_2} \\ x_3=\frac{b_3-a_2+\sqrt{(a_2-b_3)^2+4a_3b_2}}{2b_1(b_3-a_2+\sqrt{(a_2-b_3)^2+4a_3b_2})+4a_1b_2} \end{array}. \qquad (22)$$

Вводим обозначение

$$z=(a_2+b_3)+\sqrt{(a_2-b_3)^2+4a_3b_2}. \qquad (23)$$

Кроме того, имеет место неравенство $1<z<2$, неравенство $1<z$ следует из $x_1\in[0,1]$ и (22),(23). Если $z=1$, тогда получим точку $e_2=(0,1,0,0)$, легко видеть, что точка $e_2$ не удовлетворяет (14)
Докажем, что $z<2$. Пусть $z\geq 2$ из (23)

$$(a_2+b_3)+\sqrt{(a_2-b_3)^2+4a_3b_2}\geq 2$$

или

$$a_3b_2 - a_2b_3 \geq 1 - (a_2 + b_3),$$

что эквивалентно

$$(a_2 - 1)(b_0 + b_1) + (b_0 + b_1 + b_3 - 1)(a_0 + a_1) \geq 0$$

так как $(a_2 - 1) < 0$ и $(b_0 + b_1 + b_3 - 1) < 0$, это неравенство противоречит условию (12), тогда (22) имеет вид

$$\begin{array}{l} x_0 = 1 - \frac{1}{z} - \frac{2b_2}{2b_1(z-2a_2)+4a_1b_2} - \frac{z-2a_2}{2b_1(z-2a_2)+4a_1b_2} \\ x_1 = \frac{1}{z}, \quad x_2 = \frac{b_2}{b_1(z-2a_2)+2a_1b_2}, \quad x_3 = \frac{z-2a_2}{2b_1(z-2a_2)+4a_1b_2} \end{array} . \tag{24}$$

Из $x_0 \in [0, 1]$ имеем

$$(2b_1 + z - 2b_1z)(z - 2a_2) + 2b_2(2a_1 + z - 2a_1z) \leq 0. \tag{25}$$

В (25) выражения $(2b_1 + z - 2b_1z)$ и $(2a_1 + z - 2a_1z)$ положительны, потому что

$$2b_1(z - 1) \leq b_1^2 + (z - 1)^2$$

$$(2b_1 + z - 2b_1z) = z - 2b_1(z - 1) \geq z - b_1^2 - (z - 1)^2 \geq (z - 1) - (z - 1)^2.$$

Из $1 < z < 2$ следует $(z-1)-(z-1)^2 > 0$, аналогично $(2a_1+z-2a_1z) > 0$, значит, условие (25) не выполняется , значит решение $x^*$ не принадлежит симплексу $S^3$.
В случае $a_2b_3 - a_3b_2 = 0$ аналогично доказывается единственность неподвижной точки.

Докажем второй пункт теоремы 2
Для $x \in S^3$ определим

$$\varphi(x) = x_1x_2 + x_1x_3 \tag{26}$$

Используя (11),(12),(26) мы получим

$$x_k^{(n+1)} = 2a_kx_1^{(n)}x_2^{(n)} + 2b_kx_1^{(n)}x_3^{(n)} \leq 2x_1^{(n)}x_2^{(n)} + 2x_1^{(n)}x_3^{(n)} = 2\varphi(x^{(n)}), \tag{27}$$

где $k = 1, 2, 3$.

Теперь оценим $\varphi(x^{(n+1)})$:

$$\varphi(x^{(n+1)}) = x_1^{(n)}x_2^{(n)} + x_1^{(n)}x_3^{(n)} = x_1^{(n)}(x_2^{(n)} + x_3^{(n)}) \leq$$

$$\leq \frac{\left(x_1^{(n)}+x_2^{(n)}+x_3^{(n)}\right)^2}{4} = \frac{\left(1-x_0^{(n)}\right)^2}{4}. \tag{28}$$

Из (28)получим

$$\varphi(x^{(n+1)}) \leq 4\big(x_1^{(n)}\big)^2\left(\frac{(1-a_0)x_2^{(n)}+(1-b_0)x_3^{(n)}}{2}\right)^2$$

$$\leq \left(x_1^{(n)}(x_2^{(n)}+x_3^{(n)})\right)^2 = \left(\varphi(x^{(n)})\right)^2, \quad n \geq 0. \tag{29}$$

Заметим, что $\varphi(x^{(0)}) \leq \frac{1}{4}$. Таким образом, из (29) получаем

$$\varphi(x^{(n)}) \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{2^n}. \tag{30}$$

Из (27) и (30) следует ,что

$$\lim_{n\to\infty} x_k^{(n)} = 0, \quad \text{для} \quad \text{любых} \quad k=1,2,3,$$

т.е.

$$\lim_{n\to\infty} x^{(n)} = (1,0,0,0), \quad \text{для} \quad \text{любых} \quad x^{(0)} \in S^3.$$

Теорема доказана.

**Благодарность.**
Автор благодарит профессоров Ганиходжаева Р.Н. и Розикова У.А. за полезные дискуссии.

## Литература

1. Бернштейн С.Н., Решение одной математической проблемы связанной с теорией наследования, Уч. Зап. Научно-Исслед. каф. Укр. отд. Мат., **1** : 83-115 (1924).

2. Ганиходжаев Н.Н., Мухитдинов Р.Т., Об одном классе квази-вольтерровских операторов, Уз.М.Ж. №. 3-4: 65-69 (2003).

3. Ганиходжаев Р.Н., Квадратичные стохастические операторы, функция Ляпунова и турниры, РАН . Мат.Сб. **т.83.**№8: 121-140 (1992).

4. Ганиходжаев Р.Н., Карта неподвижных точек и функции Ляпунова для одного класса дисткретных динамических систем. Мат. Заметки **56**: 1125-1131 (1994).

5. Ганиходжаев Р.Н., Эшмаматова Д.Б. Квадратичные автоморфизмы симплекса и асимптотические поведение их траекторий . Владикавказ М. Ж. **8**: 12-28 (2006).

6. Kesten H. Quadratic transformations: a model for population growth I, II. Adv. Appl. Prob. №2: 1-82 and 179-228 (1970).

7. Lyubich Yu.I. Mathematical structures in population genetics. Biomathematics, **22,** Springer-Verlag, 1992.

8. Rozikov U.A., Shamsiddinov N.B. On non-Volterra quadratic stochastic operators generated by a product measure. ICTP preprint 2006, and arXiv:math.DS/0608201.

9. Rozikov U.A., Jamilov U.U. F-quadratic stochastic operators, arXiv:math.DS/0612225.

Бухарский государственный
университет

Дата поступления
22.01.07

Uzbek Mathematical
Journal, 2008,№2, pp.46-52

# Задача определения памяти в интегро-дифференциальном уравнении параболического типа

**Н.Х.Маматова**

Mazkur ish o‘ng tomoni integral hadli issiqlik o‘tkazuvchanlikning integro-differensial tenglamasini o‘rganishga bag‘ishlangan.

This paper is devoted to study of integro-differential equation.

Рассмотрим уравнение теплопроводности с интегральным членом в правой части

$$u_t - u_{xx} = \int\limits_0^t k(\tau)u(x, t-\tau)d\tau \quad x \in R\,, \quad t > 0 \tag{1}$$

Поставим следующую обратную задачу: определить функцию $k(t)$ из уравнения (1) при условии:

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in R. \tag{2}$$

по заданной информации

$$u|_{x=0} = f(t), \;\; t > 0. \tag{3}$$

Метод использованный в настоящей статье был применен в работе [1] к определению коэффициентов при младших членах в параболическом уравнении.

Будем считать, что заданные функции $\varphi$, $f$ достаточно гладкие. Введем в рассмотрение функцию $\omega = u_{txx}$. Дифференцируя уравнение (1) сначала по $t$, затем два раза по $x$ и используя условия (2), получим уравнение относительно функции $\omega$:

$$\omega_t - \omega_{xx} = k(t)\varphi'' + \int\limits_0^t k(\tau)\omega(x, t-\tau)d\tau, \qquad x \in R, \quad t > 0. \tag{4}$$

Условие при $t = 0$ для $\omega$ находим дифференцируя (1) два раза по $x$ и положив $t = 0$ :

$$\omega|_{t=0} = \varphi^{(IV)}, \qquad x \in R \tag{5}$$

а дополнительное условие при $x = 0$ дифференцируя (1) по $t$ и положив $= 0$ :

$$\omega|_{x=0} = f'' - k(t)\varphi(0) + \int\limits_0^t k(\tau)f'(t-\tau)d\tau, \qquad t > 0. \tag{6}$$

Здесь также использованы равенства (2), (3). Пусть выполнено условие согласование $\varphi(0) = f(0)$ и

$$|\varphi(0)| \geq \beta > 0 \tag{7}$$

Тогда в частности из соотношений (5), (6) нетрудно найти функцию $k$ при $t = 0$.

$$k(0) = \frac{1}{\varphi(0)} \left\{ \varphi^{(IV)}(x)|_{x=0} + f''(t)|_{t=0} \right\}.$$

Заменим равенства (4)-(6) системой эквивалентных интегральных уравнений второго рода относительно функций $\omega$, $k$. Из уравнения (4) при условии (5) следует

$$\omega(x,t) = \psi(x,t) + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_R G(x-\xi, t-\tau)[k(\tau)\varphi''(\xi) +$$

$$+ \int\limits_0^\tau k(\alpha)\omega(\xi, \tau-\alpha)d\alpha]d\xi. \tag{8}$$

Здесь

$$\psi(x,t) = \int\limits_R G(x-\xi,t)\varphi^{(IV)}(\xi)d\xi, \quad G(x-\xi,t-\tau) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi(t-\tau)})} e^{\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}\right]}$$

- фундаментальное решение уравнения $\omega_t = \omega_{xx}$.

Пологая в (8) $x = 0$ и учитывая (6), получим уравнение относительно $k(t)$ :

$$k(t) = F_0(t) + \frac{1}{\varphi(0)} \int\limits_0^t k(\tau)f'(t-\tau)d\tau -$$

$$-\frac{1}{\varphi(0)}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_R G(\xi,t-\tau)[k(\tau)\varphi''(\xi)+\int\limits_0^\tau k(\alpha)\omega(\xi,\tau-\alpha)d\alpha]d\xi,$$

где

$$F_0(t)=\frac{1}{\varphi(0)}[f''(t)-\int\limits_R G(\xi,t)\varphi^{(IV)}(\xi)d\xi]. \tag{9}$$

Обозначим через $B(R)$ и $B(D_T)$ пространства непрерывных и ограниченных в $R$ или соответственно в полосе $D_T=\{x\in R, 0<t<T\}$ функций с нормой

$$\|\,\varphi\,\|_{B(R)}=\sup_{x\in R}|\varphi(x)|\ \ ,\ \ \|f\|_{B(D_T)}=\sup_{(x,t)\in D_T}|f\,(x,t)|\ \ ,$$

а $B^{2,1}(D_T)$ - пространство непрерывных и ограниченных в $D$ вместе со своими частными производными до второго порядка включительно по $x$ и имеющая одну ограниченную производную по $t$ функций.

Интегральное уравнение (8) при известной функции $k(t)$ решает так называемую прямую задачу, заключающейся в определении ограниченного решения удовлетворяющего уравнению (4) при начальным условии (5).

**Лемма.** *Пусть* $(\varphi'''(x),\varphi(x)^{(IV)})\in B(R)$, $k(t)\in B(o,T)$. *Тогда существует классическое решение прямой задачи (4), (5) принадлежащее* $B(D_T)$.

Для доказательства леммы перепишем уравнение (8) в следующем виде.

$$\omega(x,t)=(x,t)+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_o^t d\tau\int\limits_R d\,\xi\int\limits_0^\tau e^{-\xi^2}k(\alpha)\,\omega(x+2\xi\sqrt{t-\tau},\ \ \tau-\alpha)d\alpha$$

$$\Phi(x,t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_R e^{-\xi^2}\varphi^{(IV)}(x+2\xi\sqrt{t})d\xi+ \tag{10}$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_R e^{-\xi^2}\varphi''(x+2\xi\sqrt{t-\tau})k(\tau)d\xi.$$

Построим в области $D_T$ процесс последовательных приближений.

$$\omega_0(x,t)=(x,t)$$

$$\omega_n(x,t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_R e^{-\xi^2}d\xi\int\limits_0^\tau k(\alpha)\omega_{n-1}(x+2\xi\sqrt{t-\tau},\ \tau-\alpha)d\alpha\ \ n=1,2,....$$

При выполнении условий леммы в [2, стр. 380-384] доказано, что $\omega_0(x,t)\in B^{2,1}(D_T)$. Предположим, что $\omega(x,t)\in B^{2,1}(D_T)$ и докажем принадлежность функции $w_n(x,t)$ этому классу.

Поскольку функция $V(x,t)=\int\limits_0^t k(\alpha)\omega(x,t-\alpha)d\alpha$ имеет в $D_T$ непрерывную производную $V_x$ и $|V|+|V_x|\le const$ в $D_T$, то функция

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_R e^{-\xi^2}d\xi\int\limits_0^\tau k(\tau)\omega(x+2\xi\sqrt{t-\tau},\tau-\alpha)d\alpha$$

имеет непрерывную производную по пространственной переменной на множестве $\{(x,t)\in D_T, 0<\tau\le t\}$. Следовательно, функция $\omega(x,t)$ имеет непрерывную на $D_T$ производную $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\omega$ используя равенство $\frac{\partial}{\partial x}V(x+2\xi\sqrt{t-\tau},\tau)=\frac{1}{2\sqrt{t-\tau}}\frac{d}{d\xi}V(x+2\xi\sqrt{t-\tau},\tau)$, имеем

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_R e^{-\xi^2}\ V_x\left(x+2\xi\sqrt{t-\tau};\tau\right)d\xi=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\int\limits_R e^{-\xi^2}V_\xi(x+2\xi\sqrt{t-\tau},\tau)d\xi=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\int\limits_R e^{-\xi^2}\xi\,V(x+2\xi\sqrt{t-\tau},\tau)d\xi. \qquad (11)$$

Так как $\left|e^{-\xi^2}\xi V_x(x+2\xi\sqrt{t-\tau},\tau)\right|\le|\xi|\,e^{-\xi^2}\ \parallel V_x\|_{\beta(D_T)}$, то функция
$\int\limits_R e_\xi^{-\xi^2}V(x+2\xi\sqrt{t-\tau},\tau)d\xi$ имеет первую производную по $x$, принадлежащую пространству$B\left\{(x,t)\in D_T,\quad 0<\tau\le t\right\}$. Тогда из (11) вытекает, что функция $\omega\left(x,t\right)$ имеет все производные по х до второго порядка включительно, непрерывные в $D$, причем

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\int\limits_R e^{-\xi^2}\xi\omega_x(x+2\xi\sqrt{t-\tau},\tau)d\xi.$$

Непрерывность $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\omega_n$ доказывается аналогично [2].

Составим ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\ \omega_n(x,t)$ и обозначая $\|k\|_{B(D_T)} = k_0$, $\left\|\varphi^{(IV)}\right\|_{B(R)} = \rho_0$, $\|\varphi''\|_{B(R)} = \rho_1$, оценим $\omega_n$ в $D_T$, $n = 0, 1, 2, ...$.

Из (10) нетрудно получить оценку

$$\|\omega_n\|_{B(D_T)} \leq \rho_0 k_0 \frac{t^{2n}}{(2n)!} + \rho_1 k_0^{n+1} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Учитывая это найдем, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\omega_n$ мажорируется сходящимся числовым рядом $P_1 \sum\limits_{n=0}^{\infty} k_0^{n+1}\frac{T^{2n+1}}{(2n+1)!} + \rho_0 ch(\sqrt{k_0}T)$

Отсюда следует, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\omega_n$ в области DT сходится равномерно. Так как $\omega_n(x,t) \in B^{2,1}\left(D_T\right)$, то сумма ряда обладает таким же свойством, и она является решением задачи (4), (5).

Перейдем к исследованию обратной задачи. Запишем систему интегральных уравнений (8), (9) в операторном виде

$$g = Ag, \tag{12}$$

определив $A = (A_1, A_2)$ правыми частями этих уравнений, где $g = (g_1, g_2) = (\omega(x,t), k(t))$.

Пусть $m(h)$ - множество функций $g(x,t)$ удовлетворяющих при некотором $h > 0$ следующем двум условиям:

1) $g(x,t) \in B(D_h)$, $0 < h \leq T$,

2)$\|g - g_0\|_{B(D_h)} \leq \|g_0\|_{B(D_T)}$,

$$g_0(x,t) = (g_{01}, g_{02})(x,t) = (\psi, F_0)(x,t),$$

$$\|g_0\|_{\beta(D_T)} = \max_{1\leq i\leq 2}\|g_{0_i}\|_{B(D_T)}.$$

**Теорема.** *Пусть*

$$\{\varphi', \varphi'', \varphi^{(IV)}\} \in B(R),\quad \{f', f''\} \in B(D_T),\quad \rho = \max\{\|\varphi'\|_{B(R)}\, \|\varphi''\|_{B(R)},$$

$$\left\|\varphi^{(IV)}\right\|_{B(R)},\ \|f'\|_{B(D_T')}, \|f''\|_{B(D_T')},$$

*и выполнены условия (7). Тогда существует достаточно малое число $h$ такое что во множестве $m(h)$ существует единственное решение уравнения (12).*

Покажем, что при достаточно малых $h$ оператор $A$ от отображает множество $m(h)$ в себя и является оператором сжатия. В самом деле, для $g \in m(h)$ справедливо неравенство

$$\|g\|_{B(D_h)} \leq 2\,\|g_0\|_{B(D_h)}\,.$$

С другой стороны проведя некоторые оценки, находим $\|A_1 g - g_0\|_{B(D_h)} \leq 2\varepsilon(\rho h + \varepsilon h^2)$,

$$\|A_2 g - g_{02}\|_{\beta(D_h)} \leq \frac{2\varepsilon}{\beta}\left(4\rho h + 2\varepsilon h^2\right), \tag{13}$$

где для простоты введено обозначение $\varepsilon = \|g_0\|_{\beta(D_h)}$. В последних неравенствах использована оценка

$$\left| \int\limits_0^t \frac{d\tau}{2\,(t-\tau)} \int (x-\xi) G(\xi,\, t-\tau) d\xi \right| \leq \sqrt{\frac{t}{\pi}}.$$

Из неравенств (13) легко следует, что для

$$h < h^* = \min(\frac{1}{2\varepsilon}\sqrt{\rho^2 + 2\varepsilon} - \rho, \frac{1}{2\varepsilon}\sqrt{4\rho^2 + 2\varepsilon\beta} - 2\rho)$$

оператор $A$ переводит множество $m(h)$ в себя. Далее, пусть $g(x,t) \in m(h), h \leq h^*$. Используя очевидные неравенства

$$\left| g_k^{(1)} g_s^{(1)} - g_k^{(2)} g_s^{(2)} \right| \leq \left| g_k^{(1)} - g_k^{(2)} \right| \left| g_s^{(1)} \right| + \left| g_k^{(2)} \right| \left| g_s^{(1)} - g_s^{(2)} \right| \leq$$

$$\leq 4\varepsilon \left\| g^{(1)} - g^{(2)} \right\|_{B(D_h)},$$

легко находим

$$\left\| A g^{(1)} - A g^{(2)} \right\|_{B(D_h)} \leq \frac{h}{h^*} \left\| g^{(1)} - g^{(2)} \right\|_{B(D_h)}.$$

Таким образом, при $h < h^*$ оператор  реализует сжатое отображение множество $m(h)$ в себя. Тогда, как следует из теоремы Банаха в $m(h)$ существует единственное решение уравнение (12). Следовательно, решая систему (7), (8), например, методом последовательных приближений (теорема Банаха гарантирует ее сходимость к решению) однозначно найдём функции $\omega(x,t), k(\bar{x},t), k$ принадлежащие множествам $B(D_h)$ и $B(D_{h'})$ соответственно.

**Литература**

1. Безнощенко Н.Я. Об определении коэффициента в параболическом уравнении. Дифференциальные уравнения, 1974, вып. 10, №1, С.24-35.

2. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М. Наука, 1983.

3. Романов В.Г. Обратные задачи для дифференциальных уравнений. Новосибирск: Издательство Новосибирск. Университета. 1973.

Бухарский государственный университет

Дата поступления 03.07.06

Uzbek Mathematical
Journal, 2008,№2, pp.53-60

УДК 513.8

# Топология слоений, порожденных поверхностями уровня

**Г.Каипназарова, А.Нарманов**

Maqolada qatlamalar nazariyasida uchraydigan sinfga tegishli funksiyalar sath sirtlari strukturasi o‘rganilgan.Bu sinfga tegishli funksiyalar sath sirtlari hosil qiluvchi qatlamalarning to‘liq klassifikasiyasi olingan.

In this paper it is studied the structure of level sets of the some class of functions which arise in the foliation theory. It is obtained full classification of foliations, which are generated by level surfaces of functions for this class.

В монографии [1] изучены функции, для которых длина градиента постоянна на компонентах связности каждого множества уровня. В [1] доказано, что если функция $f : M \to R^1$ обладает этим свойством, то множества уровней образуют риманово слоение на многообразии $M$(при предположении, что функция $f$ не имеет критических точек). В работе [2] дана классификация множества уровней таких функций в случае $M = R^2$. В данной работе мы изучим структуру множества уровней этих функций $f : R^n \to R^1$ для $n \geq 2$ при предположении, что каждая компонента связности множества критических точек является либо точкой, либо регулярной поверхностью и изолирована от других компонент.

**Теорема-1.** Пусть $f \in C^2(R^n, R^1)$ и длина градиента функции $f$ постоянна на компонентах связности множества уровня $L_c = \{x : f(x) = c\}$ для каждого $c \in R^1$. Тогда поверхности уровня функции $f$ образуют слоение $F$, которое имеют один из следующих $n$ типов:

1) Слоение $F$ состоит из параллельных гиперплоскостей;

2) Слоение $F$ состоит из концентрических гиперсфер и точки (центр гиперсфер);

3) Слоение $F$ состоит из концентрических цилиндров вида $S^k \times R^{n-k-1}$

и сингулярного слоя $R^{n-k-1}$ (которое возникает при вырождении сфер

в точку), где $1 \leq k \leq n-2$

Теорема 1 для $n = 2$ доказана в работе [2]. Там показано, что слоение $F$ имеет один из двух типов:

1) Если функция $f$ не имеет критических точек, или же каждая компонента связности множества критических точек является регулярной кривой, то слоние $F$ состоит из параллельных прямых.

2) Если функция $f$ имеет изолированную критическую точку, то слоение $F$ состоит из концентрических окружностей и точки( центр окружностей)

Сначала докажем следующую вспомогательную теорему.

**Теорема-2.** Пусть $L$-регулярная поверхность размерности $r$, которая является замкнутым подмножеством $R^n$, где $1 \leq r \leq n-1$. Тогда если нормальные плоскости проходящие через различные точки $L$ не пересекаются, то $L$ является $r$ - мерной плоскостью.

**Замечание.** Под регулярной поверхностью размерности $r$ понимается гладкое многообразие размерности $r$ без края.

Доказательство. Пусть $q \in L$, $T_qL$- касательная плоскость $L$ в точке $q$ ,$N_qL$- ортогональное дополнение $T_qL$, т.е. нормальная плоскость. Пусть $l(s)$-нормальная прямая $L$, проходящая через точку $q$ при $s = 0$, и параметризованная длиной дуги, П- гиперплоскость проходящая через точку $q$, перпендикулярная к $l(s)$. Ясно,что касательная плоскость $T_qL$ лежит в П,плоскость П разделит пространство $R^n$ на два полупространства. Полупространство, которое содержит точки $l(s)$ для $s > 0$, обозначим через $R^n_+$, а другое полупространство соответственно через $R^n_-$. Рассмотрим расстояние от точки $p = l(s)$ до поверхности $L$ при фиксированном $s > 0$. Так как $L$ является замкнутым подмножеством, а $R^n$ полно, существует ближайшая точка $p_s$ поверхности $L$ к точке $l(s)$, т.е. $|pp_s| \leq |pr|$ для всех $\tau \in L$, где $p = l(s)$, $|pq|$-растояние между точками $p$ и $q$. Тогда как известно, что прямая, проходящая через точки $p$ и $p_s$, является ортогональной к $L$ в точке $p_s$, т.е. точка $p$ лежит на нормали поверхность $L$, проходящей через точку $p_s$[3,стр.93]. Если точка $p_s$ отлична от $q$ , то мы получим, что нормальные плоскости $N_qL$ и $N_{p_s}L$ пересекаются в точке $p = l(s)$, что противоречит условию теоремы. Таким образом для точки $p = l(s)$ единственной ближайшей точкой $L$ является точка $q$ и поэтому шар $D^n_s$ с центром в точке $l(s)$ радиуса $r = s$ не пересекается с поверхностью $L$. Более того, семейство концентрических шаров $D_s^n$ с центром в точке $l(s)$ радиуса $r = s$, при $s > 0$, покрывает полупространство $R_+^n$. Действительно, если $\tau \in R_+^n$- отличная от точек $l(s)$, то множество равноудаленных точек от точек $q$ и $\tau$ является гиперплоскостью $\Pi^\tau$, проходящей через середину отрезка $q\tau$, перпендикулярна к прямой $q\tau$. Так как $l(s)$ перпендикулярна к $\Pi$, она не параллельна плоскости $\Pi^\tau$. Следовательно, плоскость $\Pi^\tau$ пересекает нормальную прямую $l$ в некоторой точке $l(s_\tau)$. Отсюда следует, что точка $\tau$ лежит на сфере $S_r$ с центром в точке $l(s_\tau)$ радиуса $r = s_\tau$. Следовательно, $\tau \in D_s^n$ при $s > s_\tau$. Таким образом полупространство $R_+^n$ является объединением шаров $D_r^n$ с центром в точке $l(s)$ радиуса $r = s$, причем каждый шар $D_r^n$ не содержит точек поверхности $L$. Аналогично доказывается, что полупространство $R^n$- также несодержит точек поверхности $L$. Следовательно, поверхность $L$ содержится в плоскости $\Pi$.

Пусть $e_1, e_2, ..., e_k$, где $k = n - r$, ортонормальный базис нормальной плоскости $N_qL$, а $\Pi_1, \Pi_2, ..., \Pi_k$- гиперплоскости, проходящие через точку $q$ перпендикулярно к векторам $e_1, e_2, ..., e_k$ соответсвенно. Если через $l(s)$ обозначим нормаль, параллельной к вектору $e_i$, то по выше доказанному получим, что поверхность $L$ содержится в каждой из гиперплоскостей $\Pi_i$. Следовательно, она лежит в их общей части. Поскольку их пересечения совпадает с касательной плоскости $T_qL$, поверхность $L$ лежит в своей касательной плоскости. В силу того, что $L$ является замкнутым множеством, $L$ совпадает со своей касательной плоскостью. Теорема доказана.

Доказательства теоремы-1 разделим на несколько пунктов.

**A.** Функция $f$ не имеет критических точек. В работе [2] доказано, что если $|gradf| = const$ на компонентах связности каждой поверхности уровня, то градиентные линии функции $f$, т.е. траектории системы

$$\dot{x} = gradf(x), x \in R^n \tag{1}$$

имеют нулевую кривизну. Поэтому, в силу того функция $f$ не имеет критических точек, все градиентные линии являются прямыми. Пусть $L_0 = \{x \in R^n : f(x) = c_0\}$- одна из поверхностей уровня. Докажем, что она является гиперплоскостью. В силу того, что каждая градиентная линия явлется прямой, каждая нормаль поверхности $L_0$ как прямая совпадает с градиентной линией, и в силу единственности решения системы (1) нормали проведенные из различных точек поверхности $L_0$ не пересекаются. Так как $L_0$ является регулярной поверхностью и является замкнутым множеством,по теореме-2 поверхность $L_0$ является гиперплоскостью. Отсюда следует, что все градиентные линии параллельны, а поверхности уровня являются параллельными плоскостями.

