O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI FANLAR AKADEMIYASI
MIRZO ULUG‘BEK NOMIDAGI O‘ZBEKISTON MILLIY
UNIVERSITETI QOSHIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI

O‘ZBEKISTON MATEMATIKA JURNALI

Jurnalga 1957 yilda asos solingan (1991 yilgacha "O‘zbekiston fanlar akademiyasining axboroti. Fizika-matematika fanlari seriyasi"deb nomlangan). Yilda 4 marta chiqadi

4. 2014

УЗБЕКСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

УзМЖ

Основан в 1957 г. (до 1991 г. под названием "Известия Академии наук Узбекистана. Серия физико-математических наук"). Выходит 4 раза в год

ТАШКЕНТ - 2014

Адрес редколлегии: 100125. Ташкент, Дурмон йули, 29,
Институт математики при Национальном Университете
Узбекистана им. М.Улугбека,
телефон: (+99871) 262-75-44

ТАШКЕНТ - 2014

О НАУЧНОЙ, ПЕДАГОГИЧЕСКОЙ И ОБЩЕСТВЕННОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ АКАДЕМИКА Т. Д. ДЖУРАЕВА

(к 80 - летию со дня рождения)

25 октября 2014 года исполняется 80 лет со дня рождения известного ученого-математика, доктора физико-математических наук, профессора, заслуженного деятеля науки Республики Узбекистан, лауреата Государственной премии им. Беруни, академика Тохтамурада Джураевича Джураева.

Т.Д.Джураев – был известным специалистом в области дифференциальных уравнений с частными производными, создавшим свою широко известную научную школу, и внесшим весомый вклад в развитие математической науки в Узбекистане. В начале 1960-х годов в Узбекистане начало развиваться новое направление математических исследований – теория уравнений смешанного, составного и смешанно-составного типов, становление и развитие которого неразрывно связано с именем Т.Д.Джураева.

Фундаментальные работы Т.Д.Джураева по математическим проблемам теории пограничного слоя пользуются широким признанием математической общественности и вывели его в ряд известных исследователей в мире.

Т.Д.Джураев родился 25 октября 1934 года в Янги–Юльском районе Ташкентской области. Окончив в 1953 г. среднюю школу, он поступил на математическое отделение физико-математического факультета Среднеазиатского Государственного университета (ныне – Национальный университет Узбекистана им. М.Улугбека) и в 1958 г. с отличием окончил его.

На формирование Т.Д.Джураева как ученого, благотворное влияние оказали ряд ученых–математиков, но решающим стало влияние всемирно известных научных школ, руководимых академиками А.В.Бицадзе и О.А.Олейник.

Путь Т.Д.Джураева в науку был последовательным и закономерным. В 1962 г. он защитил кандидатскую, а в 1972 г. докторскую диссертации, в 1974 г. ему было присвоено ученое звание профессора, в 1979 г. был избран членом-корреспондентом, в 1989 г. действительным членом Академии наук Узбекистана, а в 1991 г. удостоен звания "Заслуженный деятель науки Республики Узбекистан". В 1994 г. Т.Д.Джураев был избран академиком Международной Академии высшей школы (Россия), а в 1998 г. – академиком Международной Академии культуры и знания им. Ататюрка (Турция).

Т.Д.Джураев внес существенный вклад в разработку теории корректных краевых задач для неклассических уравнений математической физики.

Т.Д.Джураевым впервые были поставлены и изучены краевые задачи с неизвестной линией изменения типа для смешанных параболо-гиперболических уравнений, что имеет важное значение для приложений. В настоящее время это научное направление, интенсивно развивается под названием "Задачи со свободной границей", в том числе учениками и последователями ученого.

Изучение уравнений параболо-гиперболического типа как в ограниченных, так и неограниченных трехмерных областях также впервые было начато в работах Т.Д.Джураева и продолжено его учениками.

Далее, в исследованиях Т.Д.Джураева большое место занимало изучение дифференциальных уравнений с частными производными высокого порядка. Им изучен широкий класс локальных и нелокальных краевых задач для уравнений третьего и четвертого порядков с кратными характеристиками и составного типа, причем в этих работах впервые были рассмотрены нелинейные уравнения указанных типов.

Основные результаты, полученные Т.Д.Джураевым по теории уравнений смешанного, составного и смешанно-составного типов, вошли в его монографии: "Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно–составного типов"(Ташкент, "Фан". 1979), "Краевые задачи для уравнений параболо–гиперболического типа"(Ташкент, "Фан". 1986) и "К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка"(Ташкент, "Фан". 2000).

Под руководством и при непосредственном участии Т.Д.Джураева были начаты у нас в стране исследования по спектральной теории операторов составного и смешанно-составного типов.

Особый интерес представляют его вклад в развитие математической теории пограничного слоя – важного раздела современной гидромеханики.

В теории температурного пограничного слоя Т.Д.Джураевым впервые было дано обоснование корректной постановки и полное исследование краевых задач для уравнений температуры, и в связи с этим изучен класс сильно вырождающихся параболических уравнений в ограниченной и бесконечной областях.

Заслуживают внимания научные исследования Т.Д.Джураева, проведенные им в последние годы жизни. В этот период его интересовали нерешенные и новые сложные задачи теории дифференциальных уравнений. В результате, был выработан общий подход и вопрос о правильной постановке корректных краевых задач для широкого класса уравнений произвольного высокого порядка и предложен новый метод их решения. Он является автором трех монографий, трех учебников для вузов и более 300 научных работ, опубликованных в международных и республиканских изданиях.

Он был прекрасным организатором науки и высшего образования в нашей стране, видным общественным деятелем. В 1974–1985 годах он работал директором Института механики и сейсмостойкости сооружений им. М.Т.Уразбаева АН РУз,в течении 1985–1992 гг. и 1997–2003 гг. руководил Институтом математики им В.И.Романовского АН РУз.

В 1992 г. Т.Д.Джураев был назначен ректором ТашГУ — старейшего университета Узбекистана (ныне Национальный Университет Узбекистана им. М. Улугбека). Он за время работы в университете все свои силы, знания и организаторский опыт направил на поднятие учебно-воспитательной и научно-исследовательских работ на уровень, соответствующий статусу ведущего университета страны и на расширение и укрепление международных связей. Были открыты новые факультеты и созданы новые кафедры, укрепился кадровый потенциал университета.

В 1995–2000 г. Т.Д.Джураев был Президентом Академии наук Узбекистана. Под руководством Т.Д.Джураева Академия наук Республики Узбекистан добилась весомых успехов в проведении научно-исследовательских работ, в укреплении национальной идеологии независимости, в глубоком и объективном изучении древней истории узбекского народа и узбекской государственности, в проведении крупных международных форумов, в поддержке молодых ученых, был проведен ряд мероприятий по совершенствованию системы управления академической наукой.

Свою плодотворную и интенсивную научную и научно-организационную работу Т.Д.Джураев успешно сочетал с широкой педагогической и общественной деятельностью, особенно в тот период, когда он был председателем Проблемного совета "Математика" при АН РУз, главным редактором "Узбекского математического журнала" , Президентом Узбекского математического общества, председателем специализированных советов по защите докторских и кандидатских диссертаций, которые он возглавлял в разные годы как в Институте механики и сейсмостойкости сооружений АН РУз, так и в ТашГУ и Институте математики АН РУз. Вместе с академиком М.С.Салахитдиновым он руководил Республиканским семинаром по уравнениям в частных производных.

Под руководством Т.Д.Джураева было подготовлено более 45 кандидатов и докторов наук. Ученики Т.Д.Джураева работают во многих научных центрах и вузах Узбекистана, России, Польши, Китая, Казахстана, Киргизии, Туркмении.

За большие заслуги в проведении научных исследований Т.Д.Джураев в 1971 г. награжден орденом Трудового Красного Знамени. В 1974 г. за цикл научных исследований ему была присуждена Государственная премия имени Беруни. В 1991 г. ему была присвоено звание ”Заслуженный деятель науки Узбекистана”. В 1996 г. он награжден орденом ”Дўстлик”, а в 1999 году – орденом "Мехнат шухрати".

Т.Д.Джураев неоднократно представлял математическую науку за рубежом, выступал с научными докладами на международных конгрессах. Он являлся председателем, сопредседателем и членом оргкомитета в ряде проведенных международных конференций и симпозиумов по дифференциальным уравнениям и математической физике.

Т.Д.Джураев избирался народным депутатом Республики Узбекистан (1992–1994 гг.) и депутатом Олий Мажлиса Республики Узбекистан (1994–1999 гг.).

В отношениях с коллегами и учениками Тохтамурад Джураевич был всегда тактичен и доброжелателен. Он обладал способностью искренне радоваться новым научным идеям и результатам своих коллег и учеников и всегда стремился поддержать все новое. Его научная щедрость, широта души, способность и стремление прийти на помощь снискали глубокое уважение среды коллег в научной среде и признательность его многочисленных учеников.

Вся многогранная жизнь этого замечательного ученого, интеллигента, с широком кругозором, верного своим жизненным принципам, будет служить примером служения науке и своему народу.

Тохтамурад Джураевич Джураев умер 14 сентября 2009 года, не дожив полтора месяца до своего 75–летия.

Память о Тохтамураде Джураевиче, ученом высокой эрудиции, талантливом математике, крупном организаторе науки, волевом человеке с добрым, отзывчивым сердцем сохранится навсегда в сердцах его друзей, коллег и учеников.

Редколлегия журнала

Uzbek Mathematical
Journal, 2014,№4, pp.9-28

On almost everywhere convergence of spherically symmetric continuous wavelet transforms

Ravshan Ashurov and Almaz Butaev

Sferik simmetrik uzluksiz veyvlet almashtirishlari qaralgan va bunday almashtirshlar uchun Riss o'rtachalari kiritilgan. L_2 - funksiyalar uchun istalgan musbat tartibli Riss o'rtachalarining deyarli barcha nuqtalarda yaqinlashishi isbotlangan.

Расмотрим сферически симметрические непрерывные вейвлет преобразования. Для таких преобразований введены средные Рисса. Доказано, что для L_2 - функций введеные средные Рисса любого положительного порядка сходятся почти всюду.

AMS 2000 Mathematics Subject Classifications : Primary 42C15; Secondary 40A30.
Key words: Spherically symmetric continuous wavelet transforms; Riesz means; Almost-everywhere convergence.

0.1 Introduction

A class of spherically symmetric wavelets is one of the important wavelet classes and the convergence of the inverse spherically symmetric wavelet transforms in L_2 norm is well known (see [2]). In the literature on wavelet theory this result is called the resolution of identity. However the pointwise convergence of these transforms was not much investigated, despite the pointwise inversion formula is in fact one of the most important feature of wavelet transforms and is actively studied in different aspects (see e.g. [5]-[7],[9],[10]). Therefore the subject matter of the present paper is the pointwise convergence.

Let the Fourier transform of $f \in L_1(R^n)$ be defined as

$$\hat{f}(\xi) = \int_{R^n} f(x) e^{-ix\xi} dx,$$

while for $f \in L_2(R^n)$ the corresponding $\hat{f}(\xi)$ be defined according to the Plancherel theorem (see e.g. [8]).

Definition 1. *We say $\psi \in L_1(R^n) \cap L_2(R^n)$ is a (mother) wavelet if $\|\psi\|_2 = 1$ and the following admissibility condition is satisfied*

$$\int_{R^n} |\omega|^{-n} |\hat{\psi}(\omega)|^2 d\omega < \infty.$$

In this paper we consider a class of *spherically symmetric wavelets*, i.e. wavelets ψ for which there is a function $\varrho(r) : [0, \infty) \to C$ such that $\psi(x) = \varrho(|x|)$. Obviously for this class of wavelets the Fourier transform $\hat{\psi}(\xi)$ is also spherically symmetric. Namely, for some $\eta(t) : [0, \infty) \to C$ one has

$$\hat{\psi}(\xi) = \eta(|\xi|). \tag{1}$$

It should be noted that the admissibility condition and the fact that $\hat{\psi} \in L_2(R^n)$ immediately imply the following

$$C_\psi = \int_0^\infty \frac{|\eta(t)|^2}{t} dt < \infty, \tag{2}$$

$$\int_0^\infty |\eta(t)|^2 t^{n-1} dt < \infty. \tag{3}$$

Next we generate a doubly-indexed family of wavelets from a spherically symmetric mother wavelet ψ by dilating by the factor $a > 0$ and then translating by $b \in R^n$:

$$\psi^{a,b}(x) = a^{-n/2} \psi \left(\frac{x - b}{a} \right).$$

The continuous wavelet transform of $f \in L_2(R^n)$ associated with ψ is defined by

$$(Tf)(a, b) = \int_{R^n} f(x) \overline{\psi^{a,b}(x)} dx.$$

Now we can introduce partial wavelet transforms $W_\lambda f(x)$.

Definition 2. *For $f \in L_p(R^n)$, $1 \le p < \infty$ and $\lambda > 0$ we define partial wavelet transform $W_\lambda f(x)$ as*

$$W_\lambda f(x) = \int_\lambda^\infty \frac{da}{a^{n+1}} \int_{R^n} (Tf)(a, b) \psi^{a,b}(x) db.$$

As we noted above (see Daubechies [2]) the inversion formula for spherically symmetric wavelet ransforms

$$f = C_\psi^{-1} \int_0^\infty \frac{da}{a^{n+1}} \int_{R^n} (Tf)(a,b)\psi^{a,b} db$$

is achieved in L_2 sense for all L_2-functions without any restrictions on wavelets. However, the question of pointwise convergence for this formula in multidimensional cases is still open. It should be noted here, that the problem of pointwise convergence in the inversion formula for general wavelet series expansions (not necessarily spherically symmetric) in multidimensional case was successfully treated in [5] under an extra condition on wavelets (wavelets should vanish rapidly at infinity).

In this paper we investigate the pointwise convergence of $W_\lambda f(x)$ and show that for wavelets with sufficient decay at infinity, pointwise convergence of $W_\lambda f(x)$ for L_p-functions takes place on the entire Lebesgue set. Moreover, to study $W_\lambda f(x)$ transforms, associated with general spherically symmetric wavelets, we introduce the Riesz summation method and prove the almost-everywhere convergence for any positive order Riesz means of $W_\lambda f(x)$ of L_2-functions.

0.2 Results

Let $\psi(x)$ be a spherically symmetric wavelet. For $s \geq 0$ and $\lambda > 0$ we define the Riesz mean of order s as

$$W_\lambda^s f(x) = \int_{a>\lambda} \left(1 - \frac{\lambda}{a}\right)^s \frac{da}{a^{n+1}} \int_{R^n} (Tf)(a,b)\psi^{a,b}(x) db. \qquad (4)$$

Our goal is to prove the following theorems

Теорема 1. *For every $f \in L_2(R^n)$ and any $s > 0$*

$$\lim_{\lambda \to 0+} W_\lambda^s f(x) = C_\psi f(x)$$

holds almost everywhere on R^n.

If inclusion

$$\psi(x)(1 + |x|^{[n/2]+\epsilon}) \in L_1(R^n) \cap L_2(R^n), \qquad (5)$$

holds for some $\epsilon > 0$, then the assertion of Theorem 1 is also valid for $s = 0$ (throughout the paper we use the notion $[m]$ for the greatest integer that does not exceed m). More precisely the following theorem is true.

Теорема 2. *Let $\psi(x)$ be a spherically symmetric wavelet. If (5) is satisfied, then for every $f \in L_p(R^n),\ 1 \le p < \infty$,*

$$\lim_{\lambda \to 0+} W_\lambda f(x) = C_\psi f(x)$$

holds on the entire Lebesgue set of f.

We recall that a point $x \in R$ is a Lebesque point of a locally integrable function f if

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{\Omega_n r^n} \int_{|x-y|<r} |f(y) - f(x)|dy = 0, \tag{6}$$

where Ω_n denotes the Lebesgue measure of the unit ball in R^n. The set of all Lebesgue points is called the Lebesgue set of f. We recall that according to the Lebesgue theorem if f is a locally integrable function, then almost all points are its Lebesgue points. Thus, Theorem 2 in particular asserts almost everywhere convergence of continuous wavelet transforms.

In order to prove Theorem 1 we will use methods of kindred theory of multiple Fourier integrals and for Theorem 2, we will consider $W_\lambda f$ as an integral operator and will study its kernel's properties.

0.3 Spherical wavelet transform and Fourier integrals

In this section following Rao at al. [6] we establish a connection between the Riesz means $W_\lambda^s f(x)$ and the Riesz means of the multiple Fourier integrals. This connection will enable us to use known results from Fourier analysis.

Let ψ be a spherically symmetric wavelet and $f \in L_2(R^n)$. Then

$$Tf(a,b) = f * \overline{\psi}^{a,0}(b).$$

Therefore applying the Fourier transform to this convolution we have

$$[Tf(a,\cdot)]^{\hat{}}(\omega) = a^{n/2}\hat{f}(\omega)\overline{\hat{\psi}(a\omega)}. \tag{7}$$

If we denote the inner integral in (4) by

$$G(a,x)=\int_{R^n}(Tf)(a,b)\psi^{a,b}(x)db,$$

then using the Plancherel theorem and formula (7) one can show that

$$G(a,x)=a^n/(2\pi)^n\int_{R^n}\hat{f}(\omega)e^{i\omega x}|\hat{\psi}(a\omega)|^2\ d\omega.$$

Hence the Riesz means (4) will have the form

$$W^s_\lambda f(x)=(2\pi)^{-n}\int_{a>\lambda}\left(1-\frac{\lambda}{a}\right)^s\frac{da}{a}\int_{R^n}\hat{f}(\omega)e^{i\omega x}|\hat{\psi}(a\omega)|^2\ d\omega.$$

Now recalling (1), we apply the Fubini theorem to this integral to obtain

$$W^s_\lambda f(x)=(2\pi)^{-n}\int_{R^n}\hat{f}(\omega)e^{i\omega x}\ d\omega\int_{a>\lambda}\left(1-\frac{\lambda}{a}\right)^s|\hat{\psi}(a\omega)|^2\frac{da}{a}=$$

$$(2\pi)^{-n}\int_{R^n}\hat{f}(\omega)e^{i\omega x}\ d\omega\int_{a>\lambda|\omega|}\left(1-\frac{\lambda|\omega|}{a}\right)^s|\eta(a)|^2\frac{da}{a}=$$

$$(2\pi)^{-n}\int_0^\infty\frac{|\eta(a)|^2}{a}da\int_{|\omega|<a/\lambda}\left(1-\frac{\lambda|\omega|}{a}\right)^s\hat{f}(\omega)e^{i\omega x}\ d\omega.$$

It is not difficult to show that the application of Fubini's theorem is justifiable due to (3) and the estimate

$$\int_{|\omega|\le a/\lambda}\left(1-\frac{\lambda|\omega|}{a}\right)^s|\hat{f}(\omega)|d\omega\le C\left(\frac{a}{\lambda}\right)^{n/2}\|\hat{f}\|_2.$$

Thus for all $f\in L_2(R^n)$ one has

$$W^s_\lambda f(x)=\int_0^\infty E^s_{a/\lambda}f(x)|\eta(a)|^2\frac{da}{a},\tag{8}$$

where

$$E^s_\mu f(x)=(2\pi)^{-n}\int_{|\omega|<\mu}\left(1-\frac{|\omega|}{\mu}\right)^s\hat{f}(\omega)e^{i\omega x}\ d\omega$$

is the Riesz means for spherical Fourier integral. In particular,

$$E_\mu^0 f(x) = E_\mu f(x) = (2\pi)^{-n} \int_{|\omega|<\mu} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x}\, d\omega$$

is the spherical partial integrals of multiple Fourier integrals.

Formula (8) establishes the relation between the Riesz means of wavelet transform and the Riesz means of spherical Fourier partial integrals of any function $f \in L_2(R^n)$. We will show that using the formula one can derive the pointwise convergence of $W_\lambda^s f(x)$ from the corresponding convergence of $E_\mu^s f(x)$.

Let us introduce the Hardy-Littlewood maximal operator (see [8])

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{\Omega_n r^n} \int_{|x-y|<r} |f(y)| dy.$$

If we define

$$\mu_x(t) = \int_{|x-y|<t} |f(y)| dy,$$

then, obviously

$$\mu_x(t) \leq \Omega_n t^n Mf(x). \tag{9}$$

Our proof is based on the estimate of maximal operator

$$W_*^s f(x) = \sup_{\lambda>0} |W_\lambda^s f(x)| \tag{10}$$

in L_2-norm. To estimate this operator we will use a known result on the following maximal operator

$$E_*^s f(x) = \sup_{\lambda>0} |E_\lambda^s f(x)|. \tag{11}$$

Lemma 1. *Let $s > 0$. Then there is a constant C such that for any $f \in L_2(R^n)$ the following estimate is valid*

$$\|E_*^s f\|_2 < C\|f\|_2.$$

The proof of this Lemma can be found e.g. in [1].

Now one can use this fact and apply the Minkowski inequality to (8) in order to have

Corollary. *Let $s > 0$. Then there is a constant C such that for any $f \in L_2(R^n)$ the following estimate is valid*

$$\|W_*^s f\|_2 < C\|f\|_2.$$

Note that Lemma and Corollary imply that for $f \in L_2(R^n)$, and $s > 0$ the equalities

$$E_*^s f(x) < \infty$$

and

$$W_*^s f(x) < \infty \tag{12}$$

hold for almost all $x \in R^n$.

Finally, the following lemma shows that the Riesz summation method for wavelets preserves convergence in mean square.

Lemma 2. *Let $f \in L_2(R^n)$ and $s > 0$. Then*

$$\lim_{\lambda \to 0} \|W_\lambda^s f(x) - C_\psi f(x)\|_{L_2(R^n)} = 0.$$

Proof. Indeed,

$$|W_\lambda^s f(x) - C_\psi f(x)| \le \int_0^\infty \left| E_{a/\lambda}^s f(x) - f(x) \right| \frac{|\eta(a)|^2}{a} da \equiv I_\lambda(x).$$

For any $A > 0$ introducing the functions

$$I_{\lambda,A}^1(x) = \int_0^A \left| E_{a/\lambda}^s f(x) - f(x) \right| \frac{|\eta(a)|^2}{a} da,$$

$$I_{\lambda,A}^2(x) = \int_A^\infty \left| E_{a/\lambda}^s f(x) - f(x) \right| \frac{|\eta(a)|^2}{a} da,$$

we can consider integral $I_\lambda(x)$ as a sum $I_\lambda(x) = I_{\lambda,A}^1(x) + I_{\lambda,A}^2(x)$. Recalling (2) it is clear that $I_{\lambda,A}^1(x) \le \alpha(A)(|E_*^s f(x)| + |f(x)|)$, where $\lim_{A \to 0} \alpha(A) = 0$. Moreover, using the Minkowski inequality one has

$$\|I_{\lambda,A}^2\|_2 \le C_\psi \sup_{a > A} \|E_{a/\lambda}^s f(x) - f(x)\|_2,$$

for each fixed $A > 0$. Now Lemma 2 follows from the convergence of the Riesz means for the Fourier integrals in L_2-norm.

0.4 Proof of Theorem 1

First we note that as it follows from the regularity of Riesz's means for Fourier integrals (see e.g. [1]), for every $f \in C_0^\infty(R^n)$ and $s \geq 0$

$$E_\mu^s f(x) \to f(x), \ as \ \mu \to \infty,$$

at every $x \in R^n$. Further recalling (8)

$$W_\lambda^s f(x) = \int_0^\infty E_{a/\lambda}^s f(x) |\eta(a)|^2 \frac{da}{a}$$

and using the Lebesgue theorem one can show that for every $f \in C_0^\infty(R^n)$ and $s \geq 0$

$$W_\lambda^s f(x) \to f(x) \int_0^\infty \frac{|\eta(a)|^2}{a} da = C_\psi f(x), \ as \ \lambda \to 0,$$

at every $x \in R^n$.

Next let $T = \{f \in L_2(R^n) : W^s f(x) \equiv \lim_{\lambda \to 0} W_\lambda^s f(x) < \infty, \ for \ a.e. \ x \in R^n\}$. We have just seen that $C_0^\infty(R^n) \subset T$, therefore T is dense in $L_2(R^n)$.

Now one can recall (12) and using well known technique of Banach's principle (see e.g. [3]) conclude that $T = L_2(R^n)$.

Finally we must show that $W_\lambda^s f(x)$ converges almost everywhere precisely to $C_\psi f(x)$. In order to do this we recall that Lemma 2 asserts that

$$\|W_\lambda^s f(x) - C_\psi f(x)\|_2 \to 0.$$

This means that $W_{\lambda_k}^s f(x)$ tends to $C_\psi f(x)$ in measure. The last fact implies that there is a sequence $\{\lambda_k : \lambda_k \to 0\}$ such that $W_{\lambda_k}^s f(x) \to C_\psi f(x)$ almost everywhere. Theorem 1 is proved.

□

0.5 Wavelet transform as an integral operator

Here we note that W_λ can be expressed as an integral operator

$$W_\lambda f(x) = \int_{R^n} f(t) K_\lambda(x-t) dt, \tag{13}$$

where

$$K_\lambda(x) = \int_\lambda^\infty \frac{da}{a^{2n+1}} \int_{R^n} \psi((x-b)/a)\overline{\psi}(-b/a)db.$$

One can see that

$$\hat{K}_\lambda(\xi) = \int_\lambda^\infty |\hat{\psi}(a\xi)|^2 \frac{da}{a} = \int_\lambda^\infty |\eta(a|\xi|)|^2 \frac{da}{a} = \int_{\lambda|\xi|}^\infty |\eta(a)|^2 \frac{da}{a}.$$

We first study $K_\lambda(x)$ for $\lambda = 1$, which we denote by $K(x)$. It is obvious that

$$\hat{K}(\xi) = \int_{|\xi|}^\infty \frac{|\eta(a)|^2}{a} da.$$

Lemma 3. $\hat{K}(\xi) \in L_1(R^n)$.

Poof. Indeed, using the Fubini theorem one has

$$\int_{R^n} |\hat{K}(\xi)| d\xi = \int_{R^n} \int_{a>|\xi|} \frac{|\eta(a)|^2}{a} da\ d\xi = C \int_0^\infty |\eta(a)|^2 a^{n-1} da < \infty.$$

Corollary. $K(x) \in C(R^n)$ *and* $K(x) \to 0,$ *as* $|x| \to \infty.$

In order to estimate the rate of decay of $K(x)$ we need to exercise the condition (5). With this aim we will need partial difference Δ_h defined as $\Delta_h f(t) = f(t+h) - f(t)$.

Lemma 4. *Let* $g(x)$ *be a locally bounded function such that* $\|\Delta_h g\|_{L_1(1,\infty)} = O(h^\epsilon)$, *for some* $0 < \epsilon < 1,\ h < 1$. *Then*

$$I(\mu) = \int_1^\infty g(x) e^{ß\mu x} dx = O(\mu^{-\epsilon}),\ as\ |\mu| \to \infty.$$

Proof. Note that

$$I(\mu) = -\int_{1+\pi/\mu}^\infty g(x - \pi/\mu) e^{ß\mu x} dx.$$

And therefore

$$I(\mu) = 1/2 \int_1^{1+\pi/\mu} g(x) e^{ß\mu x} dx + 1/2 \int_{1+\pi/\mu}^\infty \Delta_{\pi/\mu} g(x - \pi/\mu) e^{ß\mu x} dx \le$$

$$C_1/\mu + 1/2\int_1^\infty |\Delta_{\pi/\mu} g(x)|dx \le C\mu^{-\epsilon}.$$

Lemma 5. *Let $0 < \delta < 1/2$, $N \ge 0$ and $\alpha \ge -1/2$ related by inequalities $1/2 \le N - \alpha \le 1$. Let also $\rho(t) \in C^{N+\delta}[0,\infty)$ be a nonnegative function such that $\rho(0) = \lim_{t\to\infty} \rho^{(j)}(t) = 0$, for every $0 \le j \le N$.*

If $\rho^{(j)}(t)t^\alpha \in L_1(1,\infty)$, for every $0 \le j \le N$, and

$$\|\Delta_h \rho^{(N)}(t)t^\alpha\|_{L_1(1,\infty)} = O(h^\delta),\ |h| \le 1, \tag{14}$$

then

$$I(\mu) = \int_0^\infty \rho(t)t^\alpha J_\nu(\mu t)dt = O(\mu^{-\alpha-\delta/2-1}),\ \mu > 1,$$

here $J_\nu(t)$ denotes the Bessel function of the first kind of order $\nu \ge 0$.

Proof. First we note that for some $c_0 > 0$, the estimate

$$\rho(t) \le c_0 t^\delta \tag{15}$$

holds in a neighborhood of zero. Moreover, since

$$\rho^{(k)}(t) = -\int_t^\infty \rho^{(k+1)}(u)u^\alpha u^{-\alpha}du,$$

the lemma's condition implies the following estimate for all $0 \le k < N$:

$$\rho^{(k)}(t) = o(t^{-\alpha}),\ as\ t \to \infty. \tag{16}$$

$I(\mu)$ can be viewed as the sum of $I_1(\mu)$ and $I_2(\mu)$, where

$$I_1(\mu) = \int_0^{\mu^{-1}} \rho(t)t^\alpha J_\nu(\mu t)dt$$

and

$$I_2(\mu) = \int_{\mu^{-1}}^\infty \rho(t)t^\alpha J_\nu(\mu t)dt.$$

Using Bessel's function asymptotics and (15)we have

$$I_1(\mu) \le C\mu^{-(\alpha+1+\delta)}.$$

For $I_2(\mu)$ we can use the formula (see e.g. [8] chapter 4, §3)

$$\frac{d}{dr}\left[x^l J_l(x)\right] = x^l J_{l-1}(x) \tag{17}$$

and integrate by parts several times, to see that

$$I_2(\mu) = \sum_{k=0}^{N-1} \mu^{-k-1} \sum_{\beta=0}^{k} C_{\beta,k}\ D^\beta[\rho(t)t^\alpha] t^{\beta-k} J_{\nu+k+1}(\mu t)\big|_{t=\mu^{-1}} +$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} \mu^{-k-1} \sum_{\beta=0}^{k} C_{\beta,k}\ D^\beta[\rho(t)t^\alpha] t^{\beta-k} J_{\nu+k+1}(\mu t)\big|_{t=\infty} +$$

$$\left(\frac{-1}{\mu}\right)^N \sum_{\beta=0}^{N} C_{\beta,N} \int_{\mu^{-1}}^{\infty} D^\beta[\rho(t)t^\alpha] t^{\beta-N} J_{\nu+N+1}(\mu t) dt = T_1 + T_2 + T_3.$$

Note that as $t = \mu^{-1}$ in the first sum, we have

$$T_1(\mu) = \sum_{k=0}^{N-1} \mu^{-k-1} \sum_{\beta=0}^{k} C_{\beta,k} D^\beta[\rho(t)t^\alpha] t^{\beta-k} J_{\nu+k+1}(\mu t)\Bigg|_{t=\mu^{-1}} =$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} \mu^{-k-1} \sum_{\beta=0}^{k} \tilde{C}_{\beta,k} \rho^{(\beta)}(t) t^{\alpha+\beta-k} J_{\nu+k+1}(\mu t)\Bigg|_{t=\mu^{-1}} =$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} \sum_{\beta=0}^{k} \tilde{C}_{\beta,k} \rho^{(\beta)}(\mu^{-1}) \mu^{-(\alpha+\beta+1)} J_{\nu+k+1}(1).$$

Now due to (15) and estimate

$$|\rho^{(\beta)}(t)| \le C,$$

for $1 \le \beta \le N,\ t \le 1$, we can see that $T_1(\mu) = O(\mu^{-\alpha-\delta-1})$.

Further, one can use (16) to show that for all $\beta \le k < N$

$$T_2 = \lim_{t\to\infty} D^\beta[\rho(t)t^\alpha] t^{\beta-k} J_{\nu+k+1}(\mu t) = 0.$$

Next we consider $T_3(\mu) = \mu^{-N} \sum_{\beta=0}^{N} \tilde{C}_{\beta,N}\{T_\beta^1(\mu) + T_\beta^2(\mu)\}$, where

$$T_\beta^1(\mu) = \int_{\mu^{-1}}^{\mu^{-1/2}} \rho^\beta(t) t^{\alpha+\beta-N} J_{\nu+N+1}(\mu t) dt$$

and

$$T_\beta^2(\mu) = \int_{\mu^{-1/2}}^{\infty} \rho^\beta(t) t^{\alpha+\beta-N} J_{\nu+N+1}(\mu t) dt.$$

Using the asymptotics of Bessel function we have

$$T_\beta^1(\mu) \le \frac{C}{\mu^{1/2}} \int_{\mu^{-1}}^{\mu^{-1/2}} |\rho^{(\beta)}(t)| t^{\alpha+\beta-1/2-N} dt.$$

Due to (15) and $1/2 \le N - \alpha$ one has

$$T_0^1(\mu) = O(\mu^{-1/2}) \int_{\mu^{-1}}^{\mu^{-1/2}} t^{\alpha+\delta-1/2-N} dt = O(\mu^{N-\alpha-\delta/2-1}) + O(\mu^{N-\alpha-\delta-1}).$$

Similarly, one can see that $T_\beta^1(\mu) = O(\mu^{N-\alpha-\beta/2-1}), \beta \ge 1$. Therefore

$$T_\beta^1(\mu) = O(\mu^{N-\alpha-\delta/2-1}),\ \beta \ge 0. \tag{18}$$

On the other hand, using the asymptotics of Bessel's functions and notation $\phi_0 = \pi\nu/2 - \pi/4$, we have

$$T_\beta^2(\mu) = C\mu^{-1/2} \int_{\mu^{-1/2}}^{\infty} \rho^{(\beta)}(t) t^{\alpha+\beta-N-1/2} \cos(\mu t + \phi_0) dt +$$

$$O(\mu^{-3/2}) \int_{\mu^{-1/2}}^{\infty} |\rho^{(\beta)}(t)| t^{\alpha+\beta-N-3/2} dt = P_\beta^1(\mu) + P_\beta^2(\mu),$$

where $P_\beta^2(\mu)$ can be estimated as $O(\mu^{-3/4})$, since the integral

$$\int_0^\infty |\rho^{(\beta)}(t)| t^{\alpha+\beta-N} dt$$

converges for every $0 \le \beta \le N$.

For the same reason, if $\beta < N$, one can integrate by parts the integral in $P^1_\beta(\mu)$ to have

$$P^1_\beta(\mu) = O(\mu^{-3/2}) \int_{\mu^{-1/2}}^{\infty} \rho^{(\beta+1)}(t) t^{\alpha+\beta-N-1/2} \sin(\mu t + \phi_0) dt +$$

$$O(\mu^{-3/2}) \int_{\mu^{-1/2}}^{\infty} \rho^{(\beta)}(t) t^{\alpha+\beta-N-3/2} \sin(\mu t + \phi_0) dt + O(\mu^{N-\alpha-3/2-\delta/2}) =$$

$$O(\mu^{-3/4}) \int_0^{\infty} [|\rho^{\beta}(t)| + |\rho^{\beta+1}(t)|] t^{\alpha+\beta-N} dt + O(\mu^{-1/2-\delta/2}) = O(\mu^{-1/2-\delta/2}).$$

Finally, for the case $P^1_N(\mu)$ we note that as it was shown in the previous lemma

$$P^1_N(\mu) = O(\mu^{-1/2}) \int_{\mu^{-1/2}}^{\mu^{-1/2}+\pi\mu^{-1}} |\rho^N(t)| t^{\alpha-1/2} dt +$$

$$O(\mu^{-1/2}) \int_{\mu^{-1/2}}^{\infty} |\Delta_{\pi/\mu}[\rho^N(t) t^{\alpha-1/2}]| dt.$$

Now since $\alpha \geq -1/2$, the first integral can be estimated as $O(\mu^{-\delta/2})$. Moreover,

$$\int_{\mu^{-1/2}}^{\infty} |\Delta_{\pi/\mu}[\rho^N(t) t^{\alpha-1/2}]| dt = \int_{\mu^{-1/2}}^{1} |\Delta_{\pi/\mu}[\rho^N(t) t^{\alpha-1/2}]| dt +$$

$$\int_1^{\infty} |\Delta_{\pi/\mu}[\rho^N(t) t^{\alpha-1/2}]| dt = P^{1,1}_N(\mu) + P^{1,2}_N(\mu).$$

Since $\rho^{(N)} \in C^\delta[0,1]$, it is clear that $P^{1,1}_N(\mu) = O(\mu^{-\delta/2}) + O(\mu^{-1/2})$. To consider $P^{1,2}_N(\mu)$, we note that condition (14) implies

$$\|\Delta_h[\rho^{(N)}(t) t^{\alpha-1/2}]\|_{L_1(1,\infty)} = O(h^\delta).$$

Therefore applying the previous lemma to the integral in $P^{1,2}_N(\mu)$ we obtain the estimate $P^{1,2}_N(\mu) = O(\mu^{-\delta})$. Summing up all cases now we have

$$T^2_\beta(\mu) = O(\mu^{-1/2-\delta/2}). \tag{19}$$

Further, (18) and (19) imply

$$T_3(\mu) = O(\mu^{-(N+1/2+\delta)}) = O(\mu^{-\alpha-\delta/2-1}),$$

which proves the lemma.

Now we can formulate the following

Lemma 6. *The conditions of Lemma 5 are satisfied with* $\rho(t) = |\eta(t)|^2$, $N = [n/2]$, $\alpha = n/2 - 1$ *and any* $\delta < \epsilon$, *as soon as (5) is true.*

Proof. First we note that (5) means in particular, that

$$\hat{\psi}(x) \in L_p^{[n/2]+\epsilon}(R^n),$$

for any $p \geq 2$ (here $L_p^{[n/2]+\epsilon}$ denotes the Liouville class (see e.g. [4])) and $\lim_{|x|\to\infty} \hat{\psi}^{(j)}(x) = 0$, for $j \leq [n/2]$. Further, one can apply the embedding into Holder spaces (see [4])

$$L_p^l \hookrightarrow C^{\epsilon'}, \ as\ l - \frac{n}{p} = \epsilon' > 0,$$

to see that $\hat{\psi}(x) \in C^{[n/2]+\delta}$, for $\delta < \epsilon$. Moreover, the embedding into Nikolsky space (see [4]) in particular asserts, that for any differential operator with constant coefficients $A(D)$ of order $[n/2]$

$$\|\Delta_h A[\hat{\psi}]\|_2 \leq C|h|^\delta. \tag{20}$$

We also recall that by the definition of wavelet $\hat{\psi}(0) = 0$. Formulating all said in terms of $\eta(t)$, we have

1. $\eta(t) \in C^{[n/2]+\delta}(0,\infty)$;
2. $\eta^{(j)}(t)t^{(n-1)/2} \in L_2(0,\infty)$, for $j = 0,\dots,N = [n/2]$;
3. $\eta(0) = \lim_{t\to\infty} \eta^{(j)}(t) = 0$, for $j \leq N$;
4. $\|\Delta_h \eta^{[n/2]}(t)t^{(n-1)/2}\|_2 = O(h^\delta)$.

Without loss of generality we can assume that $\eta(t)$ is a real valued function. First one can note that condition (2) implies

$$\rho^{(j)}(t)t^\alpha = D^j[\eta^2(t)]t^{n/2-1} \in L_1(1,\infty),$$

for $j \leq [n/2]$. Indeed, due to

$$\rho^{(j)}(t) = \sum_{0\leq\beta\leq j} C_{\beta,j}\eta^{(\beta)}(t)\eta^{(j-\beta)}(t),$$

we have

$$\int_1^\infty \rho^{(j)}(t)t^\alpha dt \le \sum_{0\le\beta\le j} C_{\beta,j}\int_1^\infty |\eta^{(\beta)}(t)||\eta^{(j-\beta)}(t)|t^{n/2-1}dt \le$$

$$C\|\eta^{(\beta')}(t)t^{(n-1)/2}\|_2\|\eta^{(\beta''-\beta')}(t)t^{(n-1)/2}\|_2 < \infty.$$

In the same way one can see that condition (14) is also satisfied. Namely, since for some C_β

$$\|\Delta_h\rho^{(N)}(t)t^\alpha\|_{L_1(1,\infty)} \le \sum_{\beta=0}^{[n/2]-1} C_\beta\|\Delta_h\eta^{(\beta)}(t)\eta^{([n/2]-\beta)}(t)t^\alpha\|_{L_1(1,\infty)}+$$
$$+C_{[n/2]}\|\Delta_h\eta^{([n/2])}(t)\eta(t)t^\alpha\|_{L_1(1,\infty)}. \tag{21}$$

The first terms with $\beta < [n/2]$ can be estimated as

$$\|\Delta_h\eta^{(\beta)}(t)\eta^{([n/2]-\beta)}(t)t^\alpha\|_{L_1(1,\infty)} \le Ch\|\eta^{(\beta+1)}(t)\eta^{([n/2]-\beta)}(t)t^\alpha\|_{L_1(1,\infty)}.$$

Since the norm at the right hand is finite due to (2), the first terms in (21) can be estimated as $O(h)$. At the same time the last term due to (2) and (4) can be bounded using Holder inequality as

$$\|\Delta_h\eta^{([n/2])}(t)\eta(t)t^\alpha\|_{L_1(1,\infty)} = O(h^\delta),$$

which means that

$$\|\Delta_h\rho^{(N)}(t)t^\alpha\|_{L_1(1,\infty)} \le Ch^\delta$$

is true for sufficiently large C. Thus all the conditions of Lemma 5 are satisfied.

As it follows from Lemmas 4 and 5, there is some $\epsilon_0 > 0$ such that function $K(x)$ can be estimated as

$$K(x) \le \frac{C}{1+|x|^{n+\epsilon_0}}. \tag{22}$$

Indeed, if we use the notation $\hat{K}(\xi) = \phi(|\xi|)$, then

$$K(x) = C|x|^{1-n/2}\int_0^\infty \phi(r)r^{n/2}J_{n/2-1}(|x|r)dr.$$

Next one can use the formula (17) and integrate by parts to get

$$K(x) = C|x|^{-n/2} \int_0^\infty \eta^2(r) r^{n/2-1} J_{n/2}(|x|r) dr.$$

Since according to the corollary from Lemma 3, $K(x)$ is continuous, it is sufficient to apply Lemmas 4 and 5 to have (22).

Next we return to (13) and note that the kernel K_λ has the form

$$K_\lambda(x) = \lambda^{-n} K\left(\frac{x}{\lambda}\right).$$

This leads to the following representation for W_λ

$$W_\lambda f(x) = \lambda^{-n} \int_{R^n} f(t) K\left(\frac{x-t}{\lambda}\right) dt.$$

First we prove Theorem 2 under more strict conditions on function f.

Lemma 7. *Let $f(x)$ be a continuous, bounded function in R^n. Then*

$$W_\lambda f(x) \to C_\psi f(x), \ \text{as } \lambda \to 0,$$

at each point $x \in R^n$.

Proof. First we note that

$$\int_{R^n} K_\lambda(t) dt = \hat{K}(0) = C_\psi.$$

Thus

$$|W_\lambda f(x) - C_\psi f(x)| \le \int_{R^n} |f(x - \lambda t) - f(x)| K(t) dt.$$

Now since $K(x) \in L_1(R^n)$ one can apply the Lebesgue dominant theorem to show that the integral on the right side tends to 0.

Lemma 8. *Let function $f \in L_p(R^n)$, $1 \le p < \infty$. Then there is some constant C such that for all x*

$$\sup_{\lambda > 0} |W_\lambda f(x)| \le C M f(x)$$

Proof. One can consider $W_\lambda f(x)$ in the following way

$$W_\lambda f(x) \le \lambda^{-n} \int_{|t|\le\lambda} |f(x-t)|K(t/\lambda)dt + \lambda^{-n} \int_{R^n\setminus\{|t|\le\lambda\}} |f(x-t)|K(t/\lambda)dt =$$

$$I_1 + I_2.$$

Due to the boundedness of $K(x)$ it is clear that

$$|I_1| \le CMf(x).$$

Further recalling (22), I_2 can be bounded as

$$|I_2| \le C\lambda^{\epsilon_0} \int_\lambda^\infty r^{-(n+\epsilon_0)} \frac{d}{dr} \left(\int_{|t|\le r} |f(x-t)|dt \right) dr.$$

Now integrating by parts and recalling (9) one can easily show that

$$|I_2| \le CMf(x).$$

Finally we need the following

Lemma 9. *Let $f \in L_p(R^n)$, $1 \le p < \infty$ and x belongs to Lebesgue set of $f(x)$. Then there is $g_\delta \in C_0^\infty(R^n)$ such that*

$$\|f - g_\delta\|_p \to 0$$

and

$$M(f - g_\delta)x \to 0, \tag{23}$$

as $\delta \to 0$.

Proof. Let $h(x) \in C_0^\infty$ be a positive function supported in a unit ball $B = \{x : |x| \le 1\}$ with $\|h\|_1 = 1$. We denote function $h_\delta(x) = \delta^{-n}h(x/\delta)$. Now one can introduce a function $g_\delta(x)$ defined as $g_\delta(x) = f * h_\delta(x)$. It is well known that

$$\|f - g_\delta\|_p \to 0, \ as\ \delta \to 0.$$

In order to prove (23) we consider the integral

$$I_r(x) = r^{-n} \int_{|x-y|\le r} |f(y) - g_\delta(y)|dy.$$

It is clear that

$$I_r(x) \leq r^{-n/p} \|f - g_\delta\|_p. \tag{24}$$

On the other hand we note that

$$I_r(x) = r^{-n} \int_{|y|\leq r} \left| \int_{R^n} [f(x-y-t) - f(x-y)] h_\delta(t) dt \right| dy \leq$$

$$I_r^1(x) + I_r^2(x),$$

where

$$I_r^1(x) = r^{-n} \int_{|y|\leq r} \int_{R^n} |f(x-y-t) - f(x)| h_\delta(t) dt dy =$$

$$\int_{R^n} |f(t) - f(x)| \left[r^{-n} \int_{|y|\leq r} h_\delta(x-y-t) dy \right] dt, \tag{25}$$

$$I_r^2(x) = r^{-n} \int_{|y|\leq r} \int_{R^n} |f(x-y) - f(x)| h_\delta(t) dt dy =$$

$$r^{-n} \int_{|y|\leq r} |f(x-y) - f(x)| dy.$$

Further since x is a Lebesgue point, we can fix the value r_0 such that for $r < r_0$ the following inequality is valid

$$r^{-n} \int_{|y|\leq r} |f(x-y) - f(x)| dy \leq \epsilon.$$

Choosing δ in such a way that $\delta \leq r_0/2$ and $\|f - g_\delta\|_p \leq r_0^{n/p}\epsilon$ is true, one can see (24) implies that for $r > \frac{r_0}{2}$,

$$I_r(x) \leq C\epsilon.$$

If $r \leq \frac{r_0}{2}$ we note that $I_r^2(x) \leq C\epsilon$ and in (25) the integration is in fact over the set $\{t : |x - t| \leq \delta + r\}$. Therefore if $r > \delta$, then

$$I_r^1(x) \leq \|h_\delta\|_1 r^{-n} \int_{|x-t|<2r} |f(t) - f(x)| dt \leq C\epsilon.$$

And if $r \leq \delta$, then

$$I_r^1(x) \leq C\|h\|_\infty \delta^{-n} \int_{|x-t|<2\delta} |f(t) - f(x)|dt \leq C\epsilon.$$

0.6 Proof of Theorem 2

Let x be a Lebesgue point of f. Since $W_\lambda f$ is a linear operator, we have

$$|W_\lambda f(x) - C_\psi f(x)| \leq |W_\lambda[f - g_\delta](x)| + |W_\lambda g_\delta(x) - C_\psi g_\delta(x)| + C_\psi |f - g_\delta(x)|,$$

for any g_δ from the range of definition for W_λ. Now one can apply Lemma 4 and the estimate $|f(x)| \leq Mf(x)$ valid at all Lebesgue points x, in order to have

$$|W_\lambda f(x) - f(x)| \leq CM[f - g_\delta](x) + |W_\lambda g_\delta(x) - C_\psi g_\delta(x)|.$$

Finally choosing $g_\delta(x)$ as in Lemma 9 and recalling Lemma 7 we complete the proof.

References

1. Sh.Alimov, R.Ashurov, A.Pulatov: Multiple Fourier Series and Fourier Integrals. Commutative Harmonic Analysis -IV, Springer-Verlag, 1992, pp 1-97.

2. I. Daubechies, Ten Lectures on Wavelets, SIAM, Philadelphia, 1992.

3. A.Garsia. Topics in almost everywhere convergence, Lectures In Advanced Mathematics, No 4, Markham Publ. Co., Chicago.

4. S. Nikolski, Approximation of Functions of Several Variables and Embedding Theorems, Springer, Berlin, 1975.

5. S. Kelly, M. Kon, and L. Raphael, *Pointwise convergence of wavelet expansions*, Bulletin of the American Mathematical Society, **30**(1994), No 1, 87-94.

6. M. Rao, H. Šikić, R. Song, *Application of Carleson's theorem to wavelet inversion,* Control and Cybernetics, 1994, No 23, pp. 761-771.

7. H.Shim, H. Volkmer, *On the Gibbs Phenomenon for Wavelet Expan sions*, Journal of Appproxiamtion Theory, 1996, Vol. 84, pp. 74-95.

