O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI FANLAR AKADEMIYASI
MIRZO ULUG‘BEK NOMIDAGI O‘ZBEKISTON MILLIY
UNIVERSITETI QOSHIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI

O‘ZBEKISTON MATEMATIKA JURNALI

Jurnalga 1957 yilda asos solingan (1991 yilgacha "O‘zbekiston fanlar akademiyasining axboroti. Fizika-matematika fanlari seriyasi"deb nomlangan). Yilda 4 marta chiqadi

4. 2016

УЗБЕКСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

УзМЖ

Основан в 1957 г. (до 1991 г. под названием "Известия Академии наук Узбекистана. Серия физико-математических наук"). Выходит 4 раза в год

ТАШКЕНТ - 2016

Адрес редколлегии: 100125. Ташкент, Дурмон йули, 29,
Институт математики при Национальном Университете
Узбекистана им. М.Улугбека,
телефон: (+99871) 262-75-44

ТАШКЕНТ - 2016

Uzbek Mathematical
Journal, 2016,№4, pp.3-15

УДК 517.984

Бесконечность числа связанных состояний системы двух фермионов на двумерной решетке

Абдуллаев Ж.И., Кулиев К.Д., Мамиров Б.У.

Ikki o‘lchamli panjarada ikki fermionli sistema Hamiltoniani qaralgan bo‘lib, ma’lum tipdagi potensiallar uchun sistemaning cheksiz ko‘p bog‘langan holatlari mavjudligi ko‘rsatilgan.

The Hamiltonian of a system of two fermions on a two-dimensional lattice is considered and the existence of infinite number of bound states for some potentials is shown. Moreover we obtain asymptotic formulas for eigenvalues for small parameters β.

1. Введение

Природа появления связанных состояний двухчастичных кластерных операторов при малых значениях параметра впервые подробно исследовалась Минлосом и Маматовым [1]. В работе [2] изучено дискретный спектр гамильтониана H_0 относительного движения $n-$ частич двух типов; взаимодействие первого типа описывается короткодействующим потенциалом W_1, взаимодействие второго типа описывается дальнодействующим потенциалом W_2, взаимодействие разных типа описывается отрицательным дальнодействующим потенциалом W_3. Существование бесконечного числа собственных значений гамильтониана заряженных систем в однородном магнитном поле установлено [3].

Связанные состояние гамильтониана H системы двух фермионов на одномерной решетке изучены в [4], возмущении собственных значений двухчастичного оператора Шредингера на одномерной решетке исследовалось в работе [5], а в работе [6] изучены возмущения в непрерывного спектра.

В этой работе рассматриваются связанные состояния гамильтониана $\hat{H}$ (см. (1)) системы двух фермионов на двумерной решетке $\mathbb{Z}^2$, т.е. изучается дискретный спектр семейства операторов Шредингера $H(\mathbf{k})$, $\mathbf{k}=(k_1,k_2)\in\mathbb{T}^2$, (см. (3)) соответствующий гамильтониану $\hat{H}$. Из (3) и

(4) вытекает, что $H(k_1,k_2) = H(-k_1,k_2) = H(k_1,-k_2)$, поэтому можно считать $k_1,\ k_2 \in [0,\ \pi]$.

Если предположить, что $\mathbf{k} = (\pi,\pi)$ то оператор $H(\pi,\pi)$ имеет бесконечное число собственных значений вида $4 - \hat{v}(\mathbf{n}), \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2$ и существенный спектр состоит из одной точке $\{4\}$.