**B.** Функция $f$ имеет изолированную критическую точку $O$. Пусть $V$ окрестность точки $O$, в которой нет критических точек. Если расстояние от точки $O$ до точки $q \in V$ равно расстоянию от $O$ до поверхности $L_q$, то отрезок $Oq$ перпендикулярен $L_q$ [3,стр.93]. Здесь $L_q$-поверхность уровня, проходящая через точку $q$. В силу того, что $L_q$-замкнутое подмножество $R^n$, существует точка из $L_q$, ближайшая к $O$. Неограничивая общности будем считать, что $q$ является точкой $L_q$, ближайшей к $O$. Тогда градиентная линия $\gamma(s,q)$, выходящая из $q$ при $s=0$, лежит на прямой $Oq$, так как она имеет нулевую кривизну. Будем считать, что $\gamma(s,q)$ параметризована с помощью длины дуги. В силу того, что длина отрезка $Oq$ конечна, существует конечное число $s_0$ такое, что $\gamma(s,q) \to O$ при $s \to s_0$. Для определенности будем считать, что $s_0 < 0$. Пусть $q' \in L_q$-произвольная точка, $\varphi : [0,1] \to L_q$ гладкая кривая такая, что $\varphi(0) = q$, $\varphi(1) = q'$. По теореме Тондера поток единичного градиентного поля $X = \frac{gradf}{|gradf|}$ переводит поверхность уровня в поверхность уровня [1,стр107,теорема 8.9]. Поэтому для каждого $s \in (s_0, 0]$ кривая $t \to \gamma(s, \varphi(t))$ лежит на одной поверхности уровня. Здесь $\gamma(s,\varphi(t))$-градиентная линия, выходящая из $\varphi(t)$ при $s=0$, и параметризованная с помощью длины дуги. Расстояние от $\varphi(t)$ до $\gamma_s(s,\varphi(t))$ не зависит от $t$ и равно $|s|$, поэтому точки $\gamma_s(\varphi(t))$ имеют предел $\psi(t)$ при $s \to s_0$. Так как сходимость равномерная, $\psi(t)$ является непрерывной кривой, причем $\psi(0) = O$. В силу того, что $O$ -изолированная критическая точка и $f(\psi(t)) = f(O)$, мы получим, что $\psi(t) = O$ для всех $t \in [0,1]$. Отсюда следует, что все точки $L_q$ находятся на одинаковом расстоянии от $O$, т.е. $L_q$ лежит на сфере $S_R$ с центром в точке $O$ радиуса $R = |Oq|$. Так как в окрестности каждой своей точки $L_q$ является графиком некоторой функции, $L_q$ одновременно является замкнутым и открытым подмножеством $S_R$. В силу связности $S_R$ она совпадает с $S_R$. Таким образом в окрестности $V$ точки $O$ поверхности уровня являются сферами с центром в точке $O$ и для каждой точки $p \in L_q$, где $q \in V$, градиентная линия $\gamma(s,p)$ стремится к $O$ при $s \to s_0$. Если $\gamma(s,p)$ стремится к другой критической точке $O'$ при $s \to s'$ $(s' > 0)$, то поверхность уровня $L'$,проходящая через точку $O'$, как предел сфер также является сферой с центром в точке $O$ радиуса $s' - s_0$. Так как касательный вектор $\dot{\gamma}(s,p)$ является единичным вектором постоянного направления, мы можем доопределить $\gamma(s,p)$ в точке $s = s'$ полагая $\gamma(s',p) = O'$. В этом доопределении касательный вектор $\dot{\gamma}(s',p) = \dot{\gamma}(0,p)$ является ортогональным к $L'$. Доопределяя $\gamma(s,p)$ в критических точках мы получим, что $\gamma(s,p)$ определена для всех $s \in (s_0, \infty)$, т.е $\gamma(s,p)$ является лучом $Op$ без точки $O$, ортогональным ко всем поверхностям уровня. Отсюда вытекает, что все поверхности уровня являются сферами с центром в точке $O$.

**C.** Пусть $f$ имеет поверхность критического уровня $L$, размерность которой равна $r$, где $1 \leq r \leq n-2$, и не имеет поверхностей критического уровня размерности меньше чем $r$. В частности $f$ не имеет изолированных критических точек. Пусть $O \in L$, П- нормальная плоскость $L$ в точке $O$. Покажем, что градиентные линии, стремящиеся к $O$, лежат в нормальной плокости П. По предположению существует окрестность $V$ точки $O$ в $R^n$, не содержащая критических точек, не принадлежащих $L$. Пусть для регулярной точки $q \in V$ расстояние $|Oq|$ равно расстоянию от $O$ до $L_q$. Тогда отрезок $Oq$ перпендикулярен $L_q$, т.е. параллелен градиенту функции $f$. Следовательно, градиентная линия $\gamma(s,q)$ выходящая из $q$ при $s = 0$ лежит на прямой $l$, проходящей через точки $O$ и $q$. Так как длина отрезка $Oq$ конечна, существует конечное число $s_0$ такое, что $\gamma(s,q) \to O$ при $s \to s_0$ (Здесь $\gamma(s,q)$ параметризована, как и выше, длиной дуги). Не ограничивая общности будем считать, что $s_0 < 0$ (это означает, что $f(O) < f(q)$). Для каждой точки $s \in (s_0, 0]$) расстояние от $q$ до $L_s$ равно расстоянию от $q$ до $\gamma(s,q)$ (Здесь $L_s$-поверхность уровня, проходящая через точку $\gamma(s,q)$). Действительно, если расстояние от $q$ до $L_s$ равно расстоянию от $q$ до $p' \in L_s$, то отрезок $qp'$ перпендикулярен $L_s$. Если $\gamma(s',p')$- градиентная линия, выходящая из $p'$ при $s' = 0$ и параметризованная длиной дуги, то в силу того, что поток единичного градиентного поля переводит поверхность уровня в поверхность уровня, имеет место $\gamma(s',p') = q$ при $s' = -s$. Отсюда следует, что точка $p'$ лежит на градиентной линии $\gamma(s,q)$. Так как градиентная линия пересекает каждую поверхность уровня только один раз, точка $p'$ совпадает с точкой $\gamma(s,q)$. Таким образом, при каждом $s \in (s_0, 0]$ расстояние от $q$ до $L_s$ равно $|s|$. Отсюда следует, что расстояние от $q$ до $L$ равно $|s_0|$, т.е. расстоянию от $q$ до $O$. Действительно, если расстояние от $q$ до $L^0$ равно расстоянию от $q$ до точки $p' \in L$, то отрезок

$qp'$ перпендикуляpен к $L$ в точке $p'$. Пусть $\gamma'(s)$ параметризация отрезка $qp'$ с помощью длины дуги, $\gamma'(0) = q, \gamma'(s'_0) = p'$. Так как точка $q$ достаточно близка к $O$, то линия $\gamma'$ трансверсальна к поверхностям уровня, т.е. она пересекает поверхности уровня по одному разу. Если $\gamma'(s') \in L_s$, то $s' \leq s$, так как растояние от $q$ до $L_s$ равно $s$. Поэтому $s'_0 \leq s_0$, т.е.точка $O$ является точкой $L$, ближайшей к $q$, и следовательно, прямая $Oq$ перпендикулярна к $L$ в точке $O$. Таким образом, для каждой точки $O \in L$, все градиентные линии, стремящиеся к $O$, лежит в нормальной плоскости П.

Пусть $V_0$- окрестность точки $O$ в П, в которой нет критических точек функции $f$, отличных от $O$, т.е. $V_0 = V \cap \Pi, q \in V_0$-регулярная точка функции $f$, $L_q$- поверхность уровня, проходящая через точки $q$, а $q'$-ближайшая точка поверхности $L_q$ к точке $O$. Как показали выше, точка $q'$ и градиентная линия $\gamma(s, q')$ лежит на нормали поверхности $L$, проходящей через $O$ и $\gamma(s, q')toO$ при $s \to s_0$, где $s_0$-конечное число, $|s_0| = |Oq'|$. Для определенности будем считать, что $s_0 < 0$ Если $p$ произвольная точка поверхности $L_q$, то рассмотрим гладкую кривую $v : [0, 1] \to L_q$, такую, что $v(0) = q', v(1) = p$. Обозначим через $\gamma(s, v(t))$- градиентную линию, выходящую из $v(t)$ при $s = 0$ и параметризованную длиной дуги. Тогда по теореме Тондера для всех $s \in [0, 1]$ кривая $t \to \gamma(s, v(t))$ лежит на одной поверхности уровня, и точки $\gamma(s, v(t))$ имеет предел при $s \to s_0$. Если $w(t) = \lim\limits_{s \to s_0} \gamma(s, v(t))$, то кривая $w$ лежит на $L$, и расстояния между точками $w(t)$ и $v(t)$ равно $|Oq'|$. Таким образом все точки поверхности $L_q$ находятся на одинаковом расстоянии от $L$, равным расстоянию $|Oq'| = s_0$. Отсюда следует, что луч $Oq$ пересекает поверхность $L_q$ ортогональна в точке $q$(т.к.градиентная линия $\gamma(s, q)$ лежит на $Oq$), в частности $|Oq| = |Oq'|$. Луч $Oq$ также пересекает ортогональна $k - 1$ мерную сферу $S_r \subset \Pi$ с центром в точке $O$ радиуса $r = |Oq'|$, где $k = n - r$. Отсюда вытекает, что сфера $S_r$ лежат в $L_q$. Действительно, если $p \in S_r$- произвольная точка сферы, $v(t)$- гладкая кривая, соединяющая точки $p$ и $q$, то касательный вектор $v'(t)$ ортогонален к лучам $Ov(t)$ и следовательно, к градиентной линии функции $f$ , выходящей из точки $v(t)$. Следовательно, что $v(t)$ касателен к поверхности уровня и сфера $S_r$ лежит в $S_q$. Таким образом, пересечение поверхности $L_q$ с плоскостью П, является $k - 1$ мерной сферой. Если луч $Oq$ встретит критическую точку $O'$,то сфера $S'_r \subset \Pi$ с центром в точке $O$ радиуса $r' = |OO'|$ как предел сфер, целиком лежащих на поверхностях уровня, лежит также одной поверхности уровня $L'$. Так как длина градиента постоянна на поверхностях уровня, поверхность $L'$ состоит из критических точек. Отсюда вытекает, что луч $Oq$ пересекает все поверхности уровня ортогональна, и пересечение всех поверхностей уровня с плоскостью $\Pi$ являются $k-1$ мерными сферами(кроме самой поверхности $L$), в частности все поверхности уровня кроме $L$ является $n-1$ мерными поверхностями. Теперь отметим, что нормальные плоскости поверхности $L$, проведенные из различных точек, не пересекается. Действительно, если две нормальные плоскости $\Pi$ и $\Pi'$, проведенные из точек $A', A'' \in L$, имеют общую точку $p$, то лучи $A'p$ и $A''$ ортогональны к $n-1$ мерной поверхности $L_p$, и следовательно, эти лучи лежат на одной нормали т.е. $A' = A''$. Таким образом нормальные плоскости поверхности $L$ не пересекаются. По теореме 2 поверхность $L$ является $r$- мерной плоскостью. Следовательно, все поверхности уровня, кроме $L$ являются цилиндрами вида $S^{k-1} \times R^r$.

**D.** Теперь рассмотрим случай, когда каждая компонента связности множества критических точек является $n-1$-мерной поверхностью. Пусть $p_0$- критическая точка, $L^0$- компонента связности множества критических точек, содержащая точку $p_0$. По предположению $L^0$ является регулярной поверхностью. Поэтому в каждой еҷ точке определена нормаль. Обозначим через $l$ нормаль поверхности $L^0$ в точке $p_0$ и покажем, что прямая $l$ пересекает ортогонально все поверхности уровня. По предположению $L^0$ изолирована от других компонент связности множества критических точек, поэтому существует открытое множество $V$, содержащее $L^0$ и не содержащее критических точек, не принадлежащих $L^0$. Пусть $q \in V \setminus L^0$ и расстояние $|p_0 q|$ равно расстоянию от точки $p_0$ до $L_q$. Тогда, как показано в пункте C, градиентная линия $\gamma(s, q)$, выходящая из $q$ при $s = 0$, лежит на $l$. Следовательно прямая $l$ пересекает $L_q$ в точке $q$ ортогонально. Поскольку расстояние между точками $p_0$ и $q$ ограничено, существует конечное число $s_0$ такое, что $\gamma(s, q) \to p_0$ при $s \to s_0$. Здесь, как и выше, $\gamma(s, q)$- параметризована длиной дуги. Для определенности будем считать, что $s_0 < 0$. Если $l$ встречает критическую точку $p$ "справа"от $q$, т.е. $\gamma(s, q) \to p$ при $s \to s'$, где $s' > 0$, то линия $\gamma(s, q)$ лежит на нормали $l_p$ поверхности $L_p$ в точке $p$. Так как $\gamma(s, q)$ лежит также на прямой $l$, то эти прямые совпадают. Поэтому $l$ пересекает $L_p$ в точке $p$ ортогонально. Таким образом двигаясь по $l$ "направо"и "налево"и повторяя рассуждения, приведенные выше мы получим, что $l$ пересекает поверхности уровня ортогонально. Теперь нам осталось заметить, что все нормали поверхности $L$ не пересекается. Следовательно, по теореме-2 все поверхности уровня является гиперплоскостями.

**Литература**


1. Tondeur Ph.Foliations on riemannian manifolds.Springer- Verlag,1988
2. Каипназарова Г. О линиях уровня некоторых функций.Узбекский математический журнал,2004,№2,с.32-37.
3. Погорелов А.В Дифференциальная геометрия. М.Наука,1974,176с.


Национальный Университет
Узбекистана им. М.Улугбека

Дата поступления
06.05.07

Uzbek Mathematical
Journal, 2008,№2, pp.61-73

УДК 517.54

# Норма функционала погрешности квадратурной формулы типа Эйлера - Маклорена в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$

**Ф.А.Нуралиев**

Bu ishda $L_2^{(m)}(0,1)$ fazosida bir optimal kvadratur formula hatolik funksionali normasining kvadrati hisoblangan.

In this paper square of the norm of error functional of the optimal quadrature formula in the $L_2^{(m)}(0,1)$ space is calculated.

Рассмотрим квадратурную формулу вида

$$\int_0^1 \varphi(x)dx \cong \sum_{\beta=0}^{N} (C_0[\beta]\varphi[\beta] + C_1[\beta]\varphi'[\beta]) \tag{1}$$

здесь $C_0[0] = C_0[N] = h/2$, $C_0[\beta] = h$ при $\beta = \overline{1, N-1}$, $[\beta] = h\beta$, $N = 1, 2, 3, ...$, $h = 1/N$, $C_1[\beta]-$ коэффициенты квадратурной формулы (1), $\varphi(x)-$ элемент пространства $L_2^{(m)}(0,1)$. Погрешностью квадратурной формулы (1) называется разность

$$(\ell, \varphi) = \int_0^1 \varphi(x)dx - \sum_{\beta=0}^{N} (C_0[\beta]\varphi[\beta] + C_1[\beta]\varphi'[\beta]) = \int \ell(x)\varphi(x)dx,$$

где $\ell(x)$ является функционалом погрешности и имеет вид

$$\ell(x) = i_{[0,1]}(x) - \sum_{\beta=0}^{N} (C_0[\beta]\delta(x - h\beta) - C_1[\beta]\delta'(x - h\beta)) \tag{2}$$

здесь $i_{[0,1]}(x)-$ характеристическая функция отрезка [0,1], $\delta(x)-$ дельта - функция Дирака. Норма функции $\varphi(x)$ в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$

определяется формулой

$$\left\|\varphi(x)|L_2^{(m)}(0,1)\right\| = \left[\int_0^1 (\varphi^{(m)}(x))^2 dx\right]^{\frac{1}{2}}.$$

В настоящей работе мы найдем норму функционала погрешности оптимальных квадратурных формул построенных в работах [1], [2]. В работе [1] для нормы функционала погрешности $\ell(x)$ получено следующее выражение

$$\|\ell(x)\|^2 = (-1)^{m+1}\left[\sum_{\beta=0}^{N}\sum_{\gamma=0}^{N} C_1[\beta]C_1[\gamma]\,\frac{(h\beta-h\gamma)^{2m-3}sign(h\beta-h\gamma)}{2(2m-3)!} - \right.$$

$$-2\sum_{\beta=0}^{N} C_1[\beta]\int_0^1 \frac{(x-h\beta)^{2m-2}sign(x-h\beta)}{2(2m-2)!}dx +$$

$$+2\sum_{\beta=0}^{N}\sum_{\gamma=0}^{N} C_0[\beta]C_1[\gamma]\frac{(h\beta-h\gamma)^{2m-2}sign(h\beta-h\gamma)}{2(2m-2)!} +$$

$$+2\sum_{\beta=0}^{N} C_0[\beta]\int_0^1 \frac{(x-h\beta)^{2m-1}sign(x-h\beta)}{2(2m-1)!}dx -$$

$$-\sum_{\beta=0}^{N}\sum_{\gamma=0}^{N} C_0[\beta]C_0[\gamma]\frac{(h\beta-h\gamma)^{2m-1}sign(h\beta-h\gamma)}{2(2m-1)!} -$$

$$\left. -\int_0^1\int_0^1 \frac{(x-y)^{2m-1}sign(x-y)}{2(2m-1)!}dxdy\right]. \quad (3)$$

Там же с помощью минимизации норму функционала погрешности по $C_1[\beta]$, получена следующая система

$$\sum_{\gamma=0}^{N} C_1[\gamma]G''_{m,1}(h\beta-h\gamma) + P_{m-2}(h\beta) = f_m(h\beta),\ \ \beta=\overline{0,N}, \quad (4)$$

$$\alpha \sum_{\beta=0}^{N} C_1[\beta](h\beta)^{\alpha-1} = \frac{1}{\alpha+1} - \sum_{\beta=0}^{N} C_0[\beta](h\beta)^{\alpha}, \quad \alpha = \overline{0, m-1}, \tag{5}$$

где $G_{m,1}(x) = \frac{x^{2m-1}\mathrm{sign}x}{2(2m-1)!}$ , а правая часть (4) выражается формулой

$$f_m(h\beta) = \int_0^1 G'_{m,1}(x-h\beta)dx + \sum_{\gamma=0}^{N} C_0[\gamma] G'_{m,1}(h\beta - h\gamma) =$$

$$= \sum_{i=0}^{2m-3} \frac{(h\beta)^{2m-3-i}}{(2m-3-i)!i!} \times$$

$$\times \left[ \frac{(-1)^{2m-3-i}}{2(i+1)(i+2)} + \frac{h^{i+2}B_{i+2}}{(i+1)(i+2)} - \frac{1}{2(i+1)} \sum_{\gamma=0}^{N} C_0[\gamma](-h\gamma)^{i+1} \right], \tag{6}$$

здесь $B_i-$ числа Бернулли.

В работе [2] найден неизвестный многочлен $P_{m-2}[\beta]$, где

$$P_{m-2}(h\beta) = \sum_{i=0}^{m-2} \frac{(h\beta)^i}{(2m-3-i)!i!} \times$$

$$\times \left[ h^{2m-3-i} \sum_{k=1}^{m-2} \sum_{\alpha=1}^{2m-3-i} \frac{d_k q_k + p_k q_k^{N+\alpha}(-1)^{\alpha+1}}{(q_k-1)^{\alpha+1}} \Delta^{\alpha} 0^{2m-3-i} + \right.$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{\gamma=0}^{N} C_1[\gamma](-h\gamma)^{2m-3-i} + \frac{(-1)^i}{2(2m-2-i)(2m-1-i)} +$$

$$\left. + \frac{h^{2m-1-i}B_{2m-1-i}}{(2m-2-i)(2m-1-i)} - \frac{1}{2(2m-2-i)} \sum_{\gamma=0}^{N} C_0[\gamma](-h\gamma)^{2m-2-i} \right] \tag{7}$$

и оптимальные коэффициенты $C_1[\beta]$, которые имеют следующий вид:

$$C_1[0] = \frac{h^2}{12} + \sum_{k=1}^{m-2} \frac{p_k q_k^N - d_k q_k}{1-q_k},$$

$$C_1[\beta] = \sum_{k=1}^{m-2} \left( d_k q_k^{\beta} + p_k q_k^{N-\beta} \right), \ \beta = \overline{1, N-1}, \tag{8}$$

$$C_1[N]=-\frac{h^2}{12}+\sum_{k=1}^{m-2}\frac{d_kq_k^N-p_kq_k}{1-q_k}, \tag{9}$$

где $q_k-$ корни многочлена Эйлера $E_{2m-4}(q)$ , $|q_k|<1$ (см. [3]), $d_k$ и $p_k$ определяются из следующей системы

$$\sum_{k=1}^{m-2}\sum_{i=1}^{\alpha}\frac{d_kq_k^{N+i}+(-1)^{i+1}p_kq_k}{(1-q_k)^{i+1}}\Delta^i0^\alpha=\frac{h^2B_{\alpha+2}}{(\alpha+1)(\alpha+2)}, \tag{10}$$

$$\sum_{k=1}^{m-2}\sum_{i=1}^{\alpha}\frac{(-1)^{i+1}d_kq_k+p_kq_k^{N+i}}{(1-q_k)^{i+1}}\Delta^i0^\alpha=-\frac{h^2B_{\alpha+2}}{(\alpha+1)(\alpha+2)},$$

$\alpha=\overline{1,m-2}$, $B_{\alpha+2}-$ числа Бернулли, $\Delta^i\gamma^n-$ конечная разность порядка $i$ от $\gamma^n$ , $\Delta^i0^n=\Delta^i\gamma^n|_{\gamma=0}$.

Основным результатом этой работы является следующая

**Теорема.** *Для нормы функционала погрешности (2), оптимальных квадратурных формул вида (1) в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$ справедливо:*

$$\|\ell(x)\|^2=\frac{h^{2m}\left|B_{2m}\right|}{(2m)!}+$$

$$+h^{2m+1}\sum_{k=1}^{m-2}\sum_{i=0}^{m-2}\sum_{\alpha=1}^{2m-3-i}\frac{(-1)^{m+1}B_{i+2}\theta_\alpha(q_k)\Delta^\alpha0^{2m-3-i}}{(i+2)!(2m-3-i)!},$$

*здесь* $\theta_\alpha(q_k)=\frac{(d_k'-p_k')(q_k^{N+\alpha}+(-1)^\alpha q_k)}{(1-q_k)^{\alpha+1}}$, *где* $d_k'=h^{-2}d_k,\ p_k'=h^{-2}p_k$.

Для доказательство этой теоремы нам потребуются следующие известные результаты из работы [4]:

$$\sum_{\gamma=0}^{n-1}q^\gamma\gamma^k=\frac{1}{1-q}\sum_{i=0}^{k}\left(\frac{q}{1-q}\right)^i\Delta^i0^k-\frac{q^n}{1-q}\sum_{i=0}^{k}\left(\frac{q}{1-q}\right)^i\Delta^i\gamma^k|_{\gamma=n} \tag{11}$$

Также приведем следующую известную формулу, которая используется при доказательстве теоремы:

$$\sum_{\gamma=0}^{\beta-1}\gamma^k=\sum_{j=1}^{k+1}\frac{k!B_{k+1-j}}{j!(k+1-j)!}\beta^j. \tag{12}$$

Для чисел Бернулли $B_\alpha$ справедливы следующие результаты.

**Лемма 1.** *Имеют место следующие тождества*

$$\sum_{p=1}^{i-4}\sum_{j=1}^{i-3-p}\frac{(-1)^{j+p+m+1-i}B_{p+1}B_{i-1-p}}{(j+m+2-i)!(p+1)!(i-1-p)!(m-j-1)!}=$$

$$=\sum_{j=1}^{i-4}\sum_{p=1}^{i-3-j}\frac{(-1)^{j+p+m+1-i}B_{p+1}B_{i-1-p}}{(j+m+2-i)!(p+1)!(i-1-p)!(m-j-1)!}= \qquad (13)$$

*при* $i=5,6,...,m+2,\ m\geq 3$

$$\sum_{p=1}^{2m-i}\sum_{j=0}^{2m-i-p}\frac{(-1)^{m-1-p}B_{m-j-p}B_{j+p+i-m}}{(j+1)!(m-p-j)!(j+p+i-m)!(2m-j-i)!}=$$

$$=\sum_{j=1}^{2m-i}\sum_{p=0}^{2m-i-j}\frac{(-1)^{p+j+i-m-2}B_{p+i-m}B_{m-p}}{j!(p+i-m)!(m-p)!(2m+1-j-i)!} \qquad (14)$$

*при* $i=m+3,m+4,...,2m-1,\quad m\geq 4.$

**Лемма 2.** *Справедливы следующие равенства*

$$\frac{h^mB_m}{m!}\left(\sum_{j=0}^{m-2}\frac{(-1)^j}{(j+2)!(m-1-j)!}-\frac{1}{m!}\right)+$$

$$+\sum_{p=2}^{m-1}\frac{h^pB_p}{p!}\left[\sum_{j=m-1-p}^{m-2}\frac{(-1)^j}{(j+2)!(2m-1-j-p)!}-\frac{(-1)^{p-1}}{(2m-p)!}-\frac{1}{(2m-p)!}\right]=0, \qquad (15)$$

$$\sum_{j=0}^{m-3}h^{j+5}\sum_{p=0}^{j}\frac{B_{j+2-p}B_{p+3}}{(j+2-p)!(p+3)!(2m-4-j)!}+\sum_{i=0}^{m-2}\frac{B_{i+2}h^{i+4}}{12(i+2)!(2m-3-i)!}=$$

$$=\sum_{p=4}^{m+2}h^p\sum_{i=0}^{p-4}\frac{B_{i+2}B_{p-2-i}}{(i+2)!(2m+1-p)!(p-2-i)!} \qquad (16)$$

$$\sum_{p=m+1}^{2m-2}h^p\sum_{j=0}^{2m-2-p}\frac{(-1)^jB_p}{(j+2)!(2m-1-j-p)!p!}-\sum_{j=0}^{m-2}\frac{B_{2m-1-j}h^{2m-1-j}}{(j+1)!(2m-1-j)!}=0. \qquad (17)$$

Доказательство теоремы. Равенство (3) перепишем следующим образом

$$\|\ell(x)\|^2=(-1)^{m+1}\left[\sum_{\beta=0}^{N}C_1[\beta]\left(\sum_{\gamma=0}^{N}C_1[\gamma]\ \frac{(h\beta-h\gamma)^{2m-3}sign(h\beta-h\gamma)}{2(2m-3)!}-\right.\right.$$

$$-2\int_0^1\frac{(x-h\beta)^{2m-2}sign(x-h\beta)}{2(2m-2)!}dx-$$

$$\left.-2\sum_{\gamma=0}^{N}C_0[\gamma]\ \frac{(h\beta-h\gamma)^{2m-2}sign(h\beta-h\gamma)}{2(2m-2)!}\right)+$$

$$+\sum_{\beta=0}^{N}C_0[\beta]\left(\int_0^1\frac{(x-h\beta)^{2m-1}sign(x-h\beta)}{(2m-1)!}\ dx-\right.$$

$$\left.-\sum_{\gamma=0}^{N}C_0[\gamma]\ \frac{(h\beta-h\gamma)^{2m-1}sign(h\beta-h\gamma)}{2(2m-1)!}\right)-$$

$$\left.-\int_0^1\int_0^1\frac{(x-y)^{2m-1}sign(x-y)}{2(2m-1)!}dxdy\right]. \tag{18}$$

Из (4), с учетом (6) получим

$$\sum_{\gamma=0}^{N}C_1[\gamma]\frac{(h\beta-h\gamma)^{2m-3}sign(h\beta-h\gamma)}{2(2m-3)!}-\int_0^1\frac{(x-h\beta)^{2m-2}sign(x-h\beta)}{2(2m-2)!}dx-$$

$$-\sum_{\gamma=0}^{N}C_0[\gamma]\frac{(h\beta-h\gamma)^{2m-2}sign(h\beta-h\gamma)}{2(2m-2)!}=-P_{m-2}(h\beta).$$

Тогда квадрат нормы функционала погрешности (18) примет вид:

$$\|\ell(x)\|^2=(-1)^{m+1}\left[\sum_{\beta=0}^{N}C_1[\beta]\ (-P_{m-2}(h\beta)-f_m(h\beta))+\right.$$

$$+\sum_{\beta=0}^{N} C_0[\beta] \left( \int_0^1 \frac{(x-h\beta)^{2m-1} sign(x-h\beta)}{(2m-1)!}\, dx - \right.$$

$$\left. -\sum_{\gamma=0}^{N} C_0[\gamma]\, \frac{(h\beta-h\gamma)^{2m-1} sign(h\beta-h\gamma)}{2(2m-1)!} \right) -$$

$$\left. -\int_0^1 \int_0^1 \frac{(x-y)^{2m-1} sign(x-y)}{2(2m-1)!} dxdy \right].$$