8. E.Stein, G.Weiss. Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1971.

9. M.Skopina, *Local Convergence of Fourier Series with Respect to Periodized Wavelets*, Journal of Approximation Theory, 1998, Vol. 94, No. 2, pp.191-202

10. M. Skopina, *Wavelet Approximation of Periodic Functions*, Journal of Approximation Theory, 2000, Vol. 104, No. 2, pp. 302-329

Institute of Mathematics National University of Uzbekistan 700143, Tashkent, Uzbekistan
Department of Mathematics and Statistics Concordia University H3G 1M8, Montreal, Canada

Uzbek Mathematical
Journal, 2014,№4, pp.29-35

УДК 517

Об одной линейной обратной задачи для уравнения смешанного типа второго рода, второго порядка в трехмерном пространстве

Джамалов С.З.

Ushbu maqolada ikkinchi tur, aralash tiptagi ikkinchi tartibli differensial tenglama uchun ba'zi bir chiziqli teskari masalaning korrektligi uch o'lchovli S.L. Sobelevning fazosida o'rganilgan.

In this paper, under certain restrictions on the coefficients of the equation of mixed type, the second kind of order in three-dimensional space, we prove the correctness of a linear inverse problem.

В процессе исследования нелокальных задач была выявлена тесная взаимосвязь задач с нелокальными условиями и обратными задачами. К настоящему времени достаточно хорошо изучены обратные задачи для уравнений параболического, эллиптического и гиперболического типов. [1,2,3,9,10,13]. Значительно менее изученными являются обратные задачи для уравнений смешанного типа, как первого, так и второго рода. [5,6,11,12]. Частично восполнить последний пробел мы и попытаемся в рамках этой работе.

Формулировка задачи.

В области $Q = (0,1) \times (0,T) \times (0,\ell) = Q_1 \times (0,\ell)$ рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка.

$$Lu = K(x,t)\, u_{tt} - \Delta\, u + \alpha\,(x,t)\, u_t + c\,(x,t)\, u = \psi\,(x,t,y), \tag{1}$$

где $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$ оператор Лапласа в плоскости. Предположим, что коэффициенты уравнения (1) достаточно гладкие и $\alpha(x,t)$, $c(x,t)$ периодические функции по переменной t с периодом T.
Уравнения (1) относится к уравнениям смешанного типа второго рода, так как на знак функции $K(x,t)$ по переменной t внутри области Q не налагается никаких ограничений [4].

Нелокальная краевая задача.

Найти решение уравнения (1) удовлетворяющее условиям.

$$\gamma u(x,0,y) = u(x,T,y) \tag{2}$$

$$u(0,t,y) = u(1,t,y) = 0 \tag{3}$$

$$u(x,t,0) = u(x,t,\ell) = 0, \tag{4}$$

где $\gamma - const \neq 0$, такое что $\gamma \in (1,\infty)$. Отметим, что в работе [7,8] в случае $K(x,0) \leq 0 \leq K(x,T)$ при определенних условиях на коэффициенты уравнения и правую часть уравнения (1) была доказана корректность решения задачи (2-4) из пространства С.Л.Соболева $W_2^l(Q)$ при $2 \leq l$ - целое число.

В данной работе в случае $K(x,0) \leq 0 \leq K(x,T)$ при дополнительном условии решение уравнения (1) ищется в определенных классах, как само решение, так и правая часть уравнения.

Пусть $\psi(x,t,y) = g(x,t,y) + h(x,t) \cdot f(x,t,y)$ где $g(x,t,y)$ и $f(x,t,y)$ заданные функции.

Линейная обратная задача.

Найти функции $u(x,t,y)$, $h(x,t)$ удовлетворяющую уравнению (1) в области Q, такую что, функция $u(x,t,y)$ удовлетворяет краевым условиям (2),(3),(4) и дополнительному условию

$$u(x,t,\ell_0) = \phi(x,t), \text{ где } 0 < \ell_0 < \ell < +\infty \tag{5}$$

и принадлежит классу

$$\begin{aligned} U \quad = \quad & \{(u,h) | u \in W_2^2(Q);\ h \in W_2^2(Q_1); \\ & D_y^3 \{u_{xx}, u_{tx}, u_{tt}\} \in L_2(Q);\ D_y^4 u \in L_2(Q)\}. \end{aligned}$$

Теорема 1. Пусть выполнены вышеуказанные условия для коэффициентов уравнения (1), кроме того, пусть $2\alpha - |K_t| + \lambda |K| \geq \delta_1 > 0$; $\lambda\, c - c_{\,t} \geq \delta_2 > 0$; где $\lambda = \frac{2}{T} \ln \gamma$ такое, что $\gamma \in (1,\infty)$. Пусть далее

$$(1+D_y^3) g \in W_{\,2}^{\,1}(Q);\ \ \gamma\, g(x,0,y) = g(x,T,y);\ g(x,t,\ell_0) = g_0(x,t) \in W_{\,2}^{\,1}(Q_1)$$

$$(1+D_y^3) f \in W_{\,2}^{\,2}(Q);\ \ \gamma\, f(x,0,y) = f(x,T,y);\ f(x,t,\ell_0) = f_0(x,t) \in W_{\,2}^{\,2}(Q_1);$$

$$|f_0(x,t)| \geq \eta > 0.$$

Функция $\phi(x,t) \in W_2^2(Q_1)$ является решением следующее задачи

$$L_0 \phi = K(x,t)\, \phi_{\,tt} - \phi_{xx} + \alpha\,(x,t)\, \phi_{\,t} + c\,(x,t)\, \phi = g_{\,0}(x,t)$$

$$\gamma \cdot \phi\,(x,0) = \phi\ (x,T); \quad \phi\ (0,t) = \phi\ (1,t) = 0.$$

И пусть существует положительное число ν такое, что

$$\delta_0 - 6\nu^{-1} \geq \delta_* > 0,\ 2\rho \equiv M \cdot \sum_{s=0}^{\infty} (1+\mu_s^6) \parallel f_s \parallel^2_{W_2^1(Q_1)} < \delta_*,$$

где $\delta_0 = \min\{\delta_1, \delta_2, \lambda\}$; $M - const\ (\delta_0; \eta; \nu)$, $\mu_s = \frac{s\pi}{l}$. Тогда функции

$$u(x,t,y) = \sum_{s=0}^{\infty} u_s(x,t) \sin \mu_s y,$$
$$h(x,t) = \frac{1}{f_0} \sum_{s=0}^{\infty} \mu_s^2 u_s(x,t) \sin \mu_s \ell_0$$

являются решением линейное обратное задачи (1)-(5) из указанного класса U, где функции $u_s(x,t)$; $s = 0, 1, 2, 3, \ldots$ являются решением в области Q_1 соответствующих задач

$$Lu_s = L_0 u_s + \mu_s^2 u_s = g_s + \frac{f_s}{f_0} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \mu_m^2 u_m \sin \mu_m \ell_0 \equiv F_s(u_s), \tag{6}$$

$$\gamma\, u_s(x,0) = u_s(x,T), \tag{7}$$

$$u_s(0,t) = u_s(1,t) = 0, \tag{8}$$

где

$$f_s = \frac{2}{\ell} \int_a^b f(x,t,y) \sin \mu_s y dy; \quad g_s = \frac{2}{\ell} \int_a^b g(x,t,y) \sin \mu_s y dy.$$

Доказательство. Докажем теорему поэтапно. Сначала покажем, что функция $u(x,t,y)$ удовлетворяет дополнительному условию (5), т.е. $u(x,t,\ell_0) = \phi(x,t)$. Полагая противное $u(x,t,\ell_0) = v(x,t) \neq \phi(x,t)$ для функции $z(x,t) = v(x,t) - \phi(x,t)$ в области Q_1 из (6)-(8) получим

$$L_0 z = K(x,t)\, z_{tt} - z_{xx} + \alpha\,(x,t) z_{\,t} + c\,(x,t)\, z = 0, \tag{9}$$

$$\gamma \cdot z\,(x,0) = z\ (x,T); \quad z(0,t) = z(1\,,t) = 0. \tag{10}$$

Из единственности задачи (9), (10) [7,8] следует $z(x,t) = 0$, т.е. $v(x,t) = \phi(x,t)$

Разрешимость задачи (6)-(8) докажем методом последовательных приближений и методом "ε регуляризации" [2,3,4,5,6,7,8] а именно рассмотрим семейство уравнений

$$L_\varepsilon u_{s,\varepsilon}^{(l)} = -\varepsilon \frac{\partial}{\partial t}\Delta u_{s,\varepsilon}^{(l)} + L_0\, u_{s,\varepsilon}^{(l)} + \mu_s^2\; u_{s,\varepsilon}^{(l)} =$$

$$g_s + \frac{f_s}{f_0}\cdot \sum_{m=0}^{\infty} \mu_m^2\, u_{m,\varepsilon}^{(l-1)}\, \sin \mu_m \ell_0 \equiv F_s(u_{s,\varepsilon}^{(l-1)}). \tag{11}$$

$$\gamma D_t^p u_{s,\varepsilon}^{(l)}(x,0) = D_t^p u_{s,\varepsilon}^{(l)}(x,T);\; p = 0,1,2 \tag{12}$$

$$u_{s,\varepsilon}^{(l)}(0,t) = u_{s,\varepsilon}^{(l)}(1,t) = 0, \tag{13}$$

где $l = 0,1,2,...;\ \gamma - const \neq 0$, такое что $\gamma \in (1,\infty)$.

В дальнейшем при доказательстве теоремы нам понадобятся следующие обозначения и вспомогательные леммы. Если $u_{s,\varepsilon} \in W_2^2(Q_1)$ то определим пространства $W_i(Q_1);\ i = 0,1,2$ с нормой

$$\langle u_{s,\varepsilon}\rangle_i^2 = \sum_{s=0}^{\infty} (1+\mu_s^6)\, \|u_{s,\varepsilon}\|^2_{W_2^i(Q_1)}\,;\; i = 0,1,2.$$

Когда $i = 0;\ W_2^i(Q_1) = L_2(Q_1)$. Так как Q_1- ограниченная область с кусочно-гладкой границей, то выполняются следующие вложения

$$W_2(Q_1) \subset W_1(Q_1) \subset W_0(Q_1).$$

Лемма 1. Пусть выполнены все условия теоремы, тогда для решения задачи (11)-(13) справедливы оценки

I) $\frac{\varepsilon}{\delta_*}\left(\left\langle \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_{s,\varepsilon}^{(l)}\right\rangle_0^2 + \left\langle \frac{\partial^2 u_{s,\varepsilon}^{(l)}}{\partial t\,\partial x}\right\rangle_1^2\right) + \left\langle u_{s,\varepsilon}^{(l)}\right\rangle_1^2 \leq const(\bar{l}\,)$

II) $\frac{\varepsilon}{\delta_*}\left\langle \frac{\partial \Delta u_{s,\varepsilon}^{(l)}}{\partial t}\right\rangle_0^2 + \left\langle u_{s,\varepsilon}^{(l)}\right\rangle_2^2 \leq const(\bar{l}).$

Символом $const(\bar{l})$ здесь и далее обозначена постоянная, независящая от l.

Доказательства. Применяя результаты работы [5,6,7,8] методы индукции, априорных оценок, теоремы вложения С.Л.Соболева к тождествам

$$2(L_\varepsilon u_{s,\varepsilon}^{(l)} - F_s(u_{s,\varepsilon}^{(l-1)}), \exp(-\lambda t)\frac{\partial}{\partial t} u_{s,\varepsilon}^{(l)})_0 = 0. \tag{14}$$

$$-2(L_\varepsilon u_{s,\varepsilon}^{(l)} - F_s(u_{s,\varepsilon}^{(l-1)}), \exp(-\frac{\lambda t}{2})\Delta\ell u_{s,\varepsilon}^{(l)})_0 = 0. \qquad (15)$$

где $(\cdot,\cdot)_0$-обычное скалярное произведение в $L_2(Q_1), \Delta w = w_{tt} + w_{xx}$ оператор Лапласа по переменным t и x.

$$\Delta\ell w = \exp(-\frac{\lambda t}{2}) \left[\frac{\partial \Delta w}{\partial t} - \lambda\ w_{tt} + \frac{\lambda^2}{4}\, w_t \right].$$

Соответственно получим первую и вторую оценки. Лемма 1 доказана.

Введем новую функцию из $W_2(Q_1)$ по формуле $v_{s,\varepsilon}^{(l)} = u_{s,\varepsilon}^{(l)} - u_{s,\varepsilon}^{(l-1)}$; $\varepsilon > 0$; $s = 0, 1, 2......$; $l = 1, 2, 3, ...$

Лемма 2. Пусть выполнены все условия теоремы и леммы 1. Тогда для функции $\left\{ v_{s,\varepsilon}^{(l)} \right\} \in W_2(Q_1)$ справедливы следующие оценки.

III) $\frac{\varepsilon}{\delta_*}(\left\langle \frac{\partial^2}{\partial t^2} v_{s,\varepsilon}^{(l)} \right\rangle_0^2 + \left\langle \frac{\partial^2 u_{s,\varepsilon}^{(l)}}{\partial t \partial x} \right\rangle_0^2) + \left\langle v_{s,\varepsilon}^{(l)} \right\rangle_1^2 \le \left(\frac{\rho}{\delta_*}\right)^{(l)} const(\bar{l}).$

IV) $\frac{\varepsilon}{\delta_*} \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \Delta v_{s,\varepsilon}^{(l)} \right\rangle_0^2 + \left\langle v_{s,\varepsilon}^{(l)} \right\rangle_2^2 \le \left(\frac{\rho}{\delta_*}\right)^{(l)} const(\bar{l}).$

Доказательства. Так как для функции $\left\{ u_{s,\varepsilon}^{(l)} \right\} \in W_2(Q_1)$ справедливы оценки (I),(II) то, повторяя рассуждения леммы 1, получим утверждение леммы 2.

Лемма 3. Пусть выполнены все утверждения теоремы, леммы 1 и 2. Тогда задача (11)-(13) однозначно разрешимо в $W_2(Q_1)$.

Доказательства. Определим в пространстве $W_2(Q_1)$ оператор.

$$u_{s,\varepsilon}^{(l)} = L_\varepsilon^{-1} F_s(u_{s,\varepsilon}^{(l-1)}) \equiv P u_{s,\varepsilon}^{(l-1)}$$

1. Покажем, что оператор P отображает пространства $W_2(Q_1)$ в себя.

Пусть $\left\{ u_{s,\varepsilon}^{(l-1)} \right\} \in W_2(Q_1)$, тогда для решения задачи (11)-(13), справедливы утверждение леммы 1, т.е. справедливо оценка (II), отсюда для любых $l = 1, 2, 3...$ получим $\left\{ u_{s,\varepsilon}^{(l)} \right\} \in W_2(Q_1)$.

Таким образом $P : W_2(Q_1) \to W_2(Q_1)$

2. Покажем, что P-сжимающее оператор. Пусть

$$\left\{ u_{s,\varepsilon}^{(l)},\, u_{s,\varepsilon}^{(l-1)} \right\} \in W_2(Q_1)$$

Рассмотрим новую функцию

$$v_{s,\varepsilon}^{(l)} = u_{s,\varepsilon}^{(l)} - u_{s,\varepsilon}^{(l-1)}$$

для нее справедливо утверждение леммы-2, т.е. справедливо оценка (IV). $\frac{\varepsilon}{\delta_*}\left\langle \frac{\partial}{\partial t}\Delta v_{s,\varepsilon}^{(l)}\right\rangle_0^2 + \left\langle v_{s,\varepsilon}^{(l)}\right\rangle_2^2 \leq \left(\frac{\rho}{\delta_*}\right)^{(l)} const(\bar{l})$.

Таким образом P-сжимающее оператор, задача (11)-(13) имеет единственное решение, принадлежащее пространству $W_2(Q_1)$ при $\varepsilon > 0$.

Теперь докажем теорему. Пусть $\{u_{s,\varepsilon}\} \in W_2(Q_1)$ при фиксированном $\varepsilon > 0$ есть единственное решение задачи (11)-(13). Тогда при $\varepsilon > 0$ для любого $s = 0, 1, 2, 3, ...$ справедливо неравенство (IV). По теореме о слабой компактности, из ограниченной последовательности $\{u_{s,\varepsilon}\}$ можно извлечь слабо сходящуюся под последовательность $\left\{u_{s,\varepsilon_j}\right\}$ такую что $u_{s,\varepsilon_j} \to u_s$ слабо в $W_2(Q_1)$.

Покажем, что предельная функция $u_s(x,t)$ удовлетворяет уравнению (6) почти всюду в $W_2(Q_1)$. Действительно, так как под последовательность $\left\{u_{s,\varepsilon_j}\right\}$ слабо сходится в $W_2(Q_1)$, а оператор линеен, то при фиксированном s имеем $Lu_s - F_s = \varepsilon_j \frac{\partial \Delta u_{s,\varepsilon_j}}{\partial t} + L_0(\,u_{s,\varepsilon_j} - u_s)$. Переходя к пределу при $\varepsilon_j \to 0$, получаем $Lu_s = F_s$ почти всюду. При фиксированном s функция $u_s(x,t)$ будет единственным решением задачи (6-8) из $W_2(Q_1)$. Чтобы доказать единственность задачи (11-13) рассмотрим следующее тождество

$$2\left(Lu_s - F_s, \exp(-\lambda t)\frac{\partial}{\partial t}u_s\right)_0 = 0. \tag{16}$$

Применяя метод априорных оценок [7,8] при выполнений условий теоремы в $W_2(Q_1)$ получаем неравенство $\langle u_s\rangle_1 \leq 0$. Отсюда следует $u_s(x,t) = 0$.

Литература

1. Аниконов Ю.Е. Некоторые методы исследования многомерных обратных задач для дифференциальных уравнений.- Новосибирск. Наука,1978.- 120с

2. Бубнов. Б. А. К вопросу о разрешимости многомерных обратных задач для параболических уравнений. Новосибирск. 1987. Препринт №714, ВЦ.СО АН СССР. с.44

3. Бубнов. Б. А. К вопросу о разрешимости многомерных обратных задач

для гиперболических уравнений. Новосибирск. 1987. Препринт №713, ВЦ.СО АН СССР.с.41

4. Врагов В.Н. Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Новосибирск.НГУ.1983.с.84.
5. Джамалов С.З. Линейные задачи управления для уравнения смешанного типа первого рода в многомерном случае. Уз.М.Ж.1992г.№5-6.с.30-37.
6. Джамалов С.З. Линейные задачи управления для уравнения смешанного типа второго рода в многомерном случае. // Дан.РУз.2011.№5. с.14-16.
7. Джамалов С.З. Об одной нелокальной краевой задачи для уравнения смешанного типа второго рода второго порядка. Уз.М.Ж. 2014г. №1. С.5-14
8. Джамалов.С.З. О гладкости решения одной нелокальной краевой задачи для уравнения смешанного типа второго рода в пространстве. ДАН РУз 2012г. №2.с.12-14
9. Кожанов А.И. Нелинейные нагруженные уравнения и обратные задачи. Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2004. Т. 44, №4. С. 694–716.
10. Кожанов А.И.Об одном нелинейном нагруженном параболическом уравнений и о связанной с ним обратной задаче.Мат.заметки.Т.76.№6.с.840-853
11. Кожанов А.И. Обратные задачи для уравнений соболевского типа. International Conference "Inverse and Ill-Posed Problems of Mathematical Physics", dedicated to Academician M.M. Lavrent'ev on occasion of his 80-th birthday, August 5-12, 2012, Novosibirsk, Russia
12. Сабитов К.Б, Мартемьянова Н.В. Обратная задача для уравнений смешанного типа с нелокальным граничным условием. International Conference "Inverse and Ill-Posed Problems of Mathematical Physics", dedicated to Academician M.M. Lavrent'ev on occasion of his 80-th birthday, August 5-12, 2012, Novosibirsk, Russia
13. Лаврентьев М.М, Романов В.Г, Васильев В.Г. Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений. - Новосибирск. Наука,1969.- 67 с.

Высший военный таможенный институт РУз

Uzbek Mathematical
Journal, 2014,№4, pp.36-45

УДК 515.12

О взаимосвязи функторов P вероятностных мер и I идемпотентных вероятностных мер

Заитов А.А., Холтураев Х.Ф.

Ushbu ishda ehtimollik o‘lchovlari funktori P va idempotent ehtimollik o‘lchovlari funktori I orasidagi o‘zaro bog‘liqlik ko‘rsatilgan.

In the present work we show mutually connection between functors P of probability measures and I of idempotent probabilty measures.

Пусть X – компактное Хаусдорфово пространство, $C(X)$ – алгебра непрерывных функций на X с обычными алгебраическими операциями. На $C(X)$ операции $\oplus$ и $\odot$ определим по правилам $\varphi \oplus \psi = \max\{\varphi, \psi\}$ и $\varphi \odot \psi = \varphi + \psi$, где $\varphi, \psi \in C(X)$.

Напомним, что функционал $\mu : C(X) \to \mathbb{R}$ называется [1] идемпотентной вероятностной мерой на X, если он обладает следующими свойствами:

1) $\mu(\lambda_X) = \lambda$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}$, где λ_X – постоянная функция;
2) $\mu(\lambda \odot \varphi) = \lambda \odot \mu(\varphi)$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}$ и $\varphi \in C(X)$;
3) $\mu(\varphi \oplus \psi) = \mu(\varphi) \oplus \mu(\psi)$ для всех $\varphi, \psi \in C(X)$;

Для Хаусдорфово компактного пространства X через $I(X)$ обозначим множество всех идемпотентных вероятностных мер на X. Рассмотрим $I(X)$ как подпространство пространства $\mathbb{R}^{C(X)}$.

Для заданных компактных Хаусдорфовых пространств X, Y, и непрерывного отображения $f : X \to Y$ можно проверить, что естественное отображение $I(f) : I(X) \to I(Y)$, определенное по формуле $I(f)(\mu)(\psi) = \mu(\psi \circ f)$, непрерывно. Более того, конструкция I является нормальным функтором. Поэтому для произвольной идемпотентной вероятностной меры $\mu \in I(X)$ можно определить понятие носителя:

$$\mathrm{supp}\mu = \cap\{A \subset X : \overline{A} = A, \mu \in I(A)\}.$$

Для положительного целого числа n определим следующие множества

$$I_n(X) = \{\mu \in I(X) : |\mathrm{supp}\mu| \leq n\},$$

$$I_\omega(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n(X).$$

Множество $I_\omega(X)$ всюду плотно [1] в $I(X)$. Идемпотентную вероятностную меру $\mu \in I_\omega(X)$ называют идемпотентной вероятностной мерой с конечным носителем. Заметим, что если μ – идемпотентная вероятностная мера с конечным носителем $\mathrm{supp}\mu = \{x_1, x_2, ..., x_k\}$, то μ можно представить в виде $\mu = \lambda_1 \odot \delta_{x_1} \oplus \lambda_2 \odot \delta_{x_2} \oplus ... \oplus \lambda_k \odot \delta_{x_k}$ единственным образом, где $-\infty < \lambda_i \leq 0$, $i = 1, 2, ..., k$, $\lambda_1 \oplus \lambda_2 \oplus ... \oplus \lambda_k = 0$.

Для Хаусдорфово компактного пространства X через $P(X)$ обозначим множество всех вероятностных мер на X (т. е. множество всех функционалов $\mu : C(X) \to \mathbb{R}$, обладающих свойствами: $\mu(1_X) = 1$; $\mu(\lambda_X) = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$; $\mu(\lambda \cdot \varphi) = \lambda \cdot \mu(\varphi)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\varphi \in C(X)$; $\mu(\varphi + \psi) = \mu(\varphi) + \mu(\psi)$, $\varphi, \psi \in C(X)$).

Множества $P(X)$ всех вероятностных мер и $I(X)$ всех идемпотентных вероятностных мер снабжаются топологией поточечной сходимости. Топологические пространства $P(X)$ и $I(X)$ являются Хаусдорфовыми компактными пространствами.

Теорема 1. Для произвольного конечного компакта X пространства $P(X)$ и $I(X)$ гомеморфны.

Доказательство. Рассмотрим отображения

$$z_I^P : P(X) \longrightarrow I(X),$$

заданное равенством

$$z_I^P\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \delta_{x_i}\right) = \bigoplus_{i=1}^{n}\left(\left(ln\alpha_i - \bigoplus_{j=1}^{n} ln\alpha_j\right) \odot \delta_{x_i}\right),$$

и

$$z_P^I : I(X) \longrightarrow P(X),$$

определяемое по правилу

$$z_P^I\left(\bigoplus_{i=1}^{n} \lambda_i \odot \delta_{x_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{e^{\lambda_i}}{\sum\limits_{j=1}^{n} e^{\lambda_j}} \cdot \delta_{x_i}.$$

Покажем, что z_I^P и z_P^I – взаимно обратные отображения.

1) Для каждой вероятностной меры $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \delta_{x_i} \in P(X)$ имеют место следующие равенства

$$z_P^I\left(z_I^P\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\delta_{x_i}\right)\right) = z_P^I\left(\bigoplus_{i=1}^{n}\left(ln\alpha_i - \bigoplus_{j=1}^{n} ln\alpha_j\right)\odot\delta_{x_i}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{e^{ln\alpha_i - \bigoplus\limits_{j=1}^{n} ln\alpha_j}}{\sum\limits_{l=1}^{n} e^{ln\alpha_l - \bigoplus\limits_{j=1}^{n} ln\alpha_j}}\cdot\delta_{x_i} = \sum_{i=1}^{n}\frac{e^{ln\alpha_i} : e^{\bigoplus\limits_{j=1}^{n} ln\alpha_j}}{\left(\sum\limits_{l=1}^{n} e^{ln\alpha_l}\right) : e^{\bigoplus\limits_{j=1}^{n} ln\alpha_j}}\cdot\delta_{x_i} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i\delta_{x_i}}{\sum\limits_{l=1}^{n}\alpha_l} = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\delta_{x_i};$$

2) Для каждой идемпотентной вероятностной меры $\bigoplus_{i=1}^{n} \lambda_i \odot \delta_{x_i} \in I(X)$ имеем

$$z_I^P\left(z_P^I\left(\bigoplus_{i=1}^{n}\lambda_i\odot\delta_{x_i}\right)\right) = z_I^P\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{e^{\lambda_i}}{\sum\limits_{j=1}^{n} e^{\lambda_j}}\delta_{x_i}\right) =$$

$$= \bigoplus_{i=1}^{n}\left(ln\frac{e^{\lambda_i}}{\sum\limits_{j=1}^{n} e^{\lambda_j}} - \bigoplus_{l=1}^{n} ln\frac{e^{\lambda_l}}{\sum\limits_{j=1}^{n} e^{\lambda_j}}\right)\odot\delta_{x_i} =$$

$$= \bigoplus_{i=1}^{n}\left(lne^{\lambda_i} - ln\sum_{j=1}^{n} e^{\lambda_j} - \bigoplus_{l=1}^{n}\left(lne^{\lambda_l} - ln\sum_{j=1}^{n} e^{\lambda_j}\right)\right)\odot\delta_{x_i} =$$

$$= \bigoplus_{i=1}^{n}\left(\lambda_i - ln\sum_{j=1}^{n} e^{\lambda_j} - \bigoplus_{l=1}^{n}\lambda_l + ln\sum_{j=1}^{n} e^{\lambda_j}\right)\odot\delta_{x_i} = \bigoplus_{i=1}^{n}\lambda_i\odot\delta_{x_i}.$$

Следовательно, $z_I^P z_P^I : I(X) \to I(X)$ и $z_P^I z_I^P : P(X) \to P(X)$ – тождественные отображения.

Теперь покажем, что отображение z_I^P и z_P^I непрерывны. Так как они взаимно обратные отображения между компактами, то достаточно показать непрерывность только одного из них.

Покажем, что отображение $z_I^P : P(X) \to I(X)$ непрерывно. Пусть $\mu_0 \in P(X)-$ вероятностная мера, $\{\mu_t\}_{t=1}^{\infty} \subset P(X)-$ последовательность, сходящаяся к μ_0 в топологии поточечной сходимости (символически $\lim\limits_{t\to\infty} \mu_t = \mu_0$).

Так как X конечно, то не нарушая общности, можно предполагать, что $\mathrm{supp}\mu_t = \mathrm{supp}\mu_0 = \{x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, для всех $t = 1,\ 2,\ ...$.

Тогда имеем $\lim\limits_{t\to\infty} \alpha_t^i = \alpha_0^i$, где $\mu_t = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_t^i \delta_{x_i}$, $t = 0,\ 1,\ 2,\ ...$. С другой стороны, согласно непрерывности ln и операции $\oplus$ вытекает равенство $\lim\limits_{t\to\infty} ln\alpha_t^i = ln\alpha_0^i$. Это влечёт

$$\lim_{t\to\infty} \left(ln\alpha_t^i - \bigoplus_{j=1}^{n} ln\alpha_t^j \right) = ln\alpha_0^i - \bigoplus_{j=1}^{n} ln\alpha_0^j.$$

Поэтому $\lim\limits_{t\to\infty} z_I^P(\mu_t) = z_I^P(\mu_0)$, т. е. отображение z_I^P непрерывно. $\square$

Следствие 1. Для произвольного метризуемого компакта X пространства $P(X)$ и $I(X)$ гомеморфны.

Доказательство следующего утверждения устанавливается с помощью max-plus варианта теоремы Хана-Банаха [2].

Назовем подмножество L пространства $C(X)$ max-plus-линейным подпространством в $C(X)$, если:

1) $c_X \in L$ для каждого $c \in \mathbb{R}$;

2) $\lambda \odot \varphi \in L$, для любых $\lambda \in \mathbb{R}$ and $\varphi \in L$;

3) $\varphi \oplus \psi \in L$, для каждых $\varphi, \psi \in L$.

Лемма 1 [2]. Пусть L – max-plus-линейное подпространство в $C(X)$. Пусть $\mu : L \longrightarrow \mathbb{R}$ – функционал, удовлетворяющий условиям нормированности, однородности и аддитивности (с заменой $C(X)$ на L). Для произвольного $\varphi_0 \in C(X)\backslash L$ существует удовлетворяющее условиям нормированности, однородности и аддитивности продолжение отображения μ на минимальное max-plus-линейное подпространство $L^{'}$, содержащее $L \cup \{\varphi_0\}$ (с заменой $C(X)$ на $L^{'}$).

Рассмотрим следующее подмножество в $C(X \times Y)$:

$$C_0 = \left\{ \bigoplus_{i=1}^{n} \varphi_i \odot \psi_i : \varphi_i \in C(X) \ \text{ и } \ \psi_i \in C(Y),\ i = 1, 2, ..., n,\ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Очевидно, что C_0 – max-plus-линейное подпространство в $C(X)$.

Для всякой пары $(\mu, \nu) \in I(X) \times I(Y)$ положим

$$(\mu \widetilde{\otimes} \nu)(\bigoplus_{i=1}^{n} \varphi_i \odot \psi_i) = \bigoplus_{i=1}^{n} \mu(\varphi_i) \odot \mu(\psi_i).$$

Предложение 1. $\mu \widetilde{\otimes} \nu$ является идемпотентной вероятностной мерой на C_0.

Доказательство. Каждое $c \in \mathbb{R}$ можно представить как $c_{X \times Y} = a_X \odot b_Y$, где $a,\ b \in \mathbb{R}$ и $a + b = c$. Поэтому $(\mu \widetilde{\otimes} \nu)(c_{X \times Y}) = (\mu \otimes \nu)(a_X \odot b_Y) = \mu(a) \odot \mu(b) = a \odot b = c$.

Пусть $\lambda \in \mathbb{R}_{max}$ и $\bigoplus_{i=1}^{n} \varphi_i \odot \psi_i \in C_0$. Тогда $(\mu \widetilde{\otimes} \nu)(\lambda \odot \bigoplus_{i=1}^{n} \varphi_i \odot \psi_i) = (\mu \widetilde{\otimes} \nu) (\bigoplus_{i=1}^{n} (\lambda \odot \varphi_i) \odot \psi_i) = \bigoplus_{i=1}^{n} \mu(\lambda \odot \varphi_i) \odot \nu(\psi_i) = \bigoplus_{i=1}^{n} \lambda \odot \mu(\varphi_i) \odot \nu(\psi_i) = \lambda \odot \bigoplus_{i=1}^{n} \mu(\varphi_i) \odot \nu(\psi_i) = \lambda \odot (\mu \widetilde{\otimes} \nu) (\bigoplus_{i=1}^{n} \varphi_i \odot \psi_i)$.

Наконец, пусть $\bigoplus_{i=1}^{n} \varphi_{1\,i} \odot \psi_{1\,i} \in C_0$ и $\bigoplus_{j=1}^{m} \varphi_{2\,j} \odot \psi_{2\,j} \in C_0$. Тогда справедливо $(\mu \widetilde{\otimes} \nu) \left(\bigoplus_{i=1}^{n} \varphi_{1\,i} \odot \psi_{1\,i} \oplus \bigoplus_{j=1}^{m} \varphi_{2\,j} \odot \psi_{2\,j} \right) = (\mu \widetilde{\otimes} \nu) (\bigoplus \varphi_{k\,l} \odot \psi_{k\,l}) = \bigoplus \mu(\varphi_{k\,l}) \odot \nu(\psi_{k\,l}) = \bigoplus_{i=1}^{n} \mu(\varphi_{1\,i}) \odot \nu(\psi_{1\,i}) \oplus \bigoplus_{j=1}^{m} \mu(\varphi_{2\,j}) \odot \nu(\psi_{2\,j}) = (\mu \widetilde{\otimes} \nu) (\bigoplus_{i=1}^{n} \varphi_{1\,i} \odot \psi_{1\,i}) \oplus (\mu \widetilde{\otimes} \nu) \left(\bigoplus_{j=1}^{m} \varphi_{2\,j} \odot \psi_{2\,j} \right)$. $\square$

Так как C_0 – max-plus-линейное подпространство в $C(X \times Y)$, то согласно лемме 1, существует продолжение идемпотентной вероятностной мерой $\mu \widetilde{\otimes} \nu$ на $C(X \times Y)$. Положим

$$\mu \otimes \nu = \bigoplus \{\xi \in I(X \times Y) :\ \xi|_{C_0} = \mu \widetilde{\otimes} \nu\}.$$

Таким образом, нами доказан следующий max-plus-вариант теоремы Фубини.

Теорема 2. Для всякой пары $(\mu, \nu) \in I(X) \times I(Y)$ существует единственная идемпотентная вероятностная мера $\mu \otimes \nu \in I(X \times Y)$ такая, что $(\mu \otimes \nu)(\varphi \odot \psi) = \mu(\varphi) \odot \mu(\psi)$, $\varphi \in C(X)$, $\psi \in C(Y)$.

Хотя пространства $I(X)$ и $P(X)$ гомеоморфны для произвольного метризуемого компакта X, однако, как показывает следующий пример, конструкции P и I образуют различные друг от друга функторы.

Для построения соответствующего примера, в котором функторы P и I не изоморфны, нам необходимы некоторые понятия из категорной алгебры.

Пусть $F,\ G : \Re_1 \longrightarrow \Re_2-$ функторы из категории $\Re_1$ в категорию $\Re_2$.

Естественным преобразованием $\alpha : F \longrightarrow G$ функтора F в функтор G называется [3] такая функция $\alpha : ob\Re_1 \longrightarrow Mor\Re_2$, что $\alpha_A := \alpha(A) : F(A) \longrightarrow G(A)$, ($\alpha_A$, что означает значение функции α в объекте A, есть морфизм категории $\Re_2$ из объекта $F(A)$ в $G(A)$) и при этом для любого морфизма $\varphi : A \longrightarrow B$, (из объекта A в объект B) $B \in ob\Re_1$, в категории $\Re_2$ коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{\alpha_A} & G(A) \\ F(\varphi)\downarrow & & \downarrow G(\varphi) \\ F(B) & \xrightarrow{\alpha_B} & G(B), \end{array}$$

т. е.

$$G(\varphi) \circ \alpha_A = \alpha_B \circ F(\varphi)$$

Морфизмы, $\alpha_A, A \in ob\Re_1$ называются компонентами естественного преобразования α.

Таким образом, $\alpha = \{\alpha_A : A \in ob\Re_1\}$. Естественное преобразование $\varepsilon : F \longrightarrow G$ функторов $F, G : \Re_1 \longrightarrow \Re_2$ называется [3] (естественным) изоморфизмом, если $\varepsilon_A : F(A) \longrightarrow G(A)-$ изоморфизм категории $\Re_2$, т. е. в $\Re_2$ существует такой морфизм $\eta_A : G(A) \longrightarrow F(A)$, что имеют место равенства $\eta_A \circ \varepsilon_A = id_{F(A)}$ и $\varepsilon_A \circ \eta_A = id_{G(A)}$ для любого объекта $A \in ob\Re_1$.

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\varepsilon_A"] \arrow[dr, "\eta_A \circ \varepsilon_A"', "id_{F(A)}"] & G(A) \arrow[d, "\eta_A"] \\ & F(A) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G(A) \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[dr, "\varepsilon_A \circ \eta_A"', "id_{G(A)}"] & F(A) \arrow[d, "\varepsilon_A"] \\ & G(A) \end{tikzcd}$$

Приведем теперь конструкцию примера, в котором функторы P и I не изоморфны. Рассмотрим множества $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{a, b\}$, $Z = \{a, c\}$, где a, b, c – различные точки (эти множества снабжаются дискретными топологиями). Определим следующие отображения:

$$f : X \longrightarrow Y, \quad f(a) = f(c) = a, \quad f(b) = b$$

$$g : X \longrightarrow Z, \quad g(a) = g(b) = a, \quad g(c) = c.$$

Покажем, что не существует естественное преобразование функтора P в функтор I и наоборот. Для этой цели рассмотрим объекты $X, Y \times Z$ из категории $Comp$ и морфизм $(f, g) : X \longrightarrow Y \times Z$ из категории $Comp$.

Достаточно показать, что отображение $P((f, g))$ обладает свойством, которым отображение $I((f, g))$ не обладает.

Отображение
$$X \quad \xrightarrow{(f,g)} \quad Y \times Z$$
под воздействием функтора P переходит в отображение

$$P(X) \quad \xrightarrow{P((f,g))} \quad P(Y \times Z),$$

и под воздействием функтора I –

$$I(X) \quad \xrightarrow{I((f,g))} \quad I(Y \times Z).$$

Морфизмы $P((f, g))$ и $I((f, g))$ определяются поточечно [3], т. е.

$$P((f, g)) = (P(f), P(g))$$

и

$$I((f, g)) = (I(f), I(g)).$$

Отметим, что по теореме Фубини [4] $(P(Y) \times P(Z)) \ni (\mu, \nu) \longmapsto \mu \otimes \nu \in P(Y \times Z)$
$$P(Y) \times P(Z) \subset\!\!\to P(Y \times Z)$$
Из max-plus варианта теоремы Фубини $(I(Y) \times I(Z)) \ni (\mu, \nu) \longmapsto \mu \otimes \nu \in I(Y \times Z)$
$$I(Y) \times I(Z) \subset\!\!\to I(Y \times Z)$$

Морфизмы $(P(f), P(g))$ и $(I(f), I(g))$ определяются по формулам

$$(P(f), P(g))(\mu)(\varphi \cdot \psi) = P(f)(\mu)(\varphi) \cdot P(g)(\mu)(\psi),$$

и

$$(I(f), I(g))(\mu)(\varphi \odot \psi) = I(f)(\mu)(\varphi) \odot I(g)(\mu)(\psi),$$

где $\varphi \in C(Y)$, $\psi \in C(Z)$, $\mu \in P(X)$

Отображение $(P(f), P(g)) : P(X) \longrightarrow P(Y) \times P(Z)-$ вложение.

На самом деле, для любых

$$\mu = \alpha_1\delta_a + \alpha_2\delta_b + \alpha_3\delta_c,$$

$$\nu = \beta_1\delta_a + \beta_2\delta_b + \beta_3\delta_c,$$

с положительными $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3,\ \beta_1, \beta_2, \beta_3,\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1,\ \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 1,$ имеют место равенства

$$P(f)(\mu) = (\alpha_1 + \alpha_3)\delta_a + \alpha_2\delta_b,$$

$$P(g)(\mu) = (\alpha_1 + \alpha_2)\delta_a + \alpha_3\delta_c,$$

$$P(f)(\nu) = (\beta_1 + \beta_3)\delta_a + \beta_2\delta_b,$$

$$P(g)(\nu) = (\beta_1 + \beta_2)\delta_a + \beta_3\delta_c.$$

Следовательно $(P(f), P(g))(\mu) = (P(f), P(g))(\nu)$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 = \beta_1 + \beta_3, \\ \qquad \alpha_2 = \beta_2, \\ \alpha_1 + \alpha_2 = \beta_1 + \beta_2, \\ \qquad \alpha_3 = \beta_3. \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение $\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \alpha_3 = \beta_3$. Отсюда, $\mu = \nu$. Таким образом, $(P(f), P(g))\,(\mu) = (P(f), P(g))\,(\nu)$ тогда и только тогда, когда $\mu = \nu$, т. е. $(P(f), P(g)) : P(X) \to P(Y) \times P(Z)-$ вложение.

Покажем, что отображение $(I(f), I(g)) : I(X) \to I(Y) \times I(Z)$ не является вложением. На самом деле, для идемпотентных вероятностных мер

$$\mu = \lambda_1 \odot \delta_a \oplus \lambda_2 \odot \delta_b \oplus \lambda_3 \odot \delta_c,$$

$$\nu = \gamma_1 \odot \delta_a \oplus \gamma_2 \odot \delta_b \oplus \gamma_3 \odot \delta_c,$$

с $-\infty < \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \le 0$ и $\lambda_1 \oplus \lambda_2 \oplus \lambda_3 = \gamma_1 \oplus \gamma_2 \oplus \gamma_3 = 0$, имеют место равенства

$$I(f)(\mu) = (\lambda_1 \oplus \lambda_3) \odot \delta_a \oplus \lambda_2 \odot \delta_b,$$

$$I(g)(\mu) = (\lambda_1 \oplus \lambda_2) \odot \delta_a \oplus \lambda_3 \odot \delta_c,$$

$$I(f)(\nu) = (\gamma_1 \oplus \gamma_3) \odot \delta_a \oplus \gamma_2 \odot \delta_b,$$

$$I(g)(\nu) = (\gamma_1 \oplus \gamma_2) \odot \delta_a \oplus \gamma_3 \odot \delta_c.$$

Равенство $(I(f), I(g))(\mu) = (I(f), I(g))(\nu)$ имеет место тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} \lambda_1 \oplus \lambda_3 = \gamma_1 \oplus \gamma_3, \\ \qquad \lambda_2 = \gamma_2, \\ \lambda_1 \oplus \lambda_2 = \gamma_1 \oplus \gamma_2, \\ \qquad \lambda_3 = \gamma_3. \end{cases}$$

Это, система имеет несчётное количество решений. Например, при $-\infty < \lambda_1 \le 0$, $-\infty < \gamma_1 \le 0$ четвёрка $(\lambda_1, \gamma_1, 0, 0)$ есть её решение.

Равенство $(I(f), I(g))(\mu) = (I(f), I(g))(\nu)$ верно, хотя $\lambda_1 \ne \gamma_1$ для этой четвёрки. Это означает, что отображение $(I(f), I(g))$ не является вложением. Таким образом, не существует естественного преобразования функтора P в функтор I, поскольку морфизм $I((f,g)) = (I(f), I(g))$ не является вложением.

Иными словами, не существует естественного преобразования $\alpha = \{\alpha_X : X \in Comp\}$ такого, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} I(X) & \xrightarrow{I((f,g))} & I(Y \times Z) \\ \alpha_X \downarrow & & \downarrow \alpha_{Y \times Z} \\ P(X) & \xrightarrow{P((f,g))} & P(Y \times Z) \end{array}$$

была бы коммутативной.

Литература

1. M. Zarichnyi. Idempotent probability measures, I. //arXiv:math. GN/0608754v1 30 Aug 2006.

2. G.L.Litvinov, V.P.Maslov, and G.B.Shpiz, Idempotent functional analysis: An algebraic approach, Translated from Matematicheskie Zametki, vol.69, no. 5, 2001,pp. 758-797.

3. В.А.Артаманов, В.Н.Салий, Л.А.Скорняков, Л.Н.Меврин, Е.Г.Шульгейфер. Общая алгебра //Под общей редакцие Л.А.Скорнякова Том 2. Москва «Наука» главная редакция физико-математической литературы. 1991.
4. Федорчук В.В. Ковариантные функторы в категории компактов, абсолютные ретракты и Q-многообразия // Успехи матем.наук.1981.Т.36, вып.3.С.177-195.
5. Заричный М.М. Итерированные суперрасширения //Общая топология. Отображения топологических пространств.М.: Изд-во МГУ, 1986.С.45-59.
6. A.A.Zaitov, I.I.Tojiev. On uniform metrizability of the functor of idempotent probability measures. //arxiv: 1204.0074v1 [math.GN] 31 March 2012.

ТАСИ, Институт математики при НУУз,

Uzbek Mathematical
Journal, 2014,№4, pp.46-54

УДК 517.956.32

Об одной смешанной задаче с интегральным условием для уравнений третьего порядка

Зикиров О.С., Холиков Д.К.

Ushbu maqolada uchinchi tartibli bir turkum giperbolik tenglamalar uchun integral shartli aralash masalaning korrektligi isbot qilingan.

We prove the correctness of the mixed problem with integral conditions for hyperbolic equations of the third order.

В работе исследуется нелокальная задача с интегральным условием для одного класса уравнений в частных производных третьего порядка с волновым оператором в главной части. Методом Римана доказано существование регулярного решения исследуемой задачи, при определенных условиях гладкости на заданные функций.

1. Постановка задачи.

В области $D = \{(x,y):\ 0 < x < l,\ 0 < y < h\}$ рассмотрим уравнение

$$Mu \equiv \left(\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \beta\frac{\partial}{\partial y}\right)u_{xy} + Lu = g(x,y), \tag{1}$$

где α, β – заданные постоянные, причем $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, а L – линейное дифференциальное выражение вида

$$Lu \equiv a(x,y)u_{xx} + 2b(x,y)u_{xy} + c\,(x,y)u_{yy} + d(x,y)u_x + e(x,y)u_y + f(x,y)u,$$

которое относится к одному из канонических видов, указанных в [1].

Заметим, что гиперболические уравнения третьего и более высокого порядка с доминированными младшими членами, которые часто называют псевдопараболическими, встречаются при изучении вопросов фильтрации жидкости в пористых средах, влагопереноса в почвогрунтах, распространении волн в диспергирующих средах, а также моделировании различных процессов и явлений (см. например [2]–[4]).

Уравнение (1) представляет собой объединение в виде одной формулы двух вариантов обобщенного псевдопараболического уравнения

Аллера, частные случаи которого исследовались, например, в работах [5, с. 254–256], [6, с. 132–138], а также [7], [8] и др..

Без ограничения общности, можно считать, что $\alpha > 0$ и $\beta > 0$. Действительно, если $\alpha < 0$, $\beta > 0$ или $\alpha > 0$, $\beta < 0$, то при помощи замены независимого переменного $x = 1 - \xi$ или $y = 1 - \eta$ рассматриваемые случаи редуцируются к случаю $\alpha > 0$ и $\beta > 0$.

В работе для уравнения (1) изучается следующая задача: *найти в области D решение $u(x, y)$ уравнения (1), удовлетворяющее начальным*

$$u(x, 0) = \psi_1(x), \quad u_y(x, 0) = \psi_2(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{2}$$

и интегральным условиям

$$\int\limits_0^l u(x, y)dx = \varphi_1(y), \quad 0 \le y \le h, \tag{3}$$

$$\int\limits_0^l xu(x, y)dx = \varphi_2(y), \quad 0 \le y \le h, \tag{4}$$

где $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$ — заданные функции и удовлетворяют условиям согласования:

$$\int\limits_0^l \psi_1(x)dx = \varphi_1(0), \qquad \int\limits_0^l x\psi_1(x)dx = \varphi_2(0),$$

$$\int\limits_0^l \psi_2(x)dx = \varphi_1'(0), \qquad \int\limits_0^l x\psi_2(x)dx = \varphi_2'(0).$$

Смешанные задачи с интегральными условиями для уравнений в частных производных были рассмотрены в работах [9]–[11], но при этом в основном рассматриваются уравнения второго порядка, как в одномерных [9], так и многомерных [10] областях. Следует отметить, что задачи с интегральными условиями для уравнений в частных производных высокого порядка исследованы в работе [11] и др.

Введем некоторые необходимые для дальнейшего обозначения и определения.

Через $C^{k,l}(D)$ обозначен класс функций $u(x,y)$, непрерывных вместе со своими частными производными порядка $\partial^{m+n}u(x,y)/\partial x^m \partial y^n$ для всех $m=\overline{0,k}$, $n=\overline{0,l}$. $C^{k,0}(D)=C^k(D)$ и $C^0(D)=C(D)$.

Под классом $C^{(k,\nu)}(D)$ понимаются определенные в области D функции, у которых все частные производные порядка k существуют и удовлетворяют условию Гельдера с показателем ν, $0<\nu<1$.