Далее рассматривается инвариантные подпространства относительно оператора $H(k_1,\pi)$ и доказывается, что это оператор имеет бесконечно много инвариантных подпространств $\Re_n^{-+}$, $n \in \mathbb{N}$ и $\Re_n^{+-}$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Доказано, что двухкратное собственное значение $z_1(\pi,\pi)$ оператора $H(\pi,\pi)$ расщепляются на два невырожденные собственные значения $z^{+-}_{0(1)}(\pi-2\beta,\pi)$ и $z^{-+}_{1(0)}(\pi-2\beta,\pi)$ при малых возмущениях $\beta > 0$ (см. теорема 6.1). Трехкратные собственные значения $z_n(\pi,\pi), n \geq 2$ распадаются на три различных невырожденных собственных значениях $z^{+-}_{n(n)}(\pi-2\beta,\pi)$, $z^{-+}_{n(n-1)}(\pi-2\beta,\pi)$ и $z^{+-}_{n(n-1)}(\pi-2\beta,\pi)$ при малых $\beta > 0$. Для этих собственных значений получены асимптотические формулы с точностью до β^2 (см. теорема 6.2). При всех случаях получены явный вид для собственных функций оператора Шредингера $H(\pi-2\beta,\pi)$.

2. Описание двухчастичного гамильтониана

Свободному гамильтониану $\hat{H}_0$ системы двух фермионов на двумерной решетке $\mathbb{Z}^2$ обычно соответствует следующий ограниченный самосопряженный оператор действующий в гильбертовом пространстве $\ell_2^{as}(\mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2) := \{f \in \ell_2(\mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2) : f(\mathbf{x},\mathbf{y}) = -f(\mathbf{y},\mathbf{x})\}$ по формуле

$$\hat{H}_0 = -\frac{1}{2m}\Delta_1 - \frac{1}{2m}\Delta_2.$$

Здесь m означает массу фермионов, который в дальнейшем мы считаем равным единице, $\Delta_1 = \Delta \otimes I$ и $\Delta_2 = I \otimes \Delta$, где решетчатый Лапласиан $\Delta-$ есть разностный оператор, описывающий перенос частицы с узла на соседний узел, т.е.

$$(\Delta\hat{\psi})(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{2}[\hat{\psi}(\mathbf{x}+\mathbf{e}_j) + \hat{\psi}(\mathbf{x}-\mathbf{e}_j) - 2\hat{\psi}(\mathbf{x})], \quad \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2, \quad \hat{\psi} \in \ell_2(\mathbb{Z}^2),$$

где $\mathbf{e}_1 = (1,0)$, $\mathbf{e}_2 = (0,1)$ единичные орты в $\mathbb{Z}^2$. Полный гамильтониан $\hat{H}$ действует в гильбертовом пространстве $\ell_2^{as}(\mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2)$ и состоит из разности свободного гамильтониана $\hat{H}_0$ и потенциала взаимодействия

$\hat{V}_2$ двух частиц (см. [5]), т.е.

$$\hat{H} = \hat{H}_0 - \hat{V}_2, \tag{1}$$

где

$$(\hat{V}_2\hat{\psi})(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \hat{v}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\hat{\psi}(\mathbf{x},\mathbf{y}), \quad \hat{\psi} \in \ell_2^{as}(\mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2).$$

Всюду в дальнейшем относительно функции $\hat{v}$ предполагается, что

$$\hat{v} \in \ell_2(\mathbb{Z}^2) \qquad \text{и} \qquad \hat{v}(\mathbf{x}) = \hat{v}(-\mathbf{x}) \geq 0 \quad \text{для всех } \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2. \tag{2}$$

При этом условии гамильтониан $\hat{H}$ является ограниченным самосопряженным оператором в пространстве $\ell_2^{as}(\mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2)$.

После преобразования Фурье и выделения полного квазиимпульса $k \in \mathbb{T}^2$ системы двух фермионов (см. [4], [7]) изучение спектральных свойств оператора $\hat{H}$ сводится к изучению семейства двухчастичных дискретных операторов Шредингера $H(\mathbf{k}) = H_0(\mathbf{k}) - V$, $\mathbf{k} \in \mathbb{T}^2$ действующих в $L_2^o(\mathbb{T}^2) = \{f \in L_2(\mathbb{T}^2) : f(-\mathbf{q}) = -f(\mathbf{q})\}$ по формуле

$$(H(\mathbf{k})f)(\mathbf{q}) = \varepsilon_{\mathbf{k}}(\mathbf{q})f(\mathbf{q}) - \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}^2} v(\mathbf{q}-\mathbf{s})f(\mathbf{s})d\mathbf{s}. \tag{3}$$