Отсюда, пользуясь определением функции $sign(x)$, биномом Ньютона и приведенными выше равенствами (5), (6), (7), (12) получим следующее

$$\|\ell(x)\|^2 = (-1)^{m+1} \left[ -\sum_{i=0}^{m-2} \frac{h^{i+2} B_{i+2}}{(2m-3-i)!(i+2)!} \sum_{\beta=0}^{N} C_1[\beta](h\beta)^{2m-3-i} + \right.$$

$$+\sum_{i=1}^{m-2} \frac{1}{(2m-3-i)!} \sum_{j=1}^{i} \frac{B_{i+2-j} h^{i+2-j}}{j!(i+2-j)!} \times$$

$$\times \left( h^{2m-3-i} \sum_{k=1}^{m-2} \sum_{\alpha=1}^{2m-3-i} \frac{d_k q_k + p_k q_k^{N+\alpha} (-1)^{\alpha+1}}{(q_k-1)^{\alpha+1}}\, \Delta^\alpha 0^{2m-3-i} + \right.$$

$$\left. +\sum_{\gamma=0}^{N} C_1[\gamma](-h\gamma)^{2m-3-i} \right) + \sum_{i=0}^{m-2} \frac{(-1)^i}{(i+2)!} \sum_{j=1}^{2m-3-i} \frac{B_{2m-1-i-j} h^{2m-1-i-j}}{j!(2m-1-i-j)!} +$$

$$+\sum_{i=1}^{m-2} \frac{h^{2m+1} B_{2m-1-i}}{(2m-1-i)!} \sum_{j=1}^{i} \frac{B_{i+2-j} h^{-j}}{j!(i+2-j)!} - \sum_{i=1}^{m-2} \frac{(-1)^i}{(2m-1-i)!} \sum_{j=1}^{i} \frac{B_{i+2-j} h^{i+2-j}}{j!(i+2-j)!} -$$

$$-\sum_{i=1}^{m-2} (-1)^i \sum_{j=1}^{i} \frac{B_{i+2-j} h^{2m+1-j}}{j!(i+2-j)!} \sum_{k=1}^{2m-3-i} \frac{B_{2m-1-i-k} h^{-k}}{k!(2m-1-i-k)!} -$$

$$-\sum_{i=0}^{m-2} \frac{h^{2m+1} B_{i+2}}{(i+2)!} \sum_{j=1}^{2m-3-i} \frac{B_{2m-1-i-j} h^{-j}}{j!(2m-1-i-j)!} - \sum_{j=0}^{m-2} \frac{B_{j+2} h^{j+2}}{(j+2)!(2m-2-j)!} -$$

$$\left. -\sum_{j=0}^{m-2} \frac{B_{2m-1-j} h^{2m-1-j}}{(2m-1-j)!(j+1)!} + \frac{h^{2m} B_{2m}}{(2m)!} \right]. \qquad (19)$$

Теперь, введя обозначения $d_k = h^2 d'_k,\ p_k = h^2 p'_k$ и $Z_S = \sum\limits_{k=1}^{m-2} \sum\limits_{\alpha=1}^{S} \frac{d_k q_k^{N+\alpha} + p_k q_k (-1)^{\alpha+1}}{(1-q_k)^{\alpha+1}} \Delta^\alpha 0^S$, используя равенства (8), (9), (10), (11) а также лемму 4 из работы [5] стр. 69., группируя по степеням $h$ правую часть (19), после некоторых вычислений получим

$$\|\ell(x)\|^2 = (-1)^{m+1} \Bigg[ h^{2m+1} \sum_{i=0}^{m-2} \frac{B_{i+2}}{(2m-3-i)!(i+2)!} \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{m-2} \sum_{\alpha=1}^{2m-3-i} \left( \frac{((-1)^{i+1} d'_k + p'_k)((-1)^{\alpha+1} q_k + (-1)^{i+1} q_k^{N+\alpha})}{(1-q_k)^{\alpha+1}} \Delta^\alpha 0^{2m-3-i} \right) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m-2} h^{m+i+2} \Bigg[ \sum_{p=i}^{m-2} \sum_{j=p}^{m-2} \frac{(-1)^{m-1-p} B_{m-j} Z_{j+i}}{(j+1-p)!(m-j)!(j+i)!(m-2-j-i+p)!} +$$

$$+ \sum_{p=1}^{i-1} \sum_{j=p}^{m-2-i+p} \frac{(-1)^{m-1-p} B_{m-j} Z_{j+i}}{(j+1-p)!(m-j)!(j+i)!(m-2-j-i+p)!} \Bigg] +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m-2} h^{i+4} \sum_{p=1}^{i} \sum_{j=p}^{m-2} \frac{(-1)^j B_{p+1} Z_{i+1-p}}{(j+1-p)!(p+1)!(i+1-p)!(2m-4-j-i+p)!} +$$

$$+ \sum_{j=0}^{m-2} h^{j+5} \sum_{p=0}^{j} \frac{B_{j+2-p} Z_{p+1}}{(j+2-p)!(p+1)!(2m-4-j)!} + \frac{h^{2m} B_{2m}}{(2m)!} +$$

$$+ \sum_{j=m-1}^{2m-5} h^{j+5} \sum_{p=0}^{m-2} \frac{B_{m-p} Z_{p+3+j-m}}{(m-p)!(p+3+j-m)!(2m-4-j)!} +$$

$$+ \sum_{p=4}^{m+1} h^p \sum_{j=p-3}^{m-2} \frac{(-1)^j B_{p-2}}{12(2m-3-j)!(j-p+4)!(p-2)!} +$$

$$+ \sum_{i=0}^{m-2} \frac{h^{i+4} B_{i+2}}{12(2m-3-i)!(i+2)!} + \sum_{p=2}^{m} h^p \sum_{j=0}^{m-2} \frac{(-1)^j B_p}{(j+2)!(2m-1-j-p)!p!} +$$

$$+ \sum_{p=m+1}^{2m-2} h^p \sum_{j=0}^{2m-2-p} \frac{(-1)^j B_p}{(j+2)!(2m-1-j-p)!p!} +$$

$$+\sum_{p=1}^{m-2} h^{2m+1-p}\sum_{j=p}^{m-2}\frac{B_{2m-1-j}B_{j+2-p}}{(2m-1-j)!(j+2-p)!p!}-$$

$$-\sum_{p=2}^{m-1} h^{p}\sum_{j=p-1}^{m-2}\frac{(-1)^{j}B_{p}}{(2m-1-j)!(j+2-p)!p!}-$$

$$-\sum_{p=m+2}^{2m-1} h^{p}\sum_{j=1}^{2m-p}\sum_{i=1}^{m-1-j}\frac{(-1)^{i+j-1}B_{i+1}B_{p-1-i}}{j!(i+1)!(2m+1-j-p)!(p-1-i)!}-$$

$$-\sum_{p=4}^{m+1} h^{p}\left[\sum_{j=1}^{m+1-p}\sum_{i=1}^{p-3}\frac{(-1)^{i+j-1}B_{i+1}B_{p-1-i}}{j!(i+1)!(2m+1-j-p)!(p-1-i)!}+\right.$$

$$\left.+\sum_{j=1}^{p-3}\sum_{i=1}^{p-2-j}\frac{(-1)^{i+j+m-p}B_{i+1}B_{p-1-i}}{(j+m+1-p)!(i+1)!(m-j)!(p-1-i)!}\right]-$$

$$-\sum_{p=4}^{m+2} h^{p}\sum_{i=0}^{p-4}\frac{B_{i+2}B_{p-2-i}}{(i+2)!(2m+1-p)!(p-2-i)!}-$$

$$-\sum_{p=m+3}^{2m} h^{p}\sum_{i=0}^{m-2}\frac{B_{i+2}B_{p-2-i}}{(i+2)!(2m+1-p)!(p-2-i)!}-$$

$$\left.-\sum_{p=2}^{m}\frac{B_{p}h^{p}}{p!(2m-p)!}-\sum_{j=0}^{m-2}\frac{B_{2m-1-j}h^{2m-1-j}}{(j+1)!(2m-1-j)!}\right]. \tag{20}$$

Далее, используя равенства (10), (13), (14), (15), (16), (17) из (20) имеем

$$\|\ell(x)\|^{2}=(-1)^{m+1}\left[h^{2m+1}\sum_{i=0}^{m-2}\frac{B_{i+2}}{(2m-3-i)!(i+2)!}\times\right.$$

$$\times\sum_{k=1}^{m-2}\sum_{\alpha=1}^{2m-3-i}\left(\frac{((-1)^{i+1}d'_{k}+p'_{k})((-1)^{\alpha+1}q_{k}+(-1)^{i+1}q_{k}^{N+\alpha})}{(1-q_{k})^{\alpha+1}}\,\Delta^{\alpha}0^{2m-3-i}\right)+$$

$$+\frac{h^{2m}B_{2m}}{(2m)!}+\sum_{i=m+4}^{2m-1}h^{i}\times$$

$$\times\left(\sum_{j=0}^{i-m-4}\sum_{p=i-m-2}^{m-3-j}\frac{(-1)^{m-1-p}B_{j+3}Z_{i-5-j}}{(m-2-p-j)!(j+3)!(i-5-j)!(p+m+j-i+3)!}+\right.$$

$$+\sum_{p=i-m-2}^{2m-i}\sum_{j=p}^{2m-i}\frac{(-1)^{m-1-p}B_{m-j}B_{j+i-m}}{(j+1-p)!(m-j)!(j+i-m)!(2m+p-j-i)!}+$$

$$+\sum_{p=0}^{i-m-4}\sum_{j=0}^{2m-1-i-p}\frac{(-1)^{m-2-p}B_{m-j-p-1}B_{j+p+i-m+1}}{(j+1)!(m-j-p-1)!(j+p+i-m+1)!(2m-j-i)!}+$$

$$+\sum_{p=1}^{i-m-4}\sum_{j=0}^{p-1}\frac{(-1)^{m-2-p}B_{i-m-j-1}Z_{j+m-1}}{(2m+j-i-p+1)!(i-m-j-1)!(j+m-1)!(p-j)!}+$$

$$+\sum_{p=0}^{i-m-4}\frac{B_{i-m-p-1}Z_{p+m-1}}{(i-m-p-1)!(p+m-1)!(2m+1-i)!}\left((-1)^{m-2-p}+1\right)-$$

$$\left.\left.-\sum_{j=1}^{2m-i}\sum_{p=1}^{m-1-j}\frac{(-1)^{p+j-1}B_{p+1}B_{i-1-p}}{j!(p+1)!(2m+1-j-i)!(i-1-p)!}\right)\right]=A+K,\quad(21)$$

где

$$A=\sum_{i=m+4}^{2m-1}h^i\times$$

$$\times\left[\sum_{j=0}^{i-m-4}\sum_{p=i-m-2}^{m-3-j}\frac{(-1)^{m-1-p}B_{j+3}Z_{i-5-j}}{(m-2-p-j)!(j+3)!(i-5-j)!(p+m+j-i+3)!}+\right.$$

$$+\sum_{p=1}^{i-m-4}\sum_{j=0}^{p-1}\frac{(-1)^{m-2-p}B_{i-m-j-1}Z_{j+m-1}}{(2m+j-i-p+1)!(i-m-j-1)!(j+m-1)!(p-j)!}+$$

$$\left.+\sum_{p=0}^{i-m-4}\frac{B_{i-m-p-1}Z_{p+m-1}}{(i-m-p-1)!(p+m-1)!(2m+1-i)!}\left((-1)^{m-2-p}+1\right)\right]$$

$$K=\sum_{i=m+4}^{2m-1}h^i\times$$

$$\times\left[\sum_{p=i-m-2}^{2m-i}\sum_{j=p}^{2m-i}\frac{(-1)^{m-1-p}B_{m-j}B_{j+i-m}}{(j+1-p)!(m-j)!(j+i-m)!(2m+p-j-i)!}+\right.$$

$$+\sum_{p=0}^{i-m-4}\sum_{j=0}^{2m-1-i-p}\frac{(-1)^{m-2-p}B_{m-j-p-1}B_{j+p+i-m+1}}{(j+1)!(m-j-p-1)!(j+p+i-m+1)!(2m-j-i)!}-$$

$$\left.-\sum_{j=1}^{2m-i}\sum_{p=1}^{m-1-j}\frac{(-1)^{p+j-1}B_{p+1}B_{i-1-p}}{j!(p+1)!(2m+1-j-i)!(i-1-p)!}\right].$$

Теперь из $A$, выделяя члены $Z_{m-1}$, получим

$$A=\sum_{i=m+4}^{2m-1}h^i\times$$

$$\times\left[\frac{B_{i-m-1}Z_{m-1}}{(i-m-1)!(m-1)!}\left(\sum_{p=i-m-2}^{2m+1-i}\frac{(-1)^{m-1-p}}{(2m-i-p+2)!(p-1)!}+\right.\right.$$

$$\left.+\sum_{p=0}^{i-m-5}\frac{(-1)^{m-3-p}}{(2m-i-p)!(p+1)!}+\frac{(-1)^{m-2}}{(2m+1-i)!}+\frac{1}{(2m+1-i)!}\right)+$$

$$+\sum_{j=1}^{i-m-5}\sum_{p=i-m-2}^{m-3-j}\frac{(-1)^{m-1-p}B_{j+3}Z_{i-5-j}}{(m-2-p-j)!(j+3)!(i-5-j)!(p+m+j-i+3)!}+$$

$$+\sum_{p=1}^{i-m-5}\sum_{j=1}^{p}\frac{(-1)^{m-3-p}B_{i-m-j-1}Z_{j+m-1}}{(2m+j-i-p)!(i-m-j-1)!(j+m-1)!(p+1-j)!}+$$

$$\left.+\sum_{p=1}^{i-m-5}\frac{B_{i-m-p-1}Z_{p+m-1}}{(i-m-p-1)!(p+m-1)!(2m+1-i)!}\left((-1)^{m-2-p}+1\right)\right].$$

Здесь следующая сумма равно нулю

$$\sum_{i=m+4}^{2m-1}h^i\frac{B_{i-m-1}Z_{m-1}}{(i-m-1)!(m-1)!}\left(\sum_{p=i-m-2}^{2m+1-i}\frac{(-1)^{m-1-p}}{(2m-i-p+2)!(p-1)!}+\right.$$

$$+\sum_{p=0}^{i-m-5}\frac{(-1)^{m-3-p}}{(2m-i-p)!(p+1)!}+\frac{(-1)^{m-2}}{(2m+1-i)!}+\frac{1}{(2m+1-i)!}\Bigg)=0$$

Так как при $i-m-1$ нечетном $B_{i-m-1}=0$, а при $i-m-1$ четном, очевидно, что выражения в скобке равно нулю.
Тогда после некоторых упрощений для $A$ имеем

$$A=\sum_{i=m+6}^{2m-1}h^i\sum_{p=1}^{i-m-5}\frac{B_{p+3}Z_{i-5-p}}{(p+3)!(i-5-p)!}\times$$

$$\times\left(\sum_{j=0}^{2m-i}\frac{(-1)^{2m-i-j+p+2}}{(2m-i-j+1)!j!}+\frac{1}{(2m+1-i)!}\right)=0$$

так как при $p-$ четном $B_{p+3}=0$, а при $p-$ нечетном, выражение в скобке равно нулю, то $A=0$.

После некоторых упрощений для $K$ также получим

$$K=\sum_{i=m+4}^{2m-1}h^i\times$$

$$\times\left[\sum_{p=1}^{2m-i}\sum_{j=0}^{2m-i-p}\frac{(-1)^{m-1-p}B_{m-j-p}B_{j+p+i-m}}{(j+1)!(m-p-j)!(j+p+i-m)!(2m-j-i)!}-\right.$$

$$\left.-\sum_{j=0}^{2m-i-1}\sum_{p=0}^{2m-1-i-j}\frac{(-1)^{p+j+i-m-1}B_{p+i-m}B_{m-p}}{(j+1)!(p+i-m)!(m-p)!(2m-j-i)!}\right].$$

Отсюда используя (14) получим, что $K=0$. Таким образом, учитывая что $A=0$, $K=0$, из (21) для квадрата нормы функционала погрешности $\ell(x)$ окончательно имеем

$$\|\ell(x)\|^2=(-1)^{m+1}\left[\frac{h^{2m}B_{2m}}{(2m)!}+\sum_{i=0}^{m-2}\frac{h^{2m+1}B_{i+2}}{(2m-3-i)!(i+2)!}\sum_{k=1}^{m-2}\sum_{\alpha=1}^{2m-3-i}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{(d_k'-p_k')(q_k^{N+\alpha}+q_k(-1)^\alpha)}{(1-q_k)^{\alpha+1}}\Delta^\alpha 0^{2m-3-i}\right]$$

это и есть утверждение теоремы. Теорема доказана.

## Литература

1. Шадиметов Х.М., Нуралиев Ф.А. Об одной оптимальной квадратурной формуле с производными. // Узбекский математический журнал. 2005. №3. С. 90-103.

2. Шадиметов Х.М., Нуралиев Ф.А. Коэффициенты оптимальных квадратурных формул типа Эйлера -Маклорена в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$ // Узбекский математический журнал. 2007. №1. С.106-112.

3. Соболев С.Л., Васкевич В.Л. Кубатурные формулы. - Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1996. - 484 с.

4. Хемминг Р.В. Численные методы. - М.: Наука, 1968. - 400 с.

5. Шадиметов Х.М. Оптимальные формулы приближенного интегрирования для дифференцируемых функций // Канд. дис... . Новосибирск, ВЦ СО АН СССР, 1983.

Институт математики и
информационных технологий

Дата поступления
05.03.07

Uzbek Mathematical
Journal, 2008,№2, pp.74-80

УДК 517.95

# Разрешимость и спектральные свойства самосопряженных задач для уравнения четвертого порядка

**Ж.А.Отарова**

Bu maqolada to‘rtinchi tartibli tenglama uchun chegaraviy masalalar o‘rganilgan. Masalalarning yagona regulyar va kuchli yechimlari mavjudligi isbotlangan. Masalalarning o‘ziga qo‘shma ekanligi va uning spektrining diskretligi ko‘rsatilgan.

In this work we study a self-adjoint boundary value problems for the fourth order equation. The regular and strong solvability of the problems is proved. A self-adjointity of the problems is established. This boundary value problems has a point spectrum.

В области $\Omega = \{(x,t):\ 0<x<p,\ \ 0<t<T\}$ рассмотрим уравнение

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4}+\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)u = f\,(x,t) \tag{1}$$

Выпишем все краевые условия, которые будут использованы при постановке краевых задач для уравнения (1).

$$u\,|_{t=0}\ = 0, \qquad 0\le x\le p \tag{2}$$

$$u_t\,|_{t=0}\ = 0, \qquad 0\le x\le p \tag{3}$$

$$u\,|_{t=T}\ = 0, \qquad 0\le x\le p \tag{4}$$

$$u_t\,|_{t=T}\ = 0, \qquad 0\le x\le p \tag{5}$$

$$u\,|_{x=0}\ = u\,|_{x=p}\ = u_{xx}\,|_{x=0}\ = u_{xx}\,|_{x=p}\ = 0, \qquad\qquad 0\le t\le T \tag{6}$$

$$u_x\,|_{x=0}\ = u_x\,|_{x=p}\ = u_{xxx}\,|_{x=0}\ = u_{xxx}\,|_{x=p}\ = 0, \qquad\qquad 0\le t\le T. \tag{7}$$

**Задача 1.** Найти в области $\Omega$ решение $u\,(x,t)$ уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям (2), (5) и (6).

Обозначим:

$$V(\Omega)=\Big\{u(x,t): u(x,t)\in C^{2,1}_{x,t}\left(\overline{\Omega}\right)\cap C^{4,2}_{x,t}(\Omega),$$

$$\text{выполняются условия (2), (5) и (6)}\Big\}$$

$$W(\Omega)=\Big\{f(x,t): f(x,t)\in C^{2,0}_{x,t}\left(\overline{\Omega}\right),\ f_{xxx}(x,t)\in L_2(0,p),\ \forall\ t\in[0,T],$$

$$f(0,t)=f(p,t)=f_{xx}(0,t)=f_{xx}(p,t)=0\}$$

**Определение 1.** *Функцию $u(x,t)\in V(\Omega)$ назовем регулярным решением задачи 1, при $f(x,t)\in C(\Omega)$, если в области $\Omega$ она удовлетворяет уравнению (1).*

**Определение 2.** *Функцию $u(x,t)\in L_2(\Omega)$ назовем сильным решением задачи 1 при $f(x,t)\in L_2(\Omega)$, если существует последовательность $\{u_n\}$, $n=1,2,...$ регулярных решений такая, что $\|u_n-u\|_{L_2(\Omega)}\to 0$, $\|Lu_n-f\|_{L_2(\Omega)}\to 0$ при $n\to\infty$.*

На множестве $V(\Omega)$ определим оператор $A$, который действует из $V(\Omega)$ в $C(\Omega)$ по правилу

$$Au\equiv\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4}+\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)u,\quad \forall u\in V(\Omega).$$

В силу соотношения $C_0^\infty\subset V(\Omega)\subset L_2(\Omega)$ область определения $D(A)\equiv V(\Omega)$ оператора $A$ плотна в $L_2(\Omega)$. Регулярная разрешимость задачи 1, эквивалентна разрешимости операторного уравнения

$$Au=f.$$

**Теорема 1.** *Пусть числа $p$ и $T$ такие, что*

$$\left|\cos\left(\frac{n\pi}{p}\right)^2T\right|\geq\delta_0>0, \tag{8}$$

*тогда регулярное решение задачи 1 единственно, если оно существует.*

Доказательство. Пусть существуют два решения $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ задачи. Их разность удовлетворяет однородному уравнению (1) и условиям (2), (5) и (6). Обозначим эту разность через $u(x,t)$, т. е. $u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$. Известно, что функция

$$X_n\left(x\right) = \sqrt{\frac{2}{p}} \sin \frac{n\pi}{p} x, \quad n = 1, 2, ..., \tag{9}$$

образует в $L_2\left(0,p\right)$ полную ортонормированную систему.

Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_0^p u\left(x,t\right) X_n\left(x\right) dx = d_n\left(t\right), \;\; n = 1, 2, \dots . \tag{10}$$

Дифференцируя (10) по $t$ два раза и учитывая условия (6) имеем

$$d_n''\left(t\right) + \lambda_n^4 d_n\left(t\right) = 0, \quad n = 1, 2, .... \tag{11}$$

Решая уравнение (13) при условиях $d_n\left(0\right) = 0, \quad d_n'\left(T\right) = 0$ получаем $d_n\left(t\right) = 0,$ при $t \in [0,T]$. Тогда равенство (10) примет вид

$$\int\limits_0^p u\left(x,t\right) X_n\left(x\right) dx = 0 \tag{12}$$

Из (12) следует ортогональность $u(x,t)$ к полной системе (9). Следовательно $u\left(x,t\right) \equiv 0$. Отсюда получаем $u_1\left(x,t\right) \equiv u_2\left(x,t\right)$.

Теорема 1 доказана.

**Теорема 2.** *Если $f\left(x,t\right) \in W\left(\Omega\right)$ и выполняется условие (8), то регулярное решение задачи 1 существует и принадлежит классу $C_{x,t}^{4,2}\left(\overline{\Omega}\right)$.*

Доказательство. Существование решения задачи 1 доказывается применением метода разделения переменных. Непосредственной проверкой можно убедиться, что функция

$$u\left(x,t\right) = \int\limits_0^p \int\limits_0^T K\left(x,t;\xi,\tau\right) f\left(\xi,\tau\right) d\xi d\tau \tag{13}$$

будет регулярным решением задачи 1, где

$$K\left(x,t;\xi,\tau\right)=-\frac{p^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}K_n\left(t,\tau\right)X_n\left(\xi\right)X_n\left(x\right) \tag{14}$$

$$K_n\left(t,\tau\right)=\begin{cases}\dfrac{\sin\left(\dfrac{n\pi}{p}\right)^2\tau\cdot\cos\left(\dfrac{n\pi}{p}\right)^2\left(T-t\right)}{\cos\left(\frac{n\pi}{p}\right)^2T}, & 0\le\tau\le t,\\ \dfrac{\sin\left(\frac{n\pi}{p}\right)^2t\cdot\cos\left(\dfrac{n\pi}{p}\right)^2\left(T-\tau\right)}{\cos\left(\frac{n\pi}{p}\right)^2T}, & t\le\tau\le T.\end{cases} \tag{15}$$

Из (15) следует, что

$$K_n\left(t,\tau\right)=K_n\left(\tau,t\right), \tag{16}$$

и удовлетворяет оценке

$$\left|K_n\left(t,\tau\right)\right|\le\frac{C}{\delta_0}. \tag{17}$$

В силу (17) ряд (14) сходится абсолютно и равномерно в $\overline{\Omega}$. Следовательно

$$\left|K\left(x,t;\xi,\tau\right)\right|\le C_1 \tag{18}$$

где $C_1=const>0$.

Более того, если $f\left(x,t\right)\in W\left(\Omega\right)$, то ряд (14) можно дифференцировать почленно два раза по $t$ и четыре раза по $x$, при этом полученные ряды сходятся абсолютно и равномерно в области $\overline{\Omega}$. Отсюда следует, что $u(x,t)\in C_{x,t}^{4,2}\left(\overline{\Omega}\right)$. Нетрудно убедиться, что решение удовлетворяет оценке

$$\|u\|_{L_2(\Omega)}\le C_2\,\|f\|_{L_2(\Omega)}\,. \tag{19}$$

**Теорема 3.** *Для любой $f\in L_2\left(\Omega\right)$ сильное решение задачи 1 существует, единственно, устойчиво, удовлетворяет оценке (19) и задается формулой (13).*

Доказательство. Из соотношения $C_0^\infty(\Omega) \subset W(\Omega) \subset L_2(\Omega)$ следует, что множество $W(\Omega)$ всюду плотно в $L_2(\Omega)$. Тогда $\forall f \in L_2(\Omega)$ в множестве $W(\Omega)$ найдется последовательность $\{f_n\} \subset W(\Omega)$ $n = 1, 2, ...$, такая, что $\|f_n - f\|_{L_2(\Omega)} \to 0$ при $n \to \infty$. Поэтому $\{f_n\}$ фундаментальна в $L_2(\Omega)$ т.е.

$$\|f_n - f_m\|_{L_2(\Omega)} \to 0, \text{при } n \to \infty, \ \ m \to \infty. \tag{20}$$

Так как при каждом $n = 1, 2, ...$ $f_n \in W(\Omega)$, то для каждой $f_n(x,t)$, согласно теоремам 1,2, существует единственное регулярное решение

$$u_n(x,t) = \int_0^p \int_0^T K(x,t;\xi,\tau) f_n(\xi,\tau)\, d\xi d\tau, \quad n = 1, 2, ... \ . \tag{21}$$

уравнения

$$Au_n = f_n\,, \quad n = 1, 2, ... \,.$$

В силу (19) и (20) имеем $\|u_n - u_m\|_{L_2(\Omega)} \le C_2 \|f_n - f_m\|_{L_2(\Omega)} \to 0$ при $n, m \to \infty$, т.е. последовательность $\{u_n\}\,,\ \ n = 1, 2, ...$ фундаментальна в $L_2(\Omega)$. В силу полноты $L_2(\Omega)$, последовательность $\{u_n\}\,,\ \ n = 1, 2, ...$ регулярных решений имеет предел в $L_2(\Omega)$. Обозначим его через $u(x,t)$, т.е.

$$\|u_n - u\|_{L_2(\Omega)} \to 0 \ \text{ при } \ n \to \infty.$$

Этот предел $u(x,t)$ и будет сильным решением задачи 1, и его можно получить, переходя к пределу в (21) при $n \to \infty$,

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x,t) = \lim_{n\to\infty} \int_0^p \int_0^T K(x,t;\xi,\tau) f_n(\xi,\tau)\, d\xi d\tau$$

т.е. получаем (13), где $u \in L_2(\Omega)\,,\ f \in L_2(\Omega)$.

Из формулы (13) и оценки (19) следует, что на множестве $W(\Omega)$ определен ограниченный оператор $A^{-1}$, обратный оператору $A$ задачи. Оператор $A^{-1}$ действует из $W(\Omega)$ в $V(\Omega)$ по правилу

$$\left(A^{-1}f\right)(x,t) = \int_0^p \int_0^T K(x,t;\xi,\tau) f(\xi,\tau)\, d\xi d\tau.$$

В силу (14) и (16) оператор $A^{-1}$ -симметрический. Его область определения плотна в $L_2(\Omega)$ и, в силу (18), он является оператором Гильберта-Шмидта. Тогда $A^{-1}$ можно продолжить по непрерывности на все пространство $L_2(\Omega)$. И это продолжение, которое мы обозначим через $\overline{A^{-1}}$, является замыканием оператора $A^{-1}$. Оператор $A$ определен на плотном в $L_2(\Omega)$ множестве $V(\Omega)$. Поэтому $\overline{A^{-1}}$ в силу оценки (19), является обратным к замыканию $\overline{A}$ оператора $A$ [1]. $D\left(\overline{A}\right)$ получается замыканием $V(\Omega)$ по норме $L_2(\Omega)$ и состоит из всех сильных решений задачи 1.