Определение 1. *Регулярным в области D решением уравнения (1.1) называется действительная функция $u(x,y)$, из класса $C^{2,1}(D)\cap C^{1,2}(D)\cap C^{1,1}(\overline{D})$, и удовлетворяющая ему в обычном смысле.*

Сопряженным по Лагранжу оператором для дифференциального оператора Mu будет

$$M^*v \equiv -\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x}+\beta\frac{\partial}{\partial y}\right)v_{xy}+L^*v,$$

где α, β – заданные постоянные, а L^* линейный оператор второго порядка

$$L^*v \equiv (av)_{xx}+(2bv)_{xy}+(cv)_{yy}-(dv)_y-(ev)_y+fv.$$

Определение 2. *Функцией Римана для уравнения (1) называется решение $v(x,y)=v(x,y;\xi,\eta)$, следующей задачи:*

$$M^*v=0 \tag{5}$$

$$v(\xi,y;\xi,\eta)=\omega_1(\xi,y;\xi,\eta),\quad v_x(\xi,y;\xi,\eta)=exp\left(-\frac{1}{\alpha}\int\limits_{\eta}^{y}a(\xi,t)dt\right); \tag{6}$$

$$v(x,\eta;\xi,\eta)=\omega_2(x,\eta;\xi,\eta),\quad v_y(x,\eta;\xi,\eta)=exp\left(-\frac{1}{\beta}\int\limits_{\xi}^{x}c(t,\eta)dt\right); \tag{7}$$

где $\omega_1(\xi,y;\xi,\eta)$ и $\omega_2(x,\eta;\xi,\eta)$ являются решениями следующих задач Коши соответственно

$$\beta\omega_{1yy}(\xi,y;\xi,\eta)-b(\xi,y)\omega_{1y}(\xi,y;\xi,\eta)+d(\xi,y)\omega_1(\xi,y;\xi,\eta)=0,$$

$$\omega_1(\xi,y;\xi,\eta)\big|_{y=\eta}=0,\quad \beta\omega_{1y}(\xi,y;\xi,\eta)\big|_{y=\eta}=1; \tag{8}$$

$$\alpha\omega_{2xx}(x,\eta;\xi,\eta)-b(x,\eta)\omega_{2x}(x,\eta;\xi,\eta)+e(x,\eta)\omega_2(x,\eta;\xi,\eta)=0,$$

$$\omega_2(x,\eta;\xi,\eta)\big|_{x=\xi} = 0, \quad \alpha\omega_{2x}(x,\eta;\xi,\eta)\big|_{x=\xi} = 1; \tag{9}$$

а (ξ,η) — произвольная точка области D. Очевидно, задачи (8) и (9) однозначно разрешимы.

Будем требовать выполнения следующих условий:

Условие 1. *Коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют условиям*

$$\begin{aligned}
&a(x,y) \in C^{1,0}(\overline{D}) \cap C^{2,0}(D);\ b(x,y) \in C^{1,0}(\overline{D}) \cap C^{0,1}(\overline{D}) \cap C^{1,1}(D);\\
&c(x,y) \in C^{0,1}(\overline{D}) \cap C^{0,2}(D);\ d(x,y) \in C^{0,0}(\overline{D}) \cap C^{1,0}(D);\\
&e(x,y) \in C^{0,0}(\overline{D}) \cap C^{0,1}(D);\ f(x,y) \in C^{0,0}(D),
\end{aligned}$$

кроме того, $d(x,y) < 0$, $e(x,y) < 0$ для любых $(x,y) \in D$.

Условие 2. *Заданные функции* $\psi_i(x)$, $\varphi_i(y)$ $(i=1,2)$ *и* $g(x,y)$ *удовлетворяют условиям*

$$\psi_i(x) \in C^2[0,l]; \quad \varphi_i(y) \in C^2[0,h],\ (i=1,2), \quad g(x,y) \in C^{(1,\lambda)}(\overline{D}),$$

кроме того $\quad g(x,0) = g(0,y) = 0$.

Имеет место следующая теорема разрешимости нелокальной задачи (1)–(4).

Теорема 1. *Пусть выполнены Условие 1 и Условие 2. Тогда нелокальная задача (1)–(4) разрешима и притом единственным образом.*

2. Доказательство теоремы 1 основано на исследовании разрешимости вспомогательной характеристической задачи Гурса для уравнения (1): *найти функцию* $u(x,y)$, *являющуюся в области* D *решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются начальные условия (2) и граничные условия*

$$u(0,y) = \mu_1(y), \qquad u_x(0,y) = \mu_2(y), \qquad 0 \le y \le h, \tag{10}$$

где $\mu_1(y)$ и $\mu_2(y)$ — пока неизвестные функции и при этом будем предполагать, что

$$\psi_1(0) = \mu_1(0), \quad \psi_2(0) = \mu_1^{'}(0), \quad \psi_1^{'}(0) = \mu_2(0), \quad \psi_2^{'}(0) = \mu_2^{'}(0).$$

Разрешимость устанавливается с помощью метода Римана.

В работе [12] доказана, что если $\psi_i(x) \in C^2[0,l]$, $\mu_i(y) \in C^2[0,h]$, $(i=1,2)$, то решение характеристической задачи Гурса (1), (2) и (5) существует, единственно и имеет место интегральное представление

$$u(x,y)=\alpha v_x(0,y;x,y)\mu_1(y)+\beta v_y(x,0;x,y)\psi_1(x)-\int\limits_0^x[\beta v(x,0;\xi,y)\psi_2^{'}(\xi)+$$

$$+c(\xi,0)v(\xi,0;x,y)\psi_2(\xi)+A(\xi;x,y)\psi_1^{'}(\xi)+B(\xi;x,y)\psi_1(\xi)]d\xi-$$

$$-\int\limits_0^y[\alpha v(0,\eta;x,y)\mu_2^{'}(\eta)+a(0,\eta)v(0,\eta;x,y)\mu_2(\eta)+A_1(\eta;x,y)\mu_1^{'}(\eta)+$$

$$+B_1(\eta;x,y)\mu_1(\eta)]d\eta+\int\limits_0^x\int\limits_0^y v(\xi,\eta;x,y)g(\xi,\eta)d\xi d\eta. \qquad (11)$$

здесь (ξ,η) – произвольная точка области D,

$$\begin{aligned}
A(\xi,x,y)=&-\alpha v_x(\xi,0;x,y)+b(\xi,0)v(\xi,0;x,y);\\
B(\xi;x,y)=&-\beta v_{xy}(\xi,0;x,y)-b(\xi,0)v_x(\xi,0;x,y)-\\
&-c(\xi,0)v_y(\xi,0;x,y)-[b_x(\xi,0)+c(\xi,0)-e(\xi,0)]v(\xi,0;x,y);\\
A_1(\eta;x,y)=&-\beta v_y(0,\eta;x,y)+b(0,\eta)v(0,\eta;x,y);\\
B_1(\eta;x,y)=&-\alpha v_{xy}(0,\eta;x,y)-a(0,\eta)v_x(0,\eta;x,y)-\\
&-b(0,\eta)v_y(0,\eta;x,y)-[a_x(0,\eta)+b_y(0,\eta)-d(0,\eta)]v(0,\eta;x,y).
\end{aligned}$$

Таким образом, решение задачи Гурса для уравнения (1) представимо в явном виде (11), если известна функция Римана $v(x,y;\xi,\eta)$.

В работе [12] методом редукции к нагруженным интегральным уравнениям Вольтерра доказано существование и единственность функции Римана $v(x,y;\xi,\eta)$, определяемая по формулам (5)–(9).

3. Сведение задачи (1)–(4) к интегральным уравнениям.

Представление (11) после некоторых преобразований запишем в виде

$$u(x,y)=[\alpha v_x(0,y;x,y)-A_1(y;x,y)]\mu_1(y)-\alpha v(0,y;x,y)\mu_2(y)+$$

$$+\int\limits_0^y[A_{1y}(\eta;x,y)-B_1(\eta;x,y)]\mu_1(\eta)d\eta+$$

$$+\int\limits_0^y [\alpha v_y(0,\eta;x,y) - a(0,\eta)v(0,\eta;x,y)]\mu_2(\eta)d\eta + F(x,y), \qquad (12)$$

где

$$F(x,y) = [\beta v_y(x,0;x,y) - A(x;x,y)]\psi_1(x) - \beta v_x(x,0;x,y)\psi_2(x)+$$

$$+\beta v(0,0;x,y)\psi_2(0) + \alpha v(0,0;x,y)\psi_1^{'}(0)+$$

$$+[A_1(0;x,y) + A(0;x,y)]\psi_1(0) + \int\limits_0^x [A_x(\xi;x,y) - B(\xi;x,y)]\psi_1(\xi)d\xi+$$

$$+\int\limits_0^x [\beta v_x(\xi,0;x,y) - c(\xi,0)v(\xi,0;x,y)]\psi_2(\xi)d\xi + \int\limits_0^x \int\limits_0^y v(\xi,\eta;x,y)g(\xi,\eta)d\xi d\eta.$$

Так как функции $\mu_1(y)$, $\mu_2(y)$ нам неизвестны, выясним, можно ли найти их так, чтобы решение задачи Гурса удовлетворяло интегральным условиям (3) и (4). Для этого сначала проинтегрируем (12) по x от 0 до l. Тогда с учетом условия (3), получим

$$\mu_1(y)\int\limits_0^l [\alpha v_x(0,y;x,y) - A_1(y;x,y)]dx - \mu_2(y)\int\limits_0^l \alpha v(0,y;x,y)dx+$$

$$+\int\limits_0^y [K_{11}(\eta,y)\mu_1(\eta) + K_{12}(\eta,y)\mu_2(\eta)]d\eta + \int\limits_0^l F(x,y)dx = \varphi_1(y), \qquad (13)$$

здесь

$$K_{11}(\eta,y) = \int\limits_0^l [A_{1y}(\eta;x,y) - B_1(\eta;x,y)]dx,$$

$$K_{12}(\eta,y) = \int\limits_0^l [\alpha v_y(0,\eta;x,y) - a(0,\eta)v(0,\eta;x,y)]dx.$$

Теперь умножим (12) на x и проинтегрируем результат по x от 0 до l.

Тогда в силу условия (4) из (12) получим

$$\mu_1(y)\int\limits_0^l x[\alpha v_x(0,y;x,y)-A_1(y;x,y)]dx-\mu_2(y)\int\limits_0^l x\alpha v(0,y;x,y)dx+$$

$$+\int\limits_0^y[K_{21}(\eta,y)\mu_1(\eta)+K_{22}(\eta,y)\mu_2(\eta)]d\eta+\int\limits_0^l xF(x,y)dx=\varphi_2(y), \quad (14)$$

где

$$K_{21}(y,\eta)=\int\limits_0^l x[A_{1y}(\eta;x,y)-B_1(\eta;x,y)]dx.$$

$$K_{22}(y,\eta)=\int\limits_0^l x[\alpha v_y(0,\eta;x,y)-a(0,\eta)v(0,\eta;x,y)]dx,$$

Таким образом, разрешимость нелокальной задачи (1)–(4) редуцирована к разрешимости системы интегральных уравнений (13)–(14). Вводя обозначения

$$\kappa(y)=\{k_{ij}(y)\},\quad \mathcal{K}(y,\eta)=\{K_{ij}(y,\eta)\},\quad i,j=1,2;$$

систему интегральных уравнений (13)–(14) перепишем в операторном виде

$$\kappa(y)\mu(y)=\int\limits_0^y\mathcal{K}(y,\eta)\mu(\eta)d\eta+\gamma(y),\quad 0\le y\le h. \quad (15)$$

здесь $\mu(y)=\{\mu_1(y),\mu_2(y)\}$, $\gamma(y)$ – известная функция;

$$\det|\kappa(y)|=k_{11}(y)k_{22}(y)-k_{21}(y)k_{12}(y)=\alpha v(0,y;l,y)\int\limits_0^l x\alpha v(0,y;x,y)dx-$$

$$-\int\limits_0^l x\alpha v(0,y;x,y)dx\int\limits_0^l[\alpha v(0,y;x,y)+A_1(y;x,y)]dx-$$

$$-\alpha l v(0,y;l,y)\int\limits_0^l \alpha v(0,y;x,y)dx+$$

$$+\int\limits_0^l \alpha v(0,y;x,y)dx\int\limits_0^l x[\alpha v(0,y;x,y)+A_1(y;x,y)]dx.$$

Покажем, что определитель $\det|\kappa(y)|\neq 0$. Уравнение (15) есть система интегральных уравнений третьего рода. Следуя рассуждениям [8], можно выделить класс задач, для которых $\det|\kappa(y)|$ нигде в $[0,h]$ не обращается в нуль. Действительно, функция $v(0,y;l,y)$ на $[0,h]$ нигде не обращается в нуль, если нуль не является собственным значением задачи

$$\alpha v_{xx}(x,y;l,y)-b(x,y)v_x(x,y;l,y)+e(x,y)v(x,y;l,y)=0,$$

$$v(0,y;l,y)=0,\qquad \alpha v(l,y;l,y)=0. \tag{16}$$

Так будет, например $e(x,y)\leq 0$. В самом деле, если при каком либо $y\in[0,h]$ функция $v(0,y;l,y)=0$, то задача (16) имеет только тривиальное решение $v(x,y;l,y)\equiv 0$, значит, $v_x(x,y;l,y)=0$, что противоречит условию $\alpha v_x(l,y;l,y)=1$.

Уравнение (15) является системой интегральных уравнений Вольтерра третьего рода [5, 8], которая безусловно разрешима.

Таким образом, находя из интегральных уравнений $\mu_1(y)$ и $\mu_2(y)$, задачу (1)–(4) редуцируем к характеристической задаче Гурса для уравнения (1), однозначная разрешимость которой установлена в работе [12]. Отсюда следует существование и единственность решения нелокальной задачи (1)–(4).

Литература

1. Джураев Т.Д., Попелек Я. О классификации и приведении к каноническому виду уравнений с частными производными третьего порядка.// Дифференц. уравнения. 1991. том 27, №10. – С. 1734–1745.

2. Баренблатт Г.Н., Желтов Ю.П., Кочина И.Н. Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах.//Прикл. матем. и механ. 1960. – том 24, вып. 5. – С. 852–864.

3. Чудновский А.Ф. Теплофизика почв. – М:, Наука. 1976. – 352 с.

4. Рахматулин Х.А., Демьянов Ю.А. Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках. – М:, Логос. 2009. – 512с.
5. Нахушев А.М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. – М:, Наука, 2006, 287 с.
6. Жегалов В.И., Миронов А.Н. Дифференциальные уравнения со старшими частными производными. Казанск. матем. общество, Казань, 2001, 226 с.
7. Джохадзе О.М. Влияние младших членов на корректность постановки характеристических задач для гиперболических уравнений третьего порядка.// Матем. заметки. 2003. том 74, вып. 4. – С. 517–528.
8. Шхануков М.Х. О некоторых краевых задачах для уравнения третьего порядка, возникаюших при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах.// Дифференц. уравнения. 1982. том 18, №4. – С. 689–699.
9. Пулькина Л.С. Нелокальная задача с интегральными условиями для гиперболического уравнения. Дифференц. уравнения,// 2004. том. 40, №7 – С. 887–892.
10. Кожанов А.И., Пулькина Л.С. О разрешимости краевых задач с нелокальными граничными условиями интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений.// Дифференц. уравнения, 2006. том 42, №9. – С. 1166–1179.
11. Bouziani A. Initial–boundary value problem with a nonlocal condition for a vicscosity equation.// Int. J. of Math. and Math. Sci., 2002. vol. 30:6 – P. 327–338.
12. Зикиров О.С. Локальные и нелокальные краевые задачи для гиперболических уравнений третьего порядка.// Современная математика и ее приложения. Том 68 (2011). – С. 101–120.

Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека

Uzbek Mathematical
Journal, 2014, №4 , pp.55-62

УДК. 517. 94

Интегральное уравнение Трикоми, с числовым параметром в "не сингулярной" части ядра

Исломов Б., Мирсабурова Г.М.

Maqolada, Trikomi singulyar integral tenglamasini, "nosingulyar"qismida a sonli parametr ishtirok etganda, yechish usuli bayon qilingan. O'rganilayotgan integral tenglamaning yechimini beruvchi formula keltirib chiqarilgan.

In the paper method of solving Tricomi singular integral equation is given when number a parameter participated in nonsingular part. A formula giving the solution investigated singular integral equation is introduced.

Рассмотрим следующее интегральное уравнение

$$\tau(x) - \lambda \int_c^1 \left(\frac{x-c}{t-c}\right)^{1-2\beta} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{a}{1-xt}\right) \tau(t)dt =$$

$$= g_0(x), \qquad x \in (c,1). \tag{1}$$

Уравнения (1) отличается от хорошо известного сингулярного интегрального уравнения Трикоми [1] тем что здесь в "не сингулярной" части ядра присутствует числовой параметр a.

Имеет место следующая

Лемма. Если $g_0(x)$ удовлетворяет условию Гельдера при $x \in (c,1)$ и $g_0(x) \in L_p(c,1), p > 1$, то решение уравнение (1) в классе функций H, в котором функция $(c-x)^{2\beta-1}\tau(x)$ ограничена при $x = 1$ и может быть неограниченной при $x = c$, выражается формулой

$$\tau(x) = cos^2(\alpha\pi)g_0(x) +$$

$$+\frac{sin(2\alpha\pi)}{2\pi} \int_c^1 \left(\frac{x-c}{t-c}\right)^{3\alpha} \left(\frac{1-x}{1-t}\right)^{2\alpha} \left(\frac{1-ct}{1-cx}\right)^{\alpha} \times$$

$$\times\left(\frac{1}{t-x}-\frac{a}{1-xt}\right)g_0(t)dt, \qquad x\in(c,1). \tag{2}$$

Доказательство леммы. Вводя обозначения $\rho(x)=(x-c)^{2\beta-1}\times$ $\times\,\tau(x)$, $\quad g(x)=(x-c)^{2\beta-1}g_0(x)$ уравнение (1) запишем в виде

$$\rho(x)-\lambda\int_c^1\left(\frac{1}{t-x}-\frac{a}{1-xt}\right)\rho(t)dt=g(x), \qquad x\in(c,1). \tag{3}$$

Пусть z произвольная точка комплексной плоскости. Следуя идее Карлемана [2] положим

$$\Phi(z,a)=\frac{1}{2\pi i}\int_c^1\left(\frac{1}{t-z}-\frac{a}{1-zt}\right)\rho(t)dt, \quad \Phi(\infty)=0. \tag{4}$$

Очевидно, что $\Phi(z,a)$ голоморфна как в верхней, так и в нижней полуплоскостях. Обозначим через $\Phi^+(x,a)$ и $\Phi^-(x,a)$ предельные значения $\Phi(z,a)$, когда z стремится к точке $(x,0)$ действительной оси, соответственно, из верхней или из нижней полуплоскости, нетрудно проверить, что

$$\Phi\left(\frac{1}{z},a\right)=az\Phi\left(z,\frac{1}{a}\right). \tag{5}$$

Преобразование $w=\frac{1}{z}$ отображает промежуток $(c,1)$ в промежуток Δ , где

$$\Delta=\begin{cases}\left(1,\frac{1}{c}\right) & \text{, если} \quad c>0,\\ (1,+\infty) & \text{, если} \quad c=0,\\ \left(-\infty,\frac{1}{c}\right)\cup(1,+\infty) & \text{, если} \quad c<0.\end{cases}$$

Из (5) легко усмотреть, что

$$\Phi^+\left(\frac{1}{x},a\right)=ax\Phi^-\left(x,\frac{1}{a},\right), \quad x\in\Delta,$$

$$\Phi^-\left(\frac{1}{x},a\right)=ax\Phi^+\left(x,\frac{1}{a},\right), \quad x\in\Delta. \tag{6}$$

В силу формулы Сохоцкого - Племеля из (4) имеем

$$\Phi^+(x,a)-\Phi^-(x,a)=\rho(x), \quad x\in(c,1)$$

$$\Phi^+(x,a)+\Phi^-(x,a)=\frac{1}{\pi i}\int_c^1\left(\frac{1}{t-x}-\frac{a}{1-xt}\right)\rho(t)dt,\quad x\in(c,1), \tag{7}$$

тогда на основании (7) уравнение (3) имеет вид

$$\Phi^+(x,a)(1-\lambda\pi i)-\Phi^-(x,a)(1+\lambda\pi i)=g(x),\quad x\in(c,1), \tag{8}$$

Теперь в (8) x заменив на $\frac{1}{x}$ с учетом (6) имеем

$$\Phi^+\left(x,\frac{1}{a}\right)(1+\lambda\pi i)-\Phi^-\left(x,\frac{1}{a}\right)(1-\lambda\pi i)=$$

$$=-\frac{1}{ax}g\left(\frac{1}{x}\right),\quad x\in\Delta. \tag{9}$$

В (9) a заменив на $\frac{1}{a}$ получим

$$\Phi^+(x,a)(1+\lambda\pi i)-\Phi^-(x,a)(1-\lambda\pi i)=-\frac{a}{x}g\left(\frac{1}{x}\right),\quad x\in\Delta. \tag{10}$$

Уравнения (8) и (10) можно соединить в одно уравнение:

$$\Phi^+(x,a)-G(x)\Phi^-(x,a)=h(x),\quad x\in(c,1)\cup\Delta, \tag{11}$$

где

$$G(x)=\begin{cases} e^{2\alpha\pi i}, & x\in(c,1),\\ e^{-2\alpha\pi i}, & x\in\Delta; \end{cases} \tag{12}$$

$$h(x)=\begin{cases} \frac{g(x)}{1-\lambda\pi i}, & x\in(c,1),\\ -\frac{a}{(1+\lambda\pi i)x}g\left(\frac{1}{x}\right), & x\in\Delta. \end{cases} \tag{13}$$

Таким образом, решение интегрального уравнения (3) приведено к следующей задаче теории функций комплексного переменного [3]: найти функцию $\Phi(z,a)$ голоморфную как в верхней, так и в нижней полуплоскостях, удовлетворяющую граничному условию (11).

Решение этой задачи можно получит в явном виде. Решим предварительно соответствующую однородную задачу т.е. в комплексной плоскости z найдем функцию $X(z)$, голоморфную вне промежутка $(c,1)\cup\Delta$, а в промежутке $(c,1)\cup\Delta$, удовлетворяющую условию

$$X^+(x)=G(x)X^-(x),\quad x\in(c,1)\cup\Delta, \tag{14}$$

Одно из частных решений уравнения (14) имеет вид

$$X(z)=exp\left\{\alpha\int_c^1\left(\frac{1}{t-z}-\frac{z}{1-zt}\right)dt\right\} \tag{15}$$

из (15) легко усмотреть, что

$$X(\frac{1}{z})=X(z). \tag{16}$$

Из (15) вычислим

$$X(z)=exp\left\{\alpha\left[2ln(1-z)-ln(c-z)-ln(1-cz)\right]\right\}. \tag{17}$$

Отсюда имеем

$$X^+(x)=exp\left\{\alpha\left[2ln(1-x)-ln(x-c)+\pi i-ln(1-cx)\right]\right\}=$$

$$=\left(\frac{(1-x)^2}{(x-c)(1-cx)}\right)^\alpha e^{\alpha\pi i},\quad x\in(c,1), \tag{18}$$

$$X^-(x)=exp\left\{\alpha\left[2ln(1-x)-ln(x-c)-\pi i-ln(1-cx)\right]\right\}=$$

$$=\left(\frac{(1-x)^2}{(x-c)(1-cx)}\right)^\alpha e^{-\alpha\pi i},\quad x\in(c,1).$$

В силу (16) из (18) получим

$$X^+(x)=\left(\frac{(1-x)^2}{(x-c)(1-cx)}\right)^\alpha e^{-\alpha\pi i},\quad x\in\Delta, \tag{19}$$

$$X^-(x)=\left(\frac{(1-x)^2}{(x-c)(1-cx)}\right)^\alpha e^{\alpha\pi i},\quad x\in\Delta.$$

Теперь, граничное условие (10) в силу (14) можно переписать в виде

$$\frac{\Phi^+(x,a)}{X^+(x)}-\frac{\Phi^-(x,a)}{X^-(x)}=\frac{h(x)}{X^+(x)},\quad x\in(c,1)\cup\Delta. \tag{20}$$

Одно из частных решений граничной задачи (20) имеет вид

$$\frac{\Phi(z,a)}{X(z)}=\frac{1}{2\pi}\left[\int_c^1\frac{h(t)dt}{X^+(t)(t-z)}+\int_\Delta\frac{h(t)dt}{X^+(t)(t-z)}\right],\ \ x\in(c,1)\cup\Delta. \quad (21)$$

Во втором интеграле (21) сделав замену t на $\frac{1}{t}$ с учетом (12),(13) и (14) имеем

$$\frac{\Phi(z,a)}{X(z)}=\frac{1}{2\pi}\int_c^1\frac{g(t)dt}{(1-\lambda\pi i)X^+(t)(t-z)}\ +$$

$$+\ \frac{1}{2\pi}\int_c^1\frac{ag(t)dt}{(1+\lambda\pi i)X^+\left(\frac{1}{t}\right)\left(1-tz\right)},\quad x\in(c,1).$$

Отсюда с учетом

$$X^+\left(\frac{1}{t}\right)=X^-(t)=X^+(t)e^{-2\alpha\pi i},\quad \frac{1}{1+\lambda\pi i}=e^{-\alpha\pi i}cos(\alpha\pi),$$

$$\frac{1}{1-\lambda\pi i}=e^{\alpha\pi i}cos(\alpha\pi)$$

получим

$$\frac{\Phi(z,a)}{X(z)}=\frac{e^{\alpha\pi i}cos(\alpha\pi)}{2\pi}\left[\int_c^1\frac{g(t)}{X^+(t)}\left(\frac{1}{t-z}-\frac{a}{1-zt}\right)dt\right]. \qquad (22)$$

Чтобы найти общее решение, рассмотрим однородное уравнение

$$\frac{\Phi^+(x,a)}{X^+(x)}-\frac{\Phi^-(x,a)}{X^-(x)}=0.$$

Это уравнение показывает, что функция $\chi(z)=\frac{\Phi(z,a)}{X(z)}$ голоморфна на всей плоскости кроме, может быт точек $z=c, z=1$, которые могут быть только полюсами.

Здесь приведем используемую сейчас теорему теории аналитических функций [4]:

Теорема(об аналитическом продолжении и обобщенная Лиувилля). Если функции $F_1(z)$, $F_2(z)$ аналитичны соответственно в верхней и нижней полуплоскостях, за исключением разве что конечного числа точек $z_0=\infty, z_k$ $(k=1,2,...n)$, где они могут иметь полюсы с главными частями

$$G_0(z)=c_1^0z+...c_{m_0}^0z^{m_0},$$

$$G_k\left(\frac{1}{z-z_k}\right)=\frac{c_1^k}{z-z_k}+...+\frac{c_{m_k}^k}{(z-z_k)^{m_k}}$$

и совпадают на действительной оси, то они представляют единую во всей плоскости рациональную функцию

$$F(z)=c+G_0(z)+\sum_{k=1}^{n}G_k\left(\frac{1}{z-z_k}\right),$$

где c - произвольная постоянная. Полюсы z_k могут лежать как в полуплоскостях, так и на действительной оси.

В силу приведенной выше теоремы, с учетом того, что эта функция исчезает на бесконечности, имеем

$$\chi(z)=\frac{\alpha_1}{z-c}+\frac{\alpha_2}{z-1}.$$

Таким образом, общее решение неоднородной задачи (11) с учетом (22) имеет вид.

$$\Phi(z,a)=\frac{e^{\alpha\pi i}cos(\alpha\pi)}{2\pi}X(z)\int_c^1\frac{g(t)}{X^+(t)}\left(\frac{1}{t-z}-\frac{a}{1-zt}\right)dt+$$

$$+X(z)\chi(z). \tag{23}$$

Из (23) в силу формулы Сохоцкого -Племеля (7) имеем

$$\rho(x)=\Phi^+(x,a)-\Phi^-(x,a)=$$

$$=\frac{e^{\alpha\pi i}cos(\alpha\pi)}{2}\left(X^+(x)+X^-(x)\right)\frac{g(x)}{X^+(x)}+$$

$$+\left(X^+(x)-X^-(x)\right)\int_c^1\frac{g(t)}{X^+(t)}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{a}{1-xt}\right)dt+$$

$$+\left(X^+(x)+X^-(x)\right)\chi(x),\quad x\in(c,1). \tag{24}$$

Далее с учетом тождеств

$$e^{\alpha\pi i}\left(1+\frac{X^-(x)}{X^+(x)}\right)=e^{\alpha\pi i}\left(1+e^{-2\alpha\pi}\right)=2cos(\alpha\pi),$$

$$e^{\alpha\pi i}\left(1-\frac{X^-(x)}{X^+(x)}\right)=e^{\alpha\pi i}\left(1-e^{-2\alpha\pi i}\right)=2sin(\alpha\pi)i$$

и представления (18) для $X^-(x)$ и $X^+(x)$, формулу (24) запишем в виде

$$\rho(x)=cos^2(\alpha\pi)g(x)+\frac{sin(2\alpha\pi)}{2\pi}\times$$

$$\times\int_c^1\left(\frac{(t-c)(1-ct)(1-x)^2}{(x-c)(1-ct)(1-t)^2}\right)^{\alpha}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{a}{1-xt}\right)g(t)dt+$$

$$+2sin(2\alpha\pi)i\left(\frac{(1-x)^2}{(x-c)(1-cx)}\right)^{\alpha}\left(\frac{\alpha_1}{x-c}+\frac{\alpha_2}{x-1}\right),\quad x\in(c,1). \qquad (25)$$

С учетом ограниченности решения при $x=1$ и допущена, что решение $\rho(x)$ может имеет особенность порядка ниже $1-2\beta$ при $x=c$ в (25) положив $\alpha_1=0,\alpha_2=0$, получим решение уравнения (3):

$$\rho(x)=cos^2(\alpha\pi)g(x)+$$

$$+\frac{sin(2\alpha\pi)}{2\pi}\int_c^1\left(\frac{(t-c)(1-ct)(1-x)^2}{(x-c)(1-ct)(1-t)^2}\right)^{\alpha}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{t-x}-\frac{a}{1-xt}\right)g(t)dt,\quad x\in(c,1). \qquad (26)$$

С учетом обозначений $\rho(x)=(x-c)^{2\beta-1}\tau(x)$ и $g(x)=(x-c)^{2\beta-1}g_0(x)$ из формулы (26) следует формула (2).

Лемма доказана.

Литература

1. Трикоми Ф. О линейных уравнениях в частных производных второго порядка смешанного типа. М.-Л. Гос. Тех. Издат. 1947, -192 с.

2. Михлин С.Г. Об интегральном уравнении F.TRICOMI // ДАН СССР.1948, Т.59,No 6. с. 1053-1056.

3. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука.1968.512 с .

4. Гахов Ф.Д., Черский Ю.И. Уравнения типа свертки. М.: Наука.1978.296 с.

Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека

Uzbek Mathematical
Journal, 2014,№4, pp.63-74

УДК. 517. 956.6

Аналог задачи Трикоми для уравнения параболо-гиперболического типа с характеристическим вырождением

Исламов Н.Б.

Maqolada sohaning ichida va chegarasida buzilish chizig‘iga ega bo‘lgan ikkinchi tur parabolik-giperbolik tipdagi tenglama uchun Trikomi masalasiga o‘xshash masala yechimining mavjudligi va yagonaligi isbotlangan.

In this paper unique solvability for the analogue of Tricomi problem for parabolic-hyperbolic type equation of the second kind are proved.

I. Постановка задачи AT.

Рассмотрим уравнение

$$0=\begin{cases} u_{xx}-x^p u_y, \quad p>0 & \text{в} \quad D_1, \\ u_{xx}-(-y)^m u_{yy}, \quad 0<m<1 & \text{в} \quad D_2, \end{cases} \tag{1}$$

где D_1 – область,ограниченная отрезками $AB,\ AA_0,\ BB_0,\ A_0B_0$ прямых $y=0,\ x=0,\ x=1,\ y=h$, соответственно при $y>0$, а D_2 – характеристический треугольник, ограниченный характеристиками

$$J=AB:\ y=0,\ 0<x<1, \quad AC: \quad x-(1-2\beta)(-y)^{\frac{1}{1-2\beta}}=0,$$

$$BC: \quad x+(1-2\beta)(-y)^{\frac{1}{1-2\beta}}=1, \quad C\left(\frac{1}{2};-\left(\frac{4}{2-m}\right)^{2/(m-2)}\right)$$

уравнения (1) при $y<0$, здесь $2\beta=m/(m-2)$, причем

$$-1<2\beta<0. \tag{2}$$

Введем следующие обозначения: $D=D_1\cup D_2\cup AB$,

$$J_1=\{(x,y):0<x<c,\ \ y=0\},J_2=\{(x,y):c<x<1,\ \ y=0\},$$

$$EC_1:\ x-(1-2\beta)(-y)^{1/(1-2\beta)}=c,\quad EC_0:\ x+(1-2\beta)(-y)^{1/(1-2\beta)}=c,$$

$$E(c,0)\in AB,\quad c\in AB,\quad C_1\in BC,\quad C_0\in AC,$$

$$\Theta(x)=\left(\frac{x}{2};\ -\left[\frac{x}{2(1-2\beta)}\right]^{1-2\beta}\right),\ \Theta^*(x)=\left(\frac{x+c}{2};-\left[\frac{x-c}{2(1-2\beta)}\right]^{1-2\beta}\right), \tag{3}$$

$\Theta(x)$ и $\Theta^*(x)$ - точки пересечения характеристики AC и EC_1 с характеристикой выходящей из точке $M(x,0)$, $x\in[c;1]$.

Через D_{21}, D_{22} и D_{23} соответственно обозначим характеристические треугольники AC_0E, EC_1B и четырехугольник EC_1CC_0.

Задача AT. Найти в области D функцию $u(x,y)$, обладающую свойствами: 1) $u(x,y)\in(\overline{D})$; 2) $u(x,y)$ является регулярным решением уравнения (1) в области D_1; 3) $u(x,y)$ - обобщенным решением уравнения (1) из класса R_2 [1] в области $D_2\backslash(EC_0\cup EC_1)$; 4) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям:

$$u(x,y)|_{AA_0}=\varphi_1(y),\qquad u(x,y)|_{BB_0}=\varphi_2(y),\ \ 0\leqslant y\leqslant h, \tag{4}$$

$$u(x,y)|_{AC_0}=\psi(x),\qquad 0\leqslant x\leqslant\frac{c}{2}, \tag{5}$$

$$u[\Theta(x)]=\mu\,u[\Theta^*(x)]+\rho(x),\quad (x,0)\in\overline{J}_2, \tag{6}$$

5) $u_y\in C(D_1\cup J_1\cup J_2)\cap C(D_2\cup J_1\cup J_2)$ и на интервалах J_j $(j=1,2)$ выполняется условие склеивания

$$\lim_{y\to-0}\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=p(x)\lim_{y\to+0}\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}+q(x),\quad (x,0)\in J_1\cup J_2, \tag{7}$$

где $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$, $\psi(x)$, $\rho(x)$, $p(x)$, $q(x)$ - заданные функции, причем

$$\varphi_1(0)=\psi(0)=0, \tag{8}$$

$$\mu=const<0,\quad p(x)<0,\quad \forall\,x\in[0,1], \tag{9}$$

$$\varphi_1(y),\ \varphi_2(y)\in C[0,h]\cap C^1(0,h), \tag{10}$$

$$\psi(x)\in C^2[0;c/2],\ \rho(x)\in C^2[c;1],\ \ p(x),\ \ q(x)\in C\left(\overline{J_j}\right)\cap C^2(J_j). \tag{11}$$

Аналоги задачи Трикоми для уравнения параболо-гиперболического типа второго рода с вырождением в параболической части изучены в работах [2], [3]. Задача AT для уравнения эллитико-гиперболического типа первого рода исследованы в работах М.М. Салахитдинова, М. Мирсабурова [4], а для уравнения эллитико-гиперболического типа второго рода - в [5], [6].

Заметим, что такие задачи для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа второго рода ранее не исследовались.

II. Единственность решения задачи AT.

Введем следующие обозначения:

$$u\left(x,0\right)=\tau\left(x\right),\quad \left(x,0\right)\in\overline{J}\quad u_y\left(x,\pm 0\right)=\nu^{\pm}\left(x\right),\quad \left(x,0\right)\in J_1\cup J_2. \tag{12}$$

Обобщенное решение задачи Коши для уравнения (1) из класса R_2 в области D_2 дается формулой[7]:

$$u\left(\xi,\eta\right)=$$

$$=\int\limits_0^{\xi}\left(\eta-t\right)^{-\beta}\left(\xi-t\right)^{-\beta}T\left(t\right)dt+\int\limits_{\xi}^{\eta}\left(\eta-t\right)^{-\beta}\left(t-\xi\right)^{-\beta}N\left(t\right)dt, \tag{13}$$

где $\gamma_1=\left[2\left(1-2\beta\right)\right]^{2\beta-1}\Gamma\left(2-2\beta\right)/\Gamma^2\left(1-\beta\right)$,

$$N\left(t\right)=\frac{T\left(t\right)}{2\cos\pi\beta}-\gamma_1\nu^{-}\left(t\right), \tag{14}$$

$$\xi=x-\left(1-2\beta\right)\left(-y\right)^{1/(1-2\beta)},\quad \eta=x+\left(1-2\beta\right)\left(-y\right)^{1/(1-2\beta)}, \tag{15}$$

$$\tau\left(x\right)=\int\limits_0^{x}\left(x-t\right)^{-2\beta}T\left(t\right)dt, \tag{16}$$

функции $T\left(x\right)$ и $\nu^{-}\left(x\right)$ непрерывны в $(0,1)$ и интегрируемы на $[0,1]$, а $\tau\left(x\right)$ обращается в нуль порядка не меньше -2β при $x\to 0$.

Положив $\xi=0$, $\eta=x$ и $\xi=c$, $\eta=x$ соответственно в (13) с учетом (3), после некоторых преобразований получим

$$u\left[\Theta\left(x\right)\right]=\int\limits_0^{x}\left(x-t\right)^{-\beta}t^{-\beta}N\left(t\right)dt, \tag{17}$$

$$u\left[\Theta^*(x)\right]=\int\limits_0^c (x-t)^{-\beta}(c-t)^{-\beta}T(t)\,dt+\int\limits_c^x (x-t)^{-\beta}(t-c)^{-\beta}N(t)\,dt, \tag{18}$$

Дифференцируя (6) по x, а затем, применяя к обеим частям полученного равенства оператор $D_{cx}^{-\beta}[\cdot]$ имеем

$$D_{0x}^{-\beta}\frac{d}{dx}u\left[\Theta(x)\right]-\frac{1}{\Gamma(1+\beta)}\frac{d}{dx}\int\limits_0^c\frac{\frac{d}{dt}\left[u\left(\Theta(t)\right)\right]dt}{(x-t)^{-\beta}}=$$

$$=\mu\,D_{cx}^{-\beta}\frac{d}{dx}u\left[\Theta^*(x)\right]+D_{cx}^{-\beta}\rho'(x), \tag{19}$$

где $D_{cx}^{\alpha}[\cdot]$ – оператор интегро-дифференцирования дробного порядка α [1].

Подставляя (17), (18) в (19) с учетом (6), (14) и тождеств:

$$\begin{aligned}&D_{0x}^{-\beta}D_{0x}^{\beta}x^{-\beta}N(x)=x^{-\beta}N(x),\\&D_{cx}^{-\beta}D_{cx}^{\beta}(x-c)^{-\beta}N(x)=(x-c)^{-\beta}N(x),\end{aligned} \tag{20}$$

имеем

$$\gamma_1\nu^-(x)=\frac{1}{2\cos\pi\beta}T(x)-\mu\,\beta\Gamma(1-\beta)\,d(x)\times$$

$$\times\,D_{cx}^{-\beta}\int\limits_0^c (x-t)^{-\beta-1}(c-t)^{-\beta}T(t)\,dt+F_1(x),\quad c<x<1, \tag{21}$$

где

$$d(x)=\left\{\Gamma(1+\beta)\,\Gamma(1-\beta)\left[\mu(x-c)^{-\beta}-x^{-\beta}\right]\right\}^{-1},$$

$$F_1(x)=d(x)\left\{\Gamma(1+\beta)\,D_{cx}^{-\beta}\rho'(x)+\frac{1}{2}\,\frac{d}{dx}\,\int\limits_0^c\psi'\left(\frac{t}{2}\right)(x-t)^{\beta}dt\right\} \tag{22}$$

Положив $\xi=0$ и $\eta=x$ в (13) с учетом (5), получим

$$\gamma_1\nu^-(x)=\frac{1}{2\cos\pi\beta}T(x)-\frac{x^{\beta}}{2\Gamma(1-\beta)}D_{0x}^{-\beta}\psi'\left(\frac{x}{2}\right),\quad 0<x<c. \tag{23}$$

Переходя к пределу при $y\to+0$ в уравнении (1) с учетом условия

(4), (5),(6) получим

$$\tau''(x) = x^p \nu^+(x), \quad (x,0) \in J_1, \tag{24_1}$$

$$\tau(0) = \varphi_1(0), \quad \tau(c) = \overline{\psi} \equiv [\psi(c/2) - \rho(c)]/\mu, \tag{25_1}$$

$$\tau''(x) = x^p \nu^+(x), \quad (x,0) \in J_2, \tag{24_2}$$

$$\tau(c) = \overline{\psi}, \quad \tau(1) = \varphi_2(0). \tag{25_2}$$

Решая задачу (24_1), (25_1) и (24_2), (25_2) соответственно получим функциональное соотношение между $\tau(x)$ и $\nu^+(x)$, перенесенное из области D_1 на J_1 и J_2 :

$$\tau(x) = \int\limits_0^c G_1(x,t)\, t^p \nu^+(t) dt + \Phi_1(x), \quad (x,0) \in \overline{J_1} \tag{26_1}$$

и

$$\tau(x) = \int\limits_c^1 G_2(x,t)\, t^p \nu^+(t) dt + \Phi_2(x), (x,0) \in \overline{J_2}, \tag{26_2}$$

где

$$\Phi_1(x) = \varphi_1(0) + x\left[\overline{\psi} - \varphi_1(0)\right]/c, \tag{27_1}$$

$$\Phi_2(x) = \overline{\psi} + (x-c)\left[\varphi_2(0) - \overline{\psi}\right]/(1-c), \tag{27_2}$$

$$G_1(x,t) = \begin{cases} (t-c)\,x/c, & 0 \leqslant x \leqslant t, \\ (x-c)\,t/c, & t \leqslant x \leqslant c, \end{cases} \tag{28_1}$$

$$G_2(x,t) = \begin{cases} (x-c)(t-1)/(1-c), & c \leqslant x \leqslant t, \\ (t-c)(x-1)/(1-c), & t \leqslant x \leqslant 1. \end{cases} \tag{28_2}$$

Переходим к доказательству единственности решения задачи AT.

Теорема 1. Если выполнены условия (2),(9), то в области D решение задачи AT единственно.

При доказательстве теоремы 1 важную роль играет следующая лемма.

Лемма. Если выполнены условия (2), (9), то решение $u(x,y)$ задачи AT при $\psi(x) \equiv \rho(x) \equiv q(x) \equiv 0$, свой положительный максимум и отрицательный минимум в замкнутой области $\overline{D_1}$ достигает лишь на $\overline{AA_0} \cup \overline{BB_0}$.

Доказательство леммы. В силу принципа экстремума для параболических уравнений [8],[9],[10] решение $u(x,y)$ уравнения (1) внутри области D_1 не может достигать своего положительного максимума и отрицательного минимума. Покажем, что решение $u(x,y)$ уравнения (1) не достигает своего положительного максимума (отрицательного минимума) на интервалах J_j $(j=1,2)$ и в точке $E(c,0)$. Предположим обратное. Пусть $u\,(x,y)$ в некоторой точке $Q\,(x_0,0)\in J_1$ достигает свой положительный максимум (отрицательный минимум).

Тогда равенство (23) при $\psi\,(x)\equiv 0$ принимает вид

$$\gamma_1\,\nu^-\,(x)=T\,(x)/2\cos\pi\beta,\quad 0<x<c, \tag{29}$$

В силу (2), (7), (9), (12) с учетом неравенство [5, лемма 2]:

$$T\,(x_0)<0\quad (T\,(x_0)>0)\,,\quad x_0\in(0,1) \tag{30}$$

из (29) заключаем, что в точке $Q(x_0,0)$ положительного максимума (отрицательного минимума)

$$\nu^+\,(x_0)>0\quad \left(\nu^+\,(x_0)<0\right). \tag{31}$$

С другой стороны, в точке $Q\,(x_0,0)$ с учетом $\tau''\,(x_0)<0$ $[\tau''\,(x_0)>0]$ из (24_1) получим $\nu^+\,(x_0)<0$ $[\nu^+\,(x_0)>0]$. Это неравенство противоречит неравенству (31).

Таким образом, $u\,(x,y)$ не достигает своего положительного максимума (отрицательного минимума) на интервале J_1 .

Аналогично принимая во внимание (2), (7), (9), (12), (30) из (21) при $\psi\,(x)\equiv\rho\,(x)\equiv q\,(x)\equiv 0$, заключаем, что $u\,(x,y)$ не достигает своего положительного максимума (отрицательного минимума) на интервале J_2.

В точке $E(c,0)$ из (5), (6) и (25_1) при $\psi\,(x)\equiv 0$, $\rho\,(x)\equiv 0$ имеем $u(c,0)=0$. Значит $u(x,y)$ не достигает своего экстремума в точке $E(c,0)$.

Лемма доказана.

Переходим к доказательству теоремы 1. На основании леммы с учетом (4) при $\varphi_1(y)\equiv 0,\quad \varphi_2(y)\equiv 0$, имеем $u(x,y)\equiv 0$ в $\overline{D_1}$. В силу единственности решения задачи Коши-Гурса в области D_2 для уравнения (1) получаем, что $u(x,y)\equiv 0$ в $\overline{D_2}$. Отсюда следует, что $u(x,y)\equiv 0$ в $\overline{D}$. Тем самым, решение задачи AT единственно.

Теорема 1 доказана.

III. Существование решения задачи AT.

Теорема 2. Если выполнены условия (2), (8), (10) и (11), то в области D решение задачи AT существует.

Доказательство теоремы 2. Из (21) после некоторых вычисления получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода относительно $T(x)$:

$$T(x)+\int\limits_{0}^{c}K_1(x,t)T(t)dt=F_2(x), \tag{32}$$

где

$$F_2(x)=\gamma_3\,\nu^-(x)-2cos\,\pi\,\beta\,F_1(x),\quad \gamma_3=2\gamma_1 cos\,\pi\,\beta, \tag{33}$$

$$K_1\,(x,t)=\frac{2\mu\,\beta\,cos\,\pi\,\beta\;(x-c)^{\beta}(c-t)^{-2\beta-1}}{\Gamma\,(1+\beta)\left[\mu(x-c)^{-\beta}-(1+x)^{-\beta}\right]}\cdot\frac{c-t}{x-t} \tag{34}$$

и допускает оценку

$$|K_1\,(x,t)|\leqslant const(x-c)^{\beta}(c-t)^{-2\beta-1}. \tag{35}$$

А правая часть уравнения (32) $F_2(x)$ непрерывна в интервале $(c,1)$ и интегрируема на $[c,\ 1]$.

В силу (35) уравнение (32) является интегральным уравнением Фредгольма второго рода со слабой особенностью.

Из постановки задачи AT с учетом (34) и свойств функции $F_2(x)$ следует, что решение уравнения (32) надо искать в классе функции непрерывных в $(c,\ 1)$ и интегрируемых на $[c,\ 1]$.

Разрешимость интегрального уравнения Фредгольма второго рода (32) вытекает из единственности решения задачи AT и дается формулой

$$T(x)=\gamma_3\,\nu^-(x)-\gamma_3\int\limits_{0}^{c}K_1^*(x,t)\;\nu^-(t)\,dt+F_3(x), \tag{36}$$

где

$$F_3(x)=2cos\,\pi\,\beta\left[\int\limits_{0}^{c}K_1^*(x,t)\;F_1(t)\,dt-F_1(x)\right], \tag{37}$$

а $K_1^*(x,t)$ - резольвента ядра $K_1(x,t)$.