**Теорема 4.** *Оператор $A^{-1}$ является вполне непрерывным в $L_2(\Omega)$ и самосопряженным. Его спектр состоит только из действительных собственных значений конечной кратности [2].*

Доказательство. Из оценки (19) следует, что $K(x,t;\xi,\tau) \in L_2(\Omega \times \Omega)$. Поэтому $\overline{A^{-1}}$ вполне непрерывен в $L_2(\Omega)$. Из симметричности $A^{-1}$ следует симметричность $\overline{A^{-1}}$. Так как $\overline{A^{-1}}$ определен во всем пространстве $L_2(\Omega)$, ограничен и симметрический, то он - самосопряженный оператор. Тогда спектр оператора $\overline{A^{-1}}$, а следовательно, и оператора $\overline{A}$ [2,3] ,как известно, расположен на действительной оси комплексной $\lambda$ плоскости и состоит из собственных значений конечной кратности. Под спектром задачи мы понимаем множество собственных значений оператора, соответствующего краевой задаче 1, т.е. оператора $\overline{A}$ [1].

Связь собственных значений операторов $\overline{A}$ и $\overline{A^{-1}}$ такова [3]: если $\lambda_n \neq 0$ - собственное значение оператора $\overline{A^{-1}}$, то число $\lambda_n^{-1}$есть собственное значение оператора $\overline{A}$. Таким образом, спектр задачи 1 состоит из вещественных собственных значений конечной кратности.

**Следствие.***Задача 1 - самосопряженная.*

В самом деле, $\forall u, \vartheta \in V(\Omega)$ имеет место соотношение

$$(Au, \vartheta)_{L_2(\Omega)} = (u, A\vartheta)_{L_2(\Omega)}\,. \tag{22}$$

Учитывая плотность $V(\Omega)$ в $D(\overline{A})$ заключаем, что (22) имеет место $\forall u, \vartheta \in D\left(\overline{A}\right)$, т.е.

$$\left(\overline{A}u, \vartheta\right)_{L_2(\Omega)} = \left(u, \overline{A}\vartheta\right)_{L_2(\Omega)}$$

и в силу самосопряженности $\overline{A^{-1}}$ заключаем, что задача 1 самосопряженная.

Для уравнения (1) ставятся также задачи:

**Задача 2.** Найти в области $\Omega$ решение $u(x,t)$ уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям (3), (5) и (6).

**Задача 3.** Найти в области $\Omega$ решение $u(x,t)$ уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям (2), (4) и (6).

**Задача 4.** Найти в области $\Omega$ решение $u(x,t)$ уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям (2), (4) и (7).

**Задача 5.** Найти в области $\Omega$ решение $u(x,t)$ уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям (3), (4) и (7).

Аналогично, как и выше вводятся определения регулярного и сильного решений для задач 2-5.

Условие

$$\left|\sin\left(\frac{n\pi}{p}\right)^2 T\right| \geq \varepsilon_0 > 0,$$

обеспечивает единственность решения задач 2,3,4. Выполнение условия (8) дает также единственность решения задачи 5.

Существования решений задач 2-5 доказывается методом разделения переменных. Спектр задач исследуется, как в задаче 1. Задачи 2-5 также являются самосопряженными.

Задача с условиями (3),(5),(7) имеет бесчисленное множество решений.

**Литература**

1. Крейн С.Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве. М., Наука, 1971, 104 с.

2. Кальменов Т.Ш. Краевые задачи для линейных уравнений в частных производных гиперболического типа. Шымкент, Гылым, 1993, 328 с. 3.

3. Дезин А.А. Общие вопросы теории граничных задач. М., Наука, 1980, 208 с.

Национальный Университет
Узбекистана им. М.Улугбека

Дата поступления
20.05.07

Uzbek Mathematical
Journal, 2008,№2, pp.81-89

УДК 517.97

# Условия оптимальности в задаче управления ансамблем траекторий дифференциального включения

С.Отакулов, Г.Д.Собирова

Ishda differentsial mansubliklar bir sinfi uchun trayektoriyalar dastasini boshqarish masalasida minimaksli mezon bo'yicha optimallikning zaruriy va yetarli shartlari olingan.

In this paper for one minimax control problem of ensamble trajektories differential inclusions the necessary end sufficient conditions of optimality are obtained.

В результате учета неточности исходных данных и параметров неконтролируемых внешних возмущений возникает неклассическая модель системы управления, описываемая дифференциальным включением вида

$$\dot{\in} A(t)x + b(t,u,q), t \in T = [t_0, t_1], \tag{1}$$

где $x$ - n-вектор состояния системы, u- m-вектор управления, $u \in V, V \subset R^m$, q- параметр внешних возмущений, $q \in Q, Q \subset R^k$, A(t)- n n- матрица, $b(t,u,q) \subset R^n$ Здесь $R^n$ обозначает евклидово пространство n-векторов со скалярным произведением $(x,y) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$ и нормой $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$. Будем считать, что начальное состояние $x(t_0)$ системы управления задано неточно, т.е. $x(t_0) \in D,\ D \subset R^n$.

Динамическую систему управления (1) изучим в следующих предположениях:

а) элементы матрицы A(t) суммируемы на T;

б) для любых $(t,v,q) \in T \times V \times Q$ множество b(t,v,q) является непустым компактом из $R^n$;

в) многозначное отображение $(t,v,q) \to$ b(t,v,q) измеримо по $t \in T$, непрерывно по $(v,q) \in V \times Q$ и существует суммируемая на T функция $\beta(t)$ такая, что $Sup\,\{\|\xi\| : \ \ \xi \in b(t,v,q)\} \le \beta(t), \ \ \forall \ \ (t,v,q) \in T \times V \times Q$;

г) опорная функция $C(b(t,v,q),\psi) = \max\limits_{\xi\in b(t,v,q)}(\xi,\psi)$ множества b(t,v,q) выпукла по $v \in V$ и вогнута по $q \in Q$;

д) $D \subset R^n,\ \ V \subset R^m, Q \subset R^k -$ заданные выпуклые компакты.

Допустимым управлением для системы (1) назовем каждую измеримую ограниченную m- вектор- функцию u=u(t), $t \in T$, принимающую почти всюду на T значения из выпуклого компакта $V \subset R^n$. Через U обозначим множество всех допустимых управлений. Допустимой траекторией, соответствующей управлению $u \in U$ и параметру $q \in Q$, назовем абсолютно-непрерывную n- вектор-функцию $x(t) = x(t,u,q)$, удовлетворяющую почти всюду на T дифференциальному включению (1) и начальному условию $x(t_0) \in D$. Через $H(u,q)$ обозначим множество допустимых траекторий, соответствующих точке $(u,q) \in U \times Q$.

Положим $X(t,u,q) = \{\xi : \xi = x(t), x(\cdot) \in H(u,q)\}$ , $t \in T$. Многозначное отображение $t \to X(t,u,q)$ называется ансамблем траекторий[1] системы (1). По определению множество $X(t_1,u,q)$ состоит из концов $x(t_1)$ всех допустимых траекторий $x(\cdot) \in H(u,q)$.

Пусть задано множество $Y \subset R^n$. Через $Y^\varepsilon$ обозначим замкнутую $\varepsilon-$окрестность множества $Y$, т.е. $Y^\varepsilon = \{\xi :\ \rho(\xi,Y) \le \varepsilon\}$ , где $\rho(\xi,Y) = \inf\limits_{y\in Y}\|\xi - y\|$.

Будем говорить, что ансамбль траекторий системы (1) с неточным параметром $q \in Q$ можно перевести в замкнутую $\varepsilon-$ окрестность терминального множества $Y$, если существуют $t_1 > t_0$ , $u \in U$, такие, что $X(t_1,u,q) \subset Y^\varepsilon$, $\forall q \in Q$, т.е.

$$\sup_{q\in Q}\ \sup_{\xi\in X(t_1,u.q)} \rho(\xi,Y) \le \varepsilon. \tag{2}$$

Рассмотрим задачу о переводе ансамбля траекторий системы (1) в минимальную окрестность заданного терминального множества. Так как соотношение $X(t_1,u,q) \subset Y^\varepsilon,\ \forall q \in Q$ равносильно неравенству (2), то данная задача приводит к задаче минимизации максимального отклонения множеств $X(t_1,u,q),\ q \in Q$, от терминального множества, т.е. к задаче

$$\sup_{q\in Q}\ \sup_{\xi\in X(t_1,u.q)} \rho(\xi,Y) \to \min,\ u \in U \tag{3}$$

Управление $u^* \in U$, минимизирующий функционал

$$\varphi(u) = \sup_{q\in Q}\ \sup_{\xi\in X(t_1,u.q)} \rho(\xi,Y) \tag{4}$$

($\varphi(u^*) = \min\limits_{u \in U} \varphi(u)$), назовём оптимальным управлением в задаче (3). Задача (3) входит в класс минимаксных задач управления для дифференциальных включений[3,4]. Займемся изучением необходимых и достаточных условий оптимальности для задачи (3). В дальнейшем будем предполагать, что терминальное множество $Y$ является выпуклым компактом из $R^n$. Для изучения задачи (3) воспользуемся следующим представлением ансамбля траекторий системы (1)

$$X(t_1, u, q) = F(t_1, t_0)D + \int\limits_{t_0}^{t_1} F(t_1, t)b(t, u(t), q)dt \qquad (5)$$

где $F(t, \tau)-$ фундаментальная матрица решений уравнения $\dot{x} = A(t)x$, т.е.

$$\frac{\partial F(t, \tau)}{\partial t} = A(t)F(t, \tau), \ F(\tau, \tau) = E,$$

$E-$ единичная $n \times n-$ матрица. Справедливость формулы (5) следует из результатов работы [3].

Используя формулу (5), свойства опорных функций и интеграла от многозначных отображений, легко убедиться, что справедлива

**Лемма1.** При любых $(u, q) \in U \times Q$ множество $X(t_1, u, q)$ является выпуклым компактом из $R^n$ и для опорной функции этого множества имеет место равенство

$$C(X(t_1, u, q), \psi) = C(F(t_1, t_0)D, \psi) + \int\limits_{t_0}^{t_1} C(F(t_1, t)b(t, u(t), q), \psi)dt \qquad (6)$$

**Лемма 2.** Для функционала (4) справедливо равенство

$$\varphi(u) = \max_{\|\psi\|=1} \overline{conc}_{\psi}[\max_{q \in Q} C(X(t_1, u, q), \psi) - C(Y, \psi)] \qquad (7)$$

где $\overline{conc} f-$ вогнутое замыкание функции $f$.

Доказательство. Учитывая, что $\|x\| = \sqrt{(x, x)} = \max\limits_{\|\psi\| \le 1} (x, \psi)$, имеем:

$$\rho(\xi, Y) = \inf_{y \in Y} \|\xi - y\| = \inf_{y \in Y} \max_{\|\psi\| \le 1} (\xi - y, \psi).$$

Используем теорему о минимаксе [1,стр.368]. Тогда получим

$$\rho(\xi, Y) = \max_{\|\psi\| \le 1} [(\xi, \psi) - \sup_{y \in Y} (y, \psi)] = \max_{\|\psi\| \le 1} [(\xi, \psi) - C(Y, \psi)].$$

Следовательно,

$$\varphi(u) = \sup_{q\in Q} \sup_{\xi\in X(t_1,u,q)} \rho(\xi, Y) = \max_{\|\psi\|\le 1} [\sup_{q\in Q} C(X(t_1,u,q),\psi) - C(Y,\psi)] =$$

$$= \max_{\|\psi\|=1} \overline{\underset{\psi}{conc}}[\max_{q\in Q} C(X(t_1,u,q),\psi) - C(Y,\psi)].$$

Лемма доказана.

**Теорема 1.** Для того, чтобы управление $u^*(t), t\in T$ , было оптимальным в задаче (3), необходимо и достаточно существовании вектора $\psi^*\in R^n, \|\psi^*\|\le 1$, такого, что пара $(u^*,\psi^*)$ составляла седловую точку функционала

$$\mu(u,\psi) = \overline{\underset{\psi}{conc}}[C(F(t_1,t_0)D,\psi)+$$

$$+\max_{q\in Q}\int_{t_0}^{t_1} C(F(t_1,t)b(t,u(t),q),\psi)dt - C(Y,\psi)] \qquad (8)$$

на множестве пар $U\times S$, где $S=\{\psi:\ \|\psi\|\le 1\}$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $u^*\in U-$ оптимальное управление, т.е. $\varphi(u^*)=\min_{u\in U}\varphi(u)$. Тогда в силу (6) - (8) имеем

$$\max_{\|\psi\|\le 1} \overline{\underset{\psi}{conc}}[C(F(t_1,t_0)D,\psi)+$$

$$+\max_{q\in Q}\int_{t_0}^{t_1} C(F(t_1,t)b(t,u^*(t),q),\psi)dt - C(Y,\psi)] = \min_{u\in U}\max_{\|\psi\|\le 1}\mu(u,\psi) \quad (9).$$

Пусть $\psi^*\in R^n, \|\psi^*\|\le 1$, - точка глобального максимума функции

$$\gamma(\psi) = \min_{u\in U}\overline{\underset{\psi}{conc}}[C(F(t_1,t_0)D,\psi)+$$

$$+\max_{q\in Q}\int_{t_0}^{t_1} C(F(t_1,t)b(t,u(t),q),\psi)dt - C(Y,\psi)]$$

на $S$. Тогда из (9) получим

$$\mu(u^*,\psi^*) \le \max_{\|\psi\|\le 1}\mu(u^*,\psi) = \min_{u\in U}\max_{\|\psi\|\le 1}\mu(u,\psi).$$

Используя теорему о минимаксе, отсюда имеем

$$\mu(u^*,\psi^*) \le \min_{u\in U}\max_{\|\psi\|\le 1}\mu(u,\psi) = \max_{\|\psi\|\le 1}\min_{u\in U}\mu(u,\psi) = \min_{u\in U}\mu(u,\psi^*).$$

Следовательно, имеет место условие

$$\mu(u^*,\psi^*) = \min_{u\in U}\mu(u,\psi^*). \tag{10}$$

Далее, так как

$$\max_{\|\psi\|\le 1}\mu(u^*,\psi) = \min_{u\in U}\max_{\|\psi\|\le 1}\mu(u,\psi) = \max_{\|\psi\|\le 1}\min_{u\in U}\mu(u,\psi) = \min_{u\in U}\mu(u,\psi^*),$$

то согласно (10)

$$\mu(u^*,\psi^*) = \max_{\|\psi\|\le 1}\mu(u^*,\psi). \tag{11}$$

Соотношения (10), (11) показывают, что

$$\mu(u^*,\psi) \le \mu(u^*,\psi^*) \le \mu(u,\psi^*),\ \forall (u,\psi)\in U\times S. \tag{12}$$

т.е. пара $(u^*,\psi^*)$ является седловой точкой функционала $\mu(u,\psi)$ на $U\times S$.

**Достаточность.** Пусть $(u^*,\psi^*)\in U\times S$ является седловой точкой функционала (8), т.е. имеет место соотношение (12). Тогда:

$$\min_{u\in U}\max_{\|\psi\|\le 1}\mu(u,\psi) \le \max_{\|\psi\|\le 1}\mu(u^*,\psi) \le \mu(u^*,\psi^*) \le \min_{u\in U}\mu(u,\psi^*) \le$$

$$\le \max_{\|\psi\|\le 1}\min_{u\in U}\mu(u,\psi) = \min_{u\in U}\max_{\|\psi\|\le 1}\mu(u,\psi).$$

Следовательно,

$$\min_{u\in U}\max_{\|\psi\|\le 1}\mu(u,\psi) = \max_{\|\psi\|\le 1}\mu(u^*,\psi) \qquad (13),$$

$$\max_{\|\psi\|\le 1}\min_{u\in U}\mu(u,\psi) = \min_{u\in U}\mu(u,\psi^*).$$

Полученное равенство (13) показывает, что $u^*(t), t\in T$, является оптимальным управлением в задаче (3).

Введем обозначение

$$\delta(u,\psi) = C(F(t_1,t_0)D,\psi) + \max_{q\in Q}\int_{t_0}^{t_1} C(F(t_1,t)b(t,u(t),q),\psi)dt - C(Y,\psi) \qquad (14).$$

В силу (8) имеем $\mu(u,\psi) = \overline{conc}_{\psi}\delta(u,\psi)$. Учитывая, что $\varphi(u) = \max\limits_{\|\psi\|\le 1}\mu(u,\psi) = \max\limits_{\|\psi\|\le 1}\delta(u,\psi)$ и рассуждая аналогично достаточной части доказательства теоремы 1, получим следующий результат.

**Теорема 2.** Пусть $(u^*,\psi^*) \in U\times S$ является седловой точкой функционала (14), т.е.

$$\delta(u^*,\psi) \le \delta(u^*,\psi^*) \le \delta(u,\psi^*),\ \forall(u,\psi)\in U\times S. \tag{15}$$

Тогда $u^*(t), t\in T$,- оптимальное управление в задаче (3).

Следует заметить, что каждая седловая точка функционала (14) является также седловой точкой функционала (8). Однако, так как функционал $\mu(u,\psi)$ определяется через дополнительной операции вогнутого замыкания, то ясно, что проверка условия (15) более удобна чем проверки условия (12).

Условие (15) равносильно равенствам

$$\delta(u^*,\psi^*) = \min_{u\in U}\delta(u,\psi^*), \quad \delta(u^*,\psi^*) = \max_{\psi\in S}\delta(u,\psi^*).$$

Согласно (14) первое из этих соотношений равносильно равенству

$$\min_{u\in U}\max_{q\in Q}\int\limits_{t_0}^{t_1} C(F(t_1,t)b(t,u(t),q),\psi^*)dt =$$

$$= \max_{q\in Q}\int\limits_{t_0}^{t_1} C(F(t_1,t)b(t,u^*(t),q),\psi^*)dt. \tag{16}$$

Пусть $u^*\in U$, $q^*\in Q$, такие, что

$$\min_{v\in V} C(F(t_1,t)b(t,v,q^*),\psi^*) = C(F(t_1,t)b(t,u^*(t),q^*),\psi^{\ *}),\ t\in T, \tag{17}$$

$$\max_{q\in Q}\int\limits_{t_0}^{t_1} C(F(t_1,t)b(t,u^*(t),q),\psi^{\ *})dt = \int\limits_{t_0}^{t_1} C(F(t_1,t)b(t,u^*(t),q^*),\psi^{\ *})dt. \tag{18}$$

Тогда, используя теорему о минимаксе, имеем:

$$\min_{u\in U}\max_{q\in Q}\int\limits_{t_0}^{t_1} C(F(t_1,t)b(t,u(t),q),\psi^*)dt =$$

$$=\max_{q\in Q}\int\limits_{t_0}^{t_1}\min_{v\in V} C(F(t_1,t)b(t,v,q),\psi^*)dt \geq$$

$$\geq \int\limits_{t_0}^{t_1}\min_{v\in V} C(F(t_1,t)b(t,v,q^*),\psi^{\ *})dt = \int\limits_{t_0}^{t_1} C(F(t_1,t)b(t,u^*(t),q^*),\psi^{\ *})dt =$$

$$=\max_{q\in Q}\int\limits_{t_0}^{t_1} C(F(t_1,t)b(t,u^*(t),q),\psi^{\ *})dt \geq$$

$$\geq \max_{q\in Q}\int\limits_{t_0}^{t_1}\min_{v\in V} C(F(t_1,t)b(t,v,q),\psi^{\ *})dt$$

Следовательно, имеет место (16). Таким образом, справедлива

**Теорема 3.** Пусть $u^*\in U$, $\psi^*\in S$ ,$q^*\in Q$ , такие, что выполняются условия (17), (18) и $\delta(u^*,\psi^*)=\max\limits_{\psi\in S}\delta(u^*,\psi)$. Тогда $u^*(t), t\in T$,- оптимальное управление в задаче (3). Пусть теперь

$$b(t,u,q)=B(t)u+C(t)q+G(t). \tag{19}$$

где $B(t)-n\times m$-матрица, $C(t)-n\times k$-матрица, $G(t)\subset R^n$. Предположим, что элементы матриц $B(t)$ и $C(t)$ суммируемы на $T$, при любых $t\in T$ множество $G(t)$ компакт из $R^n$, а многозначное отображение $t\to G(t)$ измеримо, причем $\sup\limits_{\xi\in G(t)}\|\xi\|\leq g(t), \quad \forall t\in T$, где $g(t)$- суммируемая на $T$ функция. Тогда из теоремы 1 вытекает, что для оптимальности управления $u^*(t), t\in T$, необходимо и достаточно существование вектора $\psi^*\in S$, такого, что пара $(u^*,\psi^*)$ составляла седловую точку функционала

$$\omega(u,\psi)=\int\limits_{t_0}^{t_1}(F(t_1,t)B(t)u(t),\psi)dt+$$

$$+\overline{\underset{\psi}{conc}} C(F(t_1,t_0)D,\psi)+\int_{t_0}^{t_1} C(F(t_1,t)G(t),\psi)+$$

$$+\max_{q\in Q}\int_{t_0}^{t_1}(F(t_1,t)C(t)q,\psi)dt- C(Y,\psi)]. \tag{20}$$

Для функционала (20) условие минимума $\omega(u^*,\psi^*)=\min\limits_{u\in U}\omega(u,\psi^*)$ эквивалентно условию

$$\int_{t_0}^{t_1}\min_{v\in V}(F(t_1,t)B(t)v,\psi^{\ *})dt=\int_{t_0}^{t_1}(F(t_1,t)B(t)u^*(t),\psi^{\ *})dt, \tag{21}$$

а условие (21) равносильно к выполнении равенства

$$\min_{v\in V}(F(t_1,t)B(t)v,\psi^*)=(F(t_1,t)B(t)u^*(t),\psi^{\ *}) \tag{22}$$

почти всюду на $T$. Итак, из теоремы 1 получим

**Следствие 1.** Пусть в (1) $b(t,u,q)$ имеет вид (19). Тогда для оптимальности управления $u^*(t), t\in T$, необходимо и достаточно существование вектора $\psi^*\in S$, удовлетворяющего условию $\omega(u^*,\psi^*)=\max\limits_{\psi\in S}\omega(u^*,\psi)$ и выполнения равенства (22) почти всюду на $T$.

Применяя теорему 3 к задаче (3) с правой частью вида (19), получим

**Следствие 2.** Если пара $(u^*,\psi^*)\in U\times S$, такая, что условие (22) выполняется почти всюду на $T$ и $\psi^*\in S$- точка глобального максимума функции

$$\varsigma(\psi)=\int_{t_0}^{t_1}(F(t_1,t)B(t)u^*(t),\psi)dt+C(F(t_1,t_0)D,\psi)+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}C(F(t_1,t)G(t),\psi)+\max_{q\in Q}\int_{t_0}^{t_1}(F(t_1,t)C(t)q,\psi)dt- C(Y,\psi),$$

то $u^*(t), t\in T$, является оптимальным управлением в задаче (3).

**Литература**

1. Куржанский А.Б. Управление и наблюдения в условиях неопределенности.-М.: Наука, 1977.- 392с.

2. Благодатских В.И. Теория дифференциальных включений. Ч. I. - М.: изд-во МГУ, 1979. - 89 с.

3. Отакулов С. Необходимое условия оптимальности в одной минимаксной задаче управления // Кибернетика и системный анализ. -1992, №4.-с 117-126.

4. Отакулов С., Мавлонов Н.М. Об одной минимаксной задаче оптимального управления // Узб. Мат. журнал. - 1998 , №5 . -с. 59-65.

Самаркандский государственный университет

Дата поступления 22.01.05

Uzbek Mathematical
Journal, 2008,№2, pp.90-98

УДК 517.98

**О норме дифференцирований на алгебре ограниченных операторов в модулях Капланского-Гильберта**

**Ж.Э.Рузиев**

Mazkur ishda o‘lchovli funksiyalar halqasi ustidagi Kaplanskiy-Gilbert modulida aniqlangan $l$-chegaralangan $l$-chiziqli operatorlar algebrasidagi $l$-chiziqli $D$ differensiallashning normasi $2\inf\{\|A\| : \mathcal{D} = \mathcal{D}_A\}$ ga tengligi isbotlangan.

In this paper it is proved that the norm of the $l$-linear derivation $D$ on the algebras of all $l$-bounded $l$-linear operators on the module of Kaplansky-Hilbert over the ring of measurable finctions equal to $2\inf\{\|A\| : \mathcal{D} = \mathcal{D}_A\}$.

Изучение дифференцирований в операторных алгебрах берет начало с работы И.Капланского [1], где в частности было доказано, что всякое дифференцирование на $AW^*$-алгебрах типа I является внутренним. В последнее время интенсивно изучаются дифференцирования на алгебрах неограниченных операторов (см. [2-4]). В работе [5] была вычислена норма дифференцирований на алгебре $B(H)$ всех ограниченных линейных операторов на гильбертовом пространстве $H$. А в [6] этот результат был обобщен для произвольной алгебры фон Неймана.

Настоящая работа посвящена векторному варианту теоремы Стемпфли-Жидо для алгебры ограниченных линейных операторов в модулях Капланского-Гильберта.

Пусть $(\Omega, \Sigma, \mu)$ – измеримое пространство с полной конечной счетно-аддитивной мерой $\mu$, $l = L^0(\Omega, \Sigma, \mu)$ – алгебра всех комплексных измеримых функций на $(\Omega, \Sigma, \mu)$ (равные почти всюду функции отождествляются), $E$ – комплексное векторное пространство.

Отображение $\|\cdot\| : E \longrightarrow l$ называется $l$-значной нормой на $E$, если для любых $x, y \in E, \lambda \in \mathbb{C}$ имеют место соотношения:

$\|x\| \geq 0; \|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0;$ $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|;$ $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$

Пара $(E, \|\cdot\|)$ называется *решеточно-нормированным* пространством (РНП) над $l$. Говорят, что РНП $E$ $d$-разложимо, если для любого $x \in E$ и для любого разложения $\|x\| = \lambda_1 + \lambda_2$ в сумму неотрицательных дизъюнктных элементов найдутся такие $x_1, x_2 \in E$, что $x = x_1 + x_2$ и $\|x_1\| = \lambda_1, \|x_2\| = \lambda_2$. Сеть $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ элементов из $E$ называется $(bo)$-сходящейся к $x \in E$, если сеть $(\|x_\alpha - x\|)_{\alpha \in A}$ $(o)$-сходится к нулю в $l$ (напомним, что $(o)$-сходимость сети из $l$ равносильна ее сходимости почти всюду). Пространством *Банаха-Канторовича* (ПБК) над $l$ называется $(bo)$-полное $d$-разложимое РНП над $l$ (см. [7]).

Рассмотрим произвольный модуль $H$ над $l$. Отображение $\langle\cdot,\cdot\rangle$ : $H \times H \to l$ называется $l$-значным внутренним произведением, если для всех $x, y, z \in H$, $\lambda \in l$ имеют место следующие соотношения: $\langle x, x\rangle \geq 0$; $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$; $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$; $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$; $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$.

Если $\langle\cdot,\cdot\rangle : H \times H \to l$ есть $l$-значное внутреннее произведение, то формула $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ определяет $d$-разложимую $l$-значную норму на $H$. Пара $\langle H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ называется *модулем Гильберта-Капланского,* если $(H, \|\cdot\|)$ ПБК над $l$(см. [7]).

Пусть $E$ и $F$ ПБК над $l$. Оператор $T : E \to F$ называется $l$-линейным, если $T(\lambda_1 x + \lambda_2 y) = \lambda_1 T(x) + \lambda_2 T(y)$ для всех $\lambda_1, \lambda_2 \in l, x, y \in E$. Оператор $T : E \to F$ называется $l$-ограниченным, если существует $c \in l$ такое, что $\|T(x)\| \leq c\|x\|$ для всех $x \in E$. Множество всех $l$-линейных $l$-ограниченных операторов, действующих из $E$ в $F$, обозначим через $B(E, F)$. В частности, если $E = F$, то $B(E) = B(E, F)$.

Для $l$-ограниченного $l$-линейного оператора $T$ положим $\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : \|x\| \leq \mathbf{1}\}$. Имеет место неравенство $\|T(x)\| \leq \|T\|\|x\|, x \in E$ (см. [7]).

Пусть $\mathcal{X}$ – отображение, ставящее в соответствие каждой точке $\omega \in \Omega$ некоторое банахово пространство $(\mathcal{X}(\omega), \|\cdot\|_{\mathcal{X}(w)})$, где $\mathcal{X}(w) \neq \{0\}$ для всех $w \in \Omega$. *Сечением* $\mathcal{X}$ называется функция $u$, определенная почти всюду в $\Omega$ и принимающая значение $u(\omega) \in \mathcal{X}(\omega)$ для всех $\omega \in \mathrm{dom}(u)$, где $\mathrm{dom}(u)$ есть область определения сечения $u$.

Пусть $L$ – некоторое множество сечений.

**Определение 1.** [8]. Пара $(\mathcal{X}, L)$ называется *измеримым расслоением банаховых пространств* над $\Omega$, если

1) $\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 \in L$ для всех $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ и $c_1, c_2 \in L$, где $\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 : \omega \in \mathrm{dom}(c_1) \cap \mathrm{dom}(c_2) \to \lambda_1 c_1(\omega) + \lambda_2 c_2(\omega)$;

2) функция $\|c\| : \omega \in \mathrm{dom}(c) \to \|c(\omega)\|_{\mathcal{X}(w)}$ измерима при всех $c \in L$;

3) для каждой точки $\omega \in \Omega$ множество $\{c(\omega) : c \in L, \omega \in \mathrm{dom}(c)\}$ плотно в $\mathcal{X}(\omega)$.

Сечение $s$ называется ступенчатым, если $s(\omega) = \sum\limits_{i=1}^{n} \chi_{A_i}(\omega) c_i(\omega)$, где $c_i \in L, A_i \in \Sigma, i = \overline{1,n}$. Сечение $u$ называется измеримым, если найдется такая последовательность $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ступенчатых сечений, что $\|s_n(\omega) - u(\omega)\|_{\mathcal{X}(w)} \to 0$ для почти всех $\omega \in \Omega$.

Пусть $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{X})$ – множество всех измеримых сечений. Символом $L^0(\Omega, \mathcal{X})$ обозначим факторизацию $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{X})$ по отношению равенства почти всюду. Через $\hat{u}$ обозначим класс из $L^0(\Omega, \mathcal{X})$, содержащий сечение $u \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{X})$. Отметим, что функция $\omega \to \|u(\omega)\|_{\mathcal{X}(w)}$ измерима для любого $u \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{X})$. Класс эквивалентности, содержащий функцию $\|u(\omega)\|_{\mathcal{X}(\omega)}$, обозначим через $\|\hat{u}\|$.

В [8] доказано, что $(L^0(\Omega, \mathcal{X}), \|\cdot\|)$ является ПБК над $l$.

Если $\mathcal{X}$ – ИБР и $(\mathcal{X}(\omega), \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{X}(\omega)})$ – гильбертово пространство для всех $\omega \in \Omega$, то $\mathcal{X}$ называется измеримым расслоением гильбертовых пространств, при этом формула

$$\langle \hat{u}, \hat{v} \rangle = \langle u(\omega), v(\omega) \rangle_{\mathcal{X}(\omega)}, \quad (u, v \in L^0(\Omega, \mathcal{X}))$$

задает на $L^0(\Omega, \mathcal{X})$ $l$-значное внутреннее произведение. В [9] было показано, что $(L^0(\Omega, \mathcal{X}), \langle\cdot,\cdot\rangle)$ – МКГ над $l$.

Пусть $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$ – множество всех существенно ограниченных комплекснозначных измеримых функций на $(\Omega, \Sigma, \mu)$ и

$$L^\infty(\Omega) = \{f \in l : \exists \lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0, |f| \le \lambda \mathbf{1}\},$$

т.е. $L^\infty(\Omega)$ есть факторизация множество $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$ по отношению равенство почти всюду. Положим

$$\mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathcal{X}) = \{u \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{X}) : \|u(\omega)\|_{\mathcal{X}(w)} \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)\}$$

и

$$L^\infty(\Omega, X) = \{\hat{u} \in L^0(\Omega, \mathcal{X}) : \|\hat{u}\| \in L^\infty(\Omega)\}.$$

Пусть $\nabla$ – булева алгебра всех идемпотентов в $l$. Если $(u_\alpha) \subset L^0(\Omega, \mathcal{X})$ и $(\pi_\alpha)$ – разбиение единицы в $\nabla$, то ряд $\sum\limits_\alpha \pi_\alpha u_\alpha$ $(bo)$-сходится в $L^0(\Omega,\mathcal{X})$ и сумма этого ряда называется перемешиванием $u_\alpha$ относительно $\pi_\alpha$. Это сумма обозначается через $\mathrm{mix}(\pi_\alpha u_\alpha)$. Для $K\subset L^0(\Omega,\mathcal{X})$ через $\mathrm{mix}K$ обозначается множество всех перемешиваний произвольных семейств элементов из $K$. Множество $K$ называется циклическим, если $\mathrm{mix}K=K$ ([7]).

Рассмотрим произвольный лифтинг $p: L^\infty(\Omega)\to\mathcal{L}^\infty(\Omega)$ (см. [7], [8]).

**Определение 2.** [9]. Отображение $l_{\mathcal{X}}: L^0(\Omega,\mathcal{X})\to\mathcal{L}^\infty(\Omega,\mathcal{X})$ называется *векторно-значным лифтингом* (ассоциированным с лифтингом $p$), если для всех $\hat{u},\hat{v}\in L^0(\Omega,\mathcal{X})$ и $\lambda\in L^\infty(\Omega)$ имеют место следующие соотношения:

1) $l_{\mathcal{X}}(\hat{u})\in\hat{u}$, $\mathrm{dom}\, l_{\mathcal{X}}(\hat{u})=\Omega$;

2) $\|l_{\mathcal{X}}(\hat{u})(\omega)\|_{\mathcal{X}(w)}=p(\|\hat{u}\|)(w)$;

3) $l_{\mathcal{X}}(\hat{u}+\hat{v})=l_{\mathcal{X}}(\hat{u})+l_{\mathcal{X}}(\hat{v})$;

4) $l_{\mathcal{X}}(\lambda\hat{u})=p(\lambda)l_{\mathcal{X}}(\hat{u})$;

5) множество $\{l_{\mathcal{X}}(\hat{u})(\omega):\hat{u}\in L^\infty(\Omega,\mathcal{X})\}$ плотно в $\mathcal{X}(\omega)$ для всех $\omega\in\Omega$.

Известно [9], что для всякого модуля Гильберта-Капланского $X$ над $l$ существует измеримое расслоение гильбертовых пространств $(\mathcal{X},L)$ такое, что $X$ изометрически изоморфен $L^0(\Omega,\mathcal{X})$, и на $L^\infty(\Omega,\mathcal{X})$ существует векторно-значный лифтинг, ассоциированный с некоторым числовым лифтингом $p$.

Для доказательства основного результата настоящей работы нам понадобятся несколько вспомогательных лемм.

Напомним, что множество $A\subset L^\infty(\Omega)$ называется *порядково ограниченным*, если существует элемент $c\in L^\infty(\Omega)$ такой, что $|\lambda|\le c$ для всех $\lambda\in A$ [7].

**Лемма 1.** *Пусть $A$ – порядково ограниченное сверху (снизу) циклическое подмножество $L^\infty(\Omega)$ и $c_1=\sup\{\lambda:\lambda\in A\}$ (соответственно $c_2=\inf\{\lambda:\lambda\in A\}$). Тогда для любого $\varepsilon>0$, существует такой $\lambda_\varepsilon\in A$, что $c_1\le\lambda_\varepsilon+\varepsilon\mathbf{1}$ (соответственно $c_2\ge\lambda_\varepsilon-\varepsilon\mathbf{1}$).*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $c_1=\sup\{\lambda:\lambda\in A\}$. Пусть $\varepsilon>0$. Положим

$$\nabla_0=\{\pi\in\nabla:\exists\lambda\in A,\pi\lambda\ge\pi(c_1-\varepsilon\mathbf{1})\},$$

$$\pi_0=\sup\nabla_0.$$

По определению проектора $\pi_0$ для всех $\lambda \in A$, имеем $\pi_0^\perp \lambda \leq \pi_0^\perp(c_1 - \varepsilon\mathbf{1})$. Отсюда

$$\pi_0^\perp c_1 = \pi_0^\perp \sup\{\lambda : \lambda \in A\} = \sup\{\pi_0^\perp \lambda : \lambda \in A\} \leq \pi_0^\perp(c_1 - \varepsilon\mathbf{1}),$$

т.е. $\pi_0^\perp c_1 \leq \pi_0^\perp(c_1 - \varepsilon\mathbf{1})$. Значить, $\pi_0^\perp = 0$, т.е. $\pi_0 = \mathbf{1}$. Возьмем счетное семейство $(\pi_n) \subset \nabla_0$ такое, что $\bigvee\limits_{n=1}^{\infty} \pi_n = \pi_0 = \mathbf{1}$. Так как $\pi_n \in \nabla_0$, то найдутся $\lambda_n \in A$ такие, что $\pi_n \lambda_n \geq \pi_n(c_1 - \varepsilon\mathbf{1})$. Пусть

$$q_1 = \pi_1,$$

$$q_k = \pi_k \wedge (\bigvee_{i=1}^{k-1} q_i)^\perp, \quad (k \geq 2).$$

Тогда $q_i q_j = 0$ при $i \neq j$ и $\bigvee\limits_{n=1}^{\infty} q_n = \mathbf{1}$. Положим

$$\lambda_\varepsilon = \sum_{n=1}^{\infty} q_n \lambda_n.$$

Из цикличности $A$ имеем, что $\lambda_\varepsilon \in A$. Тогда $\lambda_\varepsilon = \sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n \lambda_n \geq \sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n(c_1 - \varepsilon\mathbf{1}) = c_1 - \varepsilon\mathbf{1}$. Следовательно, $\lambda_\varepsilon \geq c_1 - \varepsilon\mathbf{1}$, т.е. $c_1 \leq \lambda_\varepsilon - \varepsilon\mathbf{1}$. Лемма доказана.

**Лемма 2.** *Пусть $a, b \in L^\infty(\Omega, \mathcal{X})$, $c = \inf\{\|a + \lambda b\| : \lambda \in L^\infty(\Omega, \mathcal{X})\}$. Тогда $p(c)(\omega) = c_\omega$, где $c_\omega = \inf\{\|a_\omega + t b_\omega\|_{\mathcal{X}(\omega)} : t \in \mathbb{C}\}$, $\omega \in \Omega$, и $a_\omega = l_{\mathcal{X}}(a)(\omega)$, $b_\omega = l_{\mathcal{X}}(b)(\omega)$.*

Доказательство. Сперва докажем, что $p(c)(\omega) \leq c_\omega$. Фиксируем $\omega \in \Omega$ и $\varepsilon > 0$. Возьмем $t_\varepsilon \in \mathbb{C}$ такое, что

$$c_\omega \geq \|a_\omega + t_\omega b_\omega\| - \varepsilon. \tag{1}$$

Тогда $c \leq \|a + t_\varepsilon b\|$. Применив лифтинг $p$ к последному неравенству, получим

$$p(c)(\omega) \leq p(\|a + t_\varepsilon b\|)(\omega) = \|l_{\mathcal{X}}(a + t_\varepsilon b)(\omega)\|_{\mathcal{X}(\omega)} = \|a_\omega + t_\omega b_\omega\|_{\mathcal{X}(\omega)},$$

т.е. $p(c)(\omega) \leq \|a_\omega + t_\omega b_\omega\|_{\mathcal{X}(\omega)}$. Из последнего неравенства и (1) имеем, что

$$p(c)(\omega) \leq c_\omega + \varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$, получим, что $p(c)(\omega) \leq c_\omega$.

Теперь докажем, что $p(c)(\omega) \geq c_\omega$. В силу леммы 1 для любого $\varepsilon > 0$ существует $\lambda_\varepsilon \in L^\infty(\Omega)$ такое, что

$$c \geq \|a + \lambda_\varepsilon b\| - \varepsilon \mathbf{1}.$$

Отсюда

$$p(c)(\omega) \geq p(\|a + \lambda_\varepsilon b\|)(\omega) - \varepsilon p(\mathbf{1})(\omega) = \|a_\omega + p(\lambda_\varepsilon)(\omega) b_\omega\|_{\mathcal{X}(\omega)} - \varepsilon =$$

$$\|a_\omega + t_\varepsilon b_\omega\|_{\mathcal{X}(\omega)} - \varepsilon \geq c_\omega - \varepsilon,$$

т.е. $p(c)(\omega) \geq c_\omega - \varepsilon$. Откуда имеем $p(c)(\omega) \geq c_\omega$, и следовательно, $p(c)(\omega) = c_\omega$. Лемма доказана.

Известно [10], что для всякого $l$-ограниченного $l$-линейного оператора $T : L^0(\Omega, \mathcal{X}) \to L^0(\Omega, \mathcal{X})$ существует семейство ограниченных линейных операторов $\{T_\omega : \mathcal{X}(\omega) \to \mathcal{X}(\omega)\}$ такое, что $T(x) = \widehat{T_\omega(x(\omega))}$ для всех $x \in L^0(\Omega, \mathcal{X})$. Если $\|T\| \in L^\infty(\Omega)$, то

$$l_{\mathcal{X}}(T(x))(\omega) = T_\omega(l_{\mathcal{X}}(x)(\omega)), \tag{2}$$

для всех $x \in L^\infty(\Omega, \mathcal{X})$, $\omega \in \Omega$ и

$$\|T_\omega\| = l_{\mathcal{X}}(\|T\|)(\omega), \ (\omega \in \Omega). \tag{3}$$

Линейный оператор $\mathcal{D} : B(L^0(\Omega, \mathcal{X})) \to B(L^0(\Omega, \mathcal{X}))$ называется *дифференцированием*, если $\mathcal{D}(AB) = \mathcal{D}(A)B + A\mathcal{D}(B)$ для всех $A, B \in B(L^0(\Omega, \mathcal{X}))$.

Дифференцирование $\mathcal{D}$ называется *внутренним*, если существует $A \in B(L^0(\Omega, \mathcal{X}))$ такой, что

$$\mathcal{D}(X) = AX - XA$$

для всех $X \in B(L^0(\Omega, \mathcal{X}))$.

Пусть $\mathcal{D} : B(L^0(\Omega, \mathcal{X})) \to B(L^0(\Omega, \mathcal{X}))$ – $l$-линейное дифференцирование. Согласно [11,Теорема 2.1] $\mathcal{D}$ является внутренним, т.е.

$$\mathcal{D}(X) = AX - XA \qquad (X \in B(L^0(\Omega, \mathcal{X}))),$$

для некоторого $A \in B(L^0(\Omega, \mathcal{X}))$. В этом случае дифференцирование $\mathcal{D}$ обычно обозначается через $\mathcal{D}_A$. В частности, $\mathcal{D}$ является $l$-ограниченным.

**Лемма 3.** *Пусть $\mathcal{X}$ – измеримое расслоений гильбертовых пространств с векторно-значным лифтингом $l_{\mathcal{X}}$, $\mathcal{D} : B(L^0(\Omega, \mathcal{X})) \to B(L^0(\Omega, \mathcal{X}))$ – $l$-линейное дифференцирование и $\mathcal{D}_\omega : B(\mathcal{X}(\omega)) \to B(\mathcal{X}(\omega))$ – разложение $\mathcal{D}$. Тогда $\mathcal{D}_\omega$ является дифференцированием для почти всех $\omega \in \Omega$, при этом если $\mathcal{D} \equiv \mathcal{D}_A$, то $\mathcal{D}_\omega(X_\omega) = A_\omega X_\omega - X_\omega A_\omega$ для всех $X_\omega \in B(X(\omega))$, где $A_\omega : \mathcal{X}(\omega) \to \mathcal{X}(\omega)$ определяется формулой (2).*

Доказательство. Поскольку $\mathcal{D}$ – дифференцирование, то $\mathcal{D}(XY) = \mathcal{D}(X)Y + X\mathcal{D}(Y)$ для всех $X, Y \in B(L^0(\Omega, \mathcal{X}))$.

Для $x \in L^0(\Omega, \mathcal{X})$ имеем

$$\mathcal{D}_\omega(l_{\mathcal{X}}(X)(x)(\omega) l_{\mathcal{X}}(Y)(x)(\omega)) =$$

$$= \mathcal{D}_\omega(l_{\mathcal{X}}(X)(x)(\omega)) l_{\mathcal{X}}(Y)(x)(\omega) + l_{\mathcal{X}}(X)(x)(\omega)\mathcal{D}(l_{\mathcal{X}}(Y)(x)(\omega)).$$

Откуда следует, что $\mathcal{D}_\omega : B(\mathcal{X}(\omega)) \to B(\mathcal{X}(\omega))$ – дифференцирование. Если $\mathcal{D} = \mathcal{D}_A$, где $A \in B(L^0(\Omega, \mathcal{X}))$, то имеем $\mathcal{D}_\omega(X_\omega) = A_\omega X_\omega - X_\omega A_\omega$, где $A_\omega(x)(\omega) = l_{\mathcal{X}}(A)(x)(\omega),\ x \in L^0(\Omega, \mathcal{X})$. Лемма доказана.

В следующей теореме доказывается векторный вариант теореме Стемпфли-Жидо о норме дифференцирования на $B(L^0(\Omega, \mathcal{X}))$.

**Теорема.** *Пусть $\mathcal{D} : B(L^0(\Omega, \mathcal{X})) \to B(L^0(\Omega, \mathcal{X}))$ – $l$-линейное дифференцирование. Тогда $\|\mathcal{D}\| = 2 \inf\{\|A\| : \mathcal{D} = \mathcal{D}_A\}$.*

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что $\|\mathcal{D}\| \in L^\infty(\Omega)$ (в противном случае следует рассмотреть дифференцирование $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}+\|\mathcal{D}\|}\mathcal{D}$).

Фиксируем $B \in B(L^0(\Omega, \mathcal{X}))$ такой, что $\mathcal{D}(X) = BX - XB$, $X \in B(L^0(\Omega, \mathcal{X}))$. Пусть $A$ – произвольный элемент из $B(L^0(\Omega, \mathcal{X}))$ такой, что $\mathcal{D} = \mathcal{D}_A$. Поскольку центр алгебры $B(L^0(\Omega, \mathcal{X}))$ состоит из элементов вида $\lambda \cdot \mathbf{I}$, $\lambda \in l$, где $\mathbf{I}$ – единица в $B(L^0(\Omega, \mathcal{X}))$. Отсюда $B - A = \lambda \cdot \mathbf{I}$, для некоторого $\lambda \in l$. Следовательно, достаточно показать, что $\|\mathcal{D}\| = c$, где

$$c = 2 \cdot \inf\{\|B + \lambda \mathbf{I}\| : \lambda \in l\}.$$

В силу леммы $\mathcal{D}_\omega(X_\omega) = B_\omega X_\omega - X_\omega B_\omega$ для всех $X_\omega \in B(\mathcal{X}(\omega))$, где $B_\omega,\ X_\omega$ – разложение операторов $B$ и $X$, соответственно.

Согласно [5] имеем, что $\|\mathcal{D}_\omega\| = c_\omega$, где

$$c_\omega = 2 \cdot \inf\{\|B_\omega + t\mathbf{1}_{B(\mathcal{X}(\omega))}\|_{B(\mathcal{X}(\omega))} : t \in \mathbb{C}\}.$$

Из леммы 2 получим, что $p(c)(\omega) = c_\omega$ для всех $\omega \in \Omega$. Отсюда

$$\|\mathcal{D}_\omega\| = p(c)(\omega) \tag{4}$$

для всех $\omega \in \Omega$. Из (3) имеем, что

$$\|\mathcal{D}_\omega\| = p(\|\mathcal{D}\|)(\omega) \tag{5}$$

для всех $\omega \in \Omega$. Из (4), (5) получим, что $\mathcal{D} = c$, т.е. $\|\mathcal{D}\| = 2\ \inf\{\|A\| : \mathcal{D} = \mathcal{D}_A\}$. Теорема доказана.

**Литература**


1. Kaplansky I. Modules over operator algebras // Amer. J. Math. – 1953. – V. 75. – №4. – P. 839 - 858.

2. Аюпов Ш.А., .Заитов А.А, Рузиев Ж.Э. Дифференцирование и автоморфизмы алгебр неограниченных операторов над кольцом измеримых функций // Узб.Мат.Журн., – 2006, – №1, – С. 28-43.

3. Albeverio S., Ayupov Sh.A., Kudaybergenov K.K. Derivations on the Algebra of $\tau$-Compact Operators Affiliated with a Type I von Neumann Algebra // Positivity (принято в печать)

4. Бер А.Ф., Сукочев Ф.А., Чилин В.И. Дифференцирования в коммутативных регулярных алгебрах // Мат.Заметки. – Т.75. – 2004 – №3. – С.453 - 457.

5. Stampfli J.G. The norm of a derivation // Pacific Journal of Mathematics – V.33, – №.3, 1970.

6. Zsido L., The norm of a derivation in a $W^*$-algebra // Proceedings of the American Mathematical Society. – 1973 – V.38.–№1.– P.147-150.

7. Кусраев А. Г. Мажорирумые операторы. – М.: Наука, 2003. – 619 с.

8. Гутман А. Е. Банаховы расслоения в теории решеточно-нормированных пространств // Линейные операторы, согласованные с порядком. – Новосибирск: Изд-во Института математики СО РАН, – 1995. – Т. 29. – С. 63-211.

9. Ганиев Г.И., Арзиев А., Спектр самосопряженных операторов на модуле Гильберта-Капланского над $l$. (сдано - Владикавк. Мат.Журн.)

10. Ганиев И.Г., Кудайбергенов К.К., Теорема Банаха об обратном операторе в пространствах Банаха-Канторовича // Владикавк. Мат.Журн. – 2004, – Т. 7, – №3. – С. 21-25.

11. Albeverio S., Ayupov. Sh.A., Kudaybergenov K. K., Derivations on the Algebra of Measurable Operators Affiliated with a Type I von Neumann Algebra. SFB 611, Universitat Bonn, Preprint, №301, 2006.


Институт математики и
информационных технологий

Дата поступления
16.01.07

Uzbek Mathematical
Journal, 2008,№2, pp.99-106

УДК 517.956

# Нелокальная краевая задача для гиперболического уравнения вырождающегося внутри области

**М.С.Салахитдинов, А.К.Масутова**

Maqolada sohaning ichida buziladigan giperbolik tipdagi tenglama uchun nolokal chegaraviy masala qo'yilgan va tekshirilgan. Masala yechimining yagonaligi va mavjudligi isbotlangan.

In the paper,the non-local boundary value problem is formulated and investigated for a hyperbolik equation degenerated interior to the domain. Uniqueness and existence of the solution of the problem are proved.

## 1.Введение

Одним из важнейших вопросов теории дифференциальных уравнений с частными производными является изучение начальных и краевых задач для вырождающихся уравнений. Гиперболические уравнения вырождающиеся внутри области впервые были рассмотренны Геллерстетдом.

Ф.Нахушевой[3] была рассмотрена локальная краевая задача в характерестическом четырехугольнике для вырождающегося уравнения

$$|y|^l u_{xx} - u_{yy} = 0,$$

где $l = m$ при $y > 0$, $m > 0$ и $l = n$ при $y < 0$, $n > 0$. с непрерывными условиями склеивания на линии вырождения.

Данная работа посвящена постановке и исследованию нелокальной краевой задачи в характерестическом четырехугольнике для вырождающегося уравнения:

$$|y|^m u_{xx} - u_{yy} = 0, (m > 0). \tag{1.1}$$

Рассмотрим уравнение (1.1) в конечной области $D$, ограниченной характеристиками

$$AC : x - \frac{2}{m+2} y^{\frac{m+2}{2}} = 0, \qquad BC : x + \frac{2}{m+2} y^{\frac{m+2}{2}} = 1,$$

$$AD: x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}=0, \qquad BD: x+\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}=1.$$

уравнения (1.1)

Пусть $D_1=D\cap(y>0)$, $D_2=D\cap(y<0)$, $J$ — интервал $0<x<1$ прямой $y=0$, $2\beta=\dfrac{m}{m+2}$,

$$\theta_0(x_0)=\frac{x_0}{2}+i\left[\frac{m+2}{4}x_0\right]^{\frac{2}{m+2}}, \quad \theta_1(x_0)=\frac{x_0}{2}-i\left[\frac{m+2}{4}x_0\right]^{\frac{2}{m+2}} \qquad (1.2)$$

— аффиксы точек пересечения характеристики уравнения (1.1), исходящей из точки $x_0\in J$, с характеристиками $AC$ и $AD$, соответственно.

2. **Постановка задачи А.**

**Задача А.** *Найти регулярное решение уравнения (1.1)*

$$u(x,y)=\begin{cases} u^+(x,y), & (x,y)\in D_1,\\ u^-(x,y), & (x,y)\in D_2,\end{cases}$$

*обладающее следующими свойствами:*

*1)* $u(x,y)\in C\left(\overline{D}\right)\cap C^1(D_1\cup D_2)\cap C^2(D_1\cup D_2)$;

*2) удовлетворяет условиям*

$$\begin{aligned} &D_{0x}^{\beta}x^{2\beta-1}u\left[\theta_0(x)\right]+u^+(x,0)=c_1(x),\\ &D_{0x}^{1-\beta}u\left[\theta_1(x)\right]+u_y^-(x,0)=c_2(x)\end{aligned} \qquad (2.1)$$

*3) удовлетворяет условию склеивания*

$$\begin{aligned} u^+(x,0)&=u^-(x,0),\\ u_y^+(x,0)&=u_y^-(x,0),\end{aligned} \qquad (2.2)$$

*где* $c_1(x)$, $c_2(x)$ *— заданные функции,* $c_1(x),c_2(x)\in C^3[0,1]$.