В силу (16) из (36) имеем

$$\frac{1}{\Gamma\left(1-2\beta\right)} D_{0x}^{1-2\beta}\tau(x)=\gamma_3\nu^-\left(x\right)-\gamma_3\int\limits_0^c K_1^*(x,t)\,\nu^-(t)\,dt+F_3(x),\ c<x<1. \tag{38}$$

Аналогично в силу (16) из (23) получим

$$\frac{1}{\Gamma\left(1-2\beta\right)} D_{0x}^{1-2\beta}\tau(x)=\gamma_3\nu^-\left(x\right)+F_4\left(x\right),\quad 0<x<c, \tag{39}$$

$$F_4\left(x\right)=\frac{\cos\pi\beta\ x^\beta}{\Gamma\left(1-\beta\right)} D_{0x}^{-\beta}\psi'\left(\frac{x}{2}\right). \tag{40}$$

Исключив $\tau(x)$ из соотношений из (38), (39) и (26) с учетом (7) имеем

$$\frac{1}{\Gamma\left(1-2\beta\right)} D_{0x}^{1-2\beta}\left[\int\limits_0^c G_1\left(x,t\right)t^p\nu^+(t)dt+\Phi_1(x)\right]=$$
$$=\gamma_3\left[p(x)\nu^+\left(x\right)+q(x)\right]+F_4\left(x\right),\qquad 0<x<c, \tag{41}$$

$$\frac{1}{\Gamma\left(1-2\beta\right)} D_{0x}^{1-2\beta}\left[\int\limits_c^1 G_2\left(x,t\right)t^p\nu^+(t)dt+\Phi_2(x)\right]=\gamma_3 p(x)\nu^+\left(x\right)+$$

$$+\gamma_3 q(x)-\gamma_3\int\limits_0^c K_1^*(x,t)\ \left[p(t)\nu^+\left(t\right)+q(t)\right]\,dt+F_3(x),\quad c<x<1. \tag{42}$$

В силу (28_1), (28_2) с учетом определения оператора интегро-дифференцирования дробного порядка [1: (4.1), (4.6)], а также используя, свойства Бета и гипергеометрической функций [1: (1.7), (2.10), (2.11), (2.20)] из (41) и (42) получим интегральные уравнения относительно $\nu^+\left(x\right)$:

$$\nu^+\left(x\right)-\int\limits_0^c P\left(x,t\right)\nu^+\left(t\right)dt=F_5\left(x\right),\quad 0<x<c, \tag{43}$$

$$\nu^{+}(x)-\int\limits_{c}^{1}Q(x,t)\,\nu^{+}(t)\,dt=F_6(x)+F_7\left(x,\nu^{+}\right),\qquad c<x<1, \tag{44}$$

где

$$\gamma_4=1/\Gamma(1-2\beta)\,\Gamma(1+2\beta),$$

$$F_5(x)=\frac{D_{0x}^{1-2\beta}\Phi_1(x)}{\gamma_3\Gamma(1-2\beta)\,p(x)}-\frac{q(x)}{p(x)}-\frac{F_4(x)}{\gamma_3 p(x)}, \tag{45}$$

$$F_6(x)=\frac{D_{0x}^{1-2\beta}\Phi_2(x)}{\gamma_3\Gamma(1-2\beta)\,p(x)}-\frac{F_3(x)}{\gamma_3 p(x)}-\frac{q(x)}{p(x)}+\int\limits_{0}^{c}\frac{K_2^{*}(x,t)q(t)}{p(x)}\,dt, \tag{46}$$

$$F_7\left(x,\nu^{+}\right)=\int\limits_{0}^{c}Q_1(x,t)\nu^{+}(t)dt,$$

$$P(x,t)=\begin{cases}\gamma_4P_1(x,t)/\gamma_3p(x), & 0\leqslant t\leqslant x,\\ \gamma_4P_2(x,t)/\gamma_3p(x), & x\leqslant t\leqslant c,\end{cases} \tag{47}$$

$$P_1(x,t)=\frac{1}{c}\,t^{p+1}(x-t)^{2\beta}+\frac{2\beta}{c}x^{2\beta}(t-c)\,t^{p}\frac{t}{x}\cdot F\left(1,\ -2\beta,\ 2;\ \frac{t}{x}\right)+$$

$$+\frac{\beta}{c}(t-c)\,t^{p}(x-t)^{2\beta}\left(\frac{t}{x}\right)^{2}\cdot F\left(1,\ 2+2\beta,\ 3;\ \frac{t}{x}\right),$$

$$P_2(x,t)=x^{2\beta}(t-c)\,t^{p}/c,$$

$$Q_1(x,t)=\frac{\gamma_4Q_{11}(x,t)}{\gamma_3p(x)}+\frac{K_1^{*}(x,t)p(t)}{p(x)},$$

$$Q(x,t)=\begin{cases}\gamma_4Q_{12}(x,t), & c\leqslant t\leqslant 1,\\ \gamma_4Q_{13}(x,t), & c\leqslant t\leqslant x,\\ \gamma_4Q_{14}(x,t), & x\leqslant t\leqslant 1,\end{cases} \tag{48}$$

$$Q_{11}(x,t)=2\beta x^{2\beta}t^{p}\frac{t}{x}+2\beta(x-t)^{2\beta}\frac{t}{x}F\left(1,\ 1+2\beta,\ 2;\ \frac{t}{x}\right)t^{p},$$

$$Q_{12}(x,t)=2\beta x^{2\beta}\frac{c}{x}\frac{1-t}{1-c}t^{p},\qquad Q_{14}(x,t)=-\frac{1-t}{1-c}t^{p}x^{2\beta},$$

$$Q_{13}(x,t)=\frac{t-c}{1-c}(x-t)^{2\beta}t^{p}-2\beta\frac{1-t}{1-c}(x-t)^{2\beta}\frac{t}{x}F\left(1,\ 1+2\beta,\ 2;\ \frac{t}{x}\right)t^{p}.$$

Применяя оценку[11.(1.35)]:

$$F\left(a,b,c,z\right)=\begin{cases} const & c-a-b>0, \quad 0\leqslant z\leqslant 1,\\ const(1-z)^{c-a-b} & c-a-b<0, \quad 0<z<1,\\ const\left[1+l\left(1-z\right)\right] & c-a-b=0, \quad 0<z<1\end{cases}$$

с учетом (2), (11), (35), из (47) и (48) получим оценки

$$\left|P\left(x,t\right)\right|\leqslant\begin{cases} const(x-t)^{2\beta}, & 0\leqslant t\leqslant x,\\ const\ t^{2\beta}, & x\leqslant t\leqslant c,\end{cases} \tag{49}$$

$$\left|Q\left(x,t\right)\right|\leqslant\begin{cases} const\left(x-t\right)^{2\beta},\ 0\leqslant t\leqslant x,\\ const\cdot x^{2\beta},\ x\leqslant t\leqslant 1,\\ const\ x^{2\beta},\ c\leqslant t\leqslant 1.\end{cases} \tag{50}$$

$$\left|Q_1\left(x,t\right)\right|\leqslant const\left(x-c\right)^{\beta}\left(c-t\right)^{-2\beta-1},\ 0\leqslant t\leqslant c.$$

Из (49) и (50) следует, что уравнения (43) и (44) являются интегральными уравнениями Фредгольма второго рода со слабой особенностью.

В силу (2), (8), (10), (11) из (45) и (46) с учетом (22), (27_1), (27_2), (33), (37), (40) заключаем, что:

1) функция $F_5\left(x\right)$ непрерывна в $\left(0,c\right)$ и интегрируема на $\left[0,c\right]$, причем функция $F_5\left(x\right)$ при $x\to 0$ обращается в бесконечность порядка меньше -2β;

2) функция $F_6\left(x\right)$ непрерывна в $\left(c,1\right)$ и интегрируема на $\left[c,1\right]$, причем функция $F_6\left(x\right)$ при $x\to c$ обращается в бесконечность порядка меньше -2β.

Разрешимость интегрального уравнения Фредгольма второго рода (43) и (44)(в силу эквивалентности его задаче AT) вытекает из единственности решения задачи AT и соответственно дается формулой[12]:

$$1)\quad \nu^{+}\left(x\right)=\int\limits_0^c P^{*}\left(x,t\right)F_5\left(t\right)dt+F_5\left(x\right),\quad 0<x<c \tag{51}$$

и принадлежит классу, $\nu^{+}\left(x\right)\in C\left(0,c\right)\cap L_1\left[0,c\right]$, функция $\nu^{+}\left(x\right)$ при

$x \to 0$ обращается в бесконечность порядка меньше -2β;

$$2) \quad \nu^{+}(x) = \int_{c}^{1} Q^{*}(x,t)\, F_6(t)\, dt + F_6(x) + \int_{c}^{1} Q^{*}(x,t)\, dt \times$$

$$\times \int_{0}^{c} Q_1(t,z) \left[F_5(z) + \int_{0}^{c} P^{*}(z,s)\, F_5(s)\, ds \right] dz, \quad c < x < 1 \qquad (52)$$

и принадлежит классу, $\nu^{+}(x) \in C(c,1) \cap L_1[c,1]$, причем $\nu^{+}(x)$ функция при $x \to c$ обращается в бесконечность порядка меньше -2β. Здесь $P^{*}(x,t)$ и $Q^{*}(x,t)$ - резольвента ядра $P(x,t)$ и $Q(x,t)$ соответственно.

Подставляя (51) и (52) в (26_1) и (26_2) соответственно определим функцию $\tau(x)$ из класса $\tau(x) \in C^1[0,c] \cap L_1[0,c]$ и $\tau(x) \in C^1[c,1] \cap L_1[c,1]$. Тогда решение задачи AT можно восстановить в области D_1 как решение первой краевой задачи [9] для уравнения (1), а в области D_2 как решение задачи Коши-Гурса для уравнения (1).

Регулярная разрешимость первой краевой задачи следует из работ С.А. Терсенова [9] и Б. Исломова, С. Акбаровой [10]. Однозначная разрешимость задачи Коши - Гурса в D_2 , вытекает из работ М.М.Смирнова[7] и Н. Б.Исламова [5].

Теорема 2 доказана.

Литература

1. Смирнов М.М. //Уравнения смешанного типа. -Москва: "Высшая школа". -1985. -304с.
2. Исломов Б., Жумоев Б. Аналог задачи Трикоми для вырождающегося параболо- гиперболического уравнения второго рода.// Международный Российско-Болгарский симпозиум "Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики". -Россия. -Нальчик-Хабез. -2010. -С. 106-108.
3. Жумоев Б. Нелокальная краевая задача для уравнения параболо - гиперболического типа второго рода, вырождающегося внутри области. //"Узбекский мат. журнал". -2012. -№1. -С. 38-46.
4. Салахитдинов М.С., Мирсабуров М. Нелокальные задачи для уравнения смешанного типа с сингулярными коэффициентами. -Ташкент. -Университет. -2005. -223с.
5. Исламов Н. Б. Нелокальная краевая задача для уравнения параболо-гиперболического типа второго рода. // Меж. конф. молодых ученых

"Математическое моделирование фрактальных процессов, родственные проблемы анализа и информатики ". -Россия. -Нальчик. -2011.-С. 122-125.

6. Исламов Н. Б. Об одной нелокальной краевой задаче для уравнения эллиптико - гиперболического типа второго рода. // "Узбек. мат.журнал". -2012. -№4. -С. 38-50.
7. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. -М.: Наука. -1970. -296 с.
8. Джураев Н. Задача Трикоми для смешанного параболо - гиперболического уравнения с двумя линиями вырождения второго рода. // "Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук". -1989. -№2. -С.19-23.
9. Терсенов С.А. Введение в теорию уравнения вырождающегося на границе. -Новосибирск НГУ. -1973. -144 с.
10. Исломов Б., Акбарова С. Краевые задачи для уравнения параболо- гиперболического типа с двумя линиями и различными порядками вырождения. // Тез. докл. всесоюз. конф. "Дифференциалные уравнения и оптимальное управление". -Ашхабад. -1990. -С.65-66.
11. Салахитдинов М.С., Исломов Б. Уравнения смешанного типа с двумя линями вырождения. -Ташкент. -МУМТОЗ СУЗ. -2009. -264 с.
12. Михлин С.Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. -М.: Физматгиз. -1959. -232 с.

Ташкентский Государственный
Экономический Университет

Uzbek Mathematical
Journal, 2014,№, pp.75-89

УДК 517. 956.6

О задаче Трикоми- Франкля для вырождающегося уравнения смешанного типа.

Очилова Н.К.

Ushbu maqolada, buzilish chizig‘iga ega bo‘lgan aralash tipdagi tenglama uchun Frankl masalasiga o‘xshash masala yechimining mavjudligi va yagonaligi isbotlangan.

In this paper, the existence and the uniqueness of solution of the Frankl type boundary value problem for degenerating equation of the mixed type are proved.

I. Постановка задачи TF. Рассмотрим уравнение

$$0=\begin{cases} y^{m_0}u_{xx}-x^{n_0}u_y & x>0, \quad y>0, \\ u_{xx}-(-x)^m u_{yy} & x<0, \quad y>0, \\ (-y)^n u_{xx}-u_{yy} & x>0, \quad y<0, \qquad n,\ m,\ n_0,\ m_0>0, \end{cases} \tag{1}$$

в области D, ограниченной при $x>0$, $y>0$ отрезками AB, BB_0, B_0A_0, A_0A прямых $y=0$, $x=1$, $x=0$, $y=1$ и при $x>0$, $y<0$ $(x<0, \ \ y>0)$ ограниченной отрезком прямой $AC_2=\{(x,y): \ x=0, \ -1\le y\le 0\}$, $(AC_1=\{(x,y): \ -1\le x\le 0, \ y=0\})$ и характеристикой

$$BC_2: \quad x+\frac{1}{q}(-y)^q=1, \qquad\qquad (A_0C_1: \quad y+\frac{1}{p}(-x)^p=1)$$

уравнения (1), где $2p_0=m_0+2$, $2q_0=n_0+2$, $2p=m+2$, $2q=n+2$.

Введем обозначения: $I_1=\{(x,y): \ x=0, \ 0<y<1\}$.

$$I_2=\{(x,y): \ 0<x<1 \ y=0\}, \ D_0=D\cap\{x>0\}\cap\{y>0\},$$

$$D_1=D\cap\{x<0\}\cap\{y>0\}, \ D_2=D\cap\{y<0\}\cap\{x>0\},$$

$$D^*=D_0\cup D_{11}\cup D_{21}\cup I_1\cup I_2, \ \ D_{21}=D_2\cap\left\{x-\frac{1}{q}(-y)^q>0\right\}$$

$$D_{22}=D_2\cap\left\{x-\frac{1}{q}(-y)^q<0\right\}, \ D_{11}=D_1\cap\left\{y-\frac{1}{p}(-x)^p>0\right\},$$

$$D_{12}=D_1\cap\left\{y-\frac{1}{p}(-x)^p<0\right\},\quad \Delta_1=D_0\cup D_{11}\cup I_1\,,\quad \Delta_2=D_0\cup D_{21}\cup I_2,$$

$$\alpha_0=\frac{n_0+1}{n_0+2},\quad 2\alpha=\frac{n}{n+2},\quad 2\beta=\frac{m}{m+2},$$

причем

$$0<2\beta<\alpha_0<1,\quad 0<\alpha<\frac{1}{2},\quad m_0<n_0+1. \tag{2}$$

Через точку $E_2\,(E_1)$ обозначим точку пересечения характеристик $y=-(qx)^{\frac{1}{q}}$ и $x+\frac{1}{q}(-y)^q=1,$ $(y=-(px)^{\frac{1}{p}}$ и $y+\frac{1}{p}(-x)^p=1).$

Задача TF. Требуется определить функцию $u(x,y)$, обладающую следующими свойствами:
1) $u(x,y)\in C(\overline{D})\cap C^{2,1}_{x,y}(D_0)\cap C^2(D_{1j}\cup D_{2j}),\ \ (j=1,\,2);$
2) $u(x,y)$ удовлетворяет уравнению (1) в областях D_0 и $D_{1j},\ D_{2j},$ $(j=1,\,2);$
3) $u_x(0,y)\in C(\Delta_1)$, причем $u_x(+0,y)$ может иметь особенность порядка меньше $(m_0+1)(1-\alpha_0)$ при $y\to 0$ и ограничена при $y\to 1$;
4) $y^{-m_0}u_y\in C(D_0\cup I_2)$, и $u_y\in C(D_2\cup I_2)$ причем на AB выполняется условие склеивания:

$$\lim_{y\to+0}y^{-m_0}u_y(x,y)=\lim_{y\to-0}u_y(x,y)\ \ (x,0)\in I_2; \tag{3}$$

5) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям:

$$u(x,y)|_{BB_0}=\varphi_0(y),\quad 0\le y\le 1, \tag{4}$$

$$u(x,y)|_{BE_2}=\varphi(x),\quad \frac{1}{2}\le x\le 1, \tag{5}$$

$$u(x,y)|_{A_0E_1}=\psi(y),\quad \frac{1}{2}\le y\le 1, \tag{6}$$

$$u(-h_2x,0)=\lambda_1u(+x,0),\quad 0\le x\le 1, \tag{7}$$

$$u(0,-h_1y)=\lambda_2u(0,y),\quad 0\le y\le 1, \tag{8}$$

где $\lambda_j=const,$ $(\lambda_j\ne 1)$ и $\varphi_0(y),\ \varphi(x),\ \psi(y)$ - заданные функции, причем

$$\varphi_0(0)=\,\varphi(1), \tag{9}$$

$$\varphi_0(y)\in C\,[0,1]\cap C^1(0,1), \tag{10}$$

$$\varphi(x)\in C^3\left[\frac{1}{2},1\right],\qquad \psi(y)\in C^3\left[\frac{1}{2},1\right]. \tag{11}$$

II. Основное функциональное соотношение. Для доказательства единственности и существования решения задачи TF важную роль играют функциональные соотношения между $\tau_i(t)$ и $\nu_i(t)$, принесенные на I_i из D_i $(i=1,2)$ и D_0 .

Решение задачи Коши, удовлетворяющее условиям $u(0,y)=\tau_1^-(y)$, $(0,y)\in \overline{I}_1$ и $u_x(0,y)=\nu_1^-(y)$, $(0,y)\in I_1$ для уравнения (1) в области D_{11} дается формулой [1] :

$$u(x,y)=\gamma_1\int\limits_0^1\tau_1^-\left[y+\tfrac{1}{p}(-x)^p\cdot(2z-1)\right]\,(1-z)^{\beta-1}z^{\beta-1}dz+$$

$$+\gamma_2\left(\frac{4}{m+2}\right)^{1-2\beta}x\int\limits_0^1\nu_1^-\left[y+\tfrac{1}{p}(-x)^p\cdot(2z-1)\right]\,(1-z)^{-\beta}z^{-\beta}dz, \tag{12}$$

где $\gamma_1=\frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)}$, $\gamma_2=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{m+2}\right)^{2\beta}\frac{\Gamma(1-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)}$.

В силу (6) из (12), получим

$$\psi\left(\frac{y+1}{2}\right)=2\gamma_1(\beta)(1-y)^{1-2\beta}D_{y1}^{-\beta}(1-y)^{\beta-1}\tau_1^-(y)-$$

$$-2\gamma_2(1-\beta)D_{y1}^{\beta-1}(1-y)^{-\beta}\nu_1^-(y), \tag{13}$$

где $D_{y1}^{-\beta}[\cdot]$ - интегральный оператор дробного порядка $\beta(\beta>0)$ [2].

Применяя дифференциальные операторы $D_{y1}^{1-\beta}$ к обеим частям равенства (13), с учетом

$$D_{y1}^{1-\beta}(1-y)^{1-2\beta}D_{y1}^{-\beta}(1-y)^{\beta-1}\tau_1^-(y)=(1-y)^{-\beta}D_{y1}^{1-2\beta}\tau_1^-(y),$$

$$D_{y1}^{1-\beta}D_{y1}^{\beta-1}(1-y)^{-\beta}\nu_1^-(y)=(1-y)^{-\beta}\nu_1^-(y)$$

получим функциональное соотношение между $\tau_1^-(y)$ и $\nu_1^-(y)$ на I_1 из

D_{11} :

$$\nu_1^-(y) = \frac{\gamma_1 \Gamma(\beta)}{\gamma_2 \Gamma(1-\beta)} D_{y1}^{1-2\beta} \tau_1^-(y) - \frac{(1-y)^\beta}{2\gamma_2 \Gamma(1-\beta)} D_{y1}^{1-\beta} \widetilde{\psi}(y), \;\; 0 < y < 1, \tag{14}$$

где $\quad \widetilde{\psi}(y) = \psi\left(\frac{y+1}{2}.\right)$

Аналогично, как выше, используя решение задачи Коши для уравнения (1) в области D_{21} с начальными данными

$$u(x,0) = \tau_2^-(x), \qquad (x,0) \in \overline{I}_2, \quad u_y(x,0) = \nu_2^-(x), \qquad (x,0) \in I_2, \tag{15}$$

с учетом (5) получим функциональное соотношение между $\tau_2^-(x)$ и $\nu_2^-(x)$ на I_2 из D_{21} :

$$\nu_2^-(x) = \frac{\gamma_3 \Gamma(\alpha)}{\gamma_4 \Gamma(1-\alpha)} D_{x1}^{1-2\alpha} \tau_2^-(x) - \frac{(1-x)^\alpha}{2\gamma_4 \Gamma(1-\alpha)} D_{x1}^{1-\alpha} \widetilde{\varphi}(x), \;\; 0 < x < 1, \tag{16}$$

где $\widetilde{\varphi}(x) = \varphi\left(\frac{x+1}{2}\right)$.

Решение первой краевой задачи с условиями (4),

$$\tau_1^+(y) = u(+0,y), \quad 0 \le y \le 1, \quad \tau_2^+(x) = u(x,+0), \quad 0 \le x \le 1 \tag{17}$$

для уравнения (1) в области D_0 единственно и представимо в виде [3, с.4-13]:

$$u(x,y) = \int\limits_0^1 G_1(x,\xi,y;\alpha_0) \tau_2^+(\xi) \xi^{n_0} d\xi +$$

$$+ y^{-m_0} \frac{\partial}{\partial y} \int\limits_0^y G^{(1)}(x, y-t; \alpha_0) \tau_1^+(t) t^{m_0} dt + + y^{-m_0} \frac{\partial}{\partial y} \int\limits_0^y G^{(2)}(x, y-t; \alpha_0) \times$$

$$\times \varphi_0(t) t^{m_0} dt, \tag{18}$$

здесь

$$G^{(1)}(x,y;\alpha_0) = (1-\alpha_0)^{2(1-\alpha_0)} x - \int\limits_0^1 G_1(x,\xi,y;\alpha_0) \left[1 - (1-\alpha_0)^{2(1-\alpha_0)} \xi\right] \xi^{n_0} d\xi,$$

$$G^{(2)}(x,y;\alpha_0)=(1-\alpha_0)^{2(1-\alpha_0)}x-\int\limits_0^1 G_1(x,\xi,y;\alpha_0)(1-\alpha_0)^{2(1-\alpha_0)}\xi^{n_0}d\xi,$$

а $G_1(x,\xi,y;\alpha_0)$ – функция Грина первой краевой задачи для уравнения (1) в области D_0 имеет вид

$$G_1(x,\xi,y;\alpha_0)=\sum_{k=o}^{\infty}e^{-\frac{\lambda_k^2 y^{m_0+1}}{4(m_0+1)}}(1-\alpha_0)\sqrt{x}\xi\cdot$$

$$\cdot\frac{J_{1-\alpha_0}\left(\lambda_k(1-\alpha_0)\left(\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{1-\alpha_0}}\right)J_{1-\alpha_0}\left(\lambda_k(1-\alpha_0)\left(\sqrt{\xi}\right)^{\frac{1}{1-\alpha_0}}\right)}{J_{2-\alpha_0}^2\lambda_k},$$

$J_\nu(z)=\sum\limits_{k=o}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{z}{k}\right)^{\nu+2k}}{k!(k+\nu+1)}$ - функция Бесселя первого рода, λ_k - положительные корни уравнения $J_{1-\alpha_0}(\lambda_k)=0, \quad k=0,\,1,\,2,\,....$

Дифференцируя (18) по x и переходя к пределу при $x\to 0$, получим функциональное соотношение между $\tau_1^+(y)$ и $\nu_1^+(y)$, принесенное на I_1 из области D_0:

$$\nu_1^+(y)=y^{-m_0}\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_0^y z(y-t)\tau_1^+(t)t^{m_0}dt+F\left(y,\tau_2^+\right), \tag{19}$$

где

$$\nu_1^+(y)=\lim_{x\to+0}u_x(x,y), \tag{20}$$

$$F(y,\tau_2^+)=\lim_{x\to 0}\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_0^1 G_1(x,\xi,y;\alpha_0)\tau_2^+(\xi)\xi^{n_0}d\xi+$$

$$+y^{-m_0}\lim_{x\to 0}\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_0^y G^{(2)}(x,y-t;\alpha_0)\varphi_0(t)t^{m_0}dt, \tag{21}$$

$$z(y-t)\equiv(1-\alpha_0)^{2\alpha_0-1}\lim_{x\to 0}\frac{\partial}{\partial x}G^{(1)}(x,y-t;\alpha_0)=$$

$$=-(1-\alpha_0)-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^{2\alpha_0}\lambda_k^{-2\alpha_0}}{\Gamma^2(1-\alpha_0)J_{1-\alpha_0}^2\lambda_k}e^{-\frac{\lambda_k^2\left(y^{m_0+1}-t^{m_0+1}\right)}{4(m_0+1)}}.$$

На основании свойств функции $J_\nu(z)$ функция $z(y-t)$ представима в виде [3, стр.12]:

$$z(y-t) = -\frac{1}{(1-\alpha_0)}\left[\frac{y^{m_0+1}}{m_0+1} - \frac{t^{m_0+1}}{m_0+1}\right]^{\alpha_0-1} + B(y-t),$$

где $B(y-t)-$ непрерывно дифференцируемая функция при $y \geq t$.

Далее из уравнения $u_{xx} - x^{n_0}y^{-m_0}u_y = 0$ при $y \to +0$ с учетом (3) получим

$$\tau_2''^{+}(x) - x^{n_0}\nu_2^+(x) = 0, \quad 0 < x < 1, \tag{22}$$

$$\tau_2^+(0) = \tau_1^-(0), \quad \tau_2^+(1) = \varphi_0(0), \tag{23}$$

где

$$\tau_2^+(x) = u(x,0), \;\; \nu_2^+(x) = \lim_{y\to+0} y^{-m_0}u_y(x,y). \tag{24}$$

Решая задачу (22), (23), получим функциональное соотношение между $\tau_2^+(x)$ и $\nu_2^+(x)$, принесенное на I_2 из области D_0 :

$$\tau_2^+(x) = \int\limits_0^1 G(x,t)t^{n_0}\nu_2^+(t)dt + f(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \tag{25}$$

здесь

$$G(x,t) = \begin{cases} t(x-1), & 0 \leq t \leq x, \\ x(t-1), & x \leq t \leq 1, \end{cases} \tag{26}$$

$$f(x) = \tau_1^-(0) + x\left[\varphi_0(0) - \tau_1^-(0)\right]. \tag{27}$$

III. Единственность решения задачи TF.

Теорема 1. Если выполнены условия (2) и $\lambda_j \neq 1, \;\; (j = 1, 2)$, то решение задачи TF единственно.

При доказательстве единственности решения задачи TF важную роль играет следующая лемма.

Лемма. Если $\varphi(x) \equiv \psi(y) \equiv 0$, то решение $u(x,y)$ задачи TF своего положительного максимума и отрицательного минимума в замкнутой области $\overline{D}_0$ достигает только на $\overline{BB_0} \cup A \cup A_0$.

Доказательство леммы. В силу принципа экстремума для параболических уравнений [3], [4] решение $u(x,y)$ уравнения (1) достигает своего положительного максимума и отрицательного минимума в замкнутой области $\overline{D}_0$ на отрезках $\overline{AA_0}\cup\overline{AB}\cup\overline{BB_0}$. Покажем, что решение $u(x,y)$ не достигает своего положительного максимума и отрицательного минимума в интервале $AB\cup AA_0$. Предположим обратное, пусть в некоторой точке $(x_{_0},0)\in AB$ функция $u(x,y)$ достигает своего положительного максимума (отрицательного минимума).

Тогда из (16) при $\varphi(x)\equiv 0$ имеем

$$\gamma_4(1-\alpha)\nu_2^-(x_0)=\gamma_3(\alpha)D_{x_01}^{1-2\alpha}\tau_2^-(x_0). \tag{28}$$

Отсюда в силу принципа экстремума для дифференциальных операторов дробного порядка [2] в точке положительного максимума (отрицательного минимума)дифференциальный оператор строго положительно (отрицательно) т.е. $D_{x_01}^{1-2\alpha}\tau_2^-(x_0)>0,\ \left(D_{x_01}^{1-2\alpha}\tau_2^-(x_0)<0\right)$.

Следовательно, в силу того,что $\gamma_3>0$, $\gamma_4>0$ и $\Gamma(\alpha)>0, \Gamma(1-\alpha)>0$ из (28), получим $\nu_2^-(x_0)>0,\quad \left(\nu_2^-(x_0)<0\right)$. Отсюда из (3) с учетом (15) получим

$$\nu_2^+(x_0)>0,\quad \left(\nu_2^+(x_0)<0\right). \tag{29}$$

Так как в точке положительного максимума (отрицательного минимума) $\tau_2''^+(x_0)<0,\ \left(\tau_2''^+(x_0)>0\right)$, из (22) получим $\nu_2^+(x_0)<0$, $\left(\nu_2^+(x_0)>0\right)$, а это неравенство противоречит неравенству (29).

Таким образом, решение $u(x,y)$ уравнения (1) не может достигать своего положительного максимума и отрицательного минимума в интервале AB .

Пусть теперь в некоторой точке $(0,y_{_0})\in AA_0$ функция $u(x,y)$ достигает свой положительный максимум (отрицательный минимум). Тогда из (16) при $\psi(y)\equiv 0$, с учетом (2) и условия 3) задача TF заключаем, что $\nu_1^+(y_0)>0,\ \left(\nu_1^+(y_0)<0\right)$. Это неравенство противоречит неравенству $\nu_1^+(y_0)<0$, $\left(\nu_1^+(y_0)>0\right)$ [см [3],[4]]. Следовательно, решение $u(x,y)$ в интервале AA_0 не достигает своего положительного максимума и отрицательного минимума.

Таким образом, $u(x,y)$ достигает своего положительного максимума и отрицательного минимума только на $\overline{BB_0}\cup A\cup A_0$ **Лемма доказана.**

Переходим к доказательству теоремы 1. В силу (7), ((8)) и с учетом $(\lambda_j\neq 1,\quad j=1,2)$ в точке $A(0,0)$ имеем

$$u(0,0)=0, \tag{30}$$

а в точке A_0, принимая во внимание $u|_{D_0} = 0$, имеем

$$u(0,1) = 0. \qquad (31)$$

В силу решения задачи Коши-Гурса с условиями $u|_{BE_2} = 0$, $u|_{AB} = 0$, $\left(u|_{A_0E} = 0, \quad u|_{AA_0} = 0\ \right)$ имеем $u(x,y) \equiv 0$ в $\overline{D_{11}} \cup \overline{D_{21}}$.

Принимая во внимание (4) при $\varphi_0(y) \equiv 0$, с учетом (30), (31) имеем

$$u(x,y) \equiv 0 \quad \text{в} \quad \overline{D_0}. \qquad (32)$$

Следовательно,

$$u(x,y) \equiv 0 \quad \text{в} \quad \overline{D^*} \qquad (33)$$

В силу (32), (33) с учетом (7) (или (8)) имеем

$$u|_{AC_2} = 0,\ \ u|_{AE_2} = 0(\ u|_{AC_1} = 0,\ \ u|_{AE_1} = 0). \qquad (34)$$

Отсюда и из решения задачи Коши-Гурса для уравнения (1) в области D_{j2} $(j = 1,2)$ с учетом (34) получим

$$u(x,y) \equiv 0 \quad \text{в} \quad \overline{D_{j2}}. \qquad (35)$$

В силу (33) и (35) имеем $u(x,y) \equiv 0$ в $\overline{D}$. Тем самым, решение задачи TF единственно. **Теорема 1 доказана.**

IV. Существование решения задачи TF.

Теорема 2. Если выполнены условия (2), (9), (10), (11), и $\lambda_j \neq 1$, то в области D решение задачи TF существует.

Доказательство теоремы 2. Исключив $\tau_2^+(x)$ из соотношений (16) и (25), с учетом (3) и условия 1) задачи TF получаем интегральное уравнение

$$\nu_2^+(x) = \int\limits_0^1 K_1(x,s)\nu_2^+(s)ds + \Phi(x), \quad 0 \le x \le 1, \qquad (36)$$

где

$$K_1(x,s) = K_{11}(x,s) + K_{12}(x,s), \qquad (37)$$

$$K_{11}(x,s) = \chi_1 \frac{d}{dx} \int\limits_x^1 s^{n_0+1}(t-x)^{2\alpha-1}(t-1)dt, \qquad (38)$$

$$K_{12}(x,s)=\chi_1\frac{d}{dx}\int\limits_x^s s^{n_0}(t-x)^{2\alpha-1}(s-1)tdt+$$

$$+\chi_1\frac{d}{dx}\int\limits_s^1 s^{n_0+1}(t-x)^{2\alpha-1}(t-1)dt, \tag{39}$$

$$\Phi(x)=\chi_1\frac{d}{dx}\int\limits_x^1 t(t-x)^{2\alpha-1}\left(\varphi_0(0)-\tau_1^-(0)\right)dt+\tau_1^-(0)-$$

$$-\chi_2\left(1-x\right)^{\alpha}\frac{d}{dx}\int\limits_x^1 (t-x)^{\alpha-1}\widetilde{\varphi}(t)dt, \tag{40}$$

здесь $\chi_1=\frac{2^{1-2\alpha}\gamma_3\Gamma(\alpha)}{\gamma_4\Gamma(2\alpha)\Gamma(1-\alpha)}$, $\chi_2=\frac{1}{2^{1+\alpha}\gamma_4\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}$.

В силу(2), (9), (10), (11) из (38), (39) и (40), соответственно, получим

$$|K_{11}(x,s)|\le c_1(1-x)^{2\alpha}, |K_{12}(x,s)|\le c_2(s-x)^{2\alpha-1}, |\Phi(x)|\le c_3\left(1-x\right)^{2\alpha-1}. \tag{41}$$

Следовательно, из (37) имеем

$$|K_1(x,s)|\le c_1(1-x)^{2\alpha}+c_2(s-x)^{2\alpha-1}. \tag{42}$$

Таким образом, в силу (41) и (42) заключаем, что интегральное уравнение (36) является интегральным уравнением Фредгольма второго рода со слабой особенностью, разрешимость которого следует из единственности решения задачи TF. Решение уравнения (36) представимо в виде [5]:

$$\nu_2^+(x)=\int\limits_0^1 R_1(x,t)\Phi(t)dt+\Phi(x) \tag{43}$$

и принадлежит классу $\nu_2^-(x)\in C^2(0,1)$, причем функция $\nu_2^-(x)$ может иметь особенность порядка меньше $1-2\alpha$ при $x\to 1$, а при $x\to 0$ ограничено, где $R_1(x,t)$ - резольвента $K_1(x,t)$.

Подставляя (43) в (25), находим

$$\tau_2^+(x)=\int\limits_0^1 t^{n_0}G(x,t)\Psi(t)dt+\Phi(x,\tau_1^-(0)),\quad 0\le x\le 1, \tag{44}$$

где

$$\Psi(t)=\Phi(t)+\int\limits_0^1 \Phi(z)\,R_1(t,z)dz. \tag{45}$$

В силу (9), (10), (11), (40) и с учетом вида функции $G(x,t)$, $\Phi(x,\tau_1^-(0))$ из (44) следует, что

$$\tau_2^+(x)\in C\,[0,1]\cap C^2\,(0,1)\,. \tag{46}$$

Применяя дифференциальный оператор $D_{y1}^{\beta}(1-y)^{2\beta-1}$ к обеим частям равенства (13), получим

$$\tau_1^-(y)=\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\frac{\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(\beta)}D_{y1}^{2\beta-1}\nu_1^-(y)+\frac{(1-y)^{1-\beta}}{2\gamma_1\Gamma(\beta)}D_{y1}^{\beta}(1-y)^{2\beta-1}\widetilde{\psi}(y), 0\le y\le 1. \tag{47}$$

Исключив $\tau_1^+(y)$ из соотношений (47), (19), с учетом условий 1), 3) задачи TF и (2) получаем интегральное уравнение

$$\nu_1^+(y)=\int\limits_0^1 K_2(y,z)\nu_1^+(z)dz+f(y),\qquad 0\le y\le 1, \tag{48}$$

где

$$K_2(y,z)=\begin{cases} K_{21}(y,z), & 0\le z\le y,\\ K_{22}(y,z), & y\le z\le 1,\end{cases} \tag{49}$$

$$K_{21}(y,z)=\chi_3 y^{-m_0}\frac{d}{dy}\int\limits_0^z (y^{m_0+1}-t^{m_0+1})^{\alpha_0-1}t^{m_0}(z-t)^{-2\beta}dt+$$

$$+\chi_3 y^{-m_0}\frac{d}{dy}\int\limits_0^z B(y-t)t^{m_0}(z-t)^{-2\beta}dt, \tag{50_1}$$

$$K_{22}(y,z)=\chi_3 y^{-m_0}\frac{d}{dy}\int\limits_0^y (y^{m_0+1}-t^{m_0+1})^{\alpha_0-1}t^{m_0}(z-t)^{-2\beta}dt+$$

$$+\chi_3 y^{-m_0}\frac{d}{dy}\int\limits_0^y B(y-t)t^{m_0}(z-t)^{-2\beta}dt, \qquad (50_2)$$

$$f(y)=\chi_4 y^{-m_0}\frac{d}{dy}\int\limits_0^y (y^{m_0+1}-t^{m_0+1})^{\alpha_0-1}t^{m_0}(1-t)^{1-\beta}\times$$

$$\times\frac{d}{dt}\int\limits_t^1 (z-t)^{-\beta}(1-z)^{2\beta-1}\widetilde{\psi}(z)dzdt+$$

$$+\chi_4 y^{-m_0}\frac{d}{dy}\int\limits_0^y B(y-t)t^{m_0}(1-t)^{1-\beta}\times$$

$$\times\frac{d}{dt}\int\limits_t^1 (z-t)^{-\beta}(1-z)^{2\beta-1}\widetilde{\psi}(z)dzdt+F(y,\tau_2^+), \qquad (51)$$

здесь $\chi_3=\frac{\gamma_2\Gamma(1-\beta)}{\gamma_1\Gamma(\beta)\Gamma(2\beta)}$, $\chi_4=\frac{1}{2\gamma_1\Gamma(\beta)\Gamma(1-\beta)}$.

Исследуем ядро и правую часть интегрального уравнения (48).

С этой целью, заменив t на $y\eta$ в (50_1), получим

$$K_{21}(y,z)=\chi_3 y^{-m_0}z^{\alpha_0(m_0+1)-2\beta-1}\frac{d}{d\sigma}K(\sigma)+$$

$$+\chi_3 y^{-m_0}\frac{d}{dy}\int\limits_0^z B(y-t)t^{m_0}(z-t)^{-2\beta}dt, \qquad (52)$$

где

$$K(\sigma)=\sigma^{\alpha_0(m_0+1)}\int\limits_0^\infty \eta^{m_0}f_1(\sigma\eta)f_2(\eta)d\eta, \qquad (53)$$

$$f_1(\sigma\eta)=(1-\sigma\eta)_+^{-2\beta}, \qquad f_2(\eta)=(1-\eta^{m_0+1})_+^{\alpha_0-1},$$

$$\sigma=\frac{y}{z}, \qquad z_+^l=\begin{cases} z^l, & z>0,\\ 0, & z\le 0.\end{cases}$$

Воспользовавшись формулами [6. стр.630(6), стр.631(4)], имеем

$$f_1(s) \leftrightarrow (1-2\beta)\left[\begin{array}{c} s \\ s+1-2\beta \end{array}\right], \qquad s<0, \tag{54}$$

$$f_2(s) \leftrightarrow \frac{1}{m_0+1}(\alpha_0)\left[\begin{array}{c} \frac{s}{m_0+1} \\ \frac{s}{m_0+1}+\alpha_0 \end{array}\right], \qquad s<0. \tag{55}$$

Далее, применив формулу [7.стр.21(1.88)]:

$$x^\alpha \int\limits_0^\infty \xi^\beta f_1(x\xi) f_2(\xi) d\xi \leftrightarrow f_1^*(s+\alpha) f_2^*(1-s-\alpha+\beta),$$

в (53) с учетом (54), (55) получим

$$K(\sigma) \leftrightarrow \frac{\Gamma(1-2\beta)}{m_0+1}\Gamma(\alpha_0)\left[\begin{array}{ll} \alpha_0(m_0+1)+s, & \frac{1}{m_0+1}(1+m_0-s)-\alpha_0 \\ \alpha_0(m_0+1)-2\beta+1+s, & \frac{1}{m_0+1}(1+m_0-s) \end{array}\right],$$

$$-\alpha_0 < \frac{s}{1+m_0} < 1-\alpha_0.$$

Отсюда, учитывая [6.c.628 (8.3.1)] , находим

$$K(\sigma) \leftrightarrow \frac{\Gamma(\alpha_0)\Gamma(1-2\beta)}{m_0+1} H_{22}^{02}\left[\sigma \left| \begin{array}{l} (1-\alpha_0(m_0+1),\, -1)\,,\, \left(\alpha_0,\, \frac{1}{m_0+1}\right) \\ (2\beta-\alpha_0(m_0+1),\, -1)\,,\, \left(0,\, \frac{1}{m_0+1}\right) \end{array}\right.\right], \tag{56}$$

где $H_{22}^{02}-$ функция Фокса [6].

Подставляя (56) в (52) и используя формулу [6.c.629 (18)] , получим

$$\frac{d}{d\sigma}K(\sigma) = \frac{m_0+1}{\Gamma(\alpha_0)\Gamma(1-2\beta)}\times$$

$$\times\frac{1}{\sigma} H_{33}^{03}\left[\sigma \left| \begin{array}{lll} (0,1), & (1-\alpha_0(m_0+1),\, -1)\,, & \left(\alpha_0,\, \frac{1}{m_0+1}\right) \\ (2\beta-\alpha_0(m_0+1),\, -1)\,, & \left(0,\, \frac{1}{m_0+1}\right),\, (1,1) & \end{array}\right.\right]. \tag{57}$$

Следовательно, в силу формулы [6.c.629 (22)] , с учетом (57) из (52) имеем

$$K_{21}(y,z)=\frac{\chi_3\left(\frac{1}{y}\right)^{m_0+1}z^{\alpha_0(m_0+1)-2\beta}\ \ k^{2\beta-\alpha_0+1}}{\Gamma(\alpha_0)\Gamma(1-2\beta)}\times$$

$$\times G_{\widetilde{p}\widetilde{q}}^{\widetilde{m}\widetilde{n}}\left(\sigma^k\left|\begin{array}{lll}\Delta(k_1,a_1), & \Delta(k_2,a_2), & \Delta(k_3,a_3),\\ \Delta(l_1,b_1), & \Delta(l_2,b_2), & \Delta(l_3,b_3),\end{array}\right.\right)+$$

$$+\chi_3 y^{-m_0}z^{m_0+1-2\beta}\int\limits_0^1 B'(y-z\mu)\mu^{m_0}(1-\mu)^{-2\beta}d\mu, \tag{58}$$

где $G_{\widetilde{p}\widetilde{q}}^{\widetilde{m}\widetilde{n}}$-функция Мейера [6], а $k-$ знаменатель числа

$$\frac{1}{m_0+1},\ \ \widetilde{n}=\widetilde{p}=\widetilde{q}=2k+2k\cdot\frac{1}{m_0+1},\quad \widetilde{m}=0.$$

$$\Delta(k_1,a_1)=0,\frac{1}{k},......,\frac{k-1}{k},$$

$$\Delta(k_2,a_2)=\frac{1-\alpha_0(m_0+1)}{\frac{1}{m_0+1}k},..........,\frac{1-\alpha_0(m_0+1)+k-1}{\frac{1}{m_0+1}k},$$

$$\Delta(k_3,a_3)=\frac{\alpha_0}{k},\quad \frac{\alpha_0+1}{k},\ ....,\frac{\alpha_0+k-1}{k},$$

$$\Delta(l_1,b_1)=\frac{2\beta-\alpha_0(m_0+1)}{\frac{1}{m_0+1}k},..........,\frac{2\beta-\alpha_0(m_0+1)+k-1}{\frac{1}{m_0+1}k},$$

$$\Delta(l_2,b_2)=0,\frac{1}{k},......,\frac{k-1}{k},\quad \Delta(l_3,b_3)=\frac{1}{k},\ \frac{2}{k},........,\frac{1+k-1}{k}.$$

Используя оценки функции Мейера [6.стр.629(32)],[7.стр.19-20(1.80)], с учетом $\widetilde{m}+\widetilde{n}-\widetilde{q}=0$ (у нас $\widetilde{m}=0$ и $\psi_{\widetilde{q}}=\alpha_0-2\beta-1<0$), из (58) имеем

$$|K_{21}(y,z)|\leq c_4\left(y^k-z^k\right)^{\alpha_0-2\beta-1},\qquad 0\leq z\leq y. \tag{59}$$

Точно так же оценивая $K_{22}(y,z)$, имеем

$$|K_{22}(y,z)|\leq c_5\left(z^k-y^k\right)^{\alpha_0-2\beta-1},\qquad y\leq z\leq 1. \tag{60}$$

Принимая во внимание (59) и (60), с учетом (50_1) и (50_2) из (49) имеем

$$|K_2(y,z)| \leq \begin{cases} c_4\left(y^k - z^k\right)^{\alpha_0-2\beta-1}, & 0 \leq z \leq y, \\ c_5\left(z^k - y^k\right)^{\alpha_0-2\beta-1}, & y \leq z \leq 1. \end{cases}$$

Следовательно,

$$|K_2(y,z)| \leq const\left|y^k - z^k\right|^{\alpha_0-2\beta-1}. \qquad (61)$$

В силу (10), (46) из (21) следует, что $\overline{F}(y,\tau_2^+) \in C^2(0,1)$, причем функция $\overline{F}(y,\tau_2^+)$ может иметь особенность порядка меньше $1-\alpha_0$ при $y \to 0$, а при $y \to 1$ ограничена[4].

Отсюда, учитывая (2), (10) из (51), имеем

$$|f(y)| \leq c_6 y^{(m_0+1)(\alpha_0-1)}. \qquad (62)$$

Следовательно, $f(y) \in C^2(0,1)$, причем $f(y)$ может иметь особенность порядка меньше $(1-\alpha_0)(m_0+1)$ при $y \to 0$, а при $y \to 1$ ограничена.

Таким образом, из (61) с учетом (2) заключаем, что интегральное уравнение (48) является интегральным уравнением Фредгольма 2- рода со слабой особенностью.

Безусловная и однозначная разрешимость интегрального уравнения (48) (в силу эквивалентности его задаче TF) следует из единственности решения задачи TF [5].

После нахождения $\nu_1^{\pm}(y)$ $\left[\nu_2^{\pm}(x)\right]$ из (48) [(36)] находим функцию $\tau_1^{\pm}(y)$ $\left[\tau_2^{\pm}(x)\right]$ из (47) [(25)] в классе $\tau_1^{\pm}(y) \in C(\overline{I_1}) \cap C^2(I_1)$ $\left[\tau_2^{\pm}(x) \in C(\overline{I_2}) \cap C^2(I_2).\right]$

Таким образом, решение задачи TF в области D_0 находится как решение первой краевой задачи (18), а в областях D_{11}, D_{12}, D_{21}, $D_{22}-$ как решение задачи Коши для уравнения (1).

Следовательно, задача TF однозначно разрешима.

Теорема 2 доказана.

Литература

1. Исломов Б., Очилова Н.К. "О краевой задаче для уравнения параболо- гиперболического типа с двумя линиями и различными порядками вырождения". "Узб. Мат. журн."2005. №- 3. - С. 42-53.

2. Смирнов М.М. "Уравнения смешанного типа". - М. Наука. - 1985.

3. Терсенов С.А. "Первая краевая задача для уравнения параболического типа сменяющимся направлением времени". - Новосибирск. - 1978. -53с.

4. Акбарова С.Х. - Краевые задачи для уравнения смешанного параболо- гиперболического и эллиптико-параболического типов с двумя линиями и различными порядками вырождения: Дисс. канд. физ.-мат. наук. - Ташкент: Им. АН РУз. - 1995.-120 стр.

5. Михлин С.Г. Интегральные уравнения. М.: Наука. - 1947. -304. с.

6. Прудников А.П., Брычков Ю.А, Марычев О.И. Интегралы и ряды. Доп. главы. - М.: Наука. - 1986. - 800 с.

7. Салахитдинов М.С., Исломов Б. Уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения. - Ташкент. - МУМТОЗ СУЗ . -2009. -264 с.

Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека

Uzbek Mathematical
Journal, 2014,№4, pp.90-98

*Посвящается
Тохтамурату Джураевичу
Джураеву*

УДК УДК 517.946

О единственности решений краевых задач для некоторых классов уравнений смешанного типа высокого порядка

Кожанов А.И.

Elliptik- parabolik yoki parabola-giperbolik yuqori tartibli aralash tipdagi tenglamalar uchun chegaraviy masalalar yangicha qo'yilishi taklif qilingan

For elliptic- parabolic or parabolic- hiperbolic mixed type equations new statements of boundary value problems a suggested

В теории уравнений смешанного типа к настоящему времени представляются весьма хорошо исследованными вопросы разрешимости тех или иных краевых задач для уравнений второго порядка, для уравнений третьего порядка (уравнений смешанно-составного типа); отметим здесь прежде всего монографии [1–7], что же касается журнальных статей хотя бы последнего года, то их так много, что перечислить их в кратком обзоре невозможно. Значительно менее изученными представляются вопросы разрешимости краевых задач для уравнений смешанного типа произвольного порядка. Здесь можно отметить работы В.Н. Врагова и И.Е. Егорова [8–10], в которых изучались уравнения смешанного типа высокого порядка с гладкими коэффициентами в случае вырождения по временной переменной. И можно заметить также, что много еще вопросов о постановке и разрешимости краевых задач для уравнений смешанного типа произвольного порядка остаются нерешенными.