**3.Исследование задачи А.**

**Теорема.** *Задача А однозначно разрешима.*

Обозначим

$$\tau_+(x)=u^+(x,0), \quad \nu_+(x)=u_y^+(x,0),$$

$$\tau_-(x)=u^-(x,0), \quad \nu_-(x)=u_y^-(x,0).$$

Выпишем решение задачи Коши для уравнения (1.1) в областях $D_1$ и $D_2$ формулой Дарбу [5]:

$$u^{+}(x,y)=\gamma_1\int\limits_0^1\tau_{+}\left[x+\frac{2}{m+2}y^{\frac{m+2}{2}}(1-2z)\right](z(1-z))^{\beta-1}dz+$$

$$+\gamma_2 y\int\limits_0^1\nu_{+}\left[x+\frac{2}{m+2}y^{\frac{m+2}{2}}(1-2z)\right](z(1-z))^{-\beta}dz,\qquad(3.1)$$

$$u^{-}(x,y)=\gamma_1\int\limits_0^1\tau_{-}\left[x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2z)\right](z(1-z))^{\beta-1}dz+$$

$$+\gamma_2 y\int\limits_0^1\nu_{-}\left[x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(1-2z)\right](z(1-z))^{-\beta}dz,\qquad(3.2)$$

где

$$\gamma_1=\frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)},\qquad \gamma_2=\frac{\Gamma(2-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)}.$$

В силу решения задачи Коши (3.1) для уравнения (1.1), согласно (1.2), нетрудно убедиться, что

$$u\left[\theta_0(x)\right]=\gamma_1\int\limits_0^1\tau_{+}(x-xz)(z(1-z))^{\beta-1}dz+$$

$$+\gamma_2\left(\frac{m+2}{4}x\right)^{1-2\beta}\int\limits_0^1\nu_{+}(x-xz)(z(1-z))^{-\beta}dz.$$

Сделав замену $t=x(1-z)$ получим

$$u\left[\theta_0(x)\right]=\gamma_1\Gamma(\beta)x^{1-2\beta}D_{0x}^{-\beta}x^{\beta-1}\tau_{+}(x)+\gamma_2\Gamma(1-\beta)D_{0x}^{\beta-1}x^{-\beta}\nu_{+}(x).\qquad(3.3)$$

Аналогично,

$$u\left[\theta_1(x)\right]=\gamma_1\Gamma(\beta)x^{1-2\beta}D_{0x}^{-\beta}x^{\beta-1}\tau_{-}(x)-\gamma_2\Gamma(1-\beta)D_{0x}^{\beta-1}x^{-\beta}\nu_{-}(x).\qquad(3.4)$$

Подставляя тождества (3.3)и (3.4)в условие (2.1) задачи А ,далее учитывая тождество для интегродифференциальных операторов ( [5], стр.20, (4.16)) имеем:

$$\gamma_3\tau_+(x) + \gamma_4 D_{0x}^{2\beta-1}\nu_+(x) + x^{1-\beta}\tau_+(x) = c_1(x)x^{1-\beta}. \qquad (3.5)$$

$$\gamma_3 D_{0x}^{1-2\beta}\tau_-(x) - \gamma_4\nu_-(x) + \nu_-(x)x^{\beta} = c_2(x)x^{\beta}, \qquad (3.6)$$

где

$$\gamma_3 = \frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma(\beta)}, \qquad \gamma_4 = \frac{\Gamma(2-2\beta)}{\Gamma(1-\beta)}.$$

Используя условие склеивания (2.2)задачи А,обозначив при этом $\tau(x) = \tau_+(x) = \tau_-(x), \nu(x) = \nu_+(x) = \nu_-(x)$ получим, что

$$\gamma_3\tau(x) + \gamma_4 D_{0x}^{2\beta-1}\nu(x) + x^{1-\beta}\tau(x) = c_1(x)x^{1-\beta}, \qquad (3.7)$$

$$\gamma_3 D_{0x}^{1-2\beta}\tau(x) - \gamma_4\nu(x) + x^{\beta}\nu(x) = c_2(x)x^{\beta}. \qquad (3.8)$$

Из равенства (3.7) найдем $\nu(x)$ :

$$\nu(x) = [D_{0x}^{1-2\beta}c_1(x)x^{1-\beta} - D_{0x}^{1-2\beta}x^{1-\beta}\tau(x) - \gamma_3 D_{0x}^{1-2\beta}\tau(x)]\frac{1}{\gamma_4} \qquad (3.9)$$

и подставим его в (3.8).Тогда равенство (3.8) примет вид:

$$D_{0x}^{1-2\beta}\gamma_4(2\gamma_3 + x^{1-\beta})\tau(x) - x^{\beta}D_{0x}^{1-2\beta}(\gamma_3 + x^{1-\beta})\tau(x) = \gamma_4 c_2(x)x^{\beta} +$$

$$+\gamma_4 D_{0x}^{1-2\beta}c_1(x)x^{1-\beta} - x^{\beta}D_{0x}^{1-2\beta}c_1(x)x^{1-\beta}.$$

Применив в последнем равенстве оператор $D_{0x}^{2\beta-1}$ мы получим

$$\gamma_4(2\gamma_3 + x^{1-\beta})\tau(x) - D_{0x}^{2\beta-1}x^{\beta}D_{0x}^{1-2\beta}(\gamma_3 + x^{1-\beta})\tau(x) = G(x), \qquad (3.10)$$

где

$$G(x) = \gamma_4 D_{0x}^{2\beta-1}c_2(x)x^{\beta} + \gamma_4 c_1(x)x^{1-\beta} - D_{0x}^{2\beta-1}x^{\beta}D_{0x}^{1-2\beta}c_1(x)x^{1-\beta}.$$

Преобразуем второе слагаемое в левой части уравнения (3.10).

$$I(x) = D_{0x}^{2\beta-1}x^{\beta}D_{0x}^{1-2\beta}(\gamma_3 + x^{1-\beta})\tau(x) = \gamma_3 D_{0x}^{2\beta-1}x^{\beta}D_{0x}^{1-2\beta}\tau(x) +$$

$$+D_{0x}^{2\beta-1}x^{\beta}D_{0x}^{1-2\beta}\tau(x)x^{1-\beta} = \gamma_3 I_1(x) + I_2(x),$$

где
$$I_1(x) = D_{0x}^{2\beta-1} x^\beta D_{0x}^{1-2\beta} \tau(x),$$

$$I_2(x) = D_{0x}^{2\beta-1} x^\beta D_{0x}^{1-2\beta} \tau(x) x^{1-\beta}.$$

Вычислим для начала интеграл

$$I_{11}(x) = D_{0x}^{1-2\beta} \tau(x) = \frac{1}{\Gamma(2\beta)} \frac{d}{dx} \int\limits_0^x \tau(t)(x-t)^{2\beta-1} dt.$$

После интегрирования по частям, вычислим производную по переменной $x$ получим

$$I_{11}(x) = \frac{1}{\Gamma(2\beta)} \tau(0) x^{2\beta-1} + \frac{1}{\Gamma(2\beta)} \int\limits_0^1 \frac{\tau'(t)}{(x-t)^{1-2\beta}} dt.$$

Следовательно интеграл $I_1(x)$ примет вид:

$$I_1(x) = \frac{\tau(0)}{\Gamma(2\beta)} D_{0x}^{2\beta-1} x^{3\beta-1} + \frac{1}{\Gamma(2\beta)} D_{0x}^{2\beta-1} x^\beta \int\limits_0^x \tau'(t)(x-t)^{2\beta-1} dt =$$

$$= \frac{\tau(0)}{\Gamma(2\beta)} \cdot \frac{1}{\Gamma(1-2\beta)} \int\limits_0^x t^{3\beta-1}(x-t)^{-2\beta} dt +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(2\beta)\Gamma(1-2\beta)} \int\limits_0^x t^\beta (x-t)^{-2\beta} dt \int\limits_0^t \tau'(\xi)(t-\xi)^{2\beta-1} d\xi =$$

$$= \frac{\tau(0)}{\Gamma(2\beta)\Gamma(1-2\beta)} \cdot I_{12}(x) + \frac{1}{\Gamma(2\beta)\Gamma(1-2\beta)} \cdot I_{13}(x), \tag{3.11}$$

где
$$I_{12}(x) = \int\limits_0^x t^{3\beta-1}(x-t)^{-2\beta} dt.$$

После замены переменной $t = xz$ имеем

$$I_{12}(x) = x^\beta \cdot \frac{\Gamma(3\beta)\Gamma(1-2\beta)}{\Gamma(1+\beta)},$$

$$I_{13}(x) = \int_0^x t^{\beta}(x-t)^{-2\beta}dt \int_0^t \tau'(\xi)(t-\xi)^{2\beta-1}d\xi.$$

Поменяв порядок интегрирования, после замены переменной $t = \xi + (x-\xi)z$ мы получим, что

$$I_{13}(x) = \Gamma(2\beta)\Gamma(1-2\beta)\int_0^x \tau'(\xi)\xi^{\beta}F\left(2\beta, -\beta, 1; \frac{\xi - x}{\xi}\right)d\xi.$$

Далее, воспользовавшись формулой автотраснформации для гипергеометрической функции [1]

$$F(a,b,c;1-z) = z^{-b}F\left(c-a, b, c; \frac{z-1}{z}\right),$$

получим

$$I_{13}(x) = \Gamma(2\beta)\Gamma(1-2\beta)x^{\beta}\tau(x) - \frac{\tau(0)\Gamma(3\beta)\Gamma(1-2\beta)}{\Gamma(1+\beta)}x^{\beta} -$$

$$-\Gamma(2\beta)\Gamma(1-2\beta)\cdot\beta(1-2\beta)x^{\beta-1}\int_0^x \tau(\xi)F\left(2-2\beta, 1-\beta, 2; \frac{x-\xi}{x}\right)d\xi.$$

Подставим интегралы $I_{12}(x)$ и $I_{13}(x)$ в равенство (3.11):

$$I_1(x) = x^{\beta}\tau(x) - \beta(1-2\beta)x^{\beta-1}\int_0^x \tau(\xi)F\left(2-2\beta, 1-\beta, 2; \frac{x-\xi}{x}\right)d\xi.$$

Аналогично, вычисляя $I_2(x)$, получим

$$I_2(x) = x^{\beta}\tau(x) - \beta(1-2\beta)x^{\beta-1}\int_0^x \xi^{1-\beta}\tau(\xi)F\left(2-2\beta, 1-\beta, 2; \frac{x-\xi}{x}\right)d\xi.$$

Следовательно,

$$I(x) = (\gamma_3 x^{\beta} + x)\tau(x) - \beta(1-2\beta)x^{\beta-1}\int_0^x (\gamma_3 + \xi^{1-\beta})F\left(2-2\beta, 1-\beta, 2; \frac{x-\xi}{x}\right)\tau(\xi)d\xi.$$

Значит, уравнение (3.10) прмет вид

$$\left(2\gamma_4\gamma_3+\gamma_4 x^{1-\beta}-\gamma_3 x^{\beta}-x\right)\tau(x)+$$

$$+\beta(1-2\beta)x^{\beta-1}\int\limits_0^x(\gamma_3+\xi^{1-\beta})\tau(\xi)F\left(2-2\beta,1-\beta,2;\frac{x-\xi}{x}\right)d\xi=G(x)$$

или

$$\tau(x)+\int\limits_0^x K(x,\xi)\tau(\xi)d\xi=G_1(x), \qquad (3.12)$$

где

$$K(x,\xi)=\frac{\beta(1-2\beta)x^{\beta-1}\left(\gamma_3+\xi^{1-\beta}\right)}{\gamma_4\gamma_3+\left(\gamma_3+x^{1-\beta}\right)\left(\gamma_4-x^{\beta}\right)}\cdot F\left(2-2\beta,1-\beta,2;\frac{x-\xi}{x}\right),$$

$$G_1(x)=\frac{\gamma_4 D_{0x}^{2\beta-1}c_2(x)x^{\beta}+\gamma_4 c_1(x)x^{1-\beta}-D_{0x}^{2\beta-1}x^{\beta}D_{0x}^{1-2\beta}c_1(x)x^{1-\beta}}{\gamma_4\gamma_3+(\gamma_3+x^{1-\beta})(\gamma_4-x^{\beta})}.$$

Исследуем гладкость правой части уравнения (3.12) $G_1(x)$, для этого преобразуем интегралы, входящие в нее:

$$D_{0x}^{2\beta-1}c_2(x)x^{\beta}=I_{21}(x),$$

$$I_{21}(x)=\frac{1}{\Gamma(1-2\beta)}\int\limits_0^x c_2(t)t^{\beta}(x-t)^{-2\beta}dt,$$

после замены переменной получим

$$I_{21}(x)=\frac{x^{1-\beta}}{\Gamma(1-2\beta)}\int\limits_0^1 c_2(xz)z^{\beta}(1-z)^{-2\beta}dz,$$

$$D_{0x}^{2\beta-1}x^{\beta}D_{0x}^{1-2\beta}c_1(x)x^{1-\beta}=I_{31}(x).$$

Вычисления интеграла $I_{31}(x)$ аналогичны вычислениям интеграла $I_2(x)$ и, значит,

$$I_{31}(x)=xc_1(x)-\beta(1-2\beta)x\int\limits_0^1 c_1(xz)z^{1-\beta}F(2-2\beta,1-\beta,2;1-z)dz.$$

Следовательно,

$$G_1(x) = \frac{1}{\gamma_4\gamma_3 + (\gamma_3 + x^{1-\beta})(\gamma_4 - x^\beta)} \cdot \left[\frac{\gamma_4}{\Gamma(1-2\beta)} x^{1-\beta} \int\limits_0^1 c_2(xz) z^\beta (1-z)^{-2\beta} dz + \right.$$

$$\left. + c_1(x) x^{1-\beta} - \gamma_4 x c_1(x) + \beta(1-2\beta)\gamma_4 x \int\limits_0^1 c_1(xz) z^{1-\beta} F(2-2\beta, 1-\beta, 2; 1-z) dz \right].$$

С учетом свойств функций $c_1(x)$, $c_2(x)$ имеем, что $G_1(x) \in C^3(0,1)$. При $x = 0$ $G_1(x)$ обращается в нуль первого порядка, а при $x = 1$ $G_1(x)$ ограничена. Следовательно, из теории интегральных уравнений Вольтерра второго рода [2] получаем, что уравнение (3.12) однозначно разрешимо. Таким образом, по найденному $\tau(x)$ из (3.9) определим $\nu(x)$. Нетрудно убедиться, что $\nu(x) \in C^2(0,1)$ и при $x \to 0$, обращается в бесконечность порядка $1 - 2\beta$, а при $x = 1$ она ограничена.

## Литература


1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М., 1973.

2. Михлин С.Г. Интегральные уравнения. М.: ГИТТЛ, 1949. 380 с.

3. Нахушева Ф.Б. О некоторых краевых задачах для вырождающегося гиперболического уравнения. Дифф. уравнения, 1982г., Т.18, №2, 334-340 с.

4. Салахитдинов М.С., Мирсабуров М. Нелокальные задачи для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами. Ташкент: "Universitet", "Yangiyo'l poligraf servis", 2005 г.

5. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. М.: Высшая школа, 1985. 303 с.


Институт математики и информационных технологий

Дата поступления 24.04.07

Uzbek Mathematical
Journal, 2008,№2, pp.107-112

УДК 517. 98

**Геометрическая характеризация гильбертовых пространств**
**Сейпуллаев Ж.Х**

Bu maqolada haqiqiy banah fazosi faqat va faqat u refleksiv rangi 1 bo‘lgan kuchli tomoniy simmetrik fazo bo‘lganidagina gilbert fazosiga izometrik isomorf bo‘lishi isbotlangan.

In this work has proof that a real Banach space is isometrical isomorph to Hilbert space if and only if it is a reflexive strongly facially symmetric space of rank 1.

Пусть $Z$ – вещественное или комплексное нормированное пространство. Элементы $f, g \in Z$ называются ортогональными ($f \diamond g$), если $\|f+g\| = \|f-g\| = \|f\| + \|g\|$. Подмножества $S, T \subset Z$ называются ортогональными ($S \diamond T$), если $f \diamond g$ для всех $(f, g) \in S \times T$. Для подмножества $S$ из $Z$ положим $S^{\diamond} = \{f \in Z : f \diamond g$ для всех $g \in S\}$ и назовем его ортогональным дополнением к $S$. Подмножество $F$ выпуклого множества $Z_1 = \{f \in Z : \|f\| \leq 1\}$ называется гранью, если для $g, h \in Z_1, \lambda \in (0,1)$ из $\lambda g + (1-\lambda)h \in F$ следует, что $g, h \in F$. Грань $F$ единичного шара $Z_1$ называется выставленной по норме, если $F = F_u = \{f \in Z_1 : f(u) = 1\}$ для некоторого $u \in Z^*$ с $\|u\| = 1$.

Элемент $u \in Z^*$ называется проективной единицей, если $\|u\| = 1$ и $u(g) = 0$ для всех $g \in F_u^{\diamond}$.

**Определение 1.** Выставленная по норме грань $F_u$ из $Z_1$ называется симметричной гранью, если существует линейная изометрия $S_{F_u}$ из $Z$ на $Z$ с $S_{F_u}^2 = I$, множество всех неподвижных точек которой в точности совпадает с топологической прямой суммой замыкания $\overline{sp}\, F_u$ линейной оболочки грани $F_u$ и ее ортогонального дополнения $F_u^{\diamond}$, т. е. совпадает с $(\overline{sp}\, F_u) \oplus F_u^{\diamond}$. Множество всех симметричных граней единичного шара $Z_1$ обозначим через $S\mathfrak{F}$.

Проективная единица $u$ из $Z^*$ называется геометрическим трипотентом, если $F_u$ является симметричной гранью и $S_{F_u}^* u = u$ для симметрии $S_{F_u}$, соответствующей $F_u$. Множество всех геометрических трипотентов обозначим через $GU$.

**Определение 2.** Вещественное или комплексное нормированное пространство $Z$ называется слабо гранево симметричным пространством ($WFS$-пространством), если каждая выставленная по норме грань $F_u$ из $Z_1$ симметрична.

**Пример 1 [1].** Пусть единичным шаром $Z_1$ пространства $\mathbb{R}^2$ является правильный шестиугольник, вершины которого лежат в точках $(\pm 1, 0), (\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2})$. Граница $\partial Z_1$ этого единичного шара имеет двенадцать выставленных по норме граней, которые являются симметричными. Поэтому, $Z$ является $WFS$-пространством. Граница единичного шара $Z_1^*$ пространства $Z^*$ совпадает с множеством проективных единиц. Точки

$$(\pm 1, 0), (\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}), (\pm 1, \pm \frac{\sqrt{3}}{3}), (0, \pm \frac{2\sqrt{3}}{3})$$

единичного шара $Z_1^*$ являются геометрическими трипотентами.

**Определение 3.** Слабо гранево симметричное пространство называется сильно гранево симметричным пространством ($SFS$-пространством), если для каждой выставленной по норме грани $F_u$ из $Z_1$ и каждого $y \in Z^*$ с $\|y\| = 1$ и $F_u \subset F_y$ мы имеем $S_{F_u}^* y = y$, где $S_{F_u}$ – симметрия, соответствующая $F_u$.

Примерами таких пространств являются гильбертово пространство, предсопряженное пространство к алгебре фон Неймана или $JBW^*$ - алгебре и более общо, предсопряженное пространство к $JBW^*$ - тройкам (см. [2]). Примером пространства, являющегося $WFS$-пространством, но не являющегося $SFS$-пространством, может служить пространство в примере 1.

На $WFS$-пространстве $Z$ по каждой симметричной грани $F_u$ определяются обобщенные Пирсовские проекторы $P_k(u)$ $(k = 0, 1, 2)$ следующим образом: $P_1(u) = \frac{1}{2}\left(I - S_{F_u}\right)$, $P_0\left(u\right)$ и $P_2\left(u\right)$ проектируют $Z$ на $F_u^{\diamondsuit}$ и $\overline{sp}\, F_u$, соответственно.

Пусть $Z$ является $WFS$-пространством. Элементы $x, y \in Z^*$ называются ортогональными ($x \diamond y$), если существует симметричная грань $F_u \subset Z_1$ такая, что

$$x \in P_2(u)^*(Z^*)$$

и

$$y \in P_0(u)^*(Z^*).$$

В $SFS$-пространстве $Z$ для $f \neq 0$ через $\vartheta(f)$ обозначается единственный геометрический трипотент $\vartheta$, для которого $f(\vartheta) = \|f\|$ и $\left\langle \vartheta, \{f\}^{\diamond} \right\rangle = 0$.

Геометрический трипотент $\nu \in GU$ называется минимальным, если $\dim(P_2(\nu)^*(Z^*)) = 1$. Через $M$ обозначим множество всех минимальных геометрических трипотентов из $Z^*$.

Для всякого $u \in M$ грань $F_u$ состоит из одной точки, т. е. каждому $u \in M$ соответствует единственная выставленная по норме точка из $Z_1$ (см. [3, предложение 2,4]).

Для $u, \nu \in GU$ будем писать $u \leq \nu$, если $F_u \subset F_\nu$. Геометрический трипотент $\nu$ называется неразложимым, если из $u \leq \nu, u \in GU$ следует $u = \nu$. Через $I$ обозначим множество всех неразложимых геометрических трипотентов из $Z^*$. Поскольку, каждый минимальный геометрический трипотент является неразложимым, то $M \subset I$.

Говорят [4], что выставленная по норме грань $F_u$ единичного шара $Z_1$ удовлетворяет разложению Йордана, если для каждого ненулевого $f \in sp_{\mathbb{R}} F_u$ (где $sp_{\mathbb{R}} F_u$ – действительная линейная оболочка множества $F_u$) существуют $g, h \in \mathbb{R}^+ F_u$ такие, что $f = g - h$ и $g \diamond h$.

Грань $F_u \in S\Im$ называется максимальной, если для $F_v \in S\Im$ из $F_u \subset F_v$ следует $F_u = F_v$.

**Определение 4.** Нормированное пространство называется пространством ранга 1, если в нем не существуют взаимно ортогональных отличных от нуля элементов.

**Теорема 1.** *Сильно гранево симметричное пространство $Z$ является пространством ранга 1 тогда и только тогда, когда каждый геометрический трипотент из $Z^*$ является неразложимым.*

Доказательство. **Необходимость.** Пусть $Z$ – $SFS$-пространс-тво ранга 1. Покажем, что всякий геометрический трипотент $u \in GU$ является неразложимым. Пусть $u, v \in GU$ и $v \leq u$, т.е. $F_v \subset F_u$. Поскольку, $Z$ – $SFS$-пространство ранга 1, то $F_v^{\diamond} = \{0\}$. Поэтому, в силу [5, предложение 1] всякая симметричная грань в $Z$ является максималной. В частности $F_v$ также максималная грань. Отсюда из $F_v \subset F_u$ получим, что $F_v = F_u$ и $u = v$. Это означает, что $u$ является неразложимым.

**Достаточность.** Предположим обратное. Пусть существуют элементы $f, g \in Z$ такие, что $\|f\| = \|g\| = 1$ и $f \diamond g$. Тогда в силу [1, предложение 1.3] существуют взаимно ортогональные выставленные по норме грани $F_x$, $F_y$ такие, что $g \in F_x$ и $f \in F_y$. Поскольку $Z$ –

$SFS$-пространство, то $F_x = F_u$ и $F_y = F_v$ для некоторых $u, v \in GU$. Тогда в силу [1, лемма 2.5] $u \diamond v$ и $u \pm v \in GU$, т.е. $F_u$, $F_v \subset F_{u+v}$. Это противоречит равенству $GU = I$. Теорема доказана.

**Предложение 2.** *Пусть $Z$ – $SFS$-пространство ранга 1 и $x \in Z^*$, $\|x\| = 1$. Если $F_x \neq \emptyset$, тогда $x$ является геометрическим трипотентом. Кроме того, $x$ является экстремальной точкой единичного шара $Z_1^*$ сопряженного пространства $Z^*$.*

Доказательство. Пусть $x \in Z^*$ такой, что $\|x\| = 1$ и $F_x \neq \emptyset$. Поскольку $Z$ пространство ранга 1, то $F_x^{\diamondsuit} = \{0\}$. Поэтому, точка $x$ является проективной единицей, и в силу [5, теорема 3] $x$ является геометрическим трипотентом. Так как, $F_x^{\diamondsuit} = \{0\}$, то из [5, предложение 1] следует, что $x$ является экстремальной точкой $Z_1^*$. Предложение доказано.

**Следствие 3.** *Если $Z$ рефлексивное $SFS$-пространство ранга 1, то всякий элемент $x \in Z^*$, $\|x\| = 1$, является экстремальной точкой единичного шара $Z_1^*$ сопряженного пространства $Z^*$.*

**Предложение 4.** *Пусть $Z$ – $SFS$-пространство ранга 1. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

*a) каждая замкнутая по норме грань является симметричной гранью;*

*b) каждая экстремальная точка единичного шара является выставленной по норме точкой;*

*c) каждый неразложимый геометрический трипотент является минимальным;*

*d) каждая симметричная грань удовлетворяет разложению Йордана.*

Доказательство. Импликация $a) \Rightarrow b)$ тривиальна, а $b) \Leftrightarrow c)$ доказана в [6, следствие 3.4].

$c) \Rightarrow d)$. Поскольку в $SFS$-пространстве ранга 1 со свойством $M = I$, всякая симметричная грань является выставленной по норме точкой [6, следствие 3.2], то каждый элемент $f \in sp_R F_u$ можно представить в виде: $f = \alpha g$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

$d) \Rightarrow c)$ получено в [4, предложение 2.11].

$c) \Rightarrow a)$. Пусть $F$ – замкнутая по норме грань единичного шара $Z_1$. Тогда в силу теоремы отделимости существует $x \in Z^*$ с $\|x\| = 1$ и $F \subset F_x$. Из предложения 2 вытекает, что $x \in GU$. Поэтому, в силу [5, теорема 0] следует $F_x \in S\Im$. Поскольку в $SFS$-пространстве ранга 1 со свойством $M = I$ всякая симметричная грань является выставленной по норме точкой [6, следствие 3.2], то $F = F_x$. Значит, $F$ является выставленной по норме точкой. Предложение доказано.

Напомним, что выпуклое множество называется строго выпуклым, если все точки его границы являются выставленными по норме.

**Теорема 5.** *Пусть $Z$ рефлексивное $SFS$-пространство ранга 1. Тогда единичный шар $Z_1^*$ сопряженного пространства $Z^*$ является строго выпуклым.*

Доказательство. Предположим обратное. Пусть $Z_1^*$ единичный шар не является строго выпуклым. Тогда существует элемент $x \in Z^*$, $\|x\| = 1$ такой, что $Z_1^* \cap H \neq \{x\}$ для любой гиперплоскости в $H$. Пусть $G = Z_1^* \cap H$. Так как пересечение выпуклых множеств выпукло, то $z = \alpha x + (1 - \alpha)y$, где $x, y \in G$ и $\alpha \in (0, 1)$. С другой стороны, в силу следствия 3 любой элемент из $Z_1^*$ с единичной нормой является экстремальной точкой. Поэтому, $z = x = y$. Значит, $G = \{x\}$. Это противоречит нашему предположению. Лемма доказана.

**Следствие 6.** *Пусть $Z$ – рефлексивное $SFS$-пространство ранга 1. Тогда каждая симметричная грань является выставленной по норме точкой.*

Теперь теорему 2.1 из [7] можно сформулировать следующим образом:

**Предложение 7.** *Пусть $Z$ вещественное рефлексивное $SFS$-пространство ранга 1, тогда для любой пары точек $f$ и $g$ из $Z$, выполняется равенство $f(\vartheta(g)) = g(\vartheta(f))$.*

**Теорема 8.** *Вещественное банахово пространство $Z$ изометрически изоморфно гильбертовому пространству тогда и только тогда, когда $Z$ является рефлексивным $SFS$-пространством ранга 1, при этом скалярное произведение имеет следующий вид $\langle f, g \rangle = f(\vartheta(g))$.*

## Литература

1. Friedman Y. and Russo B. A geometric spectral theorem // Quart. J. Math. Oxford. 1986. Vol. 37. №2. p. 263-277.

2. Friedman Y. and Russo B. Some affine geometric aspects of operator algebras // Pac. J. Math. 1989. Vol. 137. p. 123–144.

3. Friedman Y. and Russo B. Geometry of the dual ball of the spin factor // Proc. Lon. Math. Soc. 1992. Vol. 62. p. 142–174.

4. Neal M. and Russo B. State space of $JBW^*$-triple // Math. Annalen. 2004. Vol. 328. p. 585-624.

5. Ядгаров Н. Ж. Слабо и сильно гранево симметричные пространства // Докл. АН РУз. 1996. №5. с. 6-8.

6. Ibragimov M. M., Tleumuratov S. J., Seypulaev J. Some geometric properties of a strongly facially symmetric space // Methods of functional analysis and topology. 2005. Vol. 11. №3, p. 234-238.

7. Ибрагимов М.М., Сейпуллаев Ж. Геометрические свойства единичного шара $SFS$-пространства конечного ранга // Узб. матем. журн. 2005. №2. с. 10-19.

Институт математики и
информационных технологий

Дата поступления
23.05.07

Uzbek Mathematical
Journal, 2008,№2, pp.113-120

УДК 517.956.32

# Решение задачи Коши для обобщенного уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу

**А.Хасанов**

Bu maqolada xarakteristik uchburchakda Eyler-Puasson-Darbu

$$L_{\alpha,\beta}\left(u\right)\equiv u_{\xi\eta}+\left[\frac{\alpha}{\eta+\xi}+\frac{\beta}{\eta-\xi}\right]u_{\xi}+\left[\frac{\alpha}{\eta+\xi}-\frac{\beta}{\eta-\xi}\right]u_{\eta}+\gamma u=0.$$

tenglamasi uchun Koshi masalasi yechiladi. Bu masalaning Riman funksiyasi uch o‘zgaruvchi Kummer funksiyasi orqali aniqlanadi. Masalaning yechimi aniq ko‘rinishda topiladi.

In this paper in a characteristic triangle Cauchy problem for generalized Euler-Poisson-Darboux equation

$$L_{\alpha,\beta}\left(u\right)\equiv u_{\xi\eta}+\left[\frac{\alpha}{\eta+\xi}+\frac{\beta}{\eta-\xi}\right]u_{\xi}+\left[\frac{\alpha}{\eta+\xi}-\frac{\beta}{\eta-\xi}\right]u_{\eta}+\gamma u=0.$$

is considered. Function of Riemann, which expressed by Kummer's function of three variables is constructed in an explicit form. By the method of Riemann for the hyperbolic equations, a solution of the Cauchy problem for generalized Euler-Poisson-Darboux equation expressed in an explicit form.

**1. Введение.** В теории выраждающихся гиперболических уравнений особую роль играет уравнение Эйлера-Пуассона-Дарбу. Исследоваю этому уравнению посвящен ряд работ. Например, [1-10]. Многие задачи прикладного характера сводятся к краевым задачам для вырождающегося уравнений смешанного типа. Известно, что многие вырождающегося уравнения смешанного типа в гиперболической части области сводятся к частному случаю обобщенного уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу

$$L_{\alpha,\beta}\left(u\right)\equiv u_{\xi\eta}+\left[\frac{\alpha}{\eta+\xi}+\frac{\beta}{\eta-\xi}\right]u_{\xi}+$$

$$+\left[\frac{\alpha}{\eta+\xi}-\frac{\beta}{\eta-\xi}\right]u_{\eta}+\gamma u=0,\ 0<\alpha,\ \beta<1,\ 2\beta<1, \tag{1.1}$$

где $\alpha, \beta$ и $\gamma$ - постоянные числа. Для уравнения (1.1) в явном виде функция Римана не построено. Отметим, что уравнения

$$L\left(u\right)\equiv u_{\xi\eta}-\frac{\beta_1}{\xi-\eta}u_{\xi}+\frac{\alpha_1}{\xi-\eta}u_{\eta}=0,\ \alpha_1>0,\ \beta_1>0,\ 0<\alpha_1+\beta_1<1, \tag{1.2}$$

рассмотрено в работе ([1], стр. 57) и решена задача Коши. В статьях [2- 4] для уравнения (1.2) в характеристическом треугольнике решены нелокальные краевые задачи. Метод Римана также применен к некоторым уравнениям гиперболического типа [5-10].

**2. Постановка задачи Коши.** Рассмотрим обобщенное уравнение (1.1) в характеристическом треугольнике $\Delta$. Треугольник $\Delta$ ограничен прямыми $\xi=0,\ 0\leq\eta\leq1;\ \eta=1,\ 0\leq\xi\leq\eta;\ \eta=\xi$ с вершинами в точках $O\left(0,0\right)$ , $A\left(0,1\right)$, $B\left(1,1\right)$.

**Задача Коши.** Найти регулярное решение уравнения (1.1) в области $\Delta$, удовлетворяющее начальным условиям

$$\lim_{\eta-\xi\to0}u\left(\xi,\eta\right)=\tau\left(\xi\right),0\leq\xi\leq1 \tag{2.1}$$

$$\lim_{\eta-\xi\to0}\left(\eta-\xi\right)^{2\beta}\left(u_{\eta}-u_{\xi}\right)=\nu\left(\xi\right),0<\xi<1, \tag{2.2}$$

где $\tau\left(\xi\right)\in C\left(\bar{J}\right)\cap C^2\left(J\right),\ \nu\left(\xi\right)\in C\left(J\right)\cap C^2\left(J\right)$ - заданные функции, $J=(0,1)$ - интервал оси $\eta=0$. Построим функцию Римана обобщенного уравнения (1.1).

**3. Функция Римана обобщенного уравнение Эйлера-Пуассона-Дарбу.** Совместно с уравнением (1.1) рассмотрим также сопряженное с ним уравнение

$$M_{\alpha,\beta}(R)=R_{\xi,\eta}-\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{\alpha}{\eta+\xi}+\frac{\beta}{\eta-\xi}\right]R-\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{\alpha}{\eta+\xi}-\frac{\beta}{\eta-\xi}\right]R+\gamma R=0. \tag{3.1}$$

Решение сопряженного уравнения (3.1) будем искать в виде

$$R\left(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0\right)=P\left(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0\right)\omega\left(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\right), \tag{3.2}$$

где

$$P = \left(\frac{\eta+\xi}{\eta_0+\xi_0}\right)^{\alpha}\left(\frac{\eta-\xi}{\eta_0-\xi_0}\right)^{\beta}, \tag{3.3}$$

$$\sigma_1 = -\frac{(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0)}{(\eta+\xi)(\eta_0+\xi_0)}, \sigma_2 = \frac{(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0)}{(\eta-\xi)(\eta_0-\xi_0)}, \sigma_3 = -\gamma(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0). \tag{3.4}$$

Вычисляя производные от выражения (3.2) и подставляя в сопряженное уравнение (3.1), находим

$$\begin{cases} \sigma_1(1-\sigma_1)\omega_{\sigma_1\sigma_1} + \sigma_2\omega_{\sigma_1\sigma_2} + \sigma_3\omega_{\sigma_1\sigma_3} + \\ +[1-(1+\alpha+1-\alpha)\sigma_1]\omega_{\sigma_1} - \alpha(1-\alpha)\omega = 0 \\ \sigma_2(1-\sigma_2)\omega_{\sigma_2\sigma_2} + \sigma_1\omega_{\sigma_1\sigma_2} + \sigma_3\omega_{\sigma_2\sigma_3} + \\ +[1-(1+\beta+1-\beta)\sigma_2]\omega_{\sigma_2} - \beta(1-\beta)\omega = 0 \\ \sigma_3\omega_{\sigma_3\sigma_3} + \sigma_1\omega_{\sigma_1\sigma_3} + \sigma_2\omega_{\sigma_2\sigma_3} + \omega_{\sigma_3} - \omega = 0. \end{cases} \tag{3.5}$$

Система гипергеометрическое уравнение (3.5) имеет решение

$$\omega(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3) = B_2^{(3)}(\alpha,\beta,1-\alpha,1-\beta;1;\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3), \tag{3.6}$$

где

$$B_2^{(3)}(a_1,a_2,b_1,b_2;c;x,y,z) = \sum_{n,m,p=0}^{\infty}\frac{(a_1)_m(a_2)_n(b_1)_m(b_2)_n}{(c)_{m+n+p}m!n!p!}x^m y^n z^p. \tag{3.7}$$

Подставляя решение (3.6) в представление (3.2), определяем функцию Римана для задачи Коши

$$R(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0) = \left(\frac{\eta+\xi}{\eta_0+\xi_0}\right)^{\alpha}\left(\frac{\eta-\xi}{\eta_0-\xi_0}\right)^{\beta} B_2(\alpha,\beta,1-\alpha,1-\beta;1;\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3). \tag{3.8}$$

Далее, используя функцию Римана (3.8), решим задачу Коши уравнения (1.1).

**4. Решение Задачи Коши для обобщенного уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу.** Обозначим через $\Delta_\varepsilon$ область, ограниченную отрезком $P_1P_2$ прямой $\eta = \xi + \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ и характеристиками $PP_1 : \xi = \xi_0$, $PP_2 : \eta = \eta_0$. Имеет место тождество

$$2\left[RL_{\alpha,\beta}(u) - uM_{\alpha,\beta}(R)\right] = \frac{\partial}{\partial\eta}\left[Ru_\xi - uR_\xi + \left(\frac{2\alpha}{\eta+\xi} - \frac{2\beta}{\eta-\xi}\right)uR\right] +$$

$$+\frac{\partial}{\partial\xi}\left[Ru_\eta-uR_\eta+\left(\frac{2\alpha}{\eta+\xi}+\frac{2\beta}{\eta-\xi}\right)uR\right]. \tag{4.1}$$

Интегрируя тождество (4.1) по области $\Delta_\varepsilon$ и применяя формулу Грина, имеем

$$\int\limits_{\partial\Delta_\varepsilon}\left[Ru_\eta-uR_\eta+\left(\frac{2\alpha}{\eta+\xi}+\frac{2\beta}{\eta-\xi}\right)uR\right]d\eta-$$

$$-\left[Ru_\xi-uR_\xi+\left(\frac{2\alpha}{\eta+\xi}-\frac{2\beta}{\eta-\xi}\right)uR\right]d\xi=0, \tag{4.2}$$

где $\partial\Delta_\varepsilon=P_1P_2\cup PP_1\cup PP_2$ - граница области $\Delta_\varepsilon$ ; с учетом того, что на характеристиках $PP_1: d\xi=0$, $PP_2: d\eta=0$ и свойства функции Римана (3.8), последнее тождество перепишем в виде

$$u(\xi_0,\eta_0)=$$

$$=\int\limits_{\xi_0}^{\eta_0-\varepsilon}\left\{\left[\frac{R_\xi-R_\eta}{2}+\frac{2\beta}{\eta-\xi}R\right]u\right\}\bigg|_{\eta=\xi+\varepsilon}d\xi+\frac{1}{2}\int\limits_{\xi_0}^{\eta_0-\varepsilon}\left[u_\eta-u_\xi\right]R\big|_{\eta=\xi+\varepsilon}d\xi. \tag{4.3}$$

Вычислим первый интеграл в решении (4.3). Используя формулу аналитического продолжения

$$B_2(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2;\gamma;x,y,z)$$

$$=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta_2-\alpha_2)}{\Gamma(\beta_2)\Gamma(\gamma-\alpha_2)}(-y)^{-\alpha_2}H_2^{(3)}\left(1-\gamma+\alpha_2;\alpha_1,\alpha_2,\beta_1;1-\beta_2+\alpha_2;\frac{1}{y},-x,-z\right)$$
$$+\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha_2-\beta_2)}{\Gamma(\alpha_2)\Gamma(\gamma-\beta_2)}(-y)^{-\beta_2}H_2^{(3)}\left(1-\gamma+\beta_2;\alpha_1,\beta_2,\beta_1;1-\alpha_2+\beta_2;\frac{1}{y},-x,-z\right),$$

определяем

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_{\xi_0}^{\eta_0-\varepsilon}\left\{\left[\tfrac{v_\xi-v_\eta}{2}+\tfrac{2\beta}{\eta-\xi}v\right]u\right\}\Big|_{\eta=\xi+\varepsilon}d\xi=\lambda_2(2\beta-1)\tfrac{(\eta_0-\xi_0)^{1-2\beta}}{(\eta_0+\xi_0)^{\alpha}}$$
$$\cdot\int\limits_{\xi_0}^{\eta_0}\tfrac{(2\xi)^\alpha\tau(\xi)}{(\eta_0-\xi)^{1-\beta}(\xi-\xi_0)^{1-\beta}}H_2^{(3)}\left(1-\beta;\alpha,1-\beta,1-\alpha;2-2\beta;0,\,\rho_2|_{\eta=\xi},\,\rho_3|_{\eta=\xi}\right)d\xi. \tag{4.4}$$

определяем

$$H_2^{(3)}\left(1-\beta;\alpha,1-\beta,1-\alpha;2-2\beta;0,\rho_2,\rho_3\right)=\Xi_2\left(\alpha,1-\alpha;\beta;-\rho_2,-\rho_3\right), \tag{4.5}$$

где конфлуентная гипергеометрическая функция Горна [11, 13] $\Xi_2\left(\alpha,1-\alpha;\beta;-\rho_2,-\rho_3\right)$ имеет вид

$$\Xi_2\left(a,b;c;x,y\right)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a)_m\,(b)_m}{(c)_{m+n}\,m!n!}x^m y^n. \tag{4.6}$$

Тогда соотношение (4.4) примет вид

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\xi_0}^{\eta_0-\varepsilon}\left.\left\{\left[\tfrac{v_\xi-v_\eta}{2}+\tfrac{2\beta}{\eta-\xi}v\right]u\right\}\right|_{\eta=\xi+\varepsilon}d\xi$$
$$=\lambda_2\left(2\beta-1\right)\tfrac{(\eta_0-\xi_0)^{1-2\beta}}{(\eta_0+\xi_0)^{\alpha}}\int\limits_{\xi_0}^{\eta_0}\tfrac{(2\xi)^{\alpha}\tau(\xi)}{(\eta_0-\xi)^{1-\beta}(\xi-\xi_0)^{1-\beta}}\Xi_2\left(\alpha,1-\alpha;\beta;\vartheta_1,\vartheta_2\right)d\xi, \tag{4.7}$$

где

$$\vartheta_1=\frac{\left(\eta_0-\xi\right)\left(\xi-\xi_0\right)}{2\xi\left(\eta_0+\xi_0\right)},\ \ \vartheta_2=\gamma\left(\eta_0-\xi\right)\left(\xi-\xi_0\right). \tag{4.8}$$

Далее, вычислим второй интеграл в формуле (4.3). Для этой цели в выражении (3.8) выделим гипергеометрическую функцию по аргументу $\sigma_2$

$$R\left(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0\right)=$$
$$=\left(\tfrac{\eta+\xi}{\eta_0+\xi_0}\right)^{\alpha}\left(\tfrac{\eta-\xi}{\eta_0-\xi_0}\right)^{\beta}\sum_{m,p=0}^{\infty}\tfrac{(\alpha)_m(1-\alpha)_m}{(1)_{m+p}m!p!}F\left(\beta,1-\beta;1+m+p;\sigma_2\right)\sigma_1^m\sigma_3^p. \tag{4.9}$$

Воспользуемся формулой [13]

$$F\left(a,b;c;z\right)=\left(1-z\right)^{-a}F\left(a,c-b;c;\frac{z}{z-1}\right) \tag{4.10}$$

из выражения (4.9) находим

$$R\left(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0\right)=\left(\tfrac{\eta+\xi}{\eta_0+\xi_0}\right)^{\alpha}\left(\tfrac{\eta-\xi}{\eta_0-\xi_0}\right)^{\beta}\left(1-\sigma_2\right)^{-\beta}$$
$$\cdot\sum_{m,p=0}^{\infty}\tfrac{(\alpha)_m(1-\alpha)_m}{(1)_{m+p}m!p!}F\left(\beta,\beta+m+p;1+m+p;\tfrac{\sigma_2}{\sigma_2-1}\right)\sigma_1^m\sigma_3^p. \tag{4.11}$$

Учитывая равенство

$$1-\sigma_2=\frac{\left(\eta-\xi_0\right)\left(\eta_0-\xi\right)}{\left(\eta-\xi\right)\left(\eta_0-\xi_0\right)},\ \sigma_2^*=\frac{\sigma_2}{\sigma_2-1}=-\frac{\left(\xi-\xi_0\right)\left(\eta-\eta_0\right)}{\left(\eta-\xi_0\right)\left(\eta_0-\xi\right)} \tag{4.12}$$

имеем

$$R\left(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0\right)=\tfrac{(\eta+\xi)^{\alpha}(\eta-\xi)^{2\beta}}{(\eta_0+\xi_0)^{\alpha}(\eta-\xi_0)^{\beta}(\eta_0-\xi)^{\beta}}$$
$$\cdot\sum_{m,p=0}^{\infty}\tfrac{(\alpha)_m(1-\alpha)_m}{(1)_{m+p}m!p!}F\left(\beta,\beta+m+p;1+m+p;\sigma_2^*\right)\sigma_1^m\sigma_3^p. \tag{4.13}$$

Теперь с помощью (4.13) вычислим второй интеграл в формуле (4.3). В самом деле, учитывая (4.13), определяем

$$\lim_{\varepsilon\to0}\left[u_\eta-u_\xi\right]R|_{\eta=\xi+\varepsilon}=\nu\left(\xi\right)\lim_{\varepsilon\to0}\tfrac{(\eta+\xi)^{\alpha}}{(\eta_0+\xi_0)^{\alpha}(\eta-\xi_0)^{\beta}(\eta_0-\xi)^{\beta}}$$
$$\cdot\sum_{m,p=0}^{\infty}\tfrac{(\alpha)_m(1-\alpha)_m}{(1)_{m+p}m!p!}F\left(\beta,\beta+m+p;1+m+p;\sigma_2^*\right)\,\sigma_1^m\sigma_3^p|_{\eta=\xi+\varepsilon}\,. \tag{4.14}$$

Используя следующие пределы

$$\sigma_1^*=\lim_{\varepsilon\to0}\sigma_1|_{\eta=\xi+\varepsilon}=-\frac{\left(\xi-\xi_0\right)\left(\xi-\eta_0\right)}{\left(2\xi\right)\left(\eta_0+\xi_0\right)}=\frac{\left(\eta_0-\xi\right)\left(\xi-\xi_0\right)}{2\xi\left(\eta_0+\xi_0\right)},$$

$$\lim_{\varepsilon\to0}\ \sigma_2^*|_{\eta=\xi+\varepsilon}=1,\sigma_3^*=\lim_{\varepsilon\to0}\sigma_3|_{\eta=\xi+\varepsilon}=\gamma\left(\eta_0-\xi\right)\left(\xi-\xi_0\right),$$

а также значение гипергеометрической функции Гаусса в точке $\sigma_2^*=1$ [13]

$$F\left(\beta,\beta+m+p;1+m+p;1\right)=\frac{\Gamma\left(1-2\beta\right)}{\Gamma^2\left(1-\beta\right)}\frac{(1)_{m+p}}{\left(1-\beta\right)_{m+p}},$$

из (4.3) определяем

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[u_\eta-u_\xi\right]R\big|_{\eta=\xi+\varepsilon}=$$

$$=\frac{\Gamma\left(1-2\beta\right)}{\Gamma^2\left(1-\beta\right)}\nu\left(\xi\right)\frac{\left(2\xi\right)^\alpha}{\left(\eta_0+\xi_0\right)^\alpha\left(\eta_0-\xi\right)^\beta\left(\xi-\xi_0\right)^\beta}\Xi_2\left(\alpha,1-\alpha;1-\beta;\vartheta_1,\vartheta_2\right),\tag{4.15}$$

где $\vartheta_1,\vartheta_2$ определяются равенством (4.8). Таким образом, второй интеграл в формуле (4.3) имеет вид

$$\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\xi_0}^{\eta_0-\varepsilon}\left[u_\eta-u_\xi\right]R\big|_{\eta=\xi+\varepsilon}d\xi=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(1-2\beta\right)}{\Gamma^2\left(1-\beta\right)}\times$$

$$\times\int\limits_{\xi_0}^{\eta_0}\frac{\left(2\xi\right)^\alpha\nu\left(\xi\right)}{\left(\eta_0+\xi_0\right)^\alpha\left(\eta_0-\xi\right)^\beta\left(\xi-\xi_0\right)^\beta}\Xi_2\left(\alpha,1-\alpha;1-\beta;\vartheta_1,\vartheta_2\right)d\xi.\tag{4.16}$$

Подставляя равенства (4.7) и (4.16) в формулу (4.3), окончательно находим решение задачи Коши обобщенного уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу

$$\begin{aligned}u\left(\xi_0,\eta_0\right)&=k_1\tfrac{\left(\eta_0-\xi_0\right)^{1-2\beta}}{\left(\eta_0+\xi_0\right)^\alpha}\int\limits_{\xi_0}^{\eta_0}\tfrac{\xi^\alpha\tau\left(\xi\right)}{\left(\eta_0-\xi\right)^{1-\beta}\left(\xi-\xi_0\right)^{1-\beta}}\Xi_2\left(\alpha,1-\alpha;\beta;\vartheta_1,\vartheta_2\right)d\xi\\&+k_2\tfrac{1}{\left(\eta_0+\xi_0\right)^\alpha}\int\limits_{\xi_0}^{\eta_0}\tfrac{\xi^\alpha\nu\left(\xi\right)}{\left(\eta_0-\xi\right)^\beta\left(\xi-\xi_0\right)^\beta}\Xi_2\left(\alpha,1-\alpha;1-\beta;\vartheta_1,\vartheta_2\right)d\xi,\end{aligned}\tag{4.17}$$

где $\vartheta_1,\vartheta_2$ определяются равенством (4.8) и

$$k_1=2^\alpha\frac{\Gamma\left(2\beta\right)}{\Gamma^2\left(\beta\right)},k_2=2^{\alpha-1}\frac{\Gamma\left(1-2\beta\right)}{\Gamma^2\left(1-\beta\right)}\tag{4.18}$$

Не трудно убедиться что, решения задачи Коши (7.26) удовлетворяют условиям задачи Коши (5.1)-(5.2) а также уравнению (1.1).

**Литература**


1. Darboux G. La Theorie Generale das Surfaces, Vol. 2, Gauthier-Villars, Paris, 1915.
2. Saigo M. A Certain boundary value problem for the Euler-Darboux equations, Math. Japonica, 24 (1979), 377-385.
3. Saigo M. A Certain boundary value problem for the Euler-Darboux equations II, Math. Japonica, 25 (1980), 211-220.
4. Saigo M. A Certain boundary value problem for the Euler-Darboux equations III, Math. Japonica, 26 (1981), 103-119.
5. Herbert W. Riemann functions with several auxiliary variables. Forschunzentrum Graz, Mathematisch-Statistische Sektion, Graz, 1981.
6. Wallner H. The Riemann function of the differential equation $w_{z\zeta} + [z + \varphi' (\zeta)]\, w = 0$ . Arch. Math. (Basel) 37 (1984), no. 5, 435-442.
7. Lowndes J.S. Cauchy problems for second-order hyperbolic differential equations with constant coefficients. Proc. Edinburgh. Math. Soc. (2) 26 (1988), no. 3, 307-311.
8. Бицаде А.В. Уравнения смешанного типа.М.: Изд. АН СССР, 1959, 164 с.
9. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа.М.: Наука 1970, 296 с.
10. Rassias J.M. Mixed type Equations and Maximum Principles in fluid dynamics, 1983, Symmetry Publ., Greece
11. Rassias J.M. Lecture Notes on Mixed Type Partial Differential Equations, World Scientific, 144 pp, 1990.
12. Appell P., Kampe J. de Feriet, Fonctions Hypergeometriques et Hyperspheriques; Polynomes d'Hermite, Gauthier - Villars. Paris, 1926.
13. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Наука 1973, 296 с.


Институт математики и
информационных технологий

Дата поступления
29.01.07

Uzbek Mathematical
Journal, 2008,№2, pp.121-127

УДК 517.956

# О классах единственности решений одной краевой задачи для уравнения третьего порядка псевдоэллиптического типа

**А.Р.Хашимов**

Maqolada uchinchi tartibli psevdoelliptik tipdagi tenglama uchun bir chegaraviy masalaning umumlashgan yechimi uchun maxsus energetik baxolar o'rnatilgan. Bu baxolar yordamida masala yechim uchun cheksizlik o'suvchi funktsiyalar sinfida yagonalik teoremalari o'rnatilgan.

On the classes uniqueness of the solutions of boundary value problems of third order equations of pseudoelliptic type

Принцип Сен-Венана в плоской теории упругости выражается в виде априорной оценки для решения бигармонического уравнения, удовлетворяющего на части границы области однородным граничным условиям первой краевой задачи (см. [1,2]). Такие энергетические оценки были впервые получены в работах [3,4]. Для цилиндрического тела принцип Сен-Венана доказан в работе [5]. Для системы уравнений теории упругости в пространственном случае с граничными условиями первой краевой задачи аналог принципа Сен-Венана, теоремы единственности в неограниченных областях и теоремы типа Фрагмена-Линделефа получены в работе [6]. Для уравнения третьего порядка составного типа аналог принципа Сен-Венана установлены в работе [7].

В данной статье исследуем уравнение имеющее разный порядок по разным переменным, т.е. оно имеет анизатропный характер. Краевые задачи для таких уравнений в конечных областях были изучены в работе [8]. Пусть $D \subset R_x^n,\ \Omega \subset R_y^n = \{y : y_1 > 0\},\ 0 < t < T,\ Q = D \times \Omega \times (0,T),\ D$ - ограниченная область с границами $\Sigma,\ \Omega$ - неограниченная область.

В области $Q$ рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv L_0 lu + L_1 u + Mu = f(x,y,t) \tag{1}$$

где $lu = u_t + \alpha^k u_{x_k} + \alpha_0 u$, $L_1 u = b^{ij} u_{x_i x_j} + b^i u_{x_i}$, $L_0 u = u_t - a^{ij} u_{x_i x_j} + a^i u_{x_i} + a_0 u$, $Mu = c^{pq} u_{y_q y_p} + c^p u_{y_p} + c_0 u$, $\alpha_k$, $\alpha_0$ - постоянные.

Здесь и в дальнейшем предполагается, что по повторяющимся индексам ведется суммирование, но при этом $k, i, j$ пробегают числа $1, 2, ..., n$; $p, q$ - числа $1, 2, ..., m$.

Предположим, что все коэффициенты в (1) и их производные, встречающиеся в дальнейшем, ограничены и измеримы в любой конечной подобласти области $D$.

Относительно операторов $L_0, M$ будем предполагать выполненными условия

$$a^{ij} = a^{ji},\ \lambda_0 |\xi|^2 \leqslant a^{ij} \xi_i \xi_j \leqslant \lambda_1 |\xi|^2,\ (x, y, t) \in \overline{Q},\ \xi \in R^n,$$

$$c^{pq} = c^{qp},\ \mu_0 |\eta|^2 \leqslant c^{pq} \eta_p \eta_q \leqslant \mu_1 |\eta|^2,\ (x, y, t) \in \overline{Q},\ \eta \in R^m, \qquad (2)$$

где $\lambda_0$, $\lambda_1$, $\mu_0$, $\mu_1 -$ положительные постоянные.

Обозначим $G = D \times \Omega, \nu = (\nu_{x_1}, ..., \nu_{x_n}, \nu_{y_1}, ..., \nu_{y_m}, \nu_t) -$ вектор внутренней нормали к границе $Q$. Произведем разбиение боковой границе цилиндра $Q$

$$\sigma_1 = \{(x, y, t) \in \partial G \times (0, T) : \alpha^k \nu_{x_k} > 0\},$$

$$\sigma_2 = \{(x, y, t) \in \partial G \times (0, T) : \alpha^k \nu_{x_k} < 0\},$$

$$\sigma_0 = \{(x, y, t) \in \partial G \times (0, T) : \alpha^k \nu_{x_k} = 0\}.$$

Для уравнения (1) рассмотрим следующую задачу:

**Задача.** Найти решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u|_{\partial Q} = 0,\ \ \alpha^k u_{x_k}|_{\sigma_2} = 0. \qquad (3)$$

Отметим, что существование единственность регулярного решения (1)-(3) в ограниченной области доказаны в работе [8].

Определим оператор $d$ :

$$du = \left(\alpha^k a^{ij}_{x_k} - \alpha_0 a^{ij} + b^{ij} + a^{ij}_t\right) u_{x_i x_j} + \left(b^i + \alpha_0 a^i - \alpha^i a^k_{x_k} + \right.$$

$$\left. + \alpha^i a_0 - a^i_t\right) u_{x_i} + + \left(a_{0t} - \alpha_0 a_0\right) u = d^{ij} u_{x_i x_j} + d^i u_{x_i} + d_0 u.$$

и будем считать, что выполнено условие

$$d^{ij} = d^{ji},\ \ \gamma_0 |\xi|^2 \leqslant d^{ij} \xi_i \xi_j \leqslant \gamma_1 |\xi|^2,\ \ (x, y, t) \in \overline{Q},\ \ \xi \in R^4. \qquad (4)$$

Положим $Q_\tau = Q \cap \{(x,y,t): \ 0 < y_1 < \tau\}$, $\partial G_\tau \cap \{y: \ 0 < y_1 < \tau\}$, $\sigma_{0,\tau} = \{(x,y,t) \in \partial G_\tau \times (0,T): \alpha^k \nu_k = 0\}$, $\sigma_{1,\tau} = \{(x,y,t) \in \partial G_\tau \times (0,T): \alpha^k \nu_k > 0\}$, $\sigma_{2,\tau} = \{(x,y,t) \in \partial G_\tau \times (0,T): \alpha^k \nu_k < 0\}$. Для $h > 0$ определим $\sigma_{2,h,\tau} = \{(x,y,t) \in \partial\sigma_{2,\tau} : \rho((x,y,t), \partial\sigma_{2,\tau}) < h\}, \sigma_{2,\tau}^h = \sigma_{2,\tau} \backslash \sigma_{2,h,\tau}$.

Пусть $E(Q_\tau)$ есть множество функций $v$ из $C^2(\bar{Q}_\tau)$ таких, что $v = 0$ на $\partial G \times (0,T)$ и для некоторого $h > 0$ будет $\alpha^k v_{x_k} = 0$ на $\sigma_{0,\tau} \cup \sigma_{1,\tau} \cup \sigma_{2,\tau}^h$. Через $H(Q_\tau)$ обозначим замыкание $E(Q_\tau)$ по норме

$$\|u\|_{H(Q_\tau)} = \left\{ \int\limits_{Q_\tau} (d_1^{ij} u_{x_i} u_{x_j} + u_{y_p} u_{y_q} + u_t^2 + u^2) dxdydt - \right.$$

$$\left. - \int\limits_{\sigma_{2,\tau}} \alpha^k \nu_k a^{ij} u_{x_i} u_{x_j} ds \right\}^{1/2},$$

где $d_1^{ij} = -\frac{1}{2}\alpha^j a_{x_j}^{ik} - \frac{1}{2} a_t^{ij} + \alpha^j a^i + d^{ij} - \frac{1}{2\lambda_0} a^{ij}, d_1^{ij} = d_1^{ji}, \beta_0 |\xi|^2 \leqslant d_1^{ij} \xi_i \xi_j \leqslant \beta_1 |\xi|^2, (x,y,t) \in \bar{Q}_\tau, \xi \in R^{n+m+1}$.