В настоящей работе будут рассматриваться некоторые классы уравнений смешанного типа высокого порядка — именно, будут рассматриваться уравнения, которые условно можно назвать уравнениями квазиэллиптико-квазигиперболического типов и квазипараболо-квазигиперболического типов (по аналогии с эллиптико-гиперболическими и параболо-гиперболическими уравнениями). Для этих уравнений будут предложены постановки краевых задач, и будут доказаны теоремы единственности в классах регулярных решений. Отметим, что изучаемые уравнения имеют иной характер вырождения, нежели уравнения, рассматриваемые в [8-10], и что рассматриваемые уравнения могут, в отличие от [8-10], иметь разрывные коэффициенты. Последнее отметим особо — заметим, что в рассматриваемый класс квазиэллиптико-квазигиперболических уравнений можно включить уравнение, которое можно назвать аналогом уравнения Лаврентьева — Бицадзе.

И последнее. Уравнения, рассматриваемые ниже, имеют модельный вид. Вместе с тем легко можно распространить представленные ниже результаты и на более общие уравнения.

1. К в а з и э л л и п т и к о - к в а з и г и п е р б о л и ч е с к и е у р а в н е н и я.

Пусть Ω есть интервал $(-1,1)$ оси Ox, Q есть прямоугольник $\Omega\times(0,T)$, $0<T<+\infty$, $f(x,t)$ и $h(x)$ — заданные функции, определенные при $(x,t)\in\overline{Q}$ и $x\in\overline{\Omega}$ соответственно, причем функция $h(x)$ непрерывно дифференцируема на полуинтервалах $[-1,0)$ и $(0,1]$, при всех x из множества $[-1,0)\cup(0,1]$ функция $|h(x)|$ положительна, при $x\neq 0$ выполняется неравенство $xh(x)<0$, в точке 0 функция $h(x)$ имеет разрыв первого рода. Далее, пусть α и β есть заданные действительные числа, p есть целое положительное число, D_t^k есть производная $\frac{\partial^k}{\partial t^k}$, L есть дифференциальный оператор, действие которого на заданной функции $v(x,t)$ определяется равенством

$$Lv=(-1)^{p+1}D_t^{2p}v-\frac{\partial}{\partial x}\left(h(x)v_x\right).$$

Обозначим $Q_1=(-1,0)\times(0,T)$, $Q_2=(0,1)\times(0,T)$.

Краевая задача I: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в прямоугольниках Q_1 и Q_2 решением уравнения*

$$Lu=f(x,t) \tag{1}$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$D_t^k u(x,t)\big|_{t=0}=0,\quad k=0,1,\dots,p,\quad x\in(-1,0); \tag{2}$$

$$D_t^k u(x,t)\big|_{t=T}=0,\quad k=1,\dots,p-1,\quad x\in(-1,0); \tag{3}$$

$$D_t^k u(x,t)\big|_{t=0} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, p-1, \quad x \in (0,1); \tag{4}$$

$$D_t^k u(x,t)\big|_{t=T} = 0, \quad k = 1, \dots, p, \quad x \in (0,1); \tag{5}$$

$$u(-1,t) = u(1,t) = 0, \quad t \in (0,T); \tag{6}$$

$$u(-0,t) = \alpha u(+0,t), \quad u_x(+0,t) = \beta u_x(-0,t), \quad t \in (0,T). \tag{7}$$

При $p = 1$ уравнение (1) является эллиптико-гиперболическим уравнением, и, как уже говорилось выше, разрешимость различных краевых задач для него хорошо изучена. При $p > 1$ уравнение (1) в области Q_1 является квазигиперболическим уравнением, разрешимость некоторых краевых задач для которого изучалась в вышеназванных работах [8–10], в области же Q_2 при $p > 1$ уравнение (1) является квазиэллиптическим уравнением, информацию о разрешимости краевых задач для него см., например, [11]. Вместе с тем в составной области в случае $p > 1$ уравнения (1) ранее не рассматривались, краевая задача с условиями (2)–(7) ранее не изучалась.

Введем обозначения:

$$\overline{h}_1 = h(-0), \quad \overline{h}_2 = h(+0),$$

$$h_1(x) = \begin{cases} h(x) & \textit{при} \quad x \in [-1,0), \\ \overline{h}_1 & \textit{при} \quad x = 0, \end{cases} \qquad h_2(x) = \begin{cases} h(x) & \textit{при} \quad x \in (0,1], \\ \overline{h}_2 & \textit{при} \quad x = 0. \end{cases}$$

Определим множество функций $V_{2,2p}$:

$$V_{2,2p} = \{v(x,t) : \quad v(x,t) \in W_2^{2,2p}(Q_1), \quad v(x,t) \in W_2^{2,2p}(Q_2)\}.$$

Это множество представляет собой линейное пространство, которое легко наделить нормой:

$$\|v\|_{V_{2,2p}} = \left(\|v\|^2_{W_2^{2,p}(Q_1)} + \|v\|^2_{W_2^{2,p}(Q_2)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Очевидно, что множество $V_{2,2p}$ с этой нормой является банаховым пространством; в дальнейшем будем считать, что $V_{2,2p}$ есть определенное выше линейное пространство с указанной нормой.

Будем считать, что $\alpha\beta \neq 0$, поскольку при $\alpha = 0$ или $\beta = 0$ задача (1)–(7) представляет собой распадающуюся задачу — она распадается на две независимые задачи в прямоугольниках Q_1 и Q_2, одна из которых является краевой задачей для квазигиперболического уравнения, изученной в [8–10], другая же — хорошо изученной задачей для квазиэллиптического уравнения.

Наконец, заметим, что если функция $h(x)$ есть кусочно-постоянная на отрезке $[-1, 1]$ функция с единственной точкой разрыва (первого рода) в точке 0, то уравнение (1) можно трактовать как обобщение известного уравнения Лаврентьева — Бицадзе (соответствующего случаю $p = 1$).

Теорема 1. *Пусть выполняются условия*

$$h_1(x) \in C^1([-1, 0]), \quad h_2(x) \in C^1([0, 1]), \quad |h_1(x)| \geq h_0 > 0 \quad \textit{при} \quad x \in [-1, 0], \quad |h_2(x)| \geq h_0 > 0 \quad \textit{при} \quad x \in [0, 1]; \tag{8}$$

$$xh(x) < 0 \quad \textit{при} \quad x \in \overline{\Omega}, \quad x \neq 0, \tag{9}$$

$$\alpha\beta > 0. \tag{10}$$

Тогда краевая задача I не может иметь в пространстве $V_{2,2p}$ более одного решения.

Доказательство. Достаточно показать, что в случае $f(x, t) \equiv 0$ краевая задача I имеет в пространстве $V_{2,2p}$ лишь тождественно нулевое решение.

Положим $A = \frac{\alpha h_1}{\beta h_2}$. Рассмотрим равенство

$$\int\limits_{Q_1} Lu \cdot u_t \, dx \, dt + A \int\limits_{Q_2} Lu \cdot u_t \, dx \, dt = 0,$$

являющееся следствием уравнения (1) в случае $f(x, t) \equiv 0$. Интегрируя по частям и используя краевые условия, нетрудно данное равенство преобразовать к виду

$$\frac{1}{2} \int\limits_{-1}^{0} [D_t^p u(x, T)]^2 \, dx + \frac{1}{2} \int\limits_{-1}^{0} h(x) u_x^2(x, T) \, dx - \frac{A}{2} \int\limits_{0}^{1} [D_t^p u(x, 0)]^2 \, dx -$$

$$-\frac{A}{2} \int\limits_{0}^{1} h(x) u_x^2(x, 0) \, dx - h_1 \int\limits_{0}^{T} u_x(-0, t) u_t(-0, t) \, dt +$$

$$+Ah_2\int\limits_0^T u_x(+0,t)u_t(+0,t)\,dt. \tag{11}$$

Последние два слагаемых в полученном равенстве взаимно уничтожаются — вследствие условий (7) и выбора числа A. Поскольку же число A отрицательно (вследствие (10)), то из (11) и условий (8), (9) вытекает, что для решения $u(x,t)$ выполняются равенства

$$u(x,T) = D_t^p u(x,T) = 0, \quad x \in (-1,0), \tag{12}$$

$$u(x,T) = D_t^p u(x,0) = 0, \quad x \in (0,1). \tag{13}$$

Рассмотрим равенство

$$\int\limits_{Q_1} Lu[\gamma_1 u - tu_t]\,dx\,dt + \int\limits_{Q_2} Lu[\gamma_2 u - Atu_t]\,dx\,dt = 0,$$

вновь являющееся следствием уравнения (1) в случае $f(x,t)\equiv 0$; числа γ_1 и γ_2 в этом равенстве определяются так

$$\gamma_1 = \frac{2p-1}{2}, \quad \gamma_2 = \frac{(2p-1)A}{2}.$$

Интегрируя по частям, используя краевые условия (2)–(6), а также дополнительные условия (12) и (13), получим

$$\frac{2p-1}{2}\int\limits_{Q_1}(D_t^p u)^2\,dx\,dt + \frac{1}{2}\int\limits_{Q_1} h(x)u_x^2\,dx\,dt - \gamma_1\int\limits_{Q_1}(D_t^p u)^2\,dx\,dt+$$

$$+\gamma_1\int\limits_{Q_1} h(x)u_x^2\,dx\,dt + \frac{(2p-1)A}{2}\int\limits_{Q_2}(D_t^p u)^2\,dx\,dt + \frac{A}{2}\int\limits_{Q_2} h(x)u_x^2\,dx\,dt-$$

$$-\gamma_2\int\limits_{Q_2}(D_t^p u)^2\,dx\,dt + \gamma_2\int\limits_{Q_2} h(x)u_x^2\,dx\,dt - \gamma_1 h_1\int\limits_0^T u_x(-0,t)u(-0,t)\,dt+$$

$$+\gamma_2 h_2\int\limits_0^T u_x(+0,t)u(+0,t)\,dt + h_1\int\limits_0^T tu_x(-0,t)u_t(-0,t)\,dt-$$

$$-Ah_2 \int\limits_0^T tu_x(+0,t)u_t(+0,t)\,dt = 0,$$

или, с учетом выбора чисел A, γ_1 и γ_2:

$$p \int\limits_{Q_1} h(x)u_x^2\,dx\,dt + pA \int\limits_{Q_2} h(x)u_x^2\,dx\,dt = 0. \tag{14}$$

Поскольку функция $h(x)$ отрицательна на полуинтервале $(0,1]$, и поскольку число A отрицательно, то из (14) следует $u_x(x,t) \equiv 0$ при $(x,t) \in \overline{Q}$. Отсюда очевидным образом, следует $u(x,t) \equiv 0$ в $\overline{Q}$.

Теорема доказана.

2. Квазипараболо-квазигиперболические уравнения.

Рассмотрим сейчас случай оператора L,являющегося в прямоугольнике Q_1 квазигиперболическим оператором, в прямоугольнике же Q_2 — квазипараболическим оператором нечетного по переменной t порядка.

Пусть $c(x,t)$, $f(x,t)$ и $h(x)$ — заданные функции, определенные при $(x,t) \in \overline{Q}$ и $x \in \overline{\Omega}$ соответственно, функция $h(x)$ непрерывно дифференцируема на полуинтервалах $[-1,0)$ и $(0,1]$, в точке 0 может иметь разрыв первого рода и строго положительна на $\overline{\Omega}$. Далее, пусть p_1 и p_2 есть целые положительные числа, L_1, L_2 и L суть дифференциальные операторы, действие которых на заданной функции $v(x,t)$ определяется равенствами

$$L_1 v = (-1)^{p_1+1} D_t^{2p_1} v - \frac{\partial}{\partial x}\,(h(x)v_x) + c(x,t)v,$$

$$L_2 v = (-1)^{p_2} D_t^{2p_2+1} v - \frac{\partial}{\partial x}\,(h(x)v_x) + c(x,t)v,$$

$$Lv = \begin{cases} L_1 v, & (x,t) \in Q_1, \\ L_2 v, & (x,t) \in Q_2. \end{cases}$$

Краевая задача II: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в прямоугольниках Q_1 и Q_2 решением уравнения*

$$Lu = f(x,t) \tag{15}$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$D_t^k u(x,t)\big|_{t=0} = 0, \quad k = 0,1,\ldots,p_1, \quad x \in (-1,0); \tag{16}$$

$$D_t^k u(x,t)\big|_{t=T} = 0, \quad k = 1,\ldots,p_1 - 1, \quad x \in (-1,0); \tag{17}$$

$$D_t^k u(x,t)\big|_{t=0} = 0, \quad k = 0,1,\ldots,p_2, \quad x \in (0,1); \tag{18}$$

$$D_t^k u(x,t)\big|_{t=T} = 0, \quad k = 1,\ldots,p_2, \quad x \in (0,1); \tag{19}$$

$$u(-1,t) = u(1,t) = 0, \quad t \in (0,T); \tag{20}$$

$$u(-0,t) = \alpha u(+0,t), \quad u_x(+0,t) = \beta u_x(-0,t), \quad t \in (0,T). \tag{21}$$

Если $p_1 = 1$, $p_2 = 0$, то уравнение (15) представляет собой гиперболическое в Q_1 уравнение второго порядка, в Q_2 же уравнение (15) будет параболическим уравнением. Если $p_1 > 1$ или $p_2 > 0$, то уравнение (15) будет неклассическим уравнением, которое условно можно назвать квазипараболо-квазигиперболическим уравнением.

Определим требуемое пространство V_{2,p_1,p_2}:

$$V_{2,p_1,p_2} = \{v(x,t): \quad v(x,t) \in W_2^{2,p_1}(Q_1), \quad v(x,t) \in W_2^{2,2p_2+1}(Q_2)\};$$

норму в этом пространстве определим естественным образом

$$\|v\|_{V_{2,p_1,p_2}} = \left(\|v\|^2_{W_2^{2,p_1}(Q_1)} + \|v\|^2_{W_2^{2,2p_2+1}(Q_2)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Теорема 2. *Пусть выполняются условия*

$$h_1(x) \in C^1([-1,0]), \quad h_2(x) \in C^1([0,1]), \quad h_1(x) \geq h_0 > 0 \quad \textit{при} \quad x \in [-1,0], \quad h_2(x) \geq h_0 > 0 \quad \textit{при} \quad x \in [0,1]; \tag{22}$$

$$\exists\, T_0: \quad T_0 > T, \quad ((T_0 - t)c(x,t))_t \geq 0 \quad \textit{при} \quad (x,t) \in \overline{Q}; \tag{23}$$

$$c(x,t) \leq 0 \quad \textit{при} \quad x \in \overline{\Omega}; \tag{24}$$

$$\alpha\beta > 0. \tag{25}$$

Тогда краевая задача II не может иметь в пространстве V_{2,p_1,p_2} более одного решения.

Доказательство. Интегрируя по частям в равенстве

$$\int\limits_{Q_1} L_1 u(T_0 - t) u_t \, dx \, dt + A \int\limits_{Q_2} L_2 u(T - t) u_t \, dx \, dt = 0$$

(число A определено при доказательстве теоремы 1), используя условия (16)-(20), условия сопряжения (21), наконец, применяя условия теоремы, получим вновь, что $u_x(x,t) \equiv 0$ в $\overline{Q}$. Отсюда очевидным образом и получаем, что $u(x,t) \equiv 0$ при $f(x,t) \equiv 0$. Теорема доказана.

Сделаем несколько замечаний к доказанным теоремам:

1. Используя технику доказательства теоремы 2, нетрудно установить единственность регулярных (имеющих все производные, входящие в уравнение) решений краевой задачи с условиями типа (2), (3) или (16), (17) как в прямоугольнике Q_1, так и в прямоугольнике Q_2, для уравнений вида (15), но в случае, когда оба оператора L_1 и L_2 являются квазигиперболическими операторами разных порядков.

2. Следуя [12], можно вместо условий сопряжения (склейки) (7) или (21) рассмотреть и более общие условия.

3. Вместо задач с условиями (6) или (20) первой краевой задачи можно аналогичным образом исследовать единственность решений задач с условиями третьей краевой задачи, или же смешанной краевой задачи.

Литература

1. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. М.: Наука, 1970.

2. Салахитдинов М.С. Уравнения смешанно-составного типа. Ташкент: Фан, 1974.

3. Джураев Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно- составного типов. Ташкент: Фан, 1979.

4. Моисеев Е.И. Уравнения смешанного типа со спектральным параметром. Москва: МГУ, 1988.

5. Салахитдинов М.С., Уринов А.К. Краевые задачи для уравнений смешанного типа со спектральным параметром. Ташкент: Фан, 1997.

6. Нахушев А.М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М.: Наука, 2006.

7. Маричев О.И., Килбас А.А., Репин О.А. Краевые задачи для уравнений в частных производных с разрывными коэффициентами. Самара: Самарский гос. экономический университет, 2008.

8. Врагов В.Н. К теории краевых задач для уравнений смешанного типа. Дифференц. уравн. 1977. Т. 13, №6. С. 1098-1105.

9. Врагов В.Н. О постановке и разрешимости краевых задач для уравнений смешанно-составного типа. В кн. Математический анализ и смежные вопросы математики. Новосибирск: Наука, 1978. С. 5-13.

10. Егоров И.Е., Федоров В.Е. Неклассические уравнения математической физики высокого порядка. Новосибирск: Вычислительный центр СО АН СССР, 1995.

11. Успенский С.В., Демиденко Г.В., Перепелкин В.Г. Теоремы вложения и приложения к дифференциальным уравнениям. Новосибирск: Наука, 1984.

12. Кожанов А.И., Шарин Е.Ф. Задача сопряжения для некоторых неклассических дифференциальных уравнений высокого порядка. Украï нський математический вiсник. 2014. Т. 11, №2. С. 181-202.

Новосибирский государственный университет

Uzbek Mathematical
Journal, 2014,№4, pp.99-108

УДК 517.984.53

Некомпактное возмущение спектра мультипликаторов из одного класса

Кучаров Р.Р., Эшкабилов Ю.Х.

Maxsus ko‘rinishdagi funksiya bilan aniqlangan multiplikator xususiy integral operator bilan qo‘zg‘alganda, multiplikator muhim spektrining o‘zgarishi o‘rganilgan.

Change of essential spectrum of multiplication defined by the function in special form, when a multiplication perturbation by partial integral operator are investigated.

Пусть $\mathcal{H}$ – сепарабельное гильбертово пространство и оператор $H_0 : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ самосопряжен и имеет только существенный спектр $(\sigma(H_0) = \sigma_{ess}(H_0))$, т.е. у оператора H_0 отсутствует дискретный спектр $(\sigma_{disc}(H_0) = \emptyset)$. Допустим, что оператор H_0 возмущен самосопряженным оператором T, т.е. рассмотрим оператор $H_0 + \varepsilon T, \ \varepsilon > 0$. Основные вопросы в теории возмущения спектров состоят в следующем: 1). Как связана структура спектра оператора $H_0 + \varepsilon T$ со спектром исходного (невозмущенного) оператора H_0? 2). Каковы свойства этого спектра как функции от $\varepsilon > 0$?

Пусть H_0 – мультипликатор в $L_2(\Omega)$ $(\Omega \subset \mathbb{R}^m$ – компакт): $H_0 f(x) = u(x)f(x)$, где $u(x)$ – заданная вещественнозначная непрерывная функция на Ω, $T : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ – линейный самосопряженный компактный оператор. Оператор $H_0+\varepsilon T, \ \varepsilon > 0$, является оператором в модели Фридрихса, для которых, как известно, $\sigma_{ess}(H_0 + \varepsilon T) = \sigma(H_0)$ [1]. Кроме того, разработан ряд методов [2,3,4] для исследования существования собственного значения в дискретном спектре $\sigma_{disc}(H_0 + \varepsilon T)$ и изучения конечности (бесконечности) дискретного спектра $\sigma_{disc}(H_0 + \varepsilon T)$. Если оператор T некомпактный, то отсутствует общий способ исследования спектра возмущенного оператора $H_0 + \varepsilon T$. В работах [5,6] предложен метод для исследования спектра оператора $H_0 + \varepsilon T : L_2(\Omega_1 \times \Omega_2) \to L_2(\Omega_1 \times \Omega_2)$ $(\Omega_1 \subset \mathbb{R}^{m_1}, \ \Omega_2 \subset \mathbb{R}^{m_2}$ – непустые компактные множества), когда H_0 – мультипликатор, определяемый непрерывной функцией $k_0(x, y)$ на $\Omega_1 \times \Omega_2$ и $T = T_1 + T_2$ – линейный ограниченный самосопряженный оператор с частными интегралами в $L_2(\Omega_1 \times \Omega_2)$, т.е. T_1, T_2 –

частично интегральные операторы (ЧИО). Надо подчернуть, что ЧИО T_1 и T_2 с ненулевым ядром не являются компактными. В [5] доказано, что $\sigma_{ess}(H_0+\varepsilon T)=\sigma(H_0+\varepsilon T_1)\cup\sigma(H_0+\varepsilon T_2)$, в случае когда ядра ЧИО T_1 и T_2 есть непрерывные функции.

Рассмотрим мультипликатор H_0, заданный функцией $h_0(x,y)$, имеющей следующий вид: $h_0(x,y)=u(x)+\omega(x,y)+v(x)$, и ЧИО T_1,T_2 с ядрами, тождественно равными единице.

Пусть мультипликатор H_0 возмущен некомпактным оператором $T=\gamma_1T_1+\gamma_2T_2$, где $\gamma_1>0,\ \ \gamma_2>0$. Цель работы применить метод из [5] к исследованию структуры существенного спектра оператора $H_0-(\gamma_1T_1+\gamma_2T_2)$ и изучить существование резонанса в модели $H=H_0-(\gamma_1T_1+\gamma_2T_2)$.

Через $\sigma(\cdot)$, $\sigma_{ess}(\cdot)$ и $\sigma_{disc}(\cdot)$ обозначим спектр, существенный и дискретный спектры самосопряженных операторов, соответственно.

Число
$$E_{\min}(H)=\inf\{\lambda:\lambda\in\sigma_{ess}(H)\}$$
называется *нижней гранью* (или *нижним краем*) существенного спектра оператора H.

Пусть $\Omega_1=[0,1]^{\nu_1}\subset\mathbb{R}^{\nu_1}$ и $\Omega_2=[0,1]^{\nu_2}\subset\mathbb{R}^{\nu_2}$ $(\nu_1,\nu_2\in\mathbb{N})$. В пространстве $L_2(\Omega_1\times\Omega_2)$ рассмотрим линейный ограниченный самосопряженный оператор H вида
$$H=H_0-(\gamma_1T_1+\gamma_2T_2),\ \ \gamma_1>0,\ \ \gamma_2>0, \tag{1}$$
где H_0 – мультипликатор, заданный непрерывной вещественнозначной функцей $k_0(x,y)$, т.е. $H_0f(x,y)=k_0(x,y)f(x,y)$, и операторы $T_1,\ T_2$ в $L_2(\Omega_1\times\Omega_2)$ действуют, соответственно, по формуле
$$T_1f(x,y)=\int_{\Omega_1}f(s,y)d\mu_1(s),\ \ T_2f(x,y)=\int_{\Omega_2}f(x,t)d\mu_2(t).$$
Имеем $\sigma(H_0)=[k_0^{\min},k_0^{\max}]\subset\sigma_{ess}(H)$, где $k_0^{\min}=\min k_0(x,y),\ \ k_0^{\max}=\max k_0(x,y)$, и $\sigma_{ess}(H)=\sigma(W_1)\cup\sigma(W_2)$, где $W_k=H_0-\gamma_kT_k,\ \ k=1,2$ (см.[5]).

Допустим, что $k_0(x,y)=u(x)+v(y)$, где $u(x)$ и $v(y)$ – вещественнозначные непрерывные функции на Ω_1 и Ω_2, соответственно. Тогда оператор H (1) будет унитарно эквивалентен оператору $H_1\otimes E+E\otimes H_2$, где $H_1,\ \ H_2$ операторы в модели Фридрихса, E – тождественный оператор и "$\otimes$"означает тензорное произведение операторов [5]. Пользуясь спектральными свойствами тензорного произведения операторов [7,8] можно утверждать, что при всех положительных значениях параметров γ_1 и γ_2 оператор H вне существенного спектра имеет не более одного собственного значения и $E_{\min}(H) \leq 0$. Собственное значение $\lambda \in \sigma_{disc}(H)$ оператора H является простым и $\lambda < E_{\min}(H)$.

Предположим, что $k_0(x,y) = u(x)v(y)$, где $u(x)$ и $v(y)$ – неотрицательные непрерывные функции на Ω_1 и Ω_2, соответственно и $0 \in Ran(u) \cap Ran(v)$. Тогда $E_{\min}(H) < 0$ и ниже нижнего края существенного спектра $E_{\min}(H)$ оператор H имеет не более одного собственного значения. Собственное значение $\lambda < E_{\min}(H)$ оператора H является простым (см.[9],[10]).

Пусть $\omega(x,y)$ – неотрицательная непрерывная функция на $\Omega_1 \times \Omega_2$ и $0 \in Ran(\omega)$. Предположим, что $u(\theta) = v(\theta) = 0$ и $\omega(x,\theta) = \omega(\theta,y) = 0,\ \ x \in \Omega_1,\ \ y \in \Omega_2$, где через θ обозначен нулевой элемент в соответствующем линейном пространстве.

Пусть мультипликатор в (1) задан функцией

$$h_0(x,y) := k_0(x,y) = u(x) + \omega(x,y) + v(y)$$

.

В настоящей заметке изучаются спектральные свойства оператора

$$H = H_0 - (\gamma_1 T_1 + \gamma_2 T_2),\ \ \gamma_1, \gamma_2 > 0, \tag{2}$$

в случае

$$H_0 f(x,y) = h_0(x,y) f(x,y)$$

и в следующих предположениях: существуют и являются конечными следующие интегралы

$$\int_{\Omega_1} \frac{ds}{u(s)}, \quad \int_{\Omega_2} \frac{dt}{v(t)}.$$

Для каждого $\beta \in \Omega_2$ определим самосопряженный оператор $H_1(\beta) : L_2(\Omega_1) \to L_2(\Omega_1)$ в модели Фридрихса:

$$H_1(\beta)\varphi(x) = h_0(x,\beta)\varphi(x) - \gamma_1 \int_{\Omega_1} \varphi(s) ds.$$

Аналогично, для каждого $\alpha \in \Omega_1$ определим операторы $H_2(\alpha)$:

$L_2(\Omega_2) \to L_2(\Omega_2)$ в модели Фридрихса:

$$H_2(\alpha)\psi(y) = h_0(\alpha, y)\psi(y) - \gamma_2 \int_{\Omega_2} \psi(t)dt.$$

Положим $M_1(\beta) = \max\limits_{x\in\Omega_1} h_0(x,\beta)$, $M_2(\alpha) = \max\limits_{y\in\Omega_2} h_0(\alpha, y)$.

В силу теоремы Вейля [1] о компактном возмущении существенного спектра имеем $\sigma_{ess}(H_k(\xi)) = [0, M_k(\xi)]$, $\xi \in \Omega_j$, $j \neq k$, $j,k = 1,2$.

Лемма 1.[10] *Число* $\lambda \in \mathbb{R} \setminus [0, M_1(\beta)]$ *является собственным значением оператора* $H_1(\beta)$ *тогда и только, когда* $\Delta_1(\beta;\gamma_1,\lambda) = 0$, *где*

$$\Delta_1(\beta;\gamma_1,\lambda) = 1 - \gamma_1 \int_{\Omega_1} \frac{ds}{h_0(s,\beta) - \lambda}.$$

Определим функцию $h_1(\beta)$ на Ω_2 по правилу

$$h_1(\beta) = \int_{\Omega_1} \frac{ds}{h_0(s,\beta)}.$$

Функция $h_1(\beta)$ является непрерывной на множестве Ω_2 и $h_1(\beta) > 0$, $\beta \in \Omega_2$.

Определим неположительные и непрерывные функции $\pi_1(y)$ на Ω_2 и $\pi_2(x)$ на Ω_1 с помощью следующих равенств

$$\pi_1(y) = \inf_{\|\varphi\|=1} (H_1(y)\varphi,\varphi), \ \ y \in \Omega_2, \ \ \pi_2(x) = \inf_{\|\psi\|=1} (H_2(x)\psi,\psi), \ \ x \in \Omega_1.$$

Положим $\pi_j^{\min} = \min\limits_{\xi\in\Omega_k} \pi_j(\xi)$, $\pi_j^{\max} = \max\limits_{\xi\in\Omega_k} \pi_j(\xi)$, $j \neq k$, $j,k = 1,2$, $h_0^{\max} = \max\limits_{(x,y)\in\Omega_1\times\Omega_2} h_0(x,y)$.

Предложение 1. *Имеют место равенства*

а) $\sigma(W_1) = [\pi_1^{\min}, \pi_1^{\max}] \cup \sigma(H_0)$;

б) $\sigma(W_2) = [\pi_2^{\min}, \pi_2^{\max}] \cup \sigma(H_0)$.

Доказательство. а) В работе [5] получено равенство $\sigma(W_1) =$

$\sigma(H_0) \cup \sigma_1$, где

$$\sigma_1 = \{\lambda \in \rho(H_0) : \Delta_1(\beta_0; \lambda, \gamma) = 0 \text{ для некоторого } \beta_0 \in \Omega_2\}.$$

Пусть $\pi_1(\beta_0) < 0$ для некоторого $\beta_0 \in \Omega_2$. Тогда в силу принципа минимакса число $\pi_1(\beta_0)$ является собственным значением оператора $H_1(\beta_0)$. Следовательно из леммы 1 имеем $\Delta_1(\beta_0; \gamma_1, \lambda_0(\beta_0)) = 0$, где $\lambda_0(\beta_0) = \pi_1(\beta_0)$. Таким образом, $\pi_1(\beta_0) \in \sigma_1$. Если $\pi_1(\beta) < 0$ при всех $\beta \in \Omega_2$, то $\lambda(\beta) = \pi_1(\beta) \in \sigma_1$, $\sigma_1 = [\pi_1^{\min}, \pi_1^{\max}]$ и $\sigma(W_1) = \sigma(H_0) \cup \sigma_1 = [0, h_0^{\max}] \cup [\pi_1^{\min}, \pi_1^{\max}]$. Если $\pi_1(\beta_0) = 0$ для некоторого $\beta_0 \in \Omega_2$, то $\pi_1^{\max} = 0$. Следовательно $\sigma(W_1) = \sigma(H_0) \cup \sigma_1 = [0, h_0^{\max}] \cup [\pi_1^{\min}, \pi_1^{\max}] = [\pi_1^{\min}, h_0^{\max}]$.

Равенство $\sigma(W_2) = [0, h_0^{\max}] \cup [\pi_2^{\min}, \pi_2^{\max}]$ доказывается аналогично.

Предложение 2. *Если $\gamma_1 \leq h_1^{-1}(\theta)$, то $\sigma(H_1(\beta)) = \sigma_{ess}(H_1(\beta))$ при всех $\beta \in \Omega_2$.*

Доказательство. Поскольку

$$h_0(x, y) = u(x) + \omega(x, y) + v(y) \geq u(x), \;\; x \in \Omega_1, \;\; y \in \Omega_2,$$

то

$$H_1(\beta) \geq H_1(\theta), \;\; \beta \in \Omega_2. \tag{3}$$

Однако, $E_{\min}(H_1(\theta)) = 0$ и

$$\Delta_1(\theta; \gamma_1, \lambda) = 1 - \gamma_1 \int_{\Omega_1} \frac{ds}{u(s) - \lambda}.$$

Функция $\Delta_1(\lambda) = \Delta_1(\theta; \gamma_1, \lambda)$ на $(-\infty, 0)$ строго убывает, при этом $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} \Delta_1(\lambda) = 1$ и $\lim\limits_{\lambda \to 0-} \Delta_1(\lambda) = 1 - \gamma_1 h_1(\theta) \geq 0$. Отсюда получим, что $\Delta_1(\lambda) = \Delta_1(\theta; \gamma_1, \lambda) > 0$ при $\lambda \in (-\infty, 0)$. В силу леммы 1, $\sigma_{disc}(H_1(\theta)) = \emptyset$, т.е. $\sigma(H_1(\theta)) = [0, M_1(\theta)]$. Из (3) получим

$$\inf_{\|\varphi\|=1} (H_1(\beta)\varphi, \varphi) \geq \inf_{\|\varphi\|=1} (H_1(\theta)\varphi, \varphi) = 0, \;\; \beta \in \Omega_2.$$

Однако, $0 \in \sigma(H_1(\beta))$, $\beta \in \Omega_2$ и следовательно $\inf\limits_{\|\varphi\|=1} (H_1(\beta)\varphi, \varphi) = E_{\min}(H_1(\beta)) = 0$, $\beta \in \Omega_2$. Отсюда и из принципа минимакса [1] вытекает, что $\sigma_{disc}(H_1(\beta)) = \emptyset$, при всех $\beta \in \Omega_2$.

Определим теперь функцию $h_2(\alpha)$ на Ω_1 по правилу

$$h_2(\alpha) = \int_{\Omega_2} \frac{dt}{h_0(\alpha, t)}.$$

Тогда $h_2 \in C(\Omega_1)$ и $h_2(\alpha) > 0, \ \ \alpha \in \Omega_1$.

Так же как и в предложении 2 доказывается, что если $\gamma_2 \leq h_2^{-1}(\theta)$, то $\sigma(H_2(\alpha)) = \sigma_{ess}(H_2(\alpha))$ при всех $\beta \in \Omega_2$.

Отсюда и из предложения 2 вытекает

Теорема 1. *а) если $\gamma_1 \leq h_1^{-1}(\theta)$, то $\sigma(W_1) = \sigma(H_0) = [0, h_0^{\max}]$;*
б) если $\gamma_2 \leq h_2^{-1}(\theta)$, то $\sigma(W_2) = \sigma(H_0) = [0, h_0^{\max}]$.

Определим множества $\mathcal{D}_0 \subset \Omega_2$ и $\mathcal{D}_1 \subset \Omega_2$, полагая

$$\mathcal{D}_0 = \{\beta \in \Omega_2 : \gamma_1 \leq h_1^{-1}(\beta)\}, \ \ \mathcal{D}_1 = \Omega_2 \setminus \mathcal{D}_0.$$

Лемма 2. *а) Если $\mathcal{D}_0 = \Omega_2$ (т.е. $\mathcal{D}_1 = \emptyset$), то $\pi_1(t) \equiv 0$;*
б) если $\mathcal{D}_0 \neq \emptyset$ и $\mathcal{D}_1 \neq \emptyset$, то $\pi_1^{\min} < \pi_1^{\max} = 0$;
в)если $\mathcal{D}_0 = \emptyset$, то $\pi_1^{\min} < \pi_1^{\max} < 0$.

Доказательство. Очевидно при каждом фиксированном $\beta \in \Omega_2$ и $\gamma_1 > 0$ функция $\Delta_1(\lambda) = \Delta_1(\beta; \gamma_1, \lambda)$ на $(-\infty, 0)$ строго убывает и

$$\lim_{\lambda \to -\infty} \Delta_1(\lambda) = 1 \ \text{ и } \ \lim_{\lambda \to 0-} \Delta_1(\lambda) = 1 - \gamma_1 h_1(\beta).$$

а) Пусть $\mathcal{D}_0 = \Omega_2$. Тогда $1 - \gamma_1 h_1(\beta) \geq 0$ при всех $\beta \in \Omega_2$. Из монотонности функции $\Delta_1(\lambda)$ на $(-\infty, 0)$ имеем $\Delta_1(\beta; \gamma_1, \lambda) > 0$ при всех $\lambda \in (-\infty, 0)$ для каждого $\beta \in \Omega_2$. Отсюда и в силу леммы 1 получим $\sigma(H_1(\beta)) = \sigma_{ess}(H_1(\beta)), \ \ \beta \in \Omega_2$. Тогда в силу принципа минимакса имеем $\pi_1(t) = 0$ при всех $t \in \Omega_2$.

б) Пусть $\mathcal{D}_0 \neq \emptyset$. Тогда существует точка $\beta_0 \in \mathcal{D}_0 \subset \Omega_2$, такая что,

$$\lim_{\lambda \to 0-} \Delta_1(\beta_0; \gamma_1, \lambda) = 1 - \gamma_1 h_1(\beta_0) \geq 0,$$

т.е. $\Delta_1(\beta_0; \gamma_1, \lambda) \geq 0$ на $(-\infty, 0)$. Отсюда и из леммы 1 получим, что $\sigma(H_1(\beta_0)) = \sigma_{ess}(H_1(\beta_0))$. Следовательно, имеем $\pi_1(\beta_0) = 0$. Поскольку $\pi_1(t) \leq 0, \ \ t \in \Omega_2$, то $\pi_1^{\max} = \pi_1(\beta_0) = 0$. Если $\mathcal{D}_1 \neq \emptyset$, то существует $\beta_1 \in \mathcal{D}_1 \subset \Omega_2$ такое, что

$$\lim_{\lambda\to 0-} \Delta_1(\beta_1;\gamma_1,\lambda) = 1-\gamma_1 h_1(\beta_1) < 0.$$

Следовательно, уравнение $\Delta_1(\beta_1;\gamma_1,\lambda)=0$ на $(-\infty,0)$ имеет единственное решение $\lambda_0<0$. В силу леммы 1 число λ_0 является собственным значением оператора $H_1(\beta_1)$. Отсюда и из принципа минимакса получим, что $\pi_1(\beta_1)=\lambda_0<0$, т.е. $\pi_1^{\min}\le\pi_1(\beta_1)<0$.

в) Пусть $\mathcal{D}_0=\emptyset$. Тогда $\mathcal{D}_1=\Omega_2$ и следовательно для каждого $\beta\in\Omega_2$ имеем

$$\lim_{\lambda\to 0-} \Delta_1(\beta;\gamma_1,\lambda) = 1-\gamma_1 h_1(\beta) < 0.$$

В силу монотонности функции $\Delta_1(\beta;\gamma_1,\lambda)$ на $(-\infty,0)$ существует отрицательное число $\lambda=\lambda(\beta)$ такое, что $\Delta_1(\beta;\gamma_1,\lambda(\beta))=0$, т.е. число $\lambda(\beta)$ является собственным значением оператора $H_1(\beta)$. Тогда из принципа минимакса получим, что $\pi_1(\beta)=\lambda(\beta),\ \ \beta\in\Omega_2$. Из непрерывности функция $\pi_1(t)$ на Ω_2 имеем $\pi_1^{\max}<0$.

Докажем, что $\pi_1^{\min}<\pi_1^{\max}$. Допустим обратное: пусть $\pi_1^{\min}=\pi_1^{\max}$. Тогда решение $\lambda_0<0$ и $\lambda_1<0$ уравнений $\Delta_1(\theta;\gamma_1,\lambda)=0$ и $\Delta_1(\beta;\gamma_1,\lambda)=0,\ \ \beta\in\Omega_2,\ \beta\neq\theta$ совпадает, т.е.

$$\Delta_1(\theta;\gamma_1,\lambda_0)=\Delta_1(\beta;\gamma_1,\lambda_0)=0.$$

Следовательно, получим

$$\int_{\Omega_1}\frac{h_0(s,\beta)-u(s)}{(u(s)-\lambda_0)(h_0(s,\beta)-\lambda_0)}ds=0. \tag{4}$$

Однако, $h_0(s,\beta)-u(s)\ge 0,\ \ s\in\Omega_2$ и функция

$$F_1(s,\beta)=\frac{h_0(s,\beta)-u(s)}{(u(s)-\lambda_0)(h_0(s,\beta)-\lambda_0)}$$

неотрицательная непрерывная на Ω_2 и отличная от константы. Отсюда и из свойства интеграла Лебега получим, что $\int_{\Omega_2}F_1(s,\beta)ds>0$ и это противоречит равенству (4). Следовательно, $\pi_1^{\min}\neq\pi_2^{\max}$.

Обозначим $h_j^{\min}=\min\limits_{\xi\in\Omega_k}h_j(\xi)$ и $h_j^{\max}=\max\limits_{\xi\in\Omega_k}h_j(\xi),\ \ j=1,2,\ \ k=1,2,\ \ j\neq k$.

Из леммы 2 вытекает

Теорема 2. *а) если* $\gamma_1 > (h_1^{\min})^{-1}$, *то* $\pi_1^{\max} < 0$;
б) если $(h_1^{\max})^{-1} < \gamma_1 \leq (h_1^{\min})^{-1}$, *то* $\pi_1^{\min} < 0$ *и* $\pi_1^{\max} = 0$;
в) если $\gamma_1 \leq (h_1^{\max})^{-1}$, то $\pi_1(t) \equiv 0$.

Аналогичная теорема верна для функции $\pi_2(x)$.

Следствие 1. *Если* $\gamma_1 \leq (h_1^{\max})^{-1}$ *и* $\gamma_2 \leq (h_2^{\max})^{-1}$, *то* $\sigma_{ess}(H) = \sigma(H_0)$.

Доказательство. Для существенного спектра оператора H имеет место равенство [5]

$$\sigma_{ess}(H) = \sigma(W_1) \cup \sigma(W_2),$$

где $W_k = H_0 - \gamma_k T_k,\ \ k = 1, 2$. Отсюда в силу теоремы 2 и предложения 1 получим

$$\sigma_{ess}(H) = \sigma(H_0) = [0, h_0^{\max}].$$

Следствие 2. *Пусть в* (1) $\gamma_1 = h_1^{-1}(\theta)$ *и* $\gamma_2 = h_2^{-1}(\theta)$. *Тогда* $\sigma_{ess}(H) = \sigma(H_0)$.

Доказательство. Рассмотрим ЧИО V, определяемый равенством

$$V = H_0 - (h_1^{-1}(\theta) T_1 + h_2^{-1}(\theta) T_2).$$

При $\gamma_1 = h_1^{-1}(\theta)$ имеем

$$\lim_{\lambda \to 0-} \Delta_1(\theta; \gamma_1, \lambda) = 1 - h_1^{-1}(\theta) \lim_{\lambda \to 0-} \int_{\Omega_1} \frac{ds}{h_0(s, \theta) - \lambda} = 0.$$

Из монотонности функции $\Delta_1(\theta; h_1^{-1}(\theta), \lambda)$ на $(-\infty, 0)$ получим, что $\Delta_1(\theta; h_1^{-1}(\theta), \lambda) > 0$ на $(-\infty, 0)$, т.е. $\sigma(H_0 - h_1^{-1}(\theta) T_1) = \sigma(H_0)$. Аналогично показывается, что $\sigma(W_2) = \sigma(H_0)$. Следовательно, $\sigma_{ess}(V) = \sigma(W_1) \cup \sigma(W_2) = \sigma(H_0)$.

Говорят, что оператор $H_1(\theta)$ (оператор $H_2(\theta)$) имеет резонанс с нулевой энерги [11], если число 1 является собственным значением интегрального оператора $V_1 : L_2(\Omega_1) \to L_2(\Omega_1)$ $(V_2 : L_2(\Omega_2) \to L_2(\Omega_2))$, где

$$V_1 \varphi(x) = \gamma_1 \int_{\Omega_1} \frac{\varphi(s) ds}{u(s)}, \quad V_2 \psi(y) = \gamma_2 \int_{\Omega_1} \frac{\psi(t) dt}{v(t)}$$

и по крайней мере одна соответствующая собственная функция

$\varphi_0(x)$ (собственная функция $\psi_0(y)$) удовлетворяет условию $\varphi_0(\theta) \neq 0$ $(\psi_0(\theta) \neq 0)$.

Теорема 3. *Пусть* $\gamma_1 = h_1^{-1}(\theta)$. *Тогда*

а) оператор $H_1(\theta)$ *имеет резонанс с нулевой энергией;*

б) при всех $\beta \in \Omega_2,\ \ \beta \neq 0$ *у оператора* $H_1(\beta)$ *отсутствует отрицательное собственное значение.*

Доказательство. а) Пусть $\varphi_0(x) \equiv 1$. Тогда $V_1\varphi_0 = \gamma_1 h_1(\theta) = \varphi_0(x)$, т.е. уравнение $V_1\varphi = \varphi$ имеет решение φ_0 в $C(\Omega_1)$ и $\varphi_0(0) \neq 0$.

б) Если $\gamma_1 = h_1^{-1}(\theta)$, то выполняется условие предложения 2, и поэтому $\sigma(H_1(\beta)) = \sigma_{ess}(H_1(\beta))$ при всех $\beta \in \Omega_2$, т.е. отсутствует отрицательное собственное значение у операторов $H_1(\beta),\ \ \beta \in \Omega_2$.

Пример. Пусть $\Omega_1 = \Omega_2 = [0,1]$ и

$$u(x) = v(x) = x^{1/2},\ \ \omega(x,y) = \left(1 - \cos\frac{\pi}{2}x\right)\left(1 - \cos\frac{\pi}{2}y\right).$$

Имеем

$$\int_0^1 \frac{ds}{u(s)} = \int_0^1 \frac{dt}{v(t)} = 2.$$

Функция $h_1(x)$ строго убывает на [0,1], и следовательно, $h_1^{\min} = h_1(1)$ и $h_1^{\max} = h_1(0) = 2$. Очевидно, что $\dfrac{1}{u(x)} \notin L_2(\Omega_1)$, т.е. $\dfrac{1}{u(x)} \in L_1(\Omega_1) \setminus L_2(\Omega_1)$. Следовательно, при $\gamma_1 = \dfrac{1}{2}$ оператор $H_1(0)$ имеет резонанс с нулевой энергей и при всех $\beta \in (0,1]$ у оператора $H_1(\beta)$ отсутствует отрицательное собственное значение.

Литература

1. М.Рид, Б.Саймон *Методы современной математической физики* - Т.4, Анализ операторов, - М.; Мир, 1982.

2. Friedrichs K. O. *Über die Spectralzerlegung eines Integral Operators* -Math. Ann. 1938. V. 115, №1. P. 249-272.

3. Ладыженская О. А., Фаддеев Л. Д. *К теории возмущений непрерывного спектра* –Докл. АН СССР. 1962. Т. 145, №2. С. 301-304.

4. Ю.Х. Эшкабилов *О бесконечности дискретного спектра операторов в модели Фридрихса*, Мат. труды, 2011, том 14, №1, стр.195-211.

5. Ю.Х. Эшкабилов *Об одном дискретном "трехчастичном"операторе Шредингера в модели Хаббарда*, - ТМФ, 149:2, 2006, 228-243.

6. Ю.Х. Эшкабилов *О дискретном спектре частично интегральных операторов*, Мат. труды, 2012, том 15, №2, стр.194-203.

7. Ichinose T. *Spectral properties of tensor products of linear operators*:I,–Trans.Amer.Math.Soc.–1978, Jan.,v.235, P.75–113.

8. Ichinose T. *Spectral properties of tensor products of linear operators*:II,–Trans.Amer.Math.Soc.–1978, Mar.,v.237, P.223–254.

9. Р.Р. Кучаров, Ю.Х. Эшкабилов *О конечности отрицательных собственных значений частично интегрального оператора*, Мат. труды, 2014, том 17, №1.

10. Ю.Х. Эшкабилов, Р.Р. Кучаров *О существенном и дискретном спектре трехчастичного оператора Шредингера на решетке*, – ТМФ, 170:3, 2012, 409–422.

11. S. Albeverio, S.N. Lakaev, Z.I. Muminov *On the Number of Eigenvalues of a Model Operator Associated to a System of Three-Particles on Lattices*, - Russ. J. of Math. Phys., 14:4, 2007, 377-387.

Национальный университет
Узбекистана им. М.Улугбека

Uzbek Mathematical
Journal, 2014,№4, pp.109-153

УДК 512.554

Evolution algebras corresponding to permutations

Narkuziev B.A.

Ushbu maqolada o‘rniga qo‘yishga mos evolyutsion algebraning ba‘zi muhim xossalari o‘rganilgan. Bu algebraning baric algebra bo‘lish sharti,uning idempotent va absolyut nilpotent elementining umumiy ko‘rinishi keltirilgan.Shuningdek o’rniga qo‘yishlarga mos evolyutsion algebraning nil algebra bo‘lishlik sharti keltirilgan.

В данной работе изучены некоторые свойства эволюционных алгебр, соответствующих перестоновке. Приведены условие баричности и общий вид его идемпотентных и абсолютно нильпотентных элементов. Также приведено условие нильности данной эволютционной алгебры,соответствующей перестановке.

1. Introduction

In the book [1] the foundations of evolution algebras are developed. Evolution algebras have many connections with other mathematical fields including graph theory, group theory, Markov chains, dynamic systems, stochastic processes, mathematical physics, etc.[1]-[6].

Let $(E,\cdot)$ be an algebra over a field K. If it admits a basis $e_1, e_2...$, such that

$$e_i \cdot e_j = 0, \qquad if \quad i \neq j \ ;$$

$$e_i \cdot e_j = \sum_k a_{ik} e_k \ , \qquad for \quad any \quad i \ , \tag{1}$$

then this algebra is called an *evolution algebra*. We denote by $M = (a_{ij})$ the matrix of the structural constants of the evolution algebra E.

Let S_n be a group of the permutations of degree n

$$\pi \in S_n, \quad \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \pi(3) & ... & \pi(n) \end{pmatrix}, \qquad \pi(i) \in \{1, 2, ..., n\}.$$

Consider an evolution algebra E_π over a field K with a finite natural basis $e_1, e_2, ...e_n$, and multiplication given by $\begin{cases} e_ie_i = a_{i\pi(i)}e_{\pi(i)}, & for \quad any \quad i \\ e_ie_j = 0, & if \quad i \neq j \end{cases}$ then this algebra is called an *evolution algebra corresponding to permutation* π.

We note that $a_{ij} = \begin{cases} a_{i\pi(i)}, & \text{if} \quad j = \pi(i) \\ 0 \quad , & \text{if} \quad j \neq \pi(i) \end{cases} \qquad i = \overline{1, n}.$

The following properties of evolution algebras are known [1]:

(1) Evolution algebras are not associative, in general.

(2) Evolution algebras are commutative, flexible.

(3) Evolution algebras are not power-associative, in general.

(4) The direct sum of evolution algebras is also an evolution algebra.

(5) The Kronecker product of evolution algebras is an evolution algebra.

These properties are hold for E_π too.

A *character* for an algebra $\mathcal{A}$ is a nonzero multiplicative linear form on $\mathcal{A}$, that is, a nonzero algebra homomorphism from $\mathcal{A}$ to R [2] .

Definition 1. A pair $(\mathcal{A}, \sigma)$ consisting of an algebra $\mathcal{A}$ and a character σ on $\mathcal{A}$ is called a baric algebra. The homomorphism σ is called the weight (or baric) function of $\mathcal{A}$ and $\sigma(x)$ the weight (baric value) of x. The following theorem is a particular case of Theorem 3.2 in [6].

Theorem 1. *An evolution algebra E_π , over field R , is baric if and only if there is an element $a_{kk} \neq 0$ of its structural constants matrix $M = (a_{ij})$ $i, j = 1, ..., n$. Moreover, the corresponding weight function is $\sigma(x) = a_{kk}x_k$.*

2. Idempotent elements.

Definition 2. An element $x \in E$ is called *idempotent* if $x^2 = x$.

Theorem 2. *Assume that $a_{i\pi(i)} \neq 0$, $i = 1, \ldots ,n$ and $x = (x_1, x_2, \ldots , x_n)$ be an idempotent element, then coordinates of this element defined by the following formula :*

$$x_i = (a_{i\pi(i)}^{2^{k-1}} \cdot a_{\pi(i)\pi^2(i)}^{2^{k-2}} \cdot a_{\pi^2(i)\pi^3(i)}^{2^{k-3}} \cdot \ldots \cdot a_{\pi^{k-1}(i)i})^{-\frac{1}{2^k-1}}, \tag{2}$$

where $\pi^k(i) = i$.

If $a_{i\pi(i)} = 0$ for some i , then for number m which belongs to the same cycle where is i, then $x_m = 0$, and other coordinates of the idempotent element are defined by the formula (2).

Proof. By the definition we must solve the following equation :

$$x^2 = x.$$

The general formula for the multiplication defined by

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i e_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i e_i e_i = \sum_{i=1}^{n} a_{i\pi(i)} x_i y_i e_{\pi(i)} \ , \quad \pi(i) = \overline{1,n}, \tag{3}$$

from this formula we have

$$x^2 = \sum_{i=1}^{n} a_{i\pi(i)} x_i^2 e_{\pi(i)}, \ \ x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i.$$

Then equation $x^2 = x$ will be

$$\begin{cases} x_{\pi(1)} = a_{1\pi(1)} x_1^2 \\ x_{\pi(2)} = a_{2\pi(2)} x_2^2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{\pi(n)} = a_{n\pi(n)} x_n^2. \end{cases} \tag{4}$$

Assume that $a_{i\pi(i)} \neq 0$, and $\pi^k(i) = i$. There are k equations between equations (4) such that:

$$\begin{cases} x_{\pi(i)} = a_{i\pi(i)} x_i^2 \\ x_{\pi^2(i)} = a_{\pi(i)\pi^2(i)} x_{\pi(i)}^2 \\ x_{\pi^3(i)} = a_{\pi^2(i)\pi^3(i)} x_{\pi^2(i)}^2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{\pi^k(i)} = a_{\pi^{k-1}(i)\pi^k(i)} x_{\pi^{k-1}(i)}^2. \end{cases} \tag{5}$$

From this system we have

$$x_{\pi^2(i)} = x_i^{2^2} a_{i\pi(i)}^2 a_{\pi(i)\pi^2(i)}$$

$$x_{\pi^3(i)} = x_i^{2^3} a_{i\pi(i)}^{2^2} a_{\pi(i)\pi^2(i)}^2 a_{\pi^2(i)\pi^3(i)}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$x_{\pi^k(i)} = x_i^{2^k} a_{i\pi(i)}^{2^{k-1}} a_{\pi(i)\pi^2(i)}^{2^{k-2}} \cdot \ \dots \ \cdot \ a_{\pi^{k-1}(i)\pi^k(i)}.$$

By assumption the last equation will be

$$x_i = x_i^{2^k} a_{i\pi(i)}^{2^{k-1}} a_{\pi(i)\pi^2(i)}^{2^{k-2}} \cdot \ \dots \ \cdot \ a_{\pi^{k-1}(i)i}$$

Solutions of this equation :

$$x_i = 0 \quad and \quad x_i = (a_{i\pi(i)}^{2^{k-1}} \cdot a_{\pi(i)\pi^2(i)}^{2^{k-2}} \cdot a_{\pi^2(i)\pi^3(i)}^{2^{k-3}} \cdot \dots \cdot a_{\pi^{k-1}(i)i})^{-\frac{1}{2^k-1}}.$$

If $a_{i\pi(i)} = 0$ for some i , then from (5) $x_{\pi(i)}, x_{\pi^2(i)}, \ \dots\dots \ x_{\pi^{k-1}(i)}, x_i$ will be equal to zero.

Definition 3. The element $x \in E$ is called an absolute nilpotent if $x^2 = 0$.

We know that

$$x^2 = \sum_{i=1}^{n} a_{i\pi(i)} x_i^2 e_{\pi(i)}.$$

Hence from $x^2 = 0$ we have

$$a_{i\pi(i)} x_i^2 = 0 \ , \qquad i = \overline{1, n}.$$

Solutions of this system of equations are :

a) If $a_{i\pi(i)} \neq 0$, then $x = (0, 0, ..., 0)$.

b) If $a_{k\pi(k)} = 0$ for some k , then absolute nilpotent element defined by

$$x = (0, 0, ..., \ x_k \ , ..., 0) \ , \qquad \forall x_k \in R.$$

Definition 4. An element a of an evolution algebra E is called nil if there exists $n(a) \in N$ such that $(\cdots\underbrace{((a \cdot a) \cdots a)}_{n(a)} = 0$. Evolution algebra E is called nil if every element of the algebra is nil.

Theorem 3. *The algebra E_π is a nil evolution algebra if only if the following condition holds*

$$a_{i\pi(i)} \cdot a_{\pi(i)\pi^2(i)} \cdot \dots \cdot a_{\pi^{k-1}(i)i} = 0 \tag{6}$$

for all $i \in \{1, ..., n\}$ and $\pi^k(i) = i$, $k \in \{1, ..., n\}$, with $\pi^q(i) \neq \pi^p(i)$ for $q \neq p$.

Proof. (*Necessity*). It is proved in [4] that, if E_π is a nil evolution algebra, then relation (6) is hold.

(Sufficiency). Let $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$ be any element of E_π .Using (3), we obtain $x^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i\pi(i)} x_i^2 e_\pi(i)$,

$$x^3 = x^2 \cdot x = \sum_{i=1}^{n} a_{i\pi(i)} x_i^2 x_{\pi(i)} e_{\pi(i)}^2 = \sum_{i=1}^{n} a_{i\pi(i)} a_{\pi(i)\pi^2(i)} x_{\pi(i)} x_i^2 e_{\pi^2(i)}.$$

It can be proved by induction the following relation

$$x^m = \sum_{i=1}^{n} a_{i\pi(i)} a_{\pi(i)\pi^2(i)} \cdots a_{\pi^{m-2}(i)\pi^{m-1}(i)} x_{\pi^{m-2}(i)} x_{\pi^{m-3}(i)} \cdots x_i^2 e_{\pi^{m-1}(i)}. \quad (7)$$

Let k be the length of cycle of corresponding permutation, and $S = max\{k\}$. Using (7) we obtain

$$x^{s+1} = \sum_{i=1}^{n} a_{i\pi(i)} a_{\pi(i)\pi^2(i)} \cdots a_{\pi^{s-1}(i)\pi^s(i)} x_{\pi^{s-1}(i)} x_{\pi^{s-2}(i)} \cdots x_i^2 e_{\pi^s(i)}$$

from (6) we have $a_{i\pi(i)} a_{\pi(i)\pi^2(i)} \cdots a_{\pi^{s-1}(i)\pi^s(i)} = 0.$

It means $x^{s+1} = 0$. Since x is an arbitrary element of E_π, E_π is nil evolution algebra.

3. Decomposition of EAs

Theorem 4. *If for the corresponding permutation the following relation holds*

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \pi(3) & ... & \pi(n) \end{pmatrix} = (i_{1,1} i_{1,2} ... i_{1,k}) ... (i_{m,1} i_{m,2} ... i_{m,l}) \quad (8)$$

then E_π has a decomposition of direct sum of subalgebras:

$$E_\pi = A_1 \oplus A_2 \oplus \ ... \ \oplus A_m,$$

where $A_i, i = 1, 2, ..., m$ are all simple evolution subalgebras, $A_i \cap A_j = \{0\}$ for $i \neq j$, A_j is simple evolution subalgebra corresponding to j^{th}- cycle.

Proof. It is easy to see that, each A_j is an evolution subalgebra with the basis $\{e_{j,1}, e_{j,2}, ..., e_{j,s}\}$, where s is the length of j^{th}- cycle, such that

$$\begin{cases} e_{j,k}e_{j,k} = a_{j,k\pi(j,k)}e_{\pi(j,k)} & for \quad any \quad k = \overline{1,s} \\ e_{j,k}e_{j,t} = 0, & if \quad k \neq t \end{cases}$$

and $e_{\pi(j,k)} = e_{j,k+1}$, since $e_{j,k+1}$ is in the basis of the subalgebra A_j. For any two cycles has no general element, therefore $A_i \cap A_j = \{0\}$ for $i \neq j$.

Corollary. If the permutation corresponding to the evolution algebra E_π written as

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & ... & n & 1 \end{pmatrix},$$

then the evolution algebra E_π is simple.

Proof. If the permutation corresponding to the evolution algebra E_π may be written as (8), then cycle of this permutation is (1 2 3 .... n). From the theorem 4 , we know that E_π has no subalgebra, since it is simple.

References

1. J.P. Tian. *Evolution algebras and their applications.* Lecture Notes in Math., 1921. Springer, Berlin, 2008.

2. Y.I. Lyubich. *Mathematical structures in population genetics.* Springer-Verlag, Berlin,1992.

3. M.Ladra,U.A.Rozikov. *Evolution algebra of a bisexual population.* J.Algebra 378 (2013) 153-172.

4. J.M.Casas , M.Ladra , B.A.Omirov ,U.A. Rozikov . *On evolution algebras. Algebra Colloquium.* v.21, N2, 2014, p.331-342.

5. J.M.Casas , M.Ladra , B.A.Omirov ,U.A. Rozikov . *On nilpotent index and dibaricity of evolution algebras.* Linear Alg. Appl. 2013, v.439, N1, p.90-105.

6. J.M.Casas , M.Ladra , U.A.Rozikov . *A chain of evolution algebras.* Linear Alg. Appl. 435 (2011) 852-870.

B.A. Narkuziev, 1st special school of
Govermental education, Samarkand .

Uzbek Mathematical
Journal, 2014,№4, pp.115-122

УДК 519.24

Равномерная асимптотическая нормальность в модели конкурирующих рисков

Нурмухамедова Н.С.

Maqolada haqiqatga o‘xshashlik nisbati statistikasi uchun kuzatilmaydigan intervallar orqali tasodifiy senzurlanishning raqobatdosh tavakallar modelida tekis asimptotik normallik xossasi isbotlangan.

In this paper proved property of the uniformly asymptotically normality of likelihood ratio statistics in competing risks model under random censoring by nonobserving intervals

Статистика отношения правдоподобия (СОП) играет ключевую роль в теории принятия решений. Так, например, при проверке простой гипотезы H_0 против сложной альтернативы H_1 о неизвестном законе распределения критерии, построенные на основе СОП согласно фундаментальной лемме Неймана-Пирсона являются равномерно - наиболее мощными при любом объеме n наблюдений (см. [4,5]). Довольно интересные задачи возникают, когда альтернативы H_1 зависят от n и являются "близкими"к H_0, т.е. $H_1 = H_{1n} \to H_0$ при $n \to \infty$. В таких ситуациях проявляются асимптотические свойства СОП, полезные в теории оценивания неизвестных параметров и проверки гипотез. К таким свойствам относятся локальная и равномерная асимптотическая нормальность (ЛАН и РАН) СОП. В работах авторов [1-3] свойства ЛАН для СОП установлены в некоторых моделях неполных наблюдений, получаемых случайным цензурированием наблюдений в модели конкурирующих рисков (МКР). В данной работе исследовано свойство РАН для СОП при случайном цензурировании наблюдений в МКР интервалом ненаблюдения.

В МКР интерес представляют случайная величина (с.в.) X со значениями в измеримом пространстве $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ и события $(A^{(1)}, ..., A^{(k)})$, образующие полную группу, где k - фиксировано. На практике МКР отвечает с.в. X, означающая время безотказной работы некоторого объекта (индивидума, физического устройства), подвергаемого к k конкурирующим рискам и выходящего из строя по причине осуществления одного из событий $\{A^{(i)},\ i=1,...,k\}$. В таких ситуациях парами $\{(X,A^{(i)}),\ i=1,...,k\}$ определяются время и причина выхода из строя объекта. Повторив эксперимент, в котором наблюдаются совокупности $(X,A^{(1)},...,A^{(k)})$ в однородных условиях независимым образом получаем последовательность копий $\{(X_j,A_j^{(1)},...,A_j^{(k)}),\ j\geq 1\}$. Пусть $\delta_j^{(i)}=I(A_j^{(i)})$ - индикатор события $A_j^{(i)}$. Каждый случайный вектор $\zeta_j=(X_j,\delta_j^{(1)},...,\delta_j^{(k)})$ индуцирует статистическую модель с выборочным пространством

$$\mathcal{Y}=\mathcal{X}\times\{0,1\}^{(k)}=\mathcal{X}\times\{0,1\}\times...\times\{0,1\}$$

с σ- алгеброй $\mathcal{C}$ множеств вида $B\times D_1\times...\times D_k$, где $B\in\mathcal{B}$ и $D_i\subset\{0,1\}$, $i=1,...,k$. Далее предложим, что распределение вектора ζ_j на $(\mathcal{Y},\mathcal{C})$ задано с точностью до некоторого неизвестного параметра $\theta=(\theta_1,...,\theta_s)\in\Theta$:

$$Q_\theta^*(B\times D_1\times...\times D_k)=P_\theta(X_1\in B,\delta_1^{(1)}\in D_1,...,\delta_1^{(k)}\in D_k), \qquad (1)$$

где Θ- открытое множество в R^s. Пусть распределение (1) абсолютно непрерывно относительно σ- конечной меры $\nu(x)=\mu(x)\times\varepsilon_1\times...\times\varepsilon_k$, где μ - лебегова мера на R и ε_i - считающие меры, сосредоточенные в точках $y^{(i)}\in\{0,1\}$, $i=\overline{1,k}$. В дальнейшем рассмотрим такую статистическую схему, согласно которой совокупность $(X_j,A_j^{(1)},...,A_j^{(k)})$ ненаблюдаема, если с.в. X_j окажется в интервале $[Y_{1j},Y_{2j}]$, где $\{(Y_{1j},Y_{2j}),\ j\geq 1\}$ последовательность независимых и одинаково распределенных (н.о.р.) случайных векторов с (возможно неявно зависящим от θ) неизвестным распределением $G(u,v)$, $(u,v)\in R^2$. При этом совокупности $(X_j,A_j^{(1)},...,A_j^{(k)})$ и пары (Y_{1j},Y_{2j}) предполагаются независимыми и $P_\theta(Y_{1j}\leq Y_{2j})=1$ при каждом $j\geq 1$. Реально это соответствует, например, таким испытаниям на долговечность, в которых наблюдения за j-м объектом с временем безотказной работы X_j могут в случайный момент Y_{1j} прерваны и затем в случайный момент Y_{2j} возобновлены. Такую статистическую модель назовем МКР с случайным цензурированием интервалом ненаблюдения. В такой ситуации, на самом деле, вместо событий $(A_j^{(1)},...,A_j^{(k)})$ наблюдаемыми будут события $(D_j^{(0)},D_j^{(1)},...,D_j^{(k)})$, где

$$D_j^{(0)}=\{\omega:Y_{1j}(\omega)\leq X_j(\omega)\leq Y_{2j}(\omega)\}$$

и

$$D_j^{(i)} = A_j^{(i)} \cap (\{\omega : X_j(\omega) < Y_{1j}(\omega)\} \cup \{\omega : X_j(\omega) > Y_{2j}(\omega)\}), \quad i = 1, ..., k.$$

Пусть $\Delta_j^{(i)} = I(D_j^{(i)})$, $i = 0, 1, ..., k$ и $w_j = \varepsilon_{1j} + \varepsilon_{2j}$, где $\varepsilon_{1j} = I(X_j < Y_{1j})$ и $\varepsilon_{2j} = I(X_j > Y_{2j})$. Тогда очевидно, $\Delta_j^{(0)} = 1 - w_j$ и $\Delta_j^{(i)} = w_j \delta_j^{(i)}$. Поскольку в МКР интерес представляют совместные свойства пар $\{(X_j, A_j^{(i)}),\ i = \overline{1, k}\}$, то в связи с этим определим субраспределения

$$Q_{i\theta}(B) = Q_\theta^*(B \times \{0\} \times ... \times \{0\} \times \{1\} \times \{0\} \times ... \times \{0\}),\ i = 1, ..., k, \quad (2)$$

получаемые из (1) при $D_i = \{1\}$ и$D_j = \{0\}$,$i \neq j$, $j = 1, ..., k$. Пусть $Q_\theta(B) = \sum\limits_{i=1}^{k} Q_{i\theta}(B)$. Через $h^{(i)}$ и h обозначим плотности субраспределений$Q_{i\theta}$ и Q_θ:

$$Q_{i\theta}(B) = \int\limits_B h^{(i)}(x;\theta)\mu(dx),\ \ i = 1, ..., k, \quad Q_\theta(B) = \int\limits_B h(x;\theta)\mu(dx), \quad (3)$$

где $h = h^{(1)} + ... + h^{(k)}$. При $B = (-\infty; x]$ обозначим $Q_{i\theta}((-\infty; x]) = H^{(i)}(x;\theta)$,$i = \overline{1, k}$ и $Q_\theta((-\infty; x]) = H(x;\theta)$. Далее, определим интегральные функции интенсивности (и.ф.и.), соответствующие парам $(X, A^{(i)})$:

$$\Lambda^{(i)}(x;\theta) = \int\limits_{(-\infty;x]} \lim_{\Delta\downarrow 0} P_\theta(t < X \le t + \Delta,\ A^{(i)}/X > t)\mu(dt) =$$

$$= \int\limits_{(-\infty;x]} \frac{dH^{(i)}(t;\theta)}{1 - H(t;\theta)},\ \ i = 1, ..., k,\ \ x \in R^1. \quad (4)$$

Тогда и.ф.и., соответствующая с.в. X есть $\Lambda(x;\theta) = \sum\limits_{i=1}^{k} \Lambda^{(i)}(x;\theta)$. В МКР интерес представляют экспоненциальные функционалы $F^{(i)}(x;\theta) = 1 - \exp\{-\Lambda^{(i)}(x;\theta)\}$, $i = \overline{1, k}$, которые характеризуют распределение i-риска. Поскольку $\Lambda(x;\theta) = -\log(1 - H(x;\theta))$, следовательно

$$1 - H(x;\theta) = P_\theta(X > x) = \prod_{i=1}^{k} (1 - F^{(i)}(x;\theta)). \quad (5)$$

Определим плотности $f^{(i)}(x;\theta) = \frac{\partial}{\partial x}F^{(i)}(x;\theta), i = \overline{1,k}$. Тогда плотность интенсивности отказов по i-риску есть $f^{(i)}/(1-F^{(i)})$. С другой стороны, в силу формул (3)-(5) для любого $(x;\theta) \in R^1 \times \Theta$ и $i = 1,...,k$:

$$\frac{f^{(i)}(x;\theta)}{1-F^{(i)}(x;\theta)} = \frac{h^{(i)}(x;\theta)}{1-H(x;\theta)},$$

или эквивалентно

$$h^{(i)}(x;\theta) = f^{(i)}(x;\theta)\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k}(1-F^{(j)}(x;\theta)). \tag{6}$$

Пусть в n-шаге испытаний наблюдению доступна выборка $\mathbb{Z}^{(n)} = (Z_1,...,Z_n)$, где $Z_j = w_jX_j + (1-w_j)[Y_{1j},Y_{2j}]$, т.е. каждое наблюдение Z_j есть либо с.в. X_j (при $w_j = 1$) либо интервал $[Y_{1j},Y_{2j}]$ (при $w_j = 0$). Через $p(z;\theta)$ обозначим плотность одного наблюдения, которая включает в себя и множители, зависящие от неизвестного распределения G. Отбросив эти множители и учитывая представление (6), получаем следующую "усеченную"функцию правдоподобия выборки $\mathbb{Z}^{(n)}$:

$$p_n(\mathbb{Z}^{(n)};\theta) = \prod_{m=1}^{n}p(Z_m;\theta) =$$

$$= \prod_{m=1}^{n}\left\{\left[\prod_{i=1}^{k}\left[f^{(i)}(X_m;\theta)\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k}(1-F^{(j)}(X_m;\theta))\right]^{\delta_m^{(i)}}\right]^{w_m}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot[H(Y_{2m};\theta)-H(Y_{1m};\theta)]^{1-w_m}\right\} =$$

$$= \prod_{m=1}^{n}\left\{\left[\prod_{i=1}^{k}\left[h^{(i)}(X_m;\theta)\right]^{\delta_m^{(i)}}\right]^{w_m}[H(Y_{2m};\theta)-H(Y_{1m};\theta)]^{1-w_m}\right\}. \tag{7}$$

Пусть при каждом $u \in R^s$,

$$\theta + n^{-1/2}u = \Psi_n(u;\theta) \in \Theta$$

и $\widetilde{Q}_{\theta}^{(n)}$-распределение, индуцированное выборкой $\mathbb{Z}^{(n)}$. Определим СОП модели

$$L_{n,\theta}(u) = d\widetilde{Q}_{\Psi_n(u;\theta)}^{(n)}(\mathbb{Z}^{(n)})/d\widetilde{Q}_{\theta}^{(n)}(\mathbb{Z}^{(n)}) = \frac{p_n(\mathbb{Z}^{(n)};\Psi_n(u;\theta))}{p_n(\mathbb{Z}^{(n)};\theta)} =$$

$$= \prod_{m=1}^{n}\left\{\left[\prod_{i=1}^{k}\left[\frac{h^{(i)}(X_m;\Psi_n(u;\theta))}{h^{(i)}(X_m;\theta)}\right]^{\delta_m^{(i)}}\right]^{w_m}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left[\frac{H(Y_{2m};\Psi_n(u;\theta))-H(Y_{1m};\Psi_n(u;\theta)}{H(Y_{2m};\theta)-H(Y_{1m};\theta)}\right]^{1-w_m}\right\}$$

Пусть параметр θ скалярный ($s=1$) и $u=(\mathbb{J}(\theta))^{-1/2}\cdot v$, где $v\in R^1$ и $\mathbb{J}(\theta)$ - информация Фишера модели. Тогда при справедливости определенных условий регулярности при каждом $v\in R^1$:

$$L_{n,\theta}(v) = \frac{d\widetilde{Q}_{\Psi_n((\mathbb{J}(\theta))^{-1/2}\cdot v;\theta)}^{(n)}\left(\mathbb{Z}^{(n)}\right)}{d\widetilde{Q}_{\theta}^{(n)}\left(\mathbb{Z}^{(n)}\right)} = \frac{p_n(\mathbb{Z}^{(n)};\Psi_n((\mathbb{J}(\theta))^{-1/2}\cdot v;\theta))}{p_n(\mathbb{Z}^{(n)};\theta)} =$$

$$= \exp\left\{\Delta_{n,\theta}v - \frac{1}{2}v^2 + R_n(v;\theta)\right\}. \tag{9}$$

Здесь $P_\theta\left(|R_n(v;\theta)|>\varepsilon\right)\to 0$ при $n\to\infty$ и

$$L\left(\Delta_{n,\theta}/\widetilde{Q}_{\theta}^{(n)}\right)\to N(0;1), \tag{10}$$

где

$$\Delta_{n,\theta} = (n\mathbb{J}(\theta))^{-1/2}\sum_{j=1}^{n} l_\theta\left(X_j,Y_{1j},Y_{2j},w_j\right).$$

Таким образом, в силу (10) СОП $L_{n,\theta}(v)$ при $n\to\infty$ ведет себя как с.в. $\exp\left\{\chi\, v-\frac{1}{2}v^2\right\}$, где $\chi\overset{d}{=}N(0,1)$. Соотнощение (10) утверждает свойство ЛАН. Однако, на самом деле СОП $L_{n,\theta}(v)$ является случайным процессом по переменной $v\in R^1$. Поэтому интерес представляет исследование свойства асимптотической гауссовости случайного процесса $\left\{\chi_{n,\theta}(v),\ v\in R^1\right\}$, где $\chi_{n,\theta}(v)=\log L_{n,\theta}(v)$. Это свойство СОП назовем РАН. Для свойства РАН рассмотрим следующие условия регулярности:

(C1) Пусть $\Theta = [a, b]$, где $-\infty < a < b < \infty$;

(C2) Множества $N^{(i)} = \{x : h^{(i)}(x;\theta) > 0\}$, $i = \overline{1, k}$ - независят от θ и $N = \bigcap\limits_{i=1}^{k} N^{(i)} \neq \emptyset$;

(C3) Субплотности $\left\{h^{(i)}(x;\theta),\ \theta \in \Theta\right\}$, $i = 1, ..., k$, трижды непрерывно дифференцируемы по θ и

$$\sup_{(x;\theta)\in R^1\times\Theta} \left|\frac{\partial^3 \log h^{(i)}(x;\theta)}{\partial\theta^3}\right| \leq M < \infty,\ \ i = 1, ..., k;$$

(C4) Интегралы $\int\limits_{-\infty}^{\infty} l(x)h^{(i)}(x;\theta)\mu(dx)$, $i = 1, ..., k$, дифференцируемы по θ под знаком интеграла;

(C5) Для всех $\theta \in \Theta$: $\mathbb{J}(\theta) \in (0, \infty)$. Пусть $\mathbb{D}(\Theta)$ пространство Скорохода функций без разрывов 2-рода. Далее СОП рассмотрим как случайный процесс с непрерывным временем.

Определение. Будем говорить, что СОП удовлетворяет равномерному варианту ЛАН (т.е. РАН), если

$$L_{n,\theta}(\cdot) \Rightarrow L(\cdot) \text{ в } \mathbb{D}(\Theta), \tag{11}$$

где процесс $\left\{L(v) = \exp\left\{\chi\, v - \frac{1}{2}v^2\right\},\ v \in \Theta\right\}$.

Легко убедится в том, что процесс $\{\omega(v) = \chi v,\ v \in \Theta\}$ является гауссовским с нулевым средним и ковариацией $Cov\left(\omega(v_1), \omega(v_2)\right) = v_1 v_2$, $v_1, v_2 \in \Theta$. Слагаемые, входящие в сумму в $\Delta_{n,\theta}$ могут быть представлены как

$$l_\theta\left(X_j, Y_{1j}, Y_{2j}; w_j\right) = w_j \sum_{i=1}^{k} \delta_j^{(i)} \frac{\partial \log h^{(i)}(X_j;\theta)}{\partial\theta} +$$

$$+(1 - w_j)M_\theta \left[\frac{\partial \log h^{(i)}(X_j;\theta)}{\partial\theta} \Big/ Y_{1j} \leq X_j \leq Y_{2j},\right]$$

при этом $M_\theta l_\theta = 0$ и $M_\theta l_\theta^2 = \mathbb{J}(\theta)$ для всех $\theta \in \Theta$. Следовательно,

$$M_\theta \Delta_{n,\theta} = 0, \quad M_\theta \Delta_{n,\theta}^2 = 1 \ \text{ для всех } \theta \in \Theta. \tag{12}$$

Слабая сходимость (11) содержится в следующем утверждении.

Теорема. *Пусть выполнены условия (C1)-(C5). Тогда для СОП* *имеет место представление*

$$L_{n,\theta}(v) = \exp\left\{\lambda_n(v) + \gamma_n(v) + r_n(v)\right\}, \tag{13}$$

где при $n \to \infty$

$$\lambda_n(\cdot) \Rightarrow \omega(\cdot) \quad \textit{в} \quad \mathbb{D}(\Theta), \tag{14}$$

$$\sup_{v\in\Theta}\left|\gamma_n(v) - \frac{v^2}{2}\right| \overset{п.н.}{\to} 0, \tag{15}$$

и

$$\sup_{v\in\Theta}|r_n(v)| \overset{п.н.}{\to} 0. \tag{16}$$

Доказательство теоремы. Согласно формуле Тейлора, имеем представление (12), где

$$\lambda_n(v) = \Delta_{n,\theta}\ \cdot v,$$

$$\gamma_n(v) = \frac{v^2}{2n\mathbb{J}(\theta)}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\theta}l_\theta\left(X_j, Y_{1j}, Y_{2j}; w_j\right),$$

$$r_n(v) = \frac{v^3}{6(n\mathbb{J}(\theta))^{3/2}}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}l_{\theta*}\left(X_j, Y_{1j}, Y_{2j}; w_j\right),$$

и $\theta*$ находится между θ и $\Psi_n\left(\mathbb{J}(\theta)^{-1/2}\cdot v;\theta\right)$. Согласно свойстве ЛАН, при $n \to \infty$ для $\Delta_{n,\theta}$ имеет место центральная предельная теорема (10). Поскольку $\lambda_n(v)$ является линейным функционалом от $\Delta_{n,\theta}$, то по теореме Крамера-Уолда легко показать, что конечномерные распределения процесса $\lambda_n(v)$ сходятся к конечномерным распределениям гауссовского процесса $\omega(v)$. Более того, в силу (10) последовательность $\Delta_{n,\theta}$ является плотным, т.е.

$$\limsup_{n\to\infty} P_\theta\left(|\Delta_{n,\theta}| > \varepsilon_1\right) < \varepsilon_2.$$

Отсюда следует и плотность $\lambda_n(v)$:

$$\limsup_{n\to\infty} P_\theta\left(\sup_{|v_1-v_2|<\delta}|\lambda_n(v_1) - \lambda_n(v_2)| > \varepsilon\right) =$$

$$= \limsup_{n\to\infty} P_\theta\left(|\Delta_{n,\theta}|\sup_{|v_1-v_2|<\delta}|v_1 - v_2| > \varepsilon\right) \leq$$

$$\leq \limsup_{n\to\infty} P_\theta\left(|\Delta_{n,\theta}| > \varepsilon/\delta\right) \leq \limsup_{n\to\infty} P_\theta\left(|\Delta_{n,\theta}| > \varepsilon_1\right) < \varepsilon_2,$$

где $\varepsilon_1 < \varepsilon/\delta$. Таким образом, (14) имеет место. Согласно (12) $M_\theta \gamma_n(v) = \frac{v^2}{2}$ для всех $\theta, v \in \Theta$. Тогда в силу усиленного закона больших чисел

$$\sup_{v\in\Theta}\left|\gamma_n(v) - \frac{v^2}{2}\right| \leq \frac{b^2}{2\mathbb{J}(\theta)}\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\theta} l_\theta\left(X_j, Y_{1j}, Y_{2j}, w_j\right) + \mathbb{J}(\theta)\right| \stackrel{\text{п.н.}}{\to} 0,$$

т.е. (15) также имеет место. Далее, согласно условию (C3) с вероятностью 1:

$$\sup_{v\in\Theta}|r_n(v)| \leq \mathbb{C}n\frac{1}{\left(n\mathbb{J}(\theta)\right)^{3/2}}\sup_{v\in[a,b]}\left\{|v|^3\right\} \leq \frac{\mathbb{C}\,|b|^3}{\left(\mathbb{J}(\theta)\right)^{3/2} n^{1/2}} = \mathbb{O}\left(n^{-1/2}\right),$$

откуда следует и (16). Теорема доказана.

Аналогично устанавливается свойство РАН и для случая векторного параметра.

Литература

1. Абдушукуров А.А. Статистика неполных наблюдений. Ташкент. Университет. 2009. 296 с.

2. Абдушукуров А.А., Нурмухамедова Н.С. Локальная асимптотическая нормальность статистических экспериментов. LAP. Lambert Academic Publishing. 2012. 136 с.

3. Abdushukurov A.A., Nurmuhamedova N.S. Local approximate normality of likelihood ratio statistics in competing ricks model under random censorship fromboth sides. // Far East Journal of Theoretical Statistics. 2013. v.42. N.2. p. 107-122.

4. Ибрагимов И.А., Хасьминский Р.З. Асимптотическая теория оценивания. - М.: Наука. 1979. - 527 с.

5. Лэман Э. Проверка статистических гипотез. - М.: Наука. 1964. 9. Русас Дж. Контигуальность вероятностных мер. - М.: Мир. 1975.- 254 с.

Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека

Uzbek Mathematical
Journal, 2014, №4, pp. 123-127

УДК 511.333

Об одном доказательстве теоремы Дирихле

Роишев А.Р.

Mazkur maqolada Dirixlening arifmetik prograssiyada cheksiz ko'p hadlari tub sonlardan iboratligi haqidagi teoremasining yangi, mavjud isbotlardan farqli - elementar isboti keltirilgan.

In this paper, another different from existing ones - an elementary proof of Dirichlet's theorem that the arithmetic progression contains infinitely many prime members, we propose an algorithm (sieve) of the definition of ordinary members of the progression.

Рассмотрим арифметическую прогрессию

$$l,\ l+k,\ l+2k,\ \dots\ , \tag{1}$$

где l – начальный член, k – разность прогрессии и $0<l<k$, $(k,\ l)=1$.

Доказательство того, что прогрессия (1) содержит бесконечно много простых чисел, впервые получил Дирихле [1]. Для этого он ввел особые теоретика – числовые функции $\chi(n)$, называемые характерами по модулю k, и $L(s,\ \chi)$ рядов Дирихле при комплексных значениях аргумента s.

Доказательство использует то, что характеры имеют одно и то же значение для всех чисел, сравнимых между собой по модулю k, то есть для всех чисел, принадлежащих одной прогрессии с разностью k.

В 1949 г. А.Сельбергом было получено элементарное доказательство этой теоремы (см., [1] с. 44-62).

В данной статье приводится еще одно – элементарное доказательство этой теоремы.

Рассмотрим натуральные числа, не превосходящие N и члены прогрессии (1), относящиеся к этому промежутку, и пусть $p_1,\ p_2,\ \dots\ ,p_s$ нечетные простые числа, не превосходящие $\sqrt{N}$.

Для нечетных простых чисел p_i (за исключением простых делителей l и k) определим те значения n, для которых соответствующий член прогрессии (1) $l + nk$ делится на p_i без остатка. Пусть наименьшее по модулю из них есть n_i. Тогда их множество образует класс чисел по модулю p_i, или, тоже самое, совпадает со значениями линейной функции.

$$y_i = n_i + p_i t, \qquad \texttt{где} \qquad t = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ . \tag{2}$$

Все остальные значения n образуют $p_i - 1$ класс по модулю p_i, или, тоже самое, совпадают со значениями линейной функции.

$$M_i = m_{ij} + p_i t, \qquad \texttt{где} \qquad t = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ . \tag{3}$$

и которые будучи подставлены вместо n в $l + nk$ в прогрессии (1), дают числа, которые на p_i без остатка не делятся, m_{ij} может принимать любое из значений

$$0,\ 1,\ \ldots\ ,\ n_i - 1,\ n_i + 1,\ \ldots\ ,\ p_i - 1. \tag{4}$$

Теорема 1. *Если значение n члена прогрессии (1) $l + nk$ для всех простых чисел $p_i \leq \sqrt{N}$ имеет вид $m_{ij} + p_i t$, $t = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$, то этот член прогрессии является простым числом.*

Доказательство. Так как $l + (m_{ij} + p_i t)k$ нечетное число, то на 2 не делится. По условию на p_i делится член прогрессии $l + nk$, если n вида $n_i + p_i t$, но n вида (3), поэтому этот член на p_i не делится. Отсюда следует, что $l + nk$ ни на одно из простых чисел не делится. Значит, оно является простым числом. Теорема 1 доказана. $\square$

Пусть M_i множество всех элементов, полученных из (3), при соответствующих значениях m_{ij} из (4) и $t = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$.

Комплексами из элементов множеств M_i назовем множества

$$((a_1,\ a_2,\ \ldots\ ,\ a_s))$$

где $a_1,\ a_2,\ \ldots\ ,\ a_s$ элементы, взятые так, что $a_1 \in M_1$, $a_2 \in M_2,\ \ldots\ ,\ a_s \in M_s$.

Другими словами, комплекс есть значение n в $l + nk$ при котором член прогрессии (1) будет простым числом. С ростом N число комплексов также растет.

Таким образом, задача нахождения простых членов прогрессии (1) сводится к определению соответствующих комплексов.

Если из числа наименьших неотрицательных вычетов элемент a_1 может быть выбран $p_1 - 1$ способом (p_i число классов по модулю p_i), элемент a_2 – выбран $p_2 - 1$ способом и так далее до элемента a_s, который может быть выбран $p_s - 1$ способом, то комплекс $((a_1,\ a_2,\ \dots\ ,\ a_s))$ может быть выбран

$$(p_1 - 1)(p_2 - 1)...(p_s - 1)$$

способом.

Число комплексов, их обозначим через $K(N)$, увеличится, если учесть, что для каждого простого p_i из (3) $t = 0,\ 1,\ 2,\ \dots\ ,b_i$, где b_i означает наибольшее из значений t для этого промежутка $l+(n_i+p_ib_i)k \le N$.

Если хотя бы один элемент комплекса будет вида (2), то соответствующий ему член прогрессии не окажется простым числом.

Теорема 2. *Прогрессия* (1) *при* $(l,\ k) = 1$ *содержит бесконечное множество простых чисел.*

Доказательство. Число комплексов $K(N)$, соответствующих простым числам, не превосходящим $\sqrt{N}$ увеличится, если увеличится N.

Пусть $N \to \infty$, тогда число комплексов тоже неограниченно растет. А это равносильно тому, что $\pi(N,\ k,\ l)$ – число простых чисел в прогрессии (1), не превосходящих N, также стремится к бесконечности. Этим теорема доказана. □

Для практического определения последующих простых членов прогрессии поступаем следующим образом.

Предположим, что существование простых членов в прогрессии (1) известно до натурального числа N_1. Требуется показать, что существуют простые члены прогрессии (1), большие N_1.

Пусть

$$N > N_1 \qquad \text{и} \qquad p_1,\ p_2,\ \dots\ ,\ p_s \tag{5}$$

простые числа, не превосходящие $\sqrt{N}$.

Выпишем отдельно значения n членов прогрессии (1), относящихся к промежутку $(N_1,\ N)$.

К выписанным значениям n применим метод решета. Будем поочередно вычеркивать числа, кратные числам вида (2). Оставшиеся не вычеркнутыми числа образуют значения комплексов, а соответствующие им члены прогрессии, на основании теоремы 1, окажутся простыми числами. Каждому такому комплексу соответствует один простой член прогрессии (1), большее N_1.

Если в промежутке $(N_1,\ N)$ не окажется комплекса с соответствующим простым числом прогрессии (1), то расширим этот промежуток, увеличив N до того, что во вновь полученном промежутке оказался комплекс, которому соответствует простой член прогрессии. Очевидно, что множество таких чисел (комплексов) не пусто.

Все сказанное проиллюстрируем на конкретном примере.

Прогрессия

$$1+6n, \qquad n=0,\ 1,\ 2,\ \dots \tag{6}$$

содержит бесконечное множество простых чисел.

Доказательство. Для простых чисел $P_1=5$, $P_2=7$, ... (ввиду того, что 2 и 3 являются делителями разности прогрессии, сюда не вошли) определим те значения n, при которых член прогрессии $1+6n$, делится без остатка на p_i. Их расположим в следующей таблице.

В таблице на первой строке расположены простые числа p_i, на второй строке – наименьшее по модулю значение $n=n_i$, при котором $1+6n_i$ делится на p_i без остатка.

p_i	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47
n_i	-1	1	-2	2	-3	3	-4	-5	5	6	-7	7	-8

p_i	53	59	61	67	71	73	79	83	89	97	101	103
n_i	-9	-10	10	11	-12	12	13	-14	-15	16	-17	17

p_i	107	109	113	127	131	137	139	149	151	157
n_i	-18	18	-19	21	-22	-23	23	-25	25	26

p_i	163	167	173	179	181	191	193	197	199	211
n_i	27	-28	-29	-30	30	-32	32	-33	33	35

p_i	223	227	229	233
n_i	37	-38	38	-39

Пусть известны все простые числа, принадлежащие прогрессии (6), например, до $N_1=4020$. Требуется показать, что существуют простые числа этой прогрессии, большие, чем 4020.

Рассмотрим произвольный отрезок натуральных чисел $[4018,\ 4202]$ и определим, существуют ли простые числа этого отрезка, являющиеся членами прогрессии (6).

В данном промежутке расположены следующие члены прогрессии (6) $6\cdot670+1$, $6\cdot671+1$, ..., $6\cdot700+1$ и соответствующими значениями n для них являются: 670, 671, 672, 673, 674, 675, 676, 677, 678, 679, 680, 681, 682, 683, 684, 685, 686, 687, 688, 689, 690, 691, 692, 693, 694, 695, 696, 697, 698, 699, 700, к которым, применим метод решета.

Простыми числами, не превосходящими $\sqrt{420_2}$, являются 5, 7, ..., 59, 61.

Из последовательности значений n нужно исключить числа, для которых соответствующий член прогрессии (6) будет составным числом. Поочередно будем вычеркивать числа вида $n_i + p_i t$, где $t = 1, 2, 3, \ldots$ до простого числа, не превосходящего $\sqrt{420_2}$. Вычеркиваем числа вида $-1+5t$, (674, 679, 684, 689, 694, 699), для которых соответствующие члены прогрессии (6) делятся на 5. Далее вычеркиваем числа вида $1 + 7t$ (673, 680, 687, 694), $-2 + 11t$ (680, 691), $2 + 13t$ (678, 691), $-3 + 17t$ (677, 694), $3 + 19t$ (687), $-4 + 23t$ (686), $-5 + 29t$ (691), $5 + 31t$ (687), $6 + 37t$ (672), $-7+41t$ (690), $7+43t$ (695), $-8+47t$ (697), $-9+53t$ (680), $-10+59t$ (689), $10 + 61t$ (681) для которых соответствующие члены прогрессии делятся без остатка соответственно на 7, 11, 13, ..., 59, 61.

Останутся не вычеркнутыми числа 670, 671, 675, 676, 682, 683, 685, 688, 692, 693, 696, 700.

Не вычеркнутые числа являются значениями комплексов, о которых говорилось выше. Каждому такому комплексу соответствует простой член прогрессии (6), а именно:
$1 + 6 \cdot 670 = 4021$, $1 + 6 \cdot 671 = 4027$, $1 + 6 \cdot 675 = 4051$, $1 + 6 \cdot 676 = 4057$, $1 + 6 \cdot 682 = 4093$, $1 + 6 \cdot 683 = 4099$, $1 + 6 \cdot 685 = 4111$, $1 + 6 \cdot 688 = 4129$, $1 + 6 \cdot 692 = 4153$, $1 + 6 \cdot 693 = 4159$, $1 + 6 \cdot 696 = 4177$, $1 + 6 \cdot 700 = 4201$.

Для наглядности рассмотрим значение комплекса 670, что представляется в виде $670 = 5 \cdot 134 + 0 = 7 \cdot 95 + 5 = 11 \cdot 60 + 10 = 13 \cdot 51 + 7 = \ldots = 59 \cdot 11 + 21 = 61 \cdot 10 + 60$, откуда видно, что элементами комплекса являются $a_1 = 5 \cdot 134 + 0$, $a_2 = 7 \cdot 95 + 5$, ... , $a_{15} = 59 \cdot 11 + 21$, $a_{16} = 61 \cdot 10 + 60$.

Мы провели процесс нахождения простых членов арифметической прогрессии для произвольного, наугад выбранного отрезка натуральных чисел.

Нетрудно заметить, что этот процесс можно провести для отрезка любой длины и на любом промежутке множества натуральных чисел.

Аналогичные вычисления можно провести относительно любой арифметической прогрессии.

Литература

1. К.Прахар "Распределение простых чисел". М:. Мир. 1967. С. 112-187.

Ташкентский банковский колледж

Uzbek Mathematical
Journal, 2014, №4, pp. 128-133

УДК 517.97

О задаче 0-управляемости линейной дискретной системы с суммарными ограничениями на управление

Сотволдиев А.И.

Boshqaruv parametriga yig‘indi ko‘rinishidagi chegara qo‘yilgan chiziqli diskret sistemaning to‘liq 0-boshqariluvchan bo‘lishi uchun zarur va yetarli shartlar topilgan.

Necessary and sufficient conditions for the 0-contrability of the linear discrete system with the constraints in a form of sum for the parameters of the control are found.

В работе изучается задача управления в линейных системах с дискретным временем. В случае динамических систем с непрерывным временем аналогичные задачи были исследованы в ряде работ (см., например, [1]-[7]). Работа опирается на методы, использованные в [8-10].

Постановка задачи. Рассматривается линейная дискретная управляемая система

$$z(t+1) = Az(t) + Bu(t), \tag{1}$$

где $z \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, t – номер шага, A, B – постоянные матрицы соответствующих размерностей, u – параметр управления.

Последовательность $u(\cdot) : N \to \mathbb{R}^m$, удовлетворяющая условию

$$\|u(\cdot)\| = \left(\sum_{t=0}^{\infty} |u(t)|^p \right)^{1/p} \leq \rho, \quad \rho > 0, \tag{2}$$

называется управлением, где N – множество неотрицательных целых чисел и $p > 1$.

Условие (2), являющиеся дискретными аналогами интегральных ограничений, естественно назвать суммарными ограничениями. Целью задачи управления в системе (1) является осуществление равенства $z(t) = 0$ при некотором t.

Критерий 0-управляемости в целом. Упростим вид системы (1) посредством невырожденного линейного преобразования. Ясно, что понятие 0-управляемости инвариантно относительно таких преобразований. Исходя из этого будем считать, что после линейной замены в системе (1) матрица коэффициентов приняла действительную жорданову форму $A = diag\{I_1, I_2, \ldots, I_\tau, K_1, K_2, \ldots, K_\eta\}$, где I_j – клетки, соответствующие собственным числам, отличным от 0, а K_j – клетки, соответствующие нулевым собственным числам (если таковые имеются, разумеется). Теперь систему (1) можно записать в виде

$$x(t+1) = A_1 x(t) + B_1 u(t), \quad x \in \mathbb{R}^q, \tag{3}$$

$$y(t+1) = A_2 y(t) + B_2 u(t), \quad y \in \mathbb{R}^{n-q}, \tag{4}$$

при этом все собственные числа действительной матрицы A_1, составленной из клеток I_α, отличны от нуля, а все собственные числа действительной матрицы A_2, составленной из клеток типа K_j, равны нулю. Размерности этих матриц равны $q \times q$ и $(n-q) \times (n-q)$ соответственно, а размерности B_1 и B_2 – $q \times m$ и $(n-q) \times m$ соответственно.

Лемма [8]. *Пусть $z_0 = (x_0, y_0)$ – произвольное начальное состояние. Предположим, что существует управление $\bar{u}(t)$, $t = 0, 1, \ldots, t_* - 1$, такое, что для соответствующей траектории $z(\cdot) = (x(\cdot), y(\cdot))$ системы (1) окажется $x(t_*) = 0$. Если управление $\bar{u}(t)$ продолжить для $t = t_*, t_* + 1, \ldots$, полагая $\bar{u}(t) = 0$, то $z(t_* + n - q) = 0$.*

Прежде всего отметим, что в [9, теорема 2] доказана следующая

Теорема 1. *Если B – единичная $(n \times n)$ – матрица и все собственные числа матрицы A по модулю не превосходят единицы, то система (1) 0-управляема в целом.*

Теорема 2. *Система (1) 0-управляема в целом тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

а) все собственные числа матрицы A по модулю не превосходят единицы;

б) система (3) управляема по Кальману [4], т.е.

$$\operatorname{rank} \| B_1, \ A_1 B_1, \ \ldots, \ A_1^{q-1} B_1 \| = q.$$

Доказательство достаточности. Пусть условия а) и б) выполнены, $z_0 = (x_0, y_0)$ – произвольное начальное состояние. При этом в силу леммы можно считать $x_0 \neq 0$. Требуется построить управление $u(\cdot)$, приводящее траекторию $z(t)$ в точку $z = 0$.