Рассмотрим билинейную форму

$$a(u,v) = \int\limits_{Q_\tau} \{\alpha^k a^{ij} u_{x_i} v_{x_j x_k} + a^{ij} v_{x_i} v_{x_j t} + (\alpha^k a_{x_j}^{ij} - \alpha^i a^k) u_{x_i} v_{x_j} + d^{ij} u_{x_i} v_{x_j} +$$

$$(d^i - d_{x_j}^{ij}) u v_{x_i} + (a_{x_I}^{ij} + a^i + \alpha^j) u_{x_i} v_t + c^{pq} u_{y_p} v_{y_q} + (c^p - c_{y_q}^{pq}) u v_{y_p} + u_t v_t +$$

$$(\alpha_0 + a_0) u v_t + (c_{y_p}^p - c_0 - c_{y_p y_q}^{pq} + d + d_{x_i}^i - d_{x_i x_j}^{ij}) u v\} dxdydt. \qquad (5)$$

**Определение.** Назовем обобщенным решением задачи (1)-(3), в области $Q$ функцию $u(x,y,t)$ такую, что для любого $\tau < \infty, u(x,y,t) \in H(Q_\tau)$ и выполняется соотношение

$$a(u,v) = \int\limits_{Q_\tau} f v dxdydt. \qquad (6)$$

для произвольной функции $v \in E(Q_\tau), v|_{s_\tau} = 0$, где $s_\tau = Q \cap \{(x,y,t): y_1 = \tau\}$.

**Теорема 1.** (Аналог принципа Сен-Венана). Пусть $-1 \leqslant a^{ij}_{x_i} + a^i + \alpha \leqslant 0; \theta \equiv d_0 + \frac{1}{2}d^i_{x_i} - \frac{1}{2}d^{ij}_{x_i x_j} - \frac{1}{2}c^p_{y_p y_q} + \frac{1}{2}c^p_{y_p} - c_0 \leqslant \theta_0 < 0$, при $(x,y,t) \in \bar{Q}_\tau$.

Если $u(x,y,t)$ является обобщенным решением задачи (1)-(3) в $Q$ и $f(x,y,t) = 0$ при $y_1 \leqslant \tau_2$, то для любого $\tau_1$, такого что $0 \leqslant \tau_1 \leqslant \tau_2$ справедливо следующее соотношение

$$\int\limits_{Q_{\tau_1}} E(u)dxdydt \leqslant \Phi^{-1}(\tau_1,\tau_2) \int\limits_{Q_{\tau_2}} E(u)dxdydt, \tag{7}$$

где $E(u) = d^{ij}u_{x_i} + c^{pq}u_{y_q} + u_t^2 - \theta u^2$.

Здесь $\Phi(\tau,\tau_2)$ является решением следующей задачи

$$\Phi' = -\mu(\tau)\Phi, \ \tau_1 \leq \tau \leq \tau_2 \tag{8}$$

$$\Phi(\tau_2,\tau_2) = 1 \tag{9}$$

$\mu(x)-$ любая непрерывная функция такая, что

$$0 < \mu(\tau) \leq \inf_N \left\{ \int\limits_{s_\tau} E(v)dxdy'dt| \int\limits_{s_\tau} P(v)dxdy'dt|^{-1} \right\} \tag{10}$$

$y' = (y_2, y_3, ..., y_m)$,

$$P(v) = -c^{p1}v_{v_p}v + \frac{1}{2}(c^1 - c^{1q}_{y_q})v^2 \tag{11}$$

$N$ - множество непрерывно дифференцируемых функций в окрестности $\bar{s}_\tau \cap (\partial G_\tau \times (0,T))$.

Доказательство. Положим в (6)

$$v = u_m(\psi(y_1) - 1),$$

где

$\psi(y_1) = \Phi(\tau_1,\tau_2)$, если $0 \leqslant y_1 \leqslant \tau_1$, $\psi(y_1) = \Phi(y_1,\tau_2)$, если $\tau_1 \leqslant y_1 \leqslant \tau_2$,

$\psi(y_1) = 1$, если $y_1 \geqslant \tau_2$,

$$u_m \in E(Q_r), \ \|u_m - u\|_{H(Q_\tau)} \to 0, \ u \in H(Q_\tau).$$

Тогда $a(u - u_m + u_m, u_m(\psi - 1)) = 0$, в $Q_{\tau_2}$.

Поэтому

$$a(u_m, u_m(\psi - 1)) = \delta_m \ \text{ в } \ Q_{\tau_2}, \tag{12}$$

где $\delta_m = a(u - u_m, u_m(\psi - 1))$, ясно что $\delta_m \to 0$, при $m \to \infty$.

Интегрируя в (12) по частям, получим

$$\int\limits_{Q_{\tau_2}} E(u_m)(\psi - 1)dxdydt \leqslant \int\limits_{Q_{\tau_2}} P(u_m)dxdydt + \delta_m \tag{13}$$

Оценка (7) вытекает из (13) и (10) с последующим переходом к пределу при $m \to \infty$.

Оценим теперь $\mu(y_1)$ в случае, когда $s_\tau$, можно заключить в $n + m$ мерный параллелепипед, наименьшее ребро которого равно $\lambda(\tau)$. Предположим, что

$$\max_{s_\tau}\left\{\left(\frac{1}{2}c^1 - c^{1q}, 0\right)\right\} = \gamma(\tau), \ \ \max_{s_\tau}(c^{p1}) = p(\tau).$$

Применяя неравенство Фридрихса и Коши-Буняковского из (11), получаем

$$\left|\int\limits_{s_\tau} P(v)dxdy'dt\right| \leqslant \left|\int\limits_{s_\tau} c^{p1}vv_{y_p}dxdy'dt\right| +$$

$$+\left|\int\limits_{s_\tau}\left(\frac{1}{2}c' - c^{1q}_{y_q}\right)u^2dxdy'dt\right| \leqslant \beta(\tau)\left\{\int\limits_{s_\tau} v^2dxdy'dt\right\}^{1/2}$$

$$\left\{\int\limits_{s_\tau} v^2_{y_p}dxdy'dt\right\}^{1/2} + \gamma(\tau)\int\limits_{s_\tau} v^2dxdy'dt \leqslant$$

$$\left(\frac{\beta(\tau)\lambda(\tau)}{\pi\gamma_0} + \frac{\gamma(\tau)\lambda^2(\tau)}{\pi^2\gamma_0}\right)\int\limits_{s_\tau} E(v)dxdy'dt.$$

Поэтому можно положить

$$\mu(\tau) = \pi\gamma_0[\pi\beta(\tau)\lambda(\tau) + \gamma(\tau)\lambda^2(\tau)]^{-1}.$$

Если $\frac{1}{2}c^1 - c^{1q}_{y_q} \leqslant 0$ на $s_\tau$ то $\gamma(\tau) = 0$. Тогда

$$\mu(\tau) = \frac{\pi\gamma_0}{\beta(\tau)\lambda(\tau)}.$$

Как следствие принципа Сен-Венана получим теорему единственности задачи (1),(3) в неограниченной области $Q$ в классах функций растущих на бесконечности.

**Теорема 2.** Пусть $f(x,y,t) = 0$ в $Q$ и выполняются условия теоремы 1. Если $u(x,y,t)$ является обобщенным решением задачи (1),(3) в $Q$ и для некоторой последовательности $\tau_m \to \infty$ при $m \to \infty$ и некоторого $r_* = const > 0$ имеем

$$\int\limits_{Q_{\tau_m}} E(u)dxdy'dt \leqslant \varepsilon(\tau_m)\Phi(r_*,\tau_m), \tag{14}$$

где $\varepsilon(\tau_m) \to 0$, при $\tau_m \to \infty$, то $u \equiv 0$ в $Q$.

Доказательство. Решением задачи (8),(9) является функция $\Phi(\tau,\tau_2) = exp(\int\limits_{\tau}^{\tau_2} \mu(s)ds)$. Тогда из (7) учитывая (14), получаем

$$\int\limits_{Q_{r_*}} E(u)dxdydt \leqslant \Phi^{-1}(r_*,\tau_m) \int\limits_{Q_{\tau_m}} E(u)dxdydt \leqslant \varepsilon(\tau_m) \to 0 \tag{15}$$

при $\tau_m \to \infty$. Следовательно, $u = 0$ в $Q_{r_*}$.

Далее для любого фиксированного $r_1 > r_*$, имеем

$$\Phi(r_*,\tau_m) = e^{\int\limits_{r_*}^{\tau_m} \mu(s)ds} = e^{\int\limits_{r_1}^{\tau_m} \mu(s)ds} e^{\int\limits_{r_*}^{r_1} \mu(s)ds} = c\Phi(r_1,\tau_m).$$

Поэтому

$$\int\limits_{Q_{r_1}} E(u)dxdydt \leqslant \Phi^{-1}(\tau_1,\tau_m) \int\limits_{Q_{\tau_m}} E(u)dxdydt \leqslant$$

$$\leqslant \Phi^{-1}(r_1,\tau_m)\varepsilon(\tau_m)\Phi(r_*,\tau_m) = c\varepsilon(\tau_m) \to 0,$$

при $\tau_m \to \infty$. Следовательно, $u \equiv 0$, в $Q_r$. Так как $r_1$ выбрано произвольно, то $u \equiv 0$ в $Q$.

**Литература**

1. Saint-Venant, A.J.Berre. De La torsion des prismes. Mat. Divers favants, Akad. Sci.Paris, 1855, 14, p.233-560.

2. Guvtin M.E. Linear theory of elasticity.Handbuch der phusik Via/r, Berlin, Sprinder-Verlay, 1972.

3. Knovles J.K. On Saint-Vanant's principle in the two-dinmensional linear theoty of elasticity Arch. Rational Meth. Anal., 1966, v.21, №1,p.1-22.

4. Flavin J.K. On Knowles version of Saint-Vanant's principle in two-demesional elasional elastistitcs. .Arch. Rational Mech. Anal. 1974. V.53 №4, p.366-375.

5. Toupin R. Saint-Vanant's Principle-Atch. Rational Meth. Anal., 1975, v.18, №2,p.83-96.

6. Oleinik O.A., Yosifian G.A. On singularities at the boundary points and uniqueness theorems for solutions of the first boundary value problems elasticity. Comm. in a Partial Diff. Equations. 2(9), 1977, 937.

7. Хашимов А.Р. О единственности решения одной краевой задачи для общего уравнения третьего порядка составного типа в неограниченных областях. УзМЖ. 1999,№3, с.77-85.

8. Кожанов А.И. Краевые задачи для уравнений математической физики нечетного порядка. Новосибирск. 1990, 140.

Ташкентский Финансовый институт

Дата поступления 14.09.06

Uzbek Mathematical
Journal, 2008,№2, pp.128-134

УДК 519.644

**Кубатурные формулы для периодических функций**

**Э.А.Шамсиев**

Maqolada trigonometrik funksiyalarni $n$ o'lchovli fazoda integrallash uchun kubatur formulalar qurilgan

The article is devoted to construction of cubature formulas for integration of trigonometric functions on n-dimentional space

Рассмотрим тригонометрический многочлен от n переменных:

$$\exp\left(i\left(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n\right)\right) \tag{1}$$

где i - мнимая единица и $\alpha_1$ , $\alpha_2$ , ..., $\alpha_n$ - целые числа. Многочлен (1) будем называть тригонометрическим одночленом, а число $|\alpha_1| + |\alpha_2| + \ldots + |\alpha_n|$ - его степенью. Одночлен назовем четным (нечетным), если его степень - четное (нечетное) число. Очевидно, что сумма $|\alpha_1| + |\alpha_2| + \ldots + |\alpha_n|$ не четна (четна) тогда и только тогда, когда она имеет нечетное (четное) число нечетных слагаемых. Отсюда следует, что произведения двух одночленов разной (одинаковой) нечетности дает нечетный (четный) одночлен. Расположим вершины правильного m-угольника в точках $\left(\cos\frac{2\pi k}{m}\ ,\ \sin\frac{2\pi k}{m}\right)$ , $k = 1\ ,\ 2\ ,\ \ldots,\ m$ , и через G обозначим группу, полученную прямым произведением n групп правильных m-угольников, причем каждый последующий m-угольник получается из предыдущего вращением на угол $\frac{2\pi k}{mn}$ . Таким образом, группа G имеет вид

$$G = G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n \tag{2}$$

где G1 группа преобразований исходного m-угольника, а G1 - группа преобразований m-угольника, полученного из него вращением на угол $(i-1)\,\frac{2\pi k}{mn}$ , $i = 2, 3, \ldots, n$. Нетрудно убедиться, что точки

$$\left(\cos\frac{2\pi k_1}{m}\ \sin\frac{2\pi k_1}{m}\ \cos\frac{2\pi\left(k_2+\frac{1}{n}\right)}{m}\ \sin\frac{2\pi\left(k_2+\frac{1}{n}\right)}{m}\ \ldots\right.$$

$$\cos\frac{2\pi\left(k_i+\frac{i-1}{n}\right)}{m}\ \sin\frac{2\pi\left(k_i+\frac{i-1}{n}\right)}{m}\ ,\dots$$

$$\left.\cos\frac{2\pi\left(k_n+\frac{n-1}{n}\right)}{m},\ \sin\frac{2\pi\left(k_n+\frac{n-1}{n}\right)}{m}\right) \tag{3}$$

$k_1\ k_2,\ \dots,\ k_n=1,\ 2,\ \dots,\ m$

образуют G-орбиту. Согласно работе [1], группа G порождена отражениями и кольцо ее инвариантных форм порождается базисными инвариантными формами

$$\Pi_2\left(x_{2i-1},\ x_{2i}\right)\ ,\ \Pi_m\left(x_{2i-1},\ x_{2i}\right)\ ,\ i=1,\,2,\,\dots,\,n$$

Где индекс у многочлена указывает на его степень. Ввиду ортогональности группы $\Pi_2\left(x_{2i-1},\ x_{2i}\right)\ =\ x_{2i-1}^2\ +\ x_{2i}^2$. Очевидно, что и любая другая группа, полученная из G циклическими перестановками множителей, также порождена отражениями. Следуя [1], введем обозначения

$$\Delta_n=\left\{x\in R^n\right|0\le x_i\le 2\pi\,,\ \ i=1\,,\ 2\,,\,\dots,\ n\left.\right\},T_n=\bigcap_{i=1}^{n}C_i$$

где Ci - гиперповерхности в $R^{2n}$, заданные уравнениями $x_{2i-1}^2+x_{2i}^2=1\,,\ \ i=1\,,\ 2\,,\ \dots,\ n$. Параметрические уравнения $C_i$ можно задать следующим образом: $x_{2i-1}=\cos\varphi_i\,,x_{2i}=\sin\varphi_i\,,\ \ 0\le\varphi_i\le 2\pi$. Через $a_j^{(k_1\,,\,k_2\,,\,\dots\,,\,k_n)}$ обозначим точки

$$\left(\frac{2\pi k_1}{m},\ \frac{2\pi\left(k_2+\frac{1}{n}\right)}{m},\ \frac{2\pi\left(k_3+\frac{2}{n}\right)}{m},\ \dots,\ \frac{2\pi\left(k_n+\frac{n-1}{n}\right)}{m}\right)$$

и точки получаемые из них циклическими перестановками координат. **Теорема 1.** *Кубатурная формула*

$$\int\limits_{\Delta_n} f\left(x\right)dx\cong\frac{\left(2\pi\right)^n}{nm^n}\sum_{j=0}^{n-1}\ \sum_{k_1\,,\ k_2\,,\ \dots k_n=0}^{m-1} f\left(a_j^{(k_1\,,\ k_2\,,\ \dots k_n)}\right) \tag{4}$$

*точна для всех тригонометрических многочленов до (2m-1)-й степени при* $n\ge 2$ *и (m-1)-й степени при* $n=1$.

Доказательство. Проверим, что кубатурная формула

$$\int\limits_{T_n} f\left(x\right)dS \cong \frac{1}{n}\left(\frac{2\pi}{m}\right)^n \sum_{j=0}^{n-1}\ \sum_{k_1\ ,\ k_2\ ,\ \dots k_n=0}^{m-1} f\left(b_j^{(k_1\ ,\ k_2\ ,\ \dots k_n)}\right) \tag{5}$$

где $b_j^{(k_1\ ,\ k_2\ ,\ \dots k_n)}$ получаются из точек (3) циклическими перестановками парных координат, обладает (2m-1)-й степенью точности. Так как она инвариантна относительно группы G [2, стр.129] и на Tn формы $\Pi_2\left(x_{2i-1}\ ,\ x_{2i}\right)=1$, то достаточно показать точность формулы (5) на постоянных и формах $\Pi_m\left(x_{2i-1}\ ,\ x_{2i}\right)\ ,\ i=1\ ,\ 2\ ,\ \dots\ ,\ n$. Точное равенство в (5), когда $f(x)=1$, следует из того, что кубатурная формула сумма содержит $nm^n$ узлов и обе стороны кубатурной формулы дают значение $(2\pi)^n$. Если $f\left(x\right)=\Pi_m\left(x_{2i-1}\ ,\ x_{2i}\right)$, то подставляя это значение в (5) и переходя к параметрической записи, получаем

$$(2\pi)^{n-1}\int\limits_0^{2\pi}\Pi_m\left(\cos\varphi_i\ ,\ \sin\varphi_i\right)d\varphi_i \ \cong$$

$$\cong \frac{1}{n}\left(\frac{2\pi}{m}\right)^n \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=0}^{n-1}\Pi_m\left(\cos\frac{2\pi\left(k+\frac{j}{n}\right)}{m}\ ,\ \sin\frac{2\pi\left(k+\frac{j}{n}\right)}{m}\right). \tag{6}$$

Сократив на (2 )n-1, заметим, что (6) является формулой прямоугольников с числом узлов, равным nm, которая точна на всех тригонометрических многочленах степени не выше nm-1, и, следовательно, для всех функций $\Pi_m\left(\cos\varphi_i\ ,\ \sin\varphi_i\right)\ ,\ i=1\ ,\ 2\ ,\ \dots\ ,\ n$. Из параметрических уравнений поверхности Tn видно, что след всякого, заданного в $R^{2n}$, многочлена на ней соответствует некоторому тригонометрическому многочлену на $\Delta_n$ той же степени. Обратно, для любого тригонометрического многочлена P на $\Delta_n$ найдется такой же многочлен $P_1$ на $R^{2n}$, что степени этих многочленов равны и след в (5) перейти к параметрическом уравнениям Tn, то получим формулу (4), точную на тригонометрических полиномах степени не выше 2m-1. Покажем, что это число является тригонометрической степенью точности формулы (4). Для тригонометрического одночлена $\exp\left(im\left(x_1-x_2\right)\right)$ кубатурная формула не точна, так как интеграл от него равен нулю, а кубатурная сумма отлична от нуля:

$$\sum_{k_1\ ,\ k_2=0}^{m-1} \exp\left(im\left(k_1-\left(k_2+\frac{1}{n}\right)\right)\right)+$$

$$+\sum_{k_1\ ,\ k_2=0}^{m-1} \exp\left(im\frac{2\pi}{m}\left(k_1+\frac{n-1}{n}-k_2\right)\right)+$$

$$+\sum_{k_1\ ,\ k_2=0}^{m-1} \exp\left(im\frac{2\pi}{m}\left(k_1+\frac{n-2}{n}-\left(k_2+\frac{n-1}{n}\right)\right)\right)+$$

$$+\sum_{k_1\ ,\ k_2=0}^{m-1} \exp\left(im\frac{2\pi}{m}\left(k_1+\frac{n-3}{n}-\left(k_2+\frac{n-2}{n}\right)\right)\right)+...+$$

$$+\sum_{k_1\ ,\ k_2=0}^{m-1} \exp\left(im\frac{2\pi}{m}\left(k_1+\frac{n-1}{n}-\left(k_2+\frac{2}{n}\right)\right)\right)=$$

$$=(n-1)\sum_{k_1\ ,\ k_2=0}^{m-1} \exp\left(im2\pi\left(k_1-k_2-\frac{1}{n}\right)\right)+$$

$$\sum_{k_1\ ,\ k_2=0}^{m-1} \exp\left(2\pi\left(k_1-k_2-\frac{n-1}{n}\right)\right)=$$

$$=(n-1)\,m^2\exp\left(2\pi i\frac{1}{n}\right)+m^2\exp\left(2\pi i\frac{1}{n}\right)==nm^2\exp\left(-2\pi i\frac{1}{n}\right)\neq 0.$$

В случае n=1 формула (4) не точна для одночлена $\exp(imx_1)$ , поэтому тригонометрическая степень точности кубатурной формулы равна m-1.

Теорема доказана.

Число узлов кубатурной формулы (4) равно $N = nm^n$. При n=1,2 оно минимально [1]. Кубатурная формула при n=2 отличается от формулы М.В.Носкова [1] и при n=3 от формулы И.П.Мысовских [3], хотя и содержит одинаковое число узлов. Следствие. Пусть $T_2^1$ - поверхность тора $x_1 = (R - a\cos\varphi)\cos\theta\,,\ x_2 = (R - a\cos\varphi)\sin\theta\,,\ x_3 =$

$a\sin\varphi$ и функция $\hat{f} = (\varphi,\ \theta)$ определена с помощью функции $f = (x_1\,,\ x_2\,,\ x_3)$ следующим образом:

$$\hat{f} = (\varphi\,,\ \theta) = a\,(R - a\cos\varphi) - f\,[(R - a\cos\varphi)\cos\theta\,,$$

$$(R - Q\cos\varphi)\sin\theta\,,\ a\sin\varphi]\,,\quad 0 \le \varphi\,,\ \theta < 2\pi.$$

Тогда формула

$$\int\limits_{T_2^1} f\,(x_1, x_2, x_3)\,dS = \frac{2\pi^2}{m^2}\sum_{k_1,k_2=0}^{m-1}\left[f\left(\frac{2\pi k_1}{m}\,,\ \frac{2\pi\left(k_2+\frac{1}{2}\right)}{m}\right)+\right.$$

$$\left.+f\left(\frac{2\pi\left(k_1+\frac{1}{2}\right)}{m}\,,\ \frac{2\pi k_2}{m}\right)\right] \qquad (7)$$

имеет (m-1)-ю тригонометрическую степень точности.

Доказательство. След всякого многочлена степени не выше m на $T_2^1$ является тригонометрическим полиномом степени не выше 2m. Так как элемент поверхности $dS = a\,(r - Q\cos\varphi)\,d\varphi d\theta$, то правая часть (7) будет интегралом от тригонометрического многочлена степени не выше 2m-1 и утверждение следует из теоремы.

*Замечание.* Кубатурная формула (5) является средним арифметическим n кубатурных формул, каждая из которых инвариантна относительно некоторой группы, получаемой из группы G циклическими перестановками множителей.

**Теорема 2.** *Кубатурная формула*

$$\int\limits_{\Delta_n} f\,(x)\,dx \cong \frac{(2\pi)^n}{m^n}\sum_{k_1,k_2\,\dots k_n=1}^{m} f\left(\frac{2\pi k_1}{m}\,,\ \frac{2\pi k_2}{m}\,,\ \dots\,,\ \frac{2\pi k_n}{m}\right)+$$

$$+\frac{(2\pi)^n}{m^{n+2}}\sum_{k_1\,,\ k_2\,,\ \dots k_n=1}^{m}\Delta f\left(\frac{2\pi k_1}{m}\,,\ \frac{2\pi k_2}{m}\,,\ \dots\,,\ \frac{2\pi k_n}{m}\right) \qquad (8)$$

*где* $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial\,x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial\,x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial\,x_n^2}$, *точна для всех тригонометрических многочленов до (2m-1)-й степени.*

Доказательство. Нетрудно убедиться, что кубатурная формула

$$\int\limits_{T_n} f\,(x)\,dS \cong \left(\frac{2\pi}{m}\right)^n \sum_{k_1,k_2,\dots k_n=1}^{m} \times$$

$$\times f\left(\cos\frac{2\pi k_1}{m}\,,\,\sin\frac{2\pi k_1}{m}\,,\,...\,,\cos\frac{2\pi k_n}{m}\,,\,\sin\frac{2\pi k_n}{m}\right)+$$

$$+\frac{(2\pi)^n}{m^{n+2}}\sum_{k_1\,,\,k_2\,,\,...k_n=1}^{m}\Delta f\left(\cos\frac{2\pi k_1}{m}\,,\,\sin\frac{2\pi k_1}{m}\,,\,...\,,\cos\frac{2\pi k_n}{m}\,,\,\sin\frac{2\pi k_n}{m}\right) \tag{9}$$

имеет (2m-1)-ю степень точности. Действительно она инвариантна относительно группы $\bar{G} = G_1 \times G_1 \times \ldots \times G_1$ и точна для многочленов $1\,,\,\Pi_m\left(x_{2i-1}\,,\;x_{2i}\right)\,,\;\;i=1\,,\;2\,,\;...\,,\;n$. Поскольку следующие инвариантные многочлены группы $\bar{G}$ имеет 2m-ю степень $\Pi_m\left(x_{2i-1}\,,\;x_{2i}\right)\;\cdot$ $\Pi_m\left(x_{2j-1}\,,\;x_{2j}\right)\,,\;\;i,j=1\,,\;2\,,\;...\,,\;n$, то формула (9) точна для всех многочленов до (2m-1)-й степени, откуда следует, что кубатурная формула (8) точна для всех тригонометрических многочленов той же степени. Для тригонометрического одночлена $\exp\left(i2mx_1\right)$ степени 2m формула (8) не точна, так как интеграл от него равен нулю, а кубатурная сумма отлична от нуля и равна $-3\left(2\pi\right)^m$.

Теорема доказана.

Следствие. Кубатурная формула

$$\int\limits_{T_n} f\left(x\right)dS \cong \left(\frac{2\pi}{m}\right)^n\sum_{j=0}^{2}\sum_{k_1\,,\,k_2\,,\,...k_n=1}^{m}\times$$

$$\times\left[f\left(\frac{2\pi\left(k_1+\frac{j}{3}\right)}{m}\,,\,\frac{2\pi\left(k_2+\frac{j}{3}\right)}{m},\,...\,,\,\frac{2\pi\left(k_n+\frac{j}{3}\right)}{m}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2m^2}\Delta f\left(\frac{2\pi\left(k_1+\frac{j}{3}\right)}{m}\,,\,\frac{2\pi\left(k_2+\frac{j}{3}\right)}{m},\,...\,,\,\frac{2\pi\left(k_n+\frac{j}{3}\right)}{m}\right)\right] \tag{10}$$

точна для всех тригонометрических многочленов до (3m-1)-й степени.

Доказательство следствия аналогично доказательству теоремы 2, только в данном случае аналог формулы (10) в Tn точен для многочленов $\Pi_m\left(x_{2i-1}\,,\;x_{2i}\right)\,,\,\Pi_m^2\left(x_{2i-1}\,,\;x_{2i}\right)$ так как каждая из двух слагаемых в кубатурной сумме по переменным $x_{2i-1}\,,\;x_{2i}$ является формулой прямоугольников с 3m узлами, поэтому достаточно потребовать, чтобы она была точна для постоянной и многочленов
$\Pi_m\left(x_{2i-1}\,,\;x_{2i}\right)\;\cdot\Pi_m\left(x_{2j-1}\,,\;x_{2j}\right)\;\;(i\neq j)\,.$

**Литература**


1. Носков М.В. Кубатурные формулы для приближенного интегрирования периодических функций. // В. кн.: Методы вычислений. Вып. 14, Л., 1985. С. 15-23.

2. Мысовских И.П. Интерполяционные кубатурные формулы. // М.: Наука, 1981, 336 с.

3. Мысовских И.П. Кубатурные формулы, точные для тригонометрических многочленов. // В. кн.: Методы вычислений. Вып. 15, Л., С. 7-19.


Ташкентский государственный
технический университет

Дата поступления
20.11.06

## Содержание

# Mundarija




Компьютерная верстка: *Ф.А.Нуралиев*

Регистр. №0044. Сдано в набор 10.01.08 г. Подписано к печати 10.03.08 г.
Формат 60×90 1/16. Гарнитура литературная. Печать офсетная.
Усл.-печ.л. 7,0. Тираж 200. Заказ №69
Издательство "Фан"АН РУз: 100047, Ташкент, ул. акад. Я.Гулямова, 70
Институт математики и информационных технологий АН РУз: 100125, Ташкент, Академгородок, ул. Ф.Ходжаева, 29.

Отпечатано в ООО "Арнапринт" г.Ташкент, ул. Х.Байкаро, 41