Пусть $u(\cdot)$ – некоторое управление, а $x(\cdot)$ ее реализация, т.е. решение системы (3), удовлетворяющее условию $x(0) = x_0$. Тогда

$$x\left(mq\right) = A_1^q x(m-1)q + \sum_{i=0}^{q-1} A_1^m B_1 u\left((m-1)q + i\right), \quad m = 1,\, 2,\, \ldots . \quad (5)$$

Введем обозначения

$$\mathbf{u} = \left(\begin{array}{c} u^{(0)} \\ u^{(1)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u^{(q-1)} \end{array} \right), \quad u^{(j)} \in \mathbb{R}^m, \quad j = \overline{0,\, q-1},$$

$$W(m) = x(mq), \qquad m = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots, \qquad \mathbb{A} = A_1^q,$$

$$\mathbb{B} = \left(A_1^{q-1} B_1,\, A_1^{q-2} B_1,\, \ldots,\, B_1 \right), \qquad \mathbf{w} = \mathbb{B}\mathbf{u}.$$

Таким образом, размерности векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{w}$ соответственно равны mn и q, а размерность матрицы $\mathbb{B}$ равна $q \times mn$. Теперь система (5) примет вид

$$W(k+1) = \mathbb{A}W\left(k\right) + \mathbf{w}(k), \qquad k = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots . \quad (6)$$

Поскольку по условию теоремы $\mathrm{rank}\mathbb{B} = q$, то для каждого вектора $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^q$ существует вектор $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{mn}$, удовлетворяющий равенству $\mathbf{w} = \mathbb{B}\mathbf{u}$. Для нахождения этого вектора введем в рассмотрение псевдообратную матрицу $\mathbb{B}^+$ следующим ее представлением ([11, стр. 33]): $\mathbb{B}^+ = \mathbb{B}^T(\mathbb{B}\mathbb{B}^T)^+$, где $\mathbb{B}^T$ – транспонированная матрица $\mathbb{B}$. Ясно, что $\mathbb{B}\mathbb{B}^T$ – симметрическая, положительно определенная матрица размерности $q \times q$. Из равенства $\mathrm{rank}\mathbb{B} = q$ вытекает, что строки матрицы $\mathbb{B}^T$ линейно независимы. Поэтому $(\mathbb{B}\mathbb{B}^T)^+ = (\mathbb{B}\mathbb{B}^T)^{-1}$, так что

$$\mathbb{B}^+ = \mathbb{B}^T(\mathbb{B}\mathbb{B}^T)^{-1}, \qquad \mathbf{u} = \mathbb{B}^+\mathbf{w}.$$

Положим $\beta = \|\mathbb{B}^+\|$ и $\rho_0 = (q\beta)^{-1}\rho$.

Так как все собственные числа матрицы A_1 по модулю не превосходят единицы, то все собственные числа матрицы $\mathbb{A}$ также по модулю не превосходят единицы. Тогда в силу теоремы 2 система (6) 0-управляема в целом: для каждого начального положения $W(0) = x_0$ существует последовательность $\mathbf{w}_*(0)$, $\mathbf{w}_*(1)$, $\mathbf{w}_*(2)$, … , удовлетворяющая ограничению

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\mathbf{w}_*(k)|^p \leq \rho_0^p,$$

такая, что для соответствующего решение $W(\cdot)$ задачи Коши (6) имеет место равенство $W(T) = 0$ при некотором T.

Теперь с помощью последовательности $\mathbf{w}_*(\cdot)$ определим функцию управления $u(\cdot)$ для системы (3). Пусть натуральное число t представлено в виде $t = kq + l$ (где k и l, $l < q$, – неотрицательные целые числа) и

$$\mathbf{u}_*(k) = \begin{pmatrix} u_*^{(0)}(k) \\ u_*^{(1)}(k) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_*^{(q-1)}(k) \end{pmatrix} = \mathbb{B}^+ \mathbf{w}_*(k), \qquad k = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots .$$

Положим $u_*(t) = u_*^l(k)$. Тогда для соответствующего решения $x(\cdot)$ системы (3) имеет место $x(kq) = W(k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, и $x(Tq) = W(T) = 0$, что легко проверить.

Управление $u_*(\cdot)$, определенное таким образом, удовлетворяет ограничению (2). Действительно,

$$\|u_*(\cdot)\|_p = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{q-1} \left| u_*^l(k) \right|^p \right)^{1/p} \leq q \sum_{k=0}^{\infty} \left(|\mathbf{u}_*(k)|^p \right)^{1/p} \leq$$

$$\leq q \sum_{k=0}^{\infty} \left(\left| \mathbb{B}^+ \mathbf{w}_*(k) \right|^p \right)^{1/p} \leq q \sum_{k=0}^{\infty} \left(\|\mathbb{B}^+\| |\mathbf{w}_*(k)|^p \right)^{1/p} =$$

$$= q\beta \sum_{k=0}^{\infty} \left(|\mathbf{w}_*(k)|^p \right)^{1/p} = q\beta \|\mathbf{w}_*(\cdot)\|_p \leq q\beta\rho_0 = \rho.$$

Доказательство необходимости. Теперь, предполагая хотя бы одно из условий а), б) теоремы 2 не выполненным, укажем начальную точку z_0, такую, что ни при каком управлении $u(t)$ соответствующую траекторию невозможно привести в начало координат.

Известно, что если условие б) теоремы 2 (условие Кальмана) не выполнено, то система (3) не является 0-управляемой [4]. Поэтому достаточно рассмотреть ситуацию, когда не выполнено условие а), т.е. матрица A_1 имеет собственное число λ такое, что $|\lambda| > 1$.

Возможны два случая.

1^0. λ – вещественное число. Тогда одно из уравнений (скажем, с номером j) системы (3) имеет вид $\xi(t+1) = \lambda\xi(t) + \bar{u}(t)$, $t = 0, 1, 2, \dots$, где $\xi = [z]_j$ и $\bar{u} = [Bu]_j$. Отсюда $|\xi(t+1)| = |\lambda\xi(t)| - |\bar{u}(t)|$, $t = 0, 1, 2, \dots$.

2^0. $\lambda = \alpha + i\beta$ – комплексное число, $\beta \neq 0$. Тогда система (3) содержит подсистему вида $\xi(t+1) = K\xi(t) + \bar{u}(t)$, где $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, $\bar{u}(t) = (\bar{u}_1, \bar{u}_2)$, $\xi_1 = [z]_j$, $\xi_2 = [z]_{j+1}$ и $\bar{u}_1 = [Bu]_j$, $\bar{u}_2 = [Bu]_{j+1}$ для соответствующего j,

$$K = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Здесь $[\cdot]_j$ означает j-координату вектора. Используя равенство $|K\xi| = |\lambda||\xi|$, будем иметь

$$|\xi(t+1)| \geq |K\xi(t)| - |\bar{u}(t)| \geq |\lambda||\xi(t)| - |\bar{u}(t)|, \qquad t = 0, 1, 2, \dots.$$

Отсюда в обоих случаях будем иметь

$$|\xi(t+1)| \geq |\lambda|^{t+1}|\xi(0)| - \sum_{i=0}^{t} |\lambda|^{t-i}|\bar{u}(i)|.$$

Тогда, используя неравенство Гельдера, имеем, что

$$|\xi(t+1)| \geq |\lambda|^{t+1}|\xi(0)| - \left(\sum_{i=0}^{t} |\lambda|^{p(t-i)}\right)^{1/p} \left(\sum_{i=0}^{t} |\bar{u}(i)|^p\right)^{1/p} = |\lambda|^{t+1}|\xi(0)| -$$

$$- \left(\frac{|\lambda|^{p(t+1)} - 1}{|\lambda|^p - 1}\right)^{1/p} \|u(\cdot)\|_p > |\lambda|^{t+1} \left(|\xi(0)| - \frac{\|B\| \cdot \rho}{(|\lambda|^p - 1)^{1/p}}\right).$$

Поэтому, если начальная точка выбирается так, что

$$|\xi(0)| - \frac{\rho\|B\|}{(|\lambda|^p - 1)^{1/p}} > 0,$$

то $|z(t)| \geq |\xi(t)| > 0$ при всех $t = 0, 1, 2, \ldots$.

Теорема 2 доказана полностью. $\square$

Литература

1. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. –М.: Наука, 1967. 472 с.

2. Никольский М.С. Прямой метод в линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями. Управляемые системы. Новосибирск, 1969. Вып. 2. –С. 49-59.

3. Габасов Р., Кирилова Ф. Качественная теория оптимальных процессов. –М.: Наука, 1971. 508 с.

4. Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. –М.: Наука, 1972. 576 с.

5. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гармкледзе Р.Б., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. –М.: Наука, 1976. 392 с.

6. Субботин А.И., Ченцов А.Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. –М.: Наука, 1981. 288 с.

7. Красовский Н.Н. Управления динамической системой. –М.: Наука, 1985. 520 с.

8. Азамов А.А., Кучкаров А.Ш. О задачах управляемости и преследования в линейных дискретных системах // Известия РАН: Теория и системы управления. 2010. №3. –С. 21-26.

9. Ибрагимов Г.И. О задачах линейной дискретной игры преследования // Мат. заметки, 2005. Т. 77. №5. –С. 707-718.

10. Сиротин А.Н., Формальский А.М. Области достижимости управляемость линейных управляемых систем // Известия РАН: Теория и системы управления. 2002. №4. –С. 5-16.

11. Лоусон Ч., Хенсон Р. Численное решение задач метода наименьших квадратов. –М.: Наука, 1986. 232 с.

Институт математики при НУУз

Uzbek Mathematical
Journal, 2014,№4, pp.134-143

УДК 517.9

О существовании обобщенных приспособленных систем координат

Солеева Н.А.

Bu maqolada biz G-muofiqlashgan va G-balandlik deb ataluvchi tushunchalarni formal darajali qatorlar va mos ravishda silliq, haqiqiy analitik funksiyalar uchun kiritamiz, bunda G-diffeomorfizmlar gruppasi $Diff$-ning qism gruppasi. Biz G-muofiqlashgan koordinatalar sistemasining mavjudligi haqidagi teoremalarni $Diff$-gruppaning ba'zi qism gruppalari uchun isbotlaymiz.

In this paper we introduce notions of so-called G-adapted and G-height for formal power series correspondingly for smooth, real analytic functions, where G is a subgroup of diffeomorphisms group $Diff$. We prove Theorems on existence of G-adapted coordinates system for some subgroups of the group $Diff$.

1. Введение

Настоящая статья посвящена алгоритмам построения так называемых приспособленных систем координат для данной функции. Понятие приспособленной системы координат для вещественно-аналитических функций, введенное А.Н. Варченко, играет важную роль в изучении асимптотических разложений осцилляторных интегралов в бесконечности [4]. Это понятие связано с идеей В.И. Арнольда [1] о применении многогранников Ньютона для исследования особенностей фазовой функции (см. также [2]). А. Н. Варченко дал достаточные условия приспособленности данной системы координат и доказал существование приспособленной системы координат для аналитических функций, не имеющих кратных компонентов. Также А.Н. Варченко привел пример полиномиальной функции трех переменных, для которых такого рода система координат не существует [8]. Хотя, существует аналог такого рода систем для случая, когда исходная функция является выпуклой конечного типа [7]. В работе [5] доказано существование приспособленных систем координат для произвольных выпуклых аналитических функций.

Позже, Хасановым Г.А. [9] найдено функциональное уравнение для построения приспособленной системы координат. Этот новый метод, избегая метода разрешения особенностей, позволил расширить результаты Варченко к более общему случаю гладких функций конечного типа.

Тем не менее, это было далеко не конструктивное доказательство существования приспособленной системы координат. Для построения приспособленной системы координат с помощью компьютерной программы этот метод не пригоден.

Для аналитических функций, построение приспособленной системы координат с помощью разложения в ряд Пюзио было проведено в работе [6] Д.Х.Фонг, И.М. Стейн и Дж.А. Штурма.

В работе [3] представлен более элементарный подход к этим результатам, который также основан на разложении в ряд Пюзио корней данной функции. Этот метод применим не только для вещественно-аналитических функции, но и для произвольных гладких функций конечного типа. В частности, в этой работе показано, что условия Варченко являются на самом деле необходимыми и достаточными для приспособленности данной системы координат.

Кроме того, метод работы [4] может быть использован для построения приспособленной системы координат формального степенного ряда с коэффициентами из некоторого более общего поля. Такого рода обобщения полезны при составлении компьютерных программ. Более того, в приложении встречаются задачи, где требуются обобщения понятия приспособленной системы координат. Например, в связи с проблемой об ограничении преоброзования Фурье на невыпуклых гиперповерхностях, в работе [3] рассматриваются понятия линейной высоты и линейной приспособленности систем координат.

Мы рассмотрим обобщения этих понятий в случае некоторой подгруппы группы диффеоморфизмов.

2. Некоторые понятия и определения

Следуя [2], [8], введем некоторые обозначения. Пусть $Z_+ \subset \mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}$ множество всех неотрицательных целых чисел, всех неотрицательных действительных чисел, и всех действительных чисел соответственно. В дальнейшим через $\mathbb{K}$ обозначается некоторое подполе поля вещественных чисел $\mathbb{R}$. Пусть $\Lambda \subset Z_+^n$ некоторое подмножество.

Определение 1. Многогранником Ньютона множества Λ называется выпуклая оболочка множества $\bigcup_{k\in\Lambda}(k+\mathbb{R}_+^n)$ в $\mathbb{R}_+^n$.

Пусть Φ гладкая функция в окрестности нуля. Рассмотрим ряд Тейлора этой функции с центром в начале координат:

$$\Phi_x \approx \sum_{k \in Z_+^n} c_k x^k, c_n \in \mathbb{K}, \tag{1}$$

где $\mathbb{K}$ - некоторое подполе поля $\mathbb{R}$. В частности, это может быть полем рациональных чисел, конечным расширением поля рациональных чисел или полем вещественных чисел.

Носителем ряда Тейлора Φ_x называется множество вида:

$$supp(\Phi_x) = \{k \in Z_+^n \backslash \{0\} : c_k \neq 0\}.$$

Соответствующий многогранник Ньютона к ряду (1) определяется многогранником Ньютона множества $\Lambda := supp(\Phi_x)$ и обозначается через $N(\Phi_x)$. Пусть фиксирована система координат в $\mathbb{R}^n$ и через Φ_x обозначим ряд Тейлора функции Φ в данной системе координат.

Определение 2. Расстоянием от начала координат до многогранника Ньютона называется следующее число

$$d(x) = inf\{t : (t, t, ..., t) \in N(\Phi_x)\}.$$

Вообще говоря, расстояние от начала координат до многогранника Ньютона зависит от выбора локальной системы координат.

Определение 3. Главной гранью многогранника Ньютона называется грань минимальной размерности, содержащая точку $(d\,(x)\,, \ldots, d(x))$.

Обозначим через π главную грань многогранника Ньютона $N(\Phi_x)$. Соответствующую часть ряда Тейлора к главной грани обозначим через Φ_π. Если π компактное множество, то Φ_π является квазиоднородным многочленом, иначе - Φ_π рассматривается как формальный степенной ряд.

3. Постановка задачи

Пусть $Diff$-группа ростков диффеоморфизмов $\mathbb{R}^n$, сохраняющих начало координат. Группа $Diff$ естественно действует в пространстве ростков гладких функций по формуле:

$$\varphi^* \Phi = \Phi\left(\varphi^{-1}\left(x\right)\right).$$

Пусть Φ - фиксированная функция. Тогда для любого $\varphi \in Diff$, естественно определяется расстояние $d_\varphi(\Phi)$, т.е. $d_\varphi(\Phi)$ расстояние от начала координат до многогранника Ньютона $N(\varphi^*\Phi)$.

Высотой функции Φ называется положительное число, определяемое следующим соотношением:

$$h(\Phi) = Sup_{\varphi\in Diff}\left\{d_{\varphi}\left(\Phi\right)\right\}.$$

В приложении встречается не вся группа диффеоморфизмов, но и некоторые ее подгруппы. Например, в работе [4], в связи с проблемой об ограничении преобразования Фурье на невыпуклых гиперповерхностях, был рассмотрен частный случай, когда G является полной линейной группой.

Теперь мы вводим более общее понятие G-высоты и G-приспособленности системы координат к данной функции.

Пусть G некоторая подгруппа группы $Diff$ и $\mathcal{F}$ некоторое подмножество множества гладких функций.

Пусть для любого $\Phi \in \mathcal{F}$ и $\varphi \in G$, $\varphi^*\Phi \in \mathcal{F}$, т.е. G действует на множестве $\mathcal{F}$.

G-высотой функции Φ, обозначаемой через $h_G\left(\Phi\right)$, называется положительное число определяемое следующим соотношением:

$$h_G(\Phi) = Sup_{\varphi\in G} d_{\varphi}(\Phi).$$

Система координат, задаваемая заменой переменных $y = \varphi(x)$ называется, *G-приспособленной к функции* Φ, если выполняется равенство $d_{\varphi}(\Phi) = h_G(\Phi)$.

Так как G является подгруппой группы $Diff$ и $\mathcal{F}$ является подмножеством множества всех гладких функций, то имеет место неравенство $h_G(\Phi) \le h(\Phi)$.

Естественно возникают следующие вопросы:

- существуют ли G приспособленные системы координат для Φ?

- для каких функций Φ (или для класса функций $\mathcal{F}$) выполняется равенство $h_G\left(\Phi\right) = h\left(\Phi\right)$?

- существует ли приспособленная система координат с полиномиальной заменой переменных для полинома?

В данной работе получены ответы на эти вопросы в частном случае, когда $\mathcal{F}$ - множество гладких функций, зависящих от двух переменных, с Тейлоровскими коэффициентами из поля $\mathbb{K}$ и G- подгруппа группы диффеоморфизмов $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$, где $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{F}$. Точнее $\varphi \in G$ состоит из пар $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$, где $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{F}$.

Мы имеем дело с полиномиальными функциями над некоторым полем, таких как поле рациональных чисел или конечное расширение поля рациональных чисел. Тогда мы должны решить уравнения с коэффициентами из этого поля.

Рассмотрим формальный степенной ряд или аналитическую (гладкую) функцию с формальным степенным рядом с коэффициентами из некоторого поля $\mathbb{K}$

$$f\left(x_1, x_2\right) \sim \sum_{k,j=0}^{\infty} c_{kj} x_1^k x_2^j. \tag{2}$$

Множество таких функций обозначим через $\mathbb{K}\{x_1, x_2\}$, а также мы ограничимся заменой переменных $\varphi(\varphi_1, \varphi_2)$, так что $\varphi_j(j = 1, 2)$ имеет формальный степенной ряд с коэффициентами из поля K.

Точнее мы будем предполагать, что

$$\varphi_\nu(x_1, x_2) \sim \sum_{k,j=0}^{\infty} c_{kj}^{\nu} x_1^k x_2^j$$

$\nu = 1, 2$, причем $c_{00}^{\nu} = 0$, а также

$$det \begin{pmatrix} c_{10}^1 & c_{01}^1 \\ c_{10}^2 & c_{01}^2 \end{pmatrix} \neq 0$$

Предложение 1. $G(\mathbb{K})$ имеет структуру группы.

Доказательство. Предложение может быть доказано с использованием действий над формальными степенными рядами. Однако мы предпочли доказательство основанное на классической лемме Бореля. Пусть $\varphi, \psi \in G(\mathbb{K})$, тогда, согласно классической лемме Бореля, существуют гладкие отображения φ^c, ψ^c такие, что

$$\partial_1^k \partial_2^j \varphi_\nu^c(0, 0) = c_{kj}^{\nu} k! j!$$

а также

$$\partial_1^k \partial_2^j \psi_\nu^c(0, 0) = d_{kj}^{\nu} k! j!$$

следовательно $\Psi := \varphi^c \circ \psi^c$ удовлетворяет условиям:

1. $\Psi(0) = 0$;

2. $detJ\Psi(0) = det(J\varphi^c)(0) \cdot det(J\psi^c)(0) \neq 0$, где $J\Psi$ Якобиан отображения $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2)$;

3. для любых неотрицательных чисел k и j

$$\partial_1^k \partial_2^j \Psi_\nu(0,0) \in \mathbb{K},\ \nu = 1,2.$$

Утверждение 3) следует из формулы дифференцирования сложной функции.

Более того, если ряд ψ_1, ψ_2 формально подставить в ряд для φ_1, φ_2, то мы получим формальный ряд Тейлора функций Ψ_1, Ψ_2.

Аналогично, если $\varphi \in G(\mathbb{K})$ и φ^c гладкая функция, определяемая из леммы Бореля, то $detJ\varphi^c(0) \neq 0$. Следовательно, существует диффеоморфное отображение ψ^c такое, что $\varphi^c \circ \psi^c = E$, где E единичное отображение. Далее, формула дифференцирования обратного отображения показывает, что

$$(\partial_1^k \partial_2^j \psi^c)(0) \in \mathbb{K}.$$

Следовательно, если взять

$$\psi \sim \sum_{k,j=0}^{\infty} \frac{1}{k!j!} \partial_1^k \partial_2^j \psi^c(0) x_1^k x_2^j$$

то $\psi \in G(\mathbb{K})$. Поэтому, подставляя ряд ψ в ряд φ мы получим $\varphi \circ \psi(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$. Что и требовалось доказать. Предложение 1 доказано. □

Группа $G(\mathbb{K})$ естественно действует на множество функций $\mathbb{K}\{x_1, x_2\}$.

Покажем, что если мы работаем с некоторым полем $\mathbb{K}$, то приспособленная система координат может быть определена функцией с формальными степенными рядами над полем $\mathbb{K}$.

4. Основные результаты

Основные результаты работы содержатся в следующих теоремах.

Теорема 1. *Предположим, Φ формальный степенной ряд*

$$\Phi(x_1, x_2) := \sum_{|\alpha| \geq 1} c_\alpha x^\alpha, \tag{3}$$

где $c_\alpha \in \mathbb{K}$. Тогда существует преобразование $\varphi \in G$, такое что $h_G(\Phi) = d(\varphi^* \Phi)$. Более того, для функции класса $\mathbb{K}\{x_1, x_2\}$ выполняется равенство $h_G(\Phi) = h(\Phi)$.

Теорема 2. *Пусть Φ аналитическая (гладкая) функция, такая,* *что для любого мульти- индекса* $\alpha \in Z_+^n$

$$\frac{\partial^{|\alpha|}\Phi(0)}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}} \in \mathbb{K}.$$

Тогда существует аналитический (гладкий) диффеоморфизм $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$, *удовлетворяющий условиям* $h_G(\Phi) = d(\varphi^*\Phi)$, *причем для любого мульти-индекса* $\beta \in Z_+^n$

$$\frac{\partial^{|\beta|}\varphi_j(0)}{\partial x_1^{\beta_1}\cdots\partial x_n^{\beta_n}} \in \mathbb{K},\ \ j = 1, 2.$$

Более того, если Φ *является вещественно аналитической (гладкой) функцией, то диффеоморфизм* φ *задается вещественно-аналитическими (гладкими) функциями, при этом выполняется равенство* $h_G\left(\Phi\right) = h\left(\Phi\right)$.

Вообще говоря, для полиномиалных функций $\Phi \in \mathbb{K}[x_1, x_2]$ не существуют приспособленные системы координат с полиномиальным отображением.

Пример 1.

$$\Phi(x_1, x_2) = (1 + x_1)^{10}(x_2 - \frac{x_1}{1 + x_1})^3.$$

Очевидно, что $\Phi(x_1, x_2)$ является полиномиальный функцией. Для нее приспособленная система координат задается фукциями $y_1 = x_1,\ y_2 = \frac{x_1}{1+x_1}$.

Следовательно, для полиномов может не существовать приспособленная система координат с полиномиальными заменами переменных. Что дает отрицательный ответ на третий вопрос.

Замечание 1. В теоремах 1, 2 важно условие $\Phi \in\ \mathbb{K}\{x_1, x_2\}$. Вообще говоря, без этого условия для данной подгруппы $G(\mathbb{K})$ равенство $h_G\left(\Phi\right) = h\left(\Phi\right)$ не имеет места.

Действительно, если $\mathbb{K} = Q$

$$\Phi = \left(x_2 - \sqrt{2}x_1^2\right)^2.$$

То легко показать, что $h_G\left(\Phi\right) = d = \frac{4}{3} < h(\Phi) = 2$.

Разумеется, условие $\Phi \in\ \mathbb{K}\{x_1, x_2\}$ не является необходимым для выполнения равенства $h_G(\Phi) = h(\Phi)$.

Пример 3.

$$\Phi = \left(x_2 - x_1^2\right)^2 + \sqrt{2}x_1^5.$$

Здесь $y_2 = x_2 - x_1^2, y_1 = x_1$ приспособлена и $h_G(\Phi) = h(\Phi) = \frac{10}{7}$.

5. Вспомогательное утврждение

Пусть $\mathbb{K}$ и E подполе поля $\mathbb{R}$. Если $\mathbb{K} \subset E$, то E называется расширением поля $\mathbb{K}$. Число $\theta \in E$ называется алгебраическим числом над $\mathbb{K}$, если θ является корнем полиномиального уравнения $p(y) = 0$, где $p \in \mathbb{K}[y]$ является ненулевым многочленом. В частности, все элементы поля $\mathbb{K}$ суть алгебраические числа. Существует единственный (с точностью до умножения на ненулевые числа поля $\mathbb{K}$) многочлен минимальной степени $m \geq 1$ с корнем θ. Такое число m называется степенью θ.

Лемма 1. *Если a корень многочлена $p(y) = 0$ ($p \in \mathbb{K}[y]$) с кратностью $m > deg(p)/2$, то $a \in \mathbb{K}$.*

Замечание 2. *Предположим, θ есть алгебраическое число степени m и многочлен $p \in \mathbb{K}[y]$ имеет корень θ. Тогда для кратности θ имеем оценку $\nu(\theta) \leq deg(p)/m$.*

6. Доказательство теоремы 1.

Если данная система координат x не приспособлена к Φ, то π - компактная грань (см. [3], а также [2]). Следовательно, вес, то есть упорядоченная пара рациональных чисел (κ_1, κ_2) определяется однозначно и без потери общности можно считать, что $\kappa_2 \geq \kappa_1$, в противном случае мы можем поменять местами переменные x_1 и x_2. Тогда $\frac{\kappa_2}{\kappa_1} := m \geq 1$ является натуральным числом. Согласно предложению 2.2. работы [3] многочлен Φ_π записывается в виде:

$$\Phi_\pi(x_1, x_2) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} Q(x_1^m, x_2), \tag{4}$$

где α_1, α_2 неотрицательные целые числа, $Q(u, v)$ однородный многочлен некоторой степени n, а также $Q(1,0) \neq 0$ и $Q(0,1) \neq 0$.

Более того, из предложения 2.2. следует, что $Q \in \mathbb{K}[u, v]$. Кроме того, расстояние между многогранником Ньютона и началом координат определяется числами (α_1, α_2, n) по формуле:

$$d = \frac{\alpha_1 + (\alpha_2 + n)m}{m + 1}.$$

Отметим, что выполняется неравенство $d \geq n/2$. Кроме того, имеет место равенство $d = n/2$ тогда и только тогда, когда $m = 1$ и $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Полином $Q(1, v)$ имеет ненулевой действительный корень a кратности ν, удовлетворяющей условию: $\nu > d$ при условии, x не приспособлена к Φ (см. [3] теорема 3.3). Так как $Q(1, v) \in \mathbb{K}[v]$, то из леммы 1 следует, что $a \in \mathbb{K}$.

Первым шагом алгоритма исходящего из Варченко является замена переменных обозначающаяся через φ:

$$(x_1,\ x_2 + ax_1^m) \longmapsto (x_1, x_2).$$

Тогда мы получим новую систему координат. Построим многогранник Ньютона соответствующий функции $\varphi^*\Phi$. Отметим, что расстояние между многогранником Ньютона и началом координат обозначаемое через d_{new} изменяется. Кроме того, справедливо неравенство $d_{new} > d$ (см. [2], [3]).

Поскольку $a \in \mathbb{K}$, то функция $\varphi^*\Phi$ имеет формальный степенной ряд с коэффициентами из поля $\mathbb{K}$. Таким образом, мы имеем две возможности, либо после конечного числа шагов получим приспособленную систему координат к функции Φ с помощью замены переменных

$$(x_1, x_2 + p(x_1)) \longmapsto (x_1, x_2), \tag{5}$$

где $p \in \mathbb{K}[x_1]$, в противном случае процесс не прекращается.

В последнем случае мы получим формальный степенной ряд $p(x_1)$ с коэффициентами из поля $\mathbb{K}$ такой, что (7) дает приспособленную систему координат.

7. Доказательство теоремы 2.

Из определения приспособленной системы координат следует, что если $y = \varphi(x)$ некоторая система координат и $R(x) = (R(x_1), R(x_2))$ некоторое гладкое отображение с плоскими компонентами в начале координат, то $y = \varphi(x) + R(x)$ также является приспособленной. Напомним, что если значение фукции и все производные функции в начале координат обращаются в нуль, то она называется плоской. Заметим, что плоские слагаемые не меняют многогранник Ньютона. Следовательно, если φ формальный степенной ряд, то существует гладкое отображение

$\varphi^c = (\varphi_1^c, \varphi_2^c)$ такое, что

$$\partial_1^j \partial_2^k \varphi_\nu^c(0,0) = c_{kj}^\nu j!k!,$$

где $\{c_{kj}^\nu\}$ коэффициенты разложения φ_ν.

Тогда легко показать, что $y = \varphi^c(x)$ является приспособленной гладкой системой координат. Если Φ вещественно аналитическая функция с коэффициентами из поля $\mathbb{K}$, то аналогично мы получим отображение $y = \varphi(x)$ с вещественно аналитическими компонентами.

Мы можем построить приспособленную систему координат для аналитических (гладких) функций формального степенного ряда с коэффициентами из поля $\mathbb{K}$ с помощью компьютерной программы.

Литература

1. Арнольд В.И., Замечания о методе стационарной фазы и числах Кокстера. // УМН, 1973, т. 28, вып. 5, с. 17-44.
2. Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-заде С.М., Особенности дифференцируемых отображений., часть II. Монодромия и асимптотика интегралов. М: Наука(1984).
3. Ikromov I.A., M*ü*ller D., On adapted coordinate systems. // Trans. Amer. Math. Soc., 363 (2011), No. 6, p. 2821-2848.
4. Ikromov I.A., M*ü*ller D., Uniform estimates for the Fourier transform of surface carried measures in R3 and an application to Fourier restriction. J. Fourier Anal. Appl., 17 (2011), no. 6, 1292-1332.
5. I.A. Ikromov, A. Soleev, On construction of the Shultz base, Uzbek Math. Journal, No.4 (2008), p. 75-89.
6. Phong D.H., Stein E.M., Sturm J.A., On the growth and stability of real-analytic functions., Amer. J. Math, 121(1999), no. 3, 519-554.
7. Schulz H., On the decay of the Fourier transform of measures on hypersurfaces, generated by radial functions, and related restriction theorems. unpublished preprint, 1990.
8. Варченко А.Н., Многогранник Ньютона и оценки осциллирующих интегралов. // Функ. анализ и его прилож. 1976, т. 10, вып. 5, с. 13-38.
9. Хасанов Г.А., О существовании приспособленной ситемы координат. - //Докл. АН.РУз., (1999), No 5, с. 10-12.

Самаркандский государственный Университет

Uzbek Mathematical
Journal, 2014,№4, pp.144-153

УДК 517.956.6

О задаче Трикоми для одного уравнения эллиптико-параболического типа

Уринов А.К., Халилов К.С.

Ushbu maqolada elliptiko-parabolik tipdagi bir tenglama uchun chegaralangan va chegaralanmagan sohalarda Trikomi masalasining analoglari bayon qilingan. Qo'yilgan masalalar yechimining mavjudligi va yagonaligi tatqiq qilingan.

For one elliptic-parabolic equation on bounded and unbounded domains analog of the Tricomi problem is considered. The uniqueness and existence of solution of the problem is investigated.

Изучению краевых задач для смешанных эллиптико-параболических уравнений посвящено много работ. Методика исследования основных краевых задач для таких уравнений и обзор работ, посвященных изучению вопросов по этому направлению, можно найти в монографии Т.Д.Джураева [1]. Обычно, при исследовании краевых задач для смешанных эллиптико-параболических уравнений (как и для эллиптико-гиперболических уравнений) поставленная задача эквивалентно сводилась к сингулярному интегральному уравнению. В настоящей работе изучаемые задачи эквивалентно сведены к краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, содержащего операторы дробного дифференцирования. Примененная здесь методика исследования краевой задачи для эллиптико-параболического уравнения может быть применена к исследованию ранее изученных краевых задач для таких уравнений, например, к задачам, изученным в [1].

I. Пусть $D = D_1 \cup l_0 \cup D_2$ - область плоскости xOy, где D_1 – прямоугольник, ограниченный отрезками $l_0 = \{(x, 0) : -1 \leq x \leq 1\}$, $l_1 = \{(0, y) : 0 \leq y \leq h\}$, $l_2 = \{(x, h) : -1 \leq x \leq 1\}$, $l_3 = \{(1, y) : 0 \leq y \leq h\}$, а D_2 – нижняя полуплоскость с границей $l_4 \cup l_0 \cup l_5$, где $l_4 = \{(x, 0) : -\infty < x \leq -1\}$, $l_5 = \{(x, 0) : 1 \leq x < +\infty\}$, а $h = const > 0$.

В области D рассмотрим следующее смешанное эллиптико-параболическое уравнение $Lu = 0$, где

$$Lu \equiv \begin{cases} L_1 u \equiv u_{xx} - u_y - \lambda^2 u, & \text{если } y > 0, \\ L_2 u \equiv u_{xx} + u_{yy} + (2\beta/y\ )\, u_y, & \text{если } y < 0, \end{cases}$$

а λ, β – заданные действительные числа, причем $0 < \beta < (1/2)$. **Задача T_∞ (аналог задачи Трикоми).** Найти непрерывную в замыкании области D функцию $u\,(x,y)$, являющуюся регулярным в областях D_1, D_2 решением уравнения $Lu = 0$ и удовлетворяющую краевым условиям

$$u\,(0,y) = \varphi_1\,(y)\,, \quad u\,(1,y) = \varphi_2\,(y)\,, \quad y \in [0,h]\,; \tag{1}$$

$$u\,(x,0) = \varphi_3\,(x)\,,\ x \in (-\infty,-1]\,, \quad u\,(x,0) = \varphi_4\,(x)\,,\ x \in [1,+\infty)\,; \tag{2}$$

$$\lim_{R\to+\infty} u\,(x,y) = 0, \quad (x,y) \in D_2 \tag{3}$$

и условию склеивания

$$\lim_{y\to+0} u_y\,(x,y) = \lim_{y\to-0} (-y)^{2\beta} u_y\,(x,y)\,, \quad x \in (-1,1)\,, \tag{4}$$

причем общее значение этих пределов $\nu(x) \in C\,(-1,1)$ и $\left(1-x^2\right)^{1-2\beta}\nu(x) \in C\,[-1,1]$; здесь $\varphi_j\,(t)\,,\ j = \overline{1,4}$ – заданные непрерывные функции в своих областях определения, причем $\varphi_1\,(0) = \varphi_3\,(-1)$, $\varphi_2\,(0) = \varphi_4\,(1)$ и для достаточно больших $|x|$ справедливы неравенства $|\varphi_j\,(x)| < M|x|^{-\varepsilon}$, $j = \overline{3,4}$, а в окрестности точек $x = -1$ и $x = 1$ соответственно имеют место равенства $\varphi_3\,(x) = |1+x|^{1-2\beta+\delta} O\,(1)$, $\varphi_4\,(x) = |1-x|^{1-2\beta+\delta} O\,(1)$, а $R^2 = x^2 + y^2$, $M, \varepsilon, \delta = const > 0$.

Докажем однозначную разрешимость задачи T_∞. Пусть $u\,(x,y)$ – есть решение задачи T_∞. Тогда, функция $u\,(x,y)$ в области D_2, как решение задачи Дирихле для уравнения $L_2 u = 0$, представима в виде [2]

$$u\,(x,y) = \widetilde{k}(-y)^{1-2\beta} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \omega\,(t) \left[(x-t)^2 + y^2\right]^{\beta-1} dt, \tag{5}$$

где $\widetilde{k} = 4^{-\beta}\Gamma^2\,(1-\beta)\,/\,[\pi\,\Gamma\,(1-2\beta)]$, $\Gamma\,(z)$ – гамма-функция [2],

$$\omega(x) = \begin{cases} \varphi_3(x), & \text{если} \quad x \in (-\infty,-1]\,, \\ \tau(x), & \text{если} \quad x \in [-1,1]\,, \\ \varphi_4(x), & \text{если} \quad x \in [1,+\infty)\,, \end{cases} \tag{6}$$

причем здесь $\tau(x) = u(x,0)$, $-1 \le x \le 1$ – пока неизвестная функция.

Считая $x \in (-1,1)$ и $y \ne 0$, дифференцируем равенство (5) по y.

Затем, умножая полученное равенство на $(-y)^{2\beta}$ и учитывая равенство

$$(-y)^{2\beta}\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{(-y)^{1-2\beta}}{\left[(x-t)^2+y^2\right]^{1-\beta}}\right\}=\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{(x-t)}{\left[(x-t)^2+y^2\right]^{1-\beta}}\right\}, \qquad (7)$$

переходим к пределу при $y\to+0$. В итоге, принимая во внимание введенные обозначения и краевые условия (2), получим соотношение

$$\nu(x)=\widetilde{k}\frac{d}{dx}\int\limits_{-1}^{1}\tau(t)(x-t)|x-t|^{2\beta-2}dt+f(x),\quad x\in(-1,1),$$

где $f(x)=\widetilde{k}(2\beta-1)\left[\int\limits_{-\infty}^{-1}\frac{\varphi_3(t)\,dt}{(x-t)^{2-2\beta}}+\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{\varphi_4(t)\,dt}{(t-x)^{2-2\beta}}\right]$.

Последнее равенство можно переписать в виде

$$\nu(x)=\widetilde{k}\Gamma(2\beta)\left[D_{-1x}^{1-2\beta}\tau(x)+D_{x1}^{1-2\beta}\tau(x)\right]+f(x),\quad x\in(-1,1), \qquad (8)$$

где $D_{-1x}^{1-2\beta}$ и $D_{x1}^{1-2\beta}$ – операторы дробного дифференцирования [2], т.е.

$$\begin{aligned} D_{-1x}^{1-2\beta}\tau(x)&=\tfrac{1}{\Gamma(2\beta)}\tfrac{d}{dx}\int\limits_{-1}^{x}\tfrac{\tau(t)dt}{(x-t)^{1-2\beta}},\\ D_{x1}^{1-2\beta}\tau(x)&=\tfrac{-1}{\Gamma(2\beta)}\tfrac{d}{dx}\int\limits_{x}^{1}\tfrac{\tau(t)dt}{(t-x)^{1-2\beta}}. \end{aligned} \qquad (9)$$

Далее, переходя в уравнение $L_1u=0$ к пределу при $y\to+0$ и принимая во внимание условие (4) и принятые обозначения, получим равенство

$$\tau''(x)-\lambda^2\tau(x)=\nu(x),\quad x\in(-1,1). \qquad (10)$$

Теперь, исключая $\nu(x)$ из соотношений (8), (10) и учитывая условия (2) и $\varphi_3(-1)=\varphi_4(1)=0$, относительно неизвестной функции $\tau(x)$ получим следующую задачу Дирихле для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, содержащего операторы дробного дифференцирования:

$$\tau''(x)-\lambda^2\tau(x)-\widetilde{k}\Gamma(2\beta)\left[D_{-1x}^{1-2\beta}\tau(x)+D_{x1}^{1-2\beta}\tau(x)\right]=f(x), \qquad (11)$$

$$\tau\,(-1)=0,\quad \tau\,(1)=0. \tag{12}$$

Если однозначно найдём функцию $\tau\,(x)$ из задачи $\{(11),(12)\}$, то решение задачи T_∞ в области D_2 определяется формулой (5), а в области D_1 как решение первой краевой задачи для уравнения $L_1 u=0$ [3].

Докажем однозначную разрешимость задачи $\{(11),(12)\}$. Сперва докажем единственность решения. С этой целью рассмотрим однородную задачу, т.е. задачу с краевыми условиями (12) для уравнения

$$\tau''(x)-\lambda^2\tau(x)-\widetilde{k}\Gamma(2\beta)\left[D_{0x}^{1-2\beta}\tau(x)+D_{x1}^{1-2\beta}\tau(x)\right]=0. \tag{13}$$

Предположим, что решение этой задачи $\tau(x)\not\equiv 0,\ x\in[-1,1]$. Поэтому $\sup\limits_{[0,1]}|\tau(x)|=|\tau(\xi)|>0,\ \xi\in[-1,1]$. В силу (12), $\xi\in(-1,1)$. Тогда ξ – есть точка экстремума для функции $\tau(x)$. Если $\tau(\xi)$ – есть положительный максимум (отрицательный минимум), то согласно принципа экстремума для операторов дробного дифференцирования [2],

$$D_{-1x}^{1-2\beta}\tau(x)|_{x=\xi}>0(<0),\quad D_{x1}^{1-2\beta}\tau(x)|_{x=\xi}>0(<0). \tag{14}$$

Кроме того, $\tau''(\xi)\le 0(\ge 0)$. Учитывая это и (14), имеем

$$\left\{\tau''(x)-\lambda^2\tau(x)-\widetilde{k}\Gamma(2\beta)\left[D_{-1x}^{1-2\beta}\tau(x)+D_{x1}^{1-2\beta}\tau(x)\right]\right\}\Big|_{x=\xi}<0(>0),$$

что невозможно, в силу (13). Это противоречие опровергает предположение $\tau(x)\not\equiv 0,\ x\in[-1,1]$. Следовательно, $\tau(x)\equiv 0,\ x\in[-1,1]$.

Отсюда следует, что если существует решение задачи $\{(11),(12)\}$, то оно единственно.

С целью доказательства существования решения задачи $\{(11),(12)\}$, перепишем (11) в виде

$$\tau''(x)-\lambda^2\tau(x)=f(x)+\widetilde{k}_2\Gamma(2\beta)\left[D_{-1x}^{1-2\beta}\tau(x)+D_{x1}^{1-2\beta}\tau(x)\right]. \tag{15}$$

Считая, временно, известной правую часть уравнения (15) и рассматривая краевую задачу $\{(12),(15)\}$ [3], получим равенство

$$\tau(x)=\int\limits_{-1}^{1}K(x,t)\Big\{f(t)+\widetilde{k}\Gamma(2\beta)\left[D_{-1t}^{1-2\beta}\tau(t)+D_{t1}^{1-2\beta}\tau(t)\right]\Big\}dt, \tag{16}$$

где $K(x,t)=\begin{cases} sh([\lambda(x+1)]sh[\lambda(t-1)]/\lambda sh\lambda, & \text{если} \quad x<t, \\ sh[\lambda(t+1)]sh[\lambda(x-1)]/\lambda sh\lambda, & \text{если} \quad x>t \end{cases}$
– функция Грина задачи Дирихле для уравнения $\tau''(x)-\lambda^2\tau(x)=0$.

Подставляя (9) в (16), после некоторых преобразований, получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода, эквивалентное задаче $\{(11),(12)\}$:

$$\tau(x)+\int\limits_{-1}^{1}M(x,t)\tau(t)dt=F(x), \quad -1\le x\le 1, \tag{17}$$

где $M(x,t)=\widetilde{k}\Gamma(2\beta)\int\limits_{-1}^{1}K_z'(x,z)|t-z|^{2\beta-1}dz$, $F(x)=\int\limits_{-1}^{1}K(x,t)f(t)dt$.

На основании условий, наложенных на функции $\varphi_3(x)$ и $\varphi_4(x)$, функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[-1,1]$ и, поэтому, $F(x)\in C[-1,1]\cap C^2(-1,1)$, $F(-1)=F(1)=0$. Очевидно, что $M(x,t)$ непрерывна в квадрате $-1\le x,t\le 1$ и дважды непрерывно дифференцируема в этом квадрате, за исключением диагонали $t=x$. Следовательно, к уравнению (17) применима альтернатива Фредгольма.

Однозначная и безусловная разрешимость интегрального уравнения (17), в силу эквивалентности, следует из единственности решения задачи $\{(11),(12)\}$.

Следовательно, задача $\{(11),(12)\}$ однозначно разрешима. Этим доказана также однозначная разрешимость задачи T_∞.

II. Теперь, рассмотрим задачу T_∞ при $\beta=0$. При этом задача формулируется следующим образом:

Задача $\widetilde{T}_\infty$. Найти непрерывную в замыкании области D функцию $u(x,y)$, являющуюся регулярным в областях D_1 и D_2 решением уравнения

$$0=\begin{cases} L_1u\equiv u_{xx}-u_y-\lambda^2u, & \text{если } (x,y)\in D_1, \\ L_0u\equiv u_{xx}+u_{yy}, & \text{если } (x,y)\in D_2, \end{cases} \tag{18}$$

удовлетворяющее условиям (1), (2), (3) и условию склеивания

$$\lim_{y\to -0} u_y(x,y) = \lim_{y\to +0} u_y(x,y),\ x\in(-1,1), \tag{19}$$

причем общее значение этих пределов $\nu(x)\in C(-1,1)$ и $(1-x^2)\nu(x)\in C[-1,1]$, а заданные функции $\varphi_3(x)$ и $\varphi_4(x)$ здесь удовлетворяют условиям задачи T_∞ при $\beta=0$.

Пусть $u(x,y)$ – есть решение задачи $\widetilde{T}_\infty$. Учитывая условие (19) и $u(x,y)\in C(\overline{D})$, введем обозначения $u(x,0)=\tau(x)$, $x\in[-1,1]$; $u_y(x,0)=\nu(x)$, $x\in(-1,1)$. Тогда, в силу условий задачи $\widetilde{T}_\infty$, справедливо равенство (10).

Следовательно, каждое решение задачи $\widetilde{T}_\infty$ является решением и нелокальной эллиптической задачи H_∞, об определении гармонической в области D_2 функции, удовлетворяющей условием (2),(3) и (10). Поэтому сначала исследуем задачу H_∞.

Докажем, что задача H_∞ при $\varphi_3(x)=\varphi_4(x)\equiv 0$ имеет только решение $u(x,y)\equiv 0$, $(x,y)\in\overline{D}_2$. Предположим противное. Тогда, существует такая область $D_R=\big\{(x,y): x^2+y^2<R^2, y<0\big\}$, где $R=const>0$, в которой $u(x,y)\not\equiv 0$. Следовательно, $\sup\limits_{\overline{D}_R}|u(x,y)|>0$ и это значение достигается в некоторой точке $(\xi,\eta)\in\overline{D}_R$.

В силу свойства гармонических функций и предположения $\varphi_3(x)\equiv\varphi_4(x)\equiv 0$, $(\xi,\eta)\notin D_R\cup\{(x,y): y=0, x\in[-R,-1]\cup[1,R]\}$. Если предположим, что $(\xi,\eta)=(\xi,0)\in(-1,1)$ и $u(\xi,0)$ положительный максимум (отрицательный минимум), то из равенства (10) следует неравенство $\nu(\xi)\le 0(\ge 0)$, что невозможно в силу принципа Заремба-Жиро для гармонических функций [4]. Следовательно, $\sup\limits_{\overline{D}_R}|u(x,y)|=\sup\limits_{S_R}|u(x,y)|>0$, где $S_R=\big\{(x,y): x^2+y^2=R^2,\ y\le 0\big\}$.

Далее, взяв произвольное число $R_1>R$, таким же методом получим $\sup\limits_{\overline{D}_{R_1}}|u(x,y)|=\sup\limits_{S_{R_1}}|u(x,y)|>0$. Так как $D_R\subset D_{R_1}$, то $\sup\limits_{\overline{D}_{R_1}}|u(x,y)|\ge\sup\limits_{\overline{D}_R}|u(x,y)|>0$, т.е. $\sup\limits_{S_{R_1}}|u(x,y)|\ge\sup\limits_{S_R}|u(x,y)|>0$. Отсюда следует, что $\lim\limits_{R_1\to+\infty}u(x,y)\ne 0$, что противоречит условию (3). Полученное противоречие опровергает наше предположение. Следовательно, $u(x,y)\equiv 0$ в $\overline{D}_2$, т.е. однородная задача, соответствующая задаче H_∞, имеет только тривиальное решение. Из этого факта следует единственность решения задачи H_∞.

С целью доказательства существования решения задачи H_∞, рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Лапласа в области D_2. Решение этой задачи определяется формулой [5]

$$u(x,y) = -\frac{y}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\omega(t)dt}{(x-t)^2+y^2}, \tag{20}$$

где $\omega(t)$ – функция, определяемая равенством (6).

Считая $x\in(-1,1)$, $y\neq 0$ и учитывая равенство

$$\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{-y}{(x-t)^2+y^2}\right\} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{x-t}{(x-t)^2+y^2}\right\},$$

из (20) получим

$$\nu(x) = \frac{1}{\pi}\frac{d}{dx}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\tau(t)}{x-t}dt + f_1(x), x\in(-1,1), \tag{21}$$

где $f_1\left(x\right) = -\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{-1}\dfrac{\varphi_3\left(t\right)dt}{\left(x-t\right)^2} - \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\limits_{1}^{+\infty}\dfrac{\varphi_4\left(t\right)dt}{\left(t-x\right)^2}$.

Подставляя (21) в (10) и решая полученное уравнении при условиях (12), получим

$$\tau(x) = \int\limits_{-1}^{1}K(x,t)\left[f_1(t) + \frac{1}{\pi}\frac{d}{dt}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\tau(z)dz}{t-z}\right]dt.$$

Отсюда, после некоторых преобразований, получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода, эквивалентное задаче H_2. Безусловная и однозначная разрешимость полученного интегрального уравнения следует из единственности решения задачи H_2.

После того, как найдена функция $\tau(x)$, решение задачи $\widetilde{T}_\infty$ в области D_1 находится как в задаче T_∞, а в области D_2 – формулой (20).

III. Теперь методом, примененным в пунктах I и II, исследуем задачу Трикоми для уравнения $Lu(x,y)=0$ в области $\widetilde{D} = D_1\cup l_0\cup D_3$, где $D_3 = \left\{(x,y): x^2+y^2<1,\, y<0\right\}$. В этом случае задача Трикоми формулируется следующим образом:

Задача T (задачи Трикоми). Найти непрерывную в замыкании области $\widetilde{D}$ функцию $u(x,y)$, являющуюся регулярным в областях D_1, D_2 решением уравнения $Lu=0$, удовлетворяющего краевым условиям (1),

$$u(x,y)|_{\overline{\sigma}_0}=\varphi_5(x),\ -1\leq x\leq 1 \tag{22}$$

и условию склеивания (4), где $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$, $\varphi_5(x)$ – заданные непрерывные функции, причем $\varphi_1(0)=0$, $\varphi_2(0)=0$, $\varphi_5(x)=(1-x^2)^{\alpha}\varphi_0(x), \alpha>0$, $\varphi_0(x)\in[-1,1]$, $\sigma_0=\left\{(x,y):x^2+y^2=1,\ y<0\right\}$.

Пусть $u(x,y)$ – есть решение задачи T. Принимая во внимание условия задачи T, примем обозначения: $u(x,0)=\tau(x),-1\leq x\leq 1$; $\lim\limits_{y\to+0}u_y\left(x,y\right)=\lim\limits_{y\to-0}\left(-y\right)^{2\beta}u_y\left(x,y\right)=\nu(x),-1<x<1$. Тогда, переходя к пределу при $y\to+0$, из уравнения $L_1u=0$ получим равенство (10).

Следовательно, каждое решение задачи T является решением эллиптической нелокальной задачи $\widetilde{T}$, об определении регулярного в области D_3 решения уравнения $L_2u=0$, удовлетворяющего условиям (10) и (22).

Поэтому сперва исследуем задачу $\widetilde{T}$. Здесь заранее нам необходимо доказать единственность решения задачи $\widetilde{T}$.

Пусть $u(x,y)$ – решение однородной задачи $\widetilde{T}$. Тогда в области D_3 справедливо тождество

$$y^{2\beta}u\left(u_{xx}+u_{yy}+2\beta y^{-1}u_y\right)=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(y^{2\beta}uu_x\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(y^{2\beta}uu_y\right)-y^{2\beta}\left[(u_x)^2+(u_y)^2\right]=0.$$

Интегрируя это тождество по области D_3, а затем применяя формулу Грина и учитывая $u(x,y)|_{\overline{\sigma}_0}\equiv 0$, получим

$$\iint\limits_{D_3}y^{2\beta}\left[(u_x)^2+(u_y)^2\right]dxdy-\int\limits_{-1}^{1}\tau(x)\nu(x)dx=0. \tag{23}$$

Пользуясь равенствами (10) и $\tau(-1)=\tau(1)=0$, нетрудно убедиться, что второй интеграл в (23) неположителен. Если учесть это, то из (23) легко следует, что $u(x,y)\equiv 0,(x,y)\in\overline{D}_3$. Отсюда следует, что если решение задачи $\widetilde{T}$ существует, то оно единственно.

Теперь докажем существование решения задачи $\widetilde{T}$. С этой целью рассмотрим задачи Дирихле для уравнения $L_2 u = 0$ в области D_3. Её решение определяется формулой [6]

$$u(x,y) = \widetilde{k}(-y)^{1-2\beta} \int\limits_{-1}^{1} \tau(t) \left\{ \left[(x-t)^2 + y^2 \right]^{\beta-1} - \right.$$

$$\left. - \left[(1-xt)^2 + t^2 y^2 \right]^{\beta-1} \right\} dt - g_1(x,y), \qquad (24)$$

где $\quad R^2 = x^2 + y^2; \quad \sigma = r^2/r_1^2, \quad \left.\begin{matrix} r^2 \\ r_1^2 \end{matrix}\right\} = (x-\xi)^2 \pm (y-\eta)^2,$

$$g_1(x,y) = 2\widetilde{k}(1-\beta)(1-2\beta)^{-1}(1-R^2)(-y)^{1-2\beta} \times$$

$$\times \int\limits_{-1}^{1} \varphi(\xi) \left[(r_1^2)^{\beta-2} F(1-\beta, 2-\beta, 2-2\beta; 1-\sigma) \right] |_{(\xi,\eta)\in\sigma_0} d\xi.$$

Принимая во внимание тождества (7) и

$$(-y)^{2\beta} \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{(-y)^{1-2\beta}}{\left[(1-xt)^2 + t^2 y^2 \right]^{1-\beta}} \right\} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1-xt}{t \left[(1-xt)^2 + t^2 y^2 \right]^{1-\beta}} \right\},$$

а также обозначение $\lim\limits_{y\to -0} (-y)^{2\beta} u_y = \nu(x)$, из (24) находим

$$\nu(x) = \widetilde{k} \frac{d}{dx} \int\limits_{-1}^{1} \tau(t) \left[\frac{x-t}{|x-t|^{2-2\beta}} - \frac{1}{t(1-xt)^{1-2\beta}} \right] dt + g_1(x), \qquad (25)$$

где $g_1(x) = \lim\limits_{y\to -0} (-y)^{2\beta} g'_y(x,y)$.

Теперь, находим решение задачи {(10),(12)} и подставляем к нему (25). Затем интегрируя по частям полученный внешний интеграл, после некоторых преобразований, получим интегральное уравнение в виде (17), причем здесь

$$F(x) = \int\limits_{-1}^{1} K(x,t) g_1(t) dt, \;\; M(x,t) = \widetilde{k} \int\limits_{-1}^{1} \frac{K_z(x,z)(t-z)}{|t-z|^{2-2\beta}} dz +$$

$$+\frac{\widetilde{k}}{\lambda sh\lambda}\left\{sh\left[\lambda(x-1)\right]\int\limits_{-1}^{x}\frac{sh\left[\lambda(t+1)\right]}{(1-zt)^{2-2\beta}}dt+sh\left[\lambda(x-1)\right]\int\limits_{x}^{1}\frac{sh\left[\lambda(t-1)\right]}{(1-zt)^{2-2\beta}}dt\right\}.$$

Пользуясь свойством функции $\varphi_5(x)$, нетрудно убедиться, что функции $F(x)$ и $M(x,t)$ и в этом случае обладают теми же свойствами, что и в задаче T_∞.

Следовательно, к уравнению (17) и в этом случае можно применить альтернативу Фредгольма. Однозначная и безусловная разрешимость уравнения (17) в этом случае следует из единственности решения задачи $\widetilde{T}$.

После того, как найдена $\tau(x)$ из (17), решение задачи $\widetilde{T}$ (следовательно и задачи Т) в области D_3 определяется формулой (24), а решение задачи T в области D_1 – как решение первой краевой задачи для уравнения $L_1u = 0$ [3].

Литература

1. Джураев Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. –Ташкент: Фан. 1979. –240 с.

2. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. –М.: Высшая школа. 1985. –304 с.

3. Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамажонов М. Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа. – Ташкент: Фан. 1986. –220 с.

4. Бицадзе А.В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. –М.: Наука. 1966. –204 с.

5. Бицадзе А.В. Уравнения математической физики. –М.: Наука. 1982. –336 с.

6. Салахитдинов М.С., Мирсабуров М. Нелокальные задачи для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами. – Ташкент: Университет, 2005. –224с.

Ферганский государственный университет

Uzbek Mathematical
Journal, 2014,№4, pp.154-163

УДК 517.518.5

Равномерные оценки преобразования Фурье мер, сосредоточенных на развертывающихся гиперповерхностях [1]

Усманов С.Э.

Ushbu ishda analitik yoyiluvchan gipersirtlarda mujassamlashgan o‘lchovlar Fur‘e almashtirishining tekis baholari haqidagi teorema isbotlangan.

Uniform estimates for Fourier transform of measures supported on developped hypersurfaces.

Введение

Одним из классических результатов действительного анализа являет-ся,так называемая,максимальная теорема И.М.Стейна о сферических средних в R^{n+1} $(n \geq 2)$ (см. [1],где содержится подробное обсуждение известных результатов) утверждающая то, что соответствующий макси-мальный оператор ограничен в L^p при $p > \frac{n+1}{n}$ и неограничен для остальных значений p. Позднее, аналог теоремы И.М.Стейна для плоско-го случая был доказан Дж. Бургеном [6]. Эти результаты стали отправ-ной точкой для изучения различных классов максимальных операторов, связанных с подмногообразиями Евклидова пространства.Максимальные операторы исследовались в работах многих авторов. А.Гринлиф [7] дока-зал, что если S строго выпуклая и звездная относительно начала коорди-нат гиперповерхность в R^{n+1} $(n \geq 2)$ (это означает, что любой луч исходя-щий из начала координат пересекается с поверхностью в единственной точке и $K(x) \neq 0$, где $K(x)$-гауссова кривизна гиперповерхности) и $\psi \in C_0^\infty$, то справедливы утверждения теоремы И.М.Стейна. Более того, как он показал, если в каждой точке гиперповерхности S имеются хотя бы k $(k \geq 2)$ ненулевых главных кривизн, то при $p > \frac{k+1}{k}$ максимальный оператор ограничен в L^p . В более сложном случае $k = 1$ аналогичный результат получен К.Д.Согги

[1]Работа поддержана Испольнителным Комитетом по координации науки и технологии при КМ Республики Узбекистан, грант Ф-4-17.

[8]. Известно, что L^p оценки максимальных операторов связаны с поведением осцилляторных интегралов следую-щего вида:

$$\widehat{d\mu}(\xi) := \int\limits_S e^{i(x,\xi)}\psi\left(x\right)dS\left(x\right),$$

где $(x,\xi) = x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + ... + x_{n+1}\xi_{n+1}$.

Точнее, чтобы получить L^p оценки для максимального оператора необходимо иметь равномерные (относительно направлений вектора ξ) оценки для соответствущего осцилляторного интеграла при больших значениях $|\xi|$. В работе [2] исследована связь между ограниченностью максимального оператора ассоциированного с гиперповерхностью и рав-номерными оценками преобразования Фурье соответствующей меры, где используются, так называемые, приспособленные системы координат для оценки максимальных операторов в случае $n = 2$. Вообще говоря, приспособленные системы координат не существуют для случая $n > 2$.

В данной работе мы рассмотрим развертывающиеся гиперповерхности. Геометрически это означает, что ранг отображения Гаусса в каждой точке не более единицы. Иными словами в каждой точке гиперповерхнос-ти имеется не более одной ненулевой главной кривизны. Мы исследуем поведение $\widehat{d\mu}(\xi)$ в случае когда ψ сосредоточена в достаточно малой окрестности фиксированной обыкновенной точки гиперповерхности S. А также,без ограничения общности, мы будем считать, что S содержит начало координат и она задана в виде графика функции

$$x_{n+1} = f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right),$$

где функция f- ненулевая, вещественно-аналитическая функция удовлет-воряющая условиям: $f\left(0\right) = 0$ и $\nabla f\left(0\right) = 0$, внешнее произведение матрицы $D^2 f$ на саму себя, т.е. внешний квадрат этой матрицы тождест-венно равно нулю: $D^2 f \Lambda D^2 f \equiv 0$, где $D^2 f = \left\{\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_k}\right\}_{j,k=1}^n$. Если внешнее произведение матрицы $D^2 f$ на саму себя равно нулю, то S будет разверты-вающаяся гиперповерхность. В работе [3] для таких гиперповерхностей доказано существование приспособленных систем координат, т.е. в малой окрестности обыкновенной точки гиперповерхности S существует при-способленная система координат для функций $x_{n+1} = f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$. В данной работе получены равномерные (по направлениям вектора ξ) оценки преобразования Фурье гладкой меры, сосредоточенной на раз-вертывающихся гиперповерхностях.

Формулировка основного результата

Сначала,следуя [5], введем некоторые обозначения. Пусть $N_0 \subset R_+ \subset R$, соответственно множество всех неотрицательных целых, всех неотри-цательных вещественных, и всех вещественных чисел. Допустим, что $K \in N_0^n$ некоторое множество. Многогранник Ньютона *N(K)* множества K определяется как выпуклая оболочка в R_+^n совокупности $\bigcup\limits_{k\in K} \left(k + R_+^n\right)$. Пусть f гладкая функция, определенная в начале координат, а также $f\,(0) = 0$ и $\nabla f\,(0) = 0$. Рассмотрим ряд Маклорена этой функции:

$f_x \approx \sum\limits_{k\in N_0^n} c_k x^k, c_k \in R$ где $k = (k_1, k_2, ..., k_n) \in N_0^n$, $x^k := x_1^{k_1} \cdot ... \cdot x_n^{k_n}$.

Носителем этого ряда, т.е. носителем Тейлора называется следующее множество: $\mathrm{M}\left(\mathrm{f_x}\right) = \{k \in N_0^n \backslash \{0\} : c_k \neq 0\}$. Далее предполагается выпол-нение условия $\mathrm{M}\left(\mathrm{f_x}\right) \neq 0$, что означает конечность типа этой функции в начале координат. Пусть в R^nфиксирована система координат и $\mathrm{K} := \mathrm{M}\left(\mathrm{f_x}\right)$. Многогранник Ньютона функции *f*, обозначаемый через $\mathrm{N}\left(\mathrm{f_x}\right)$, определяется следующим образом: $\mathrm{N}\left(\mathrm{f_x}\right) := N\left(K\right)$. Через f_x обозначим ряд Маклорена функции f в фиксированной системе координат в R^n. Пусть d координата пересечения прямой $x_1 = \ldots = x_n = d$, $d \in R$, с границей многогранника Ньютона. Это число будет называться расстоя-нием между многогранником Ньютона и началом координат. Расстояние обозначается через *d (x)*. Главной гранью многогранника Ньютона называется грань минимальной размерности, содержащяя точку
(d (x),..., d (x)). Пусть f как выше, и пусть $x = (x_1, \ldots ,x_n)$ фиксирован-ная система координат в нуле в R^n. Обозначим через f_x ряд Маклорена *f*, и *d(x)* расстояние между началом координат и многогранником Ньюто-на *N(f_x)*. Рассмотрим величину *h(f)= sup{d(x)}* где "supremum"берется относительно набора всех локальных гладких систем координат x в начале координат. Число *h(f)* называется высотой функции f [2]. Локаль-ная система координат называется приспособленной к функции f если выполняется равенство *h(f) = d(x)*. Пусть S гладкая гиперповерхность и $x^0 \in S$ фиксированная точка. Без ограничения общности мы можем считать, что $x^0 = 0$ и в некоторой окрестности начало координат S задана как график некоторой гладкой функции $x_{n+1} = f\,(x_1, x_2, ..., x_n)$ удовлетворяющей условиям $f\,(0) = 0$ и

$\nabla f\,(0) = 0$. Тогда высота гипер-поверхности S в точке $x^0 = 0$ определяется равенством $h_{x^0}(S) = h(f)$. В работе [2] показана корректность этого определения.

Пусть $d\mu = \psi\,(x)\,dS\,(x)$, где $dS\,(x)$ поверхностная мера на S и $\psi \in C_0^\infty\,(S)$ фиксированная гладкая функция с компактным носителем. Рассмотрим равномерные оценки преобразования Фурье меры $\widehat{d\mu}\,(\xi)$:

$\widehat{d\mu}\,(\xi) = \int\limits_S e^{i\;(x,\xi)}\psi\,(x)\,dS\,(x) = \int\limits_S e^{i\;(x,\xi)}d\mu\,(\xi)$, где

$$(x, \xi) = x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + ... + x_n\xi_n + x_{n+1}\xi_{n+1}.$$

Основным результатом работы является следующая:

Теорема: Пусть S-аналитическая развертывающаяся гиперповерхность с обыкновенной точкой в начале координат и высотой h. Тогда существует окрестность нуля U такая, что для любой функции $\psi \in C_0^\infty\,(U)$ имеет место следующая оценка:

$$|I\,(\xi)| \leq \frac{C}{|\xi|^{\frac{1}{h}}}.$$

Следствие: Пусть S- аналитическая развертывающаяся гиперповерх-ность и ψ - фиксированная гладкая функция с компактным носителем. Тогда справедлива следующая оценка:

$$\left|\widehat{d\mu}\,(\xi)\right| \leq \frac{C(\psi)}{|\xi|^{\frac{1}{h}}},$$

где $h = \sup\limits_{x\in supp(\psi)} h_S\,(x)$ и h_S определен в начале этой страницы.

Замечание: Так как в случае когда S развертывающаяся гиперповерх-ность, $h_S\,(x)$ является полунепрерывная сверху функций как функция от точек гиперповерхности, то фактически $\sup\limits_{x\in supp(\psi)} h_S\,(x)$ достигается в некоторой точке $x \in supp\,(\psi)$, т.е. $h = \max\limits_{x\in supp(\psi)} h_x\,(S)$.

Доказательство основного результата

Исследуем осцилляторный интеграл $\widehat{d\mu}(\xi)$:

$$I(\xi) := \int\limits_D e^{i\,(x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + ... + x_n\xi_n + f(x_1,x_2,...,x_n)\,\xi_{n+1})} \times$$

$$\times\psi_1(x_1, x_2, ..., x_n)\sqrt{1 + |\nabla f(x)|^2}dx_1dx_2...dx_n,$$

здесь мы воспользовались формулой $dS(x) = \sqrt{1 + |\nabla f(x)|^2}dx_1dx_2...dx_n$ и функция ψ_1 получена из функции ψ. Согласно результатом работы [3] существует ортогональная матрица A такая, что функция $f(Ay)$ имеет вид: $f(Ay) = y_1^h g(y)$, где g- гладкая функция, удовлетворяющая условию $g(0) \neq 0$. Если применим замену переменных $x = Ay$ в интеграле $I(\xi)$, тогда интеграл $I(\xi)$ записывается в виде:

$$I(\eta) = \int\limits_{A^{-1}D} e^{i\left((\eta,y) + y_1^h g(y)\eta_{n+1}\right)}\psi_1(Ay)\sqrt{1 + |\nabla f(Ay)|^2}dy.$$

Здесь: A - ортогональная матрица, $\eta := A^t\xi$, $\eta = (\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n)$,

$$\eta_i = \left(A^t\xi\right)_i, \quad i = 1, 2, ..., n, (x, \xi) = (Ay, \xi) = \left(y, A^t\xi\right),$$

$(\eta, y) = (\eta_1 y_1 + \eta_2 y_2 + ... + \eta_n y_n)$.

Оценим интеграл $I(\eta)$. Для этого рассмотрим два случая.

1-случай: Пусть $|\eta_{n+1}| \leq \max\limits_{1\leq j\leq n} |\eta_j|$. Допустим, что

$$\max_{1\leq j\leq n} |\eta_j| = |\eta_k| \geq 1$$

для некоторых $k \in \{1, 2, ..., n\}$. В случае $|\eta| \leq 1$ интеграл $|I(\eta)|$ тривиаль-но оценивается:

$$|I(\eta)| \leq \mu(D)\left\|\tilde{\psi}\right\|_C.$$

Для краткости записи введем обозначения:

$$\Phi(y) = y_1^h g(y), \quad \tilde{\psi}(y) = \psi_1(Ay)\sqrt{1 + |\nabla f(Ay)|^2}.$$

Запишем интеграл $I(\eta)$ в следующем виде:

$$I(\eta) = \int\limits_{A^{-1}D} e^{i((\eta,y)+\eta_{n+1}\Phi(y))}\tilde{\psi}(y)\,dy =$$

$$= \int\limits_{D_2}\left(\int\limits_{D_1} e^{i((\eta,y)+\eta_{n+1}\Phi(y))}\tilde{\psi}(y)\,dy_k\right)dy_1...dy_{k-1}dy_{k+1}...dy_n.$$

где $A^{-1}D = D_2 \times D_1$, точнее $D_1 = \pi_1\left(A^{-1}D\right)$ проекция $A^{-1}D$ на R с координатой y_k и $D_2 = \pi_2\left(A^{-1}D\right)$ проекция R^n на R^{n-1} с координатами $(y_1, ..., y_{k-1}, y_{k+1}, ..., y_n)$. Применим формулу интегрирования по частям во внутреннем интеграле:

$$I_1(\eta) = \int\limits_{D_1} e^{i((\eta,y)+\eta_{n+1}\Phi(y))}\tilde{\psi}(y)\,dy_k = \int\limits_{D_1}\frac{\partial\left(e^{i((\eta,y)+\eta_{n+1}\Phi(y))}\right)}{\partial y_k}\cdot\frac{\tilde{\psi}(y)}{iF(y)}dy_k.$$

Здесь $F(y) := \eta_k + \eta_{n+1}\frac{\partial\Phi(y)}{\partial y_k} \neq 0$, при условии малости носителя $\tilde{\psi}$. Если обозначим $u = \frac{\tilde{\psi}(y)}{i\,F(y)}$, $dv = \frac{\partial\left(e^{i\,((\eta,y)+\eta_{n+1}\Phi(y))}\right)}{\partial y_k}$,

то $v = e^{i\,((\eta,y)+\eta_{n+1}\Phi(y))}$ и считая, что $\frac{\partial F(y)}{\partial y_k} = \eta_{n+1}\frac{\partial^2\Phi(y)}{\partial y_k^2}$ для дифференциала функции u получим:

$$du = \frac{\frac{\partial\tilde{\psi}(y)}{\partial y_k}\left(\eta_k + \eta_{n+1}\frac{\partial\Phi(y)}{\partial y_k}\right) - \tilde{\psi}(y)\,\eta_{n+1}\frac{\partial^2\Phi(y)}{\partial y_k^2}}{i\ \left(F(y)\right)^2}dy_k =$$

$$= \frac{\frac{\partial\tilde{\psi}(y)}{\partial y_k}\left(F(y)\right) - \tilde{\psi}(y)\,\eta_{n+1}\frac{\partial^2\Phi(y)}{\partial y_k^2}}{i\ \left(F(y)\right)^2}dy_k$$

Тогда интеграл $I_1(\eta)$ записывается в виде:

$$I_1(\eta) = -\int\limits_{D_1} e^{i\,((\eta,y)+\eta_{n+1}\Phi(y))}\frac{\left(\frac{\partial\tilde{\psi}(y)}{\partial y_k}F(y) - \tilde{\psi}(y)\,\eta_{n+1}\frac{\partial^2\Phi(y)}{\partial y_k^2}\right)}{i\ \left(F(y)\right)^2}dy_k =$$

$$= -\int\limits_{D_1} \frac{e^{i\,((\eta,y)+\eta_{n+1}\Phi(y))}\left(\frac{\partial\tilde{\psi}(y)}{\partial y_k} - \frac{\eta_{n+1}}{F(y)}\tilde{\psi}\,(y)\,\frac{\partial^2\Phi(y)}{\partial y_k^2}\right)}{i\,F\,(y)}dy_k.$$

Легко показать справедливость следующих оценок:

$$\left|\frac{1}{F\,(y)}\right| = \frac{1}{\left|\eta_k + \eta_{n+1}\frac{\partial\Phi(y)}{\partial y_k}\right|} \leq \frac{M_1}{|\eta_k|} \tag{1}$$

, где $M_1 = \max\limits_{y\in\sup p\tilde{\psi}} \frac{1}{1-\left|\frac{\partial\Phi(y)}{\partial y_k}\right|}$.

$$\left|\frac{\eta_{n+1}}{F(y)}\right| = \frac{|\eta_{n+1}|}{\left|\eta_k+\eta_{n+1}\frac{\partial\Phi(y)}{\partial y_k}\right|} \leq M_1 \tag{2}$$

Воспользовавшись соотношениями (1) и (2), для интеграла $I_1\,(\eta)$ получим неравенство:

$$|I_1\,(\eta)| \leq \frac{M_1\left(\left|\frac{\partial\tilde{\psi}(y)}{\partial y_k}\right| + \left|\tilde{\psi}\,(y)\right|\cdot\left|\frac{\partial^2\Phi(y)}{\partial^2 y_k}\right|\right)}{|\eta_k|} \leq$$

$$\leq \frac{M_2 \max\left(\left|\frac{\partial\tilde{\psi}(y)}{\partial y_k}\right| + \left|\tilde{\psi}\,(y)\right|\right)}{|\eta_k|} = \frac{M_2\cdot\left\|\tilde{\psi}\right\|_{C^1(U)}}{|\eta_k|}.$$

Таким образом, для интеграла $I\,(\eta)$ справедлива следующая оценка:

$|I\,(\eta)| \leq \frac{M_2\cdot\left\|\tilde{\psi}\right\|_{C^1(U)}}{|\eta_k|}\cdot\int\limits_{D_2} dy_1...dy_{k-1}dy_{k+1}...dy_n = \frac{C_1}{|\eta_k|}$, где

$$\int\limits_{D_2} dy_1...dy_{k-1}dy_{k+1}...dy_n = \mu\,(D_2)\,,$$

$$C_1 = M_2\left\|\tilde{\psi}\right\|_{C^1(U)}\mu\,(D_2)\,.$$

N раз интегрируя внутренний интеграл $I_1\,(\eta)$ для интеграла $I\,(\eta)$ аналогично получаем следующую оценку:

$|I\,(\eta)\,| \leq \frac{M\cdot\left\|\tilde{\psi}\right\|_{C^N(U)}}{|\eta_k|^N} = \frac{C_N}{|\eta_k|^N} \leq \frac{C_N}{|\eta|^N} \leq \frac{C_N}{|\eta|^{\frac{1}{h}}}$, ибо $h \geq 2$. Так как A ортогональная матрица, то имеем $|A\eta| = |\xi|$. Поэтому последная оценка может быть записана в виде:

$$|I(\eta)| \leq \frac{C_N}{|A^{-1}\xi|^{\frac{1}{h}}} = \frac{C}{|\xi|^{\frac{1}{h}}}.$$

2-случай: Пусть

$$|\eta_{n+1}| \geq \max_{1\leq j\leq n} |\eta_j|.$$

Рассмотрим интеграл

$$I(\eta) = \int\limits_{A^{-1}D} e^{i\left((\eta,y)+y_1^h g(y)\eta_{n+1}\right)} \tilde{\psi}(y)\, dy. \tag{3}$$

Мы предположим, что носитель гладкой функции $\tilde{\psi}$ содержится в некото-ром шаре с центром 0 и с радиусом ε. Мы можем предполагать, что на носителе функции $\tilde{\psi}$ имеет место неравенство

$$\left|\frac{\partial^h \left(y_1^h g(y) + \frac{\eta_1}{\eta_{n+1}} y_1 + \frac{\eta_2}{\eta_{n+1}} y_2 + ... + \frac{\eta_n}{\eta_{n+1}} y_n\right)}{\partial y_1^h}\right| \geq \frac{|g(0)|\, h!}{2}.$$

Применяем лемму Ван дер Корпута к интегралу (3) и получаем следую-щую оценку [1]:

$$|I(\eta)| \leq C_k (\eta_{n+1})^{-\frac{1}{h}} \left(\left\|\tilde{\psi}\right\|_{L^\infty} + \left\|\tilde{\psi}\right\|_{L^1}\right) = \frac{C}{|\eta_{n+1}|^{\frac{1}{h}}} \leq \frac{C}{|\eta|^{\frac{1}{h}}}.$$

Считая, что $|A\eta| = |\xi|$ запишем эту оценку в виде:

$$|I(\eta)| \leq \frac{C_1}{|\eta|^{\frac{1}{h}}} = \frac{C_1}{|A^{-1}\xi|^{\frac{1}{h}}} = \frac{C}{|\xi|^{\frac{1}{h}}}.$$

Доказательство следствия вытекает из стандартных рассуждений с уче-том компактности носителя ψ.

О точности результатов

Рассмотрим интеграл

$$I(\eta) = \int\limits_{A^{-1}D} e^{i\left((\eta,y)+y_1^h g(y)\eta_{n+1}\right)} \tilde{\psi}(y)\, dy.$$

Пусть $\eta_1 = \eta_2 = ... = \eta_n = 0$. Сделаем замену переменных $(g(y))^{\frac{1}{h}} y_1 = z_1,\ y_2 = z_2, ..., y_n = z_n$. Тогда интеграл $I(\eta)$ записывается в виде:

$$I(\eta) = \int\limits_{A^{-1}D} e^{i\,\eta_{n+1}\, z_1^h} a(z)\, dz_1 dz_2 ... dz_n,$$

где $a(z) = \frac{\partial\left((g(y))^{\frac{1}{h}} y_1\right)}{\partial y_1} \tilde{\psi}(y)$, $z_1 = (g(y))^{\frac{1}{h}} y_1,\ z_2 = y_2, ..., z_n = y_n$.

Следовательно, для интеграла $I(\eta)$ справедливо следующее асимпто-тическое разложение [4]:

$$I(\eta) = \frac{C}{\eta_{n+1}^{\frac{1}{h}}} \int\limits_{D_1} a(0, z_2, ..., z_n)\, dz_2 ... dz_n + O\left(\frac{1}{\eta_{n+1}^{\frac{2}{h}}}\right),$$

где $a(0) > 0$, и D_1- образ $A^{-1}D$ определяемый заменой переменных. Следовательно,

$$|I(\eta)| \geq \frac{C_1}{|\eta_{n+1}|^{\frac{1}{h}}} - \frac{C_2}{|\eta_{n+1}|^{\frac{2}{h}}},$$

где $C_1 = \left| C \int\limits_{D_1} a(0, z_2, ..., z_n)\, dz_2 ... dz_n \right|$. Если $a(z) \geq 0$ и $a(0) > 0$, то $C_1 > 0$. Таким образом, при больших значениях η_{n+1}, выполняется следующая оценка снизу

$$|I(\eta)| \geq \frac{C_1}{2\,|\eta_{n+1}|^{\frac{1}{h}}},$$

что показывает точность полученной оценки.

Литература

1. Stein E. M. Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals, volume 43 of Princeton Mathematical Series. Princeton University Press, Princeton, NJ,1993.

2. Ikromov I.A., Kempe M., Muller D. Estimates for maximal functions associated to hypersurfaces in R^3 and related problems of harmonic analysis. Acta Math.204 (2010), 151–271.

3. Усманов С.Э. Приспособленные системы координат для некоторых функций многих переменных. Узбекский математический журнал. Вып.4, стр. 128-139. Ташкент-2013.

4. Федорюк М.В. Метод перевала. М.: Наука, 1977.
5. Варченко А.Н. Многогранники Ньютона и оценки осциллирующих интегралов. Функц. анал. и его прил. 1976, т. 10 вып. 3, стр. 13-38.
6. Bourgoin J. Averages in the plane over convex curves and maximal operators. J. Anal. Math., 47(1986), P.69-85 .
7. Greenleaf A. Principal curvature and harmonic analysis. Indiana Univ. Math.J., 30(1981), P. 519-537.
8. Sogge C.D. Maximal operators associated to hypersurfases with one nonvanishiny principal curvature. Stud. Adv. Math., P. 317-323 CRC, Boca Raton, FL, 1995.

Самаркандский государственный университет

Uzbek Mathematical
Journal, 2014,№4, pp.164-170

УДК 517.55

Ортонормальная система в матричном шаре

Худайберганов Г.[2] **Халкназаров А.**[3]

Ushbu maqolada matritsaviy shar uchun ortonormal sistema topilgan va ular yordamida Bergman yadrosi qatorga yoyilgan.

In this article found orthonormal system for the matrix sphere and using these systems expanded the Bergman kernel.

Пусть C$[m \times m]$-пространство $[m \times m]$-матриц с комплексными элементами. Обозначим через $\mathrm{C}^n[m \times m]$ декартово произведение n экземпляров C$[m \times m]$:

$$\mathrm{C}^n[m \times m] = \underbrace{\mathrm{C}[m \times m] \times ... \times \mathrm{C}[m \times m]}_{n-\text{раз}} \quad .$$

Через B обозначим матричный шар в пространстве $\mathrm{C}^n[m \times m]$:

$$B = \{Z = (Z_1, ..., Z_n) \in \mathrm{C}^n[m \times m] : I^{(m)} - \langle Z, Z\rangle > 0\},$$

где $\langle Z, Z\rangle = Z_1Z_1^* + Z_2Z_2^* + ... + Z_nZ_n^*$ - “скалярное” произведение, $I^{(m)}$-единичная $[m \times m]$- матрица, $Z_\nu^* = \overline{Z}_\nu^{'}$ – матрица, сопряженная и транспонированная к Z_ν, $\nu = 1, 2, ..., n$.

Остовом B является множество (см. [4])

$$X = \{Z = (Z_1, ..., Z_n) \in \mathrm{C}^n[m \times m] : \langle Z, Z\rangle = I\}.$$

Пусть $k_1, k_2, ..., k_m$- целые числа, удовлетворяющие условию $k_1 \geq k_2 \geq ... \geq k_m \geq 0$. Каждому элементу P из $GL(m)$ (т.е. группы всех невырожденных матриц порядка m) соответствует в представлении $GL(m)$ с сигнатурой $(k_1, k_2, ..., k_m)$ матрица

$$A_{k_1,k_2,...,k_m}(P). \tag{1}$$

---

[2] Доктор физико-математических наук, профессор НУУз. им. М. Улугбека. Поддержан грантом Ф-4-31.

[3] Ассистент Нукусского государственного педагогического института.

Предположим, что представление унитарно для унитарных матриц P. Известно, что (1) является матрицей, имеющей (см. [1]) $N(k_1, k_2, ..., k_m)$ строк и столбцов, где

$$N(k_1, k_2, ..., k_m) = \frac{D(k_1 + m - 1, k_2 + m - 2, ..., k_{m-1} + 1, k_m)}{D(m-1, m-2, ..., 1, 0)},$$

$$D(k_1, k_2, ..., k_m) = \prod_{1 \leq i < j \leq m} (k_i - k_j), \ \ m \geq 2.$$

След этой матрицы мы будем обозначать

$$\chi_{k_1, k_2, ..., k_m}(P) = SpA_{k_1, k_2, ..., k_m}(P).$$

Эта величина называется характером представления (1).

Если P- диагональная матрица, $P = \Lambda = [\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m]$, то (см. [1])

$$\chi_{k_1, k_2, ..., k_m}(\Lambda) = \frac{M_{k_1, k_2, ..., k_m}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m)}{D(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m)},$$

где

$$M_{k_1, k_2, ..., k_m}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m) = \det \left| \lambda_j^{k_i + m - i} \right|_{i,j=1}^{m}.$$

Обозначим через $u = (u_1, u_2, ..., u_m)$ вектор в m-мерном комплексном пространстве. Через $u^{[\alpha]}$ мы будем обозначать вектор с компонентами

$$\sqrt{\frac{\alpha!}{\alpha_1! \alpha_2! ... \alpha_m!}} u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} ... u_m^{\alpha_m}, \ \ \alpha = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i, \ \ \alpha \geq 0. \tag{2}$$

Размерность вектора $u^{[\alpha]}$ равна

$$\frac{(m + \alpha - 1)!}{\alpha!(m-1)!}.$$

Для полных круговых областей можно предполагать, что группа движений, оставляющих начало неподвижным, состоит из линейных преобразований вида

$$v = uP, \tag{3}$$

где P - унитарная матрица. Тогда преобразование (3) индуцирует преобразование

$$v^{[\alpha]} = u^{[\alpha]} P^{[\alpha]},$$

где $P^{[\alpha]}$ обозначает α – ю симметризованную кронекеровскую степень матрицы P.

Очевидно, что выражение (2) содержит все одночлены степени α, т.е. любая однородная форма от $u_1, u_2, ..., u_m$ степени α является линейной комбинацией выражений вида (2). Любой многочлен от $u_1, u_2, ..., u_m$ является линейной комбинацией выражений вида (2), если α принимает значения 0,1,2,...

Группа движений матричного шара B, оставляющих начало неподвижным, состоит из преобразований вида

$$W = U'ZV, \qquad (4)$$

где U и V- унитарные матрицы порядков m и mn соответственно. Расположим элементы матрицы Z и W в виде векторов

$$z = \left\{ z_{11}^{(1)}, ..., z_{1m}^{(1)}; ...; z_{m1}^{(1)}, ..., z_{mm}^{(1)}; ...; z_{11}^{(n)}, ..., z_{1m}^{(n)}; ...; z_{m1}^{(n)}, ..., z_{mm}^{(n)} \right\}$$

$$w = \left\{ w_{11}^{(1)}, ..., w_{1m}^{(1)}; ...; w_{m1}^{(1)}, ..., w_{mm}^{(1)}; ...; w_{11}^{(n)}, ..., w_{1m}^{(n)}; ...; w_{m1}^{(n)}, ..., w_{mm}^{(n)} \right\}.$$

Преобразование (4) матрицы Z в матрицу W индицирует некоторое преобразование вектора z в вектор w. Это преобразование имеет вид:

$$w = z(U \otimes V),$$

где знак $\otimes$ означает кронекоровское произведение. Тогда преобразование вектора $z^{[\alpha]}$ в вектор $w^{[\alpha]}$ состоит из преобразований вида

$$w^{[\alpha]} = z^{[\alpha]} (U \otimes V)^{[\alpha]}.$$

Инвариантное, при этом преобразовании, подпространство $z^{[\alpha]}$ разбивается в прямую сумму подпространств с размерностями

$$q(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m) = N(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m) \cdot N(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m, 0, ..., 0).$$

Обозначим через $\phi^{(i)}_{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m}(Z)$, $i = 1, 2, ..., q(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m)$ компоненты $z^{[\alpha]}$. Когда Z преобразуется в W преобразованием (4), то $\phi^{(i)}_{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m}(Z)$ преобразуются в линейные комбинации от $\phi^{(i)}_{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m}(W)$ посредством матрицы

$$A_{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m}(U) \otimes A_{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m,0,...,0}(V), \tag{5}$$

где

$$A_{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m}(U) = U^{[\alpha]}, \ \ A_{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m,0,...,0}(V) = V^{[\alpha]}.$$

Для различных $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m)$ представления (5) не эквивалентны. Следовательно

$$\int\limits_B \phi^{(i)}_\alpha(Z) \cdot \overline{\phi^{(j)}_\beta(Z)}\, \dot{Z} = \delta_{\alpha\beta} \cdot \delta_{ij} \cdot \rho_\alpha,$$

где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m)$, $\dot{Z} = \prod\limits_{p=1}^{m} \prod\limits_{q=1}^{mn} dx_{pq} dy_{pq}$, $x_{pq} + iy_{pq} = z_{pq}$, и ρ_α не зависят от i. Таким образом, множество функций

$$\{\phi^{(i)}_\alpha(Z)\}_{i,\alpha}$$

образует ортогональную систему в области B. Итак, мы доказали следующую теорему.

Теорема 1. Для области B система функций

$$(\rho_\alpha)^{-\frac{1}{2}} \phi^{(i)}_\alpha(Z), \ \ i = 1, 2, ..., q(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m), \ \ \alpha = 0, 1, 2, ...$$

является ортонормальной системой, где

$$\rho_\alpha = \int\limits_B \left| \phi^{(i)}_\alpha(Z) \right|^2 \dot{Z}. \tag{6}$$

Нам теперь остается вычислить (6). Для этой цели мы, прежде всего, уточним процесс получения функций $\phi^{(i)}_\alpha(Z)$. Вектор, полученный из матрицы Z, преобразуется посредством матрицы (5), когда Z подвергается преобразованию (4). Для диагональной матрицы $\Lambda = [\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m]$ матрица $A_{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m}(\Lambda)$ также диагональна. Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{q(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m)} \left|\phi_\alpha^{(i)}(Z)\right|^2 = Sp[A_{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m}(ZZ^*)]$$

и мы имеем

$$q(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m)\rho_\alpha = \int\limits_B Sp[A_{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m}(ZZ^*)]\dot{Z} = \int\limits_B \chi_{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m}(ZZ^*)\dot{Z}.$$

Этот интеграл вычислен для матриц - $[m\times n]$ (см. [1]). Этим же методом мы, вычислив для матриц - $[m \times mn]$, имеем:

$$q(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m)\rho_\alpha =$$

$$= \pi^{nm^2} \frac{1!2!...(mn-m-1)!}{m!(m+1)!...(mn-1)!} \prod_{j=1}^{m} \frac{(l_j+mn-m)!}{(l_j+mn)!} N(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m),$$

где $l_j = \alpha_j + m - j$.

Теперь мы имеем для B ортонормальную систему функций

$$(\rho_\alpha)^{-\frac{1}{2}}\phi_\alpha^{(i)}(Z), \ \ i = 1, 2, ..., q(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m), \ \ \alpha = 0, 1, 2, ...$$

С помощью этой системы разложим ядро Бергмана для B, имеющий вид (см.[5])

$$K(Z, W) = \frac{1}{V(B)} \det{}^{-mn-m}(I^{(m)} - \langle Z, W\rangle),$$

где $V(B)$ объем матричного шара (см. [6])

$$V(B) = \pi^{nm^2} \frac{1!2!...(mn-1)!}{m!(m+1)!...(mn+m-1)!}.$$

Теорема 2. Ядро Бергмана матричного шара $K(Z, W)$ относительно ортонормальных систем разлагается в ряд

$$\sum_{\alpha} \sum_{i=1}^{q(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m)} \frac{\phi^{(i)}_{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m}(Z)\overline{\phi^{(i)}_{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m}(W)}}{\rho_\alpha}.$$

Доказательство. По теореме 1.2.5 из [1], при $|\lambda_i| < 1$ получаем равенство

$$\left(\prod_{i=1}^{m}(1-\lambda_i)\right)^{-mn-m} = c_{m+1} \sum_{l_1>...>l_m\geq 0} a_{l_1+mn-m}...a_{l_m+mn-m}\times$$

$$\times N(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m,0,...,0)\cdot\chi_{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m}([\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m]),$$

где

$$l_j = \alpha_j + m - j, \quad a_l = \frac{(m+l)!}{m!l!}, \quad c_{m+1} = \frac{1}{a_{mn-m}...a_{mn-1}}.$$

Известно, что $\det(I^{(m)} - ZW^*)$ не меняется при замене $\det(I^{(m)} - \Lambda)$, где $\Lambda = [\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m]$ - диагональная матрица, $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$- собственные значения матрицы ZW^*. Если W и Z принадлежат B, т.е.

$$I^{(m)} - WW^* > 0, \;\; I^{(m)} - ZZ^* > 0,$$

то собственные значения матрицы ZW^* по модулю меньше единицы (см.[3]), так что

$$\det{}^{-mn-m}(I^{(m)} - \langle Z,W\rangle) = c_{m+1} \sum_{l_1>...>l_m\geq 0} a_{l_1+mn-m}...a_{l_m+mn-m}\times$$
$$\times N(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m,0,...,0)\cdot\chi_{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m}(ZW^*).$$

Теперь, разделив обе части этого равенства на обьем матричного шара, получим:

$$K(Z,W) = \sum_{\alpha} \frac{\chi_{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m}(ZW^*)}{\rho_\alpha} =$$

$$= \sum_{\alpha} \sum_{i=1}^{q(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m)} \frac{\phi^{(i)}_{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m}(Z)\overline{\phi^{(i)}_{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m}(W)}}{\rho_\alpha}. \tag{7}$$

Ряд (7) равномерно сходится при любых Z и W, лежащих внутри B. Теорема доказана.

Из равенства (7), в частности, при $m = 1$, получается известное нам разложение ядра Бергмана из единичного шара в $\mathbb{C}^n$(см. [2]).

Литература

1. Хуа Ло-Кен. "Гармонический анализ функций многих комплексных переменных в классических областях". М.: 1959 г.
2. Шабат Б. В. "Введение в комплексный анализ". Ч. 2. М.: Наука, 3-е изд., 1985 г.
3. Г. Худайберганов, А. М. Кытманов, Б. А. Шаимкулов. "Комплексный анализ в матричных областях". Монография. Красноярск: Сибирский федеральный ун-т, 2011 г.
4. Г. Худайберганов, А. Халкназаров. "Инвариантный оператор Лапласа в матричном шаре". Журнал Сибирского Федерального университета, 2012, 5 (2). с. 283-288.
5. С. Косбергенов. "О ядре Бергмана в матричном шаре". Уз.мат.ж.,1998 г. №1. 42-49.
6. А. Халкназаров. "Объем матричного шара в простронстве матриц". Уз.мат.ж.,2012 г. №3. 135-138.

Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека

К 60-летию профессора А.Я.Нарманова

В этом году исполняется шестьдесят лет доктору физико–математических наук, заведующему кафедрой геометрии Национального университета Узбекистана имени
М.Улугбека профессору Абдигаппару Якубовичу Нарманову.

А.Я. Нарманов родился 26 октября 1954 года в Дехканабадском районе Кашкадаринской области.

В 1972 году окончил среднюю школу №7 с золотой медалью и поступил на факультет прикладной математики и механики Национального Университета Узбекистана (бывший ТашГУ).

В 1975 году он был переведен в Санкт-Петербургский государственный университет. На молодого и энергичного студента в скором времени обратил внимание профессор Санкт–Петербургского государственного университета Николай Николаевич Петров.

Под руководством профессора Н.Н.Петрова А.Я.Нарманов начал научные исследования в области разработки и применения геометрических методов в качественной теории оптимального управления.

В 1978 году А.Я.Нарманов успешно окончил математико–механический факультет Санкт–Петербургского государственного университета и продолжил научно–исследовательскую работу в качестве стажера–исследователя. В 1980 году поступил в аспирантуру Санкт–Петербургского государственного университета и в 1983 году успешно защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико–математических наук в специализированном совете Санкт-Петербургского университета. С 1984 года А.Я.Нарманов работает в Национальном университете Узбекистана на должности ассистента кафедры геометрии, затем на должностях доцента, профессора.

В 1989 году А.Я.Нарманов был направлен в Великобританию и прошел годичную научную стажировку в Уорикском университете (Warwick university) под руководством профессора D.Epstein.

А.Я.Нарманов в 2000 году защитил диссертацию на соискание ученой степени доктора физико–математических наук в специализированном совете при институте математики академии наук Республики Узбекистан

Работы профессора А.Я.Нарманова, посвященные теории слоений и геометрическим методам теории оптимального управления хорошо известны в нашей республике и зарубежом. Его основные результаты относятся области современной математики, возникшей во второй половине двадцатого века на стыке качественной теории дифференциальных уравнений и дифференциальной топологии.

В частности, профессором А.Я.Нармановым обобщена известная теорема Риба о стабильности компактного слоя для некомпактных слоев слоений коразмерности один. Для сингулярных слоений им получено необходимое и достаточное условие, при выполнении которого данное слоение будет римановым. Он также ведет исследования по изучению геометрии слоений на многообразиях неотрицательной кривизны, порожденных римановой субмерсией. В круг его интересов входит также геометрия орбит векторных полей, в частности, геометрия векторных полей Киллинга.

Под руководством профессора А.Я.Нарманова защищены пять диссер- таций на соискание ученой степени кандидата физико–математических наук, двое его учеников работают над докторскими диссертациями. В 2009 году по его инициативе для молодых математиков была организована международная школа–семинар в городе Самарканде, в работе которой участвовали ученые из Франции, Италии, Бразилии, Ирана, России, Иордании, Пакистана и Узбекистана.

Профессор А.Я.Нарманов уделяет большое вр́имание привлечению молодых студентов к научной работе. На кафедре геометрии организован кружок по геометрии, где способные студенты изучают новые разделы геометрии в форме обсуждений, споров и выступлений.

Учебники по дифференциальной геометрии и по аналитической геомет-рии, написанные профессором А.Я.Нармановым, используются студентами университетов нашей республики в качестве основных учебников. Кроме того, им написаны более десяти учебных пособий по геометрии и истории математики. Профессором А.Я.Нармановым опубликованы более 90 научных работ в зарубежных и республиканских журналах. С 1989 года профессор А.Я.Нарманов является членом Американского математического общества.

Профессор А.Я.Нарманов хорошо владеет английским языком, читает лекции на английском языке для студентов магистратуры, участвовал на многих международных конференциях с научными докладами (Япония – 2003, Турция – 2007, Пакистан – 2012).

Мы желаем профессору А.Я.Нарманову крепкого здоровья, плодотворной научной работы и больших успехов в педагогической деятельности.

Редколлегия журнала

Содержание

Mundarija

Компьютерная верстка: к.ф.-м.н. *Ф.А.Нуралиев*

Журнал зарегистрирован Агентством по печати и информации
Республики Узбекистан 22 декабря 2006 г. Регистр. №0044.

Сдано в набор 02.10.14 г. Подписано к печати 17.10.14 г.
Формат 60×84 1/16. Гарнитура литературная. Печать офсетная.
Усл.-печ.л. 11,0. Тираж 150 Заказ №

Институт математики при Национальном Университете
Узбекистана им. М.Улугбека: 100125,
Ташкент, Академгородок, ул. Дурмон йули, 29.

Отпечатано в ДП "NISO POLIGRAF" г.Ташкент, ул. Х.Байкаро, 41