Невозмущенный оператор $H_0(\mathbf{k})$ есть оператор умножения на функцию

$$\varepsilon_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}) = \varepsilon(\frac{\mathbf{k}}{2}+\mathbf{q}) + \varepsilon(\frac{\mathbf{k}}{2}-\mathbf{q}) = 4 - 2\cos\frac{k_1}{2}\cos q_1 - 2\cos\frac{k_2}{2}\cos q_2. \tag{4}$$

3. Спектр оператора $H(\mathbf{k})$

Заметим, что спектры операторов $H_0(\mathbf{k})$ и V известны. Оператор $H_0(\mathbf{k})$ не имеет собственных значений, его спектр чисто непрерывный и состоит из области значений функции $\varepsilon_{\mathbf{k}}$, т.е. $\sigma(H_0(\mathbf{k})) = [m(\mathbf{k}), M(\mathbf{k})]$, где

$$m(\mathbf{k}) = \min_{\mathbf{q}\in\mathbb{T}^2} \varepsilon_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^{2}(2-2\cos\frac{k_i}{2}),\ M(\mathbf{k}) = \max_{\mathbf{q}\in\mathbb{T}^2} \varepsilon_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^{2}(2+2\cos\frac{k_i}{2}).$$

Спектр оператора V состоит из множества $\{0, \hat{v}(\mathbf{n});\ \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2\}$, при этом $\hat{v}(\mathbf{n})$ есть собственное значение оператора V. При условии (2), V является оператором Гильберта-Шмидта, в частности компактным оператором. Поэтому в силу теоремы Вейля, существенный спектр оператора $H(\mathbf{k})$ совпадает со спектром оператора $H_0(\mathbf{k})$, т.е. $\sigma_{ess}(H(\mathbf{k})) = [m(\mathbf{k}), M(\mathbf{k})]$.

Приведем некоторые известные факты и обозначения из теории операторов и возмушений. Для любого самосопряженного оператора B, действующего в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ и не имеющего существенного спектра правее точки $\mu \in \mathbb{R}$, обозначим через $n(\mu, B)$ число собственных значений оператора B, лежащих правее от μ. Через $N(\mathbf{k}, z)$ обозначается число собственных значений оператора $H(\mathbf{k})$, лежащих левее точки $z \leq m(\mathbf{k})$, т.е. $N(\mathbf{k}, z) = n(-z,\ -H(\mathbf{k}))$. Число $N(\mathbf{k}, m(\mathbf{k}))$ фактически совпадает с числом собственных значений вне непрерывного спектра оператора $H(\mathbf{k})$. Для любого $\mathbf{k} \in \mathbb{T}^2$ и $z < m(\mathbf{k})$ мы определим интегральный оператор

$$G(\mathbf{k}, z) = V^{\frac{1}{2}} r_0(\mathbf{k}, z) V^{\frac{1}{2}},$$

где $r_0(\mathbf{k}, z)-$ резольвента невозмущенного оператора $H_0(\mathbf{k})$. При условии (2) оператор V положителен, через $V^{\frac{1}{2}}$ обозначается положительный квадратный корень положительного оператора V. Из самосопряженности оператора $H(\mathbf{k})$ и положительности V вытекает, что $\sigma(H(\mathbf{k})) \cap (M(\mathbf{k}), \infty) = \emptyset$, отсюда имеем $\sigma_{disc}(H(\mathbf{k})) \subset (-\infty, m(\mathbf{k}))$. Поэтому мы ищем собственное значение z только $z < m(\mathbf{k})$.

Решение f уравнения Шредингера $H(\mathbf{k})f = zf$ и неподвижные точки φ оператора $G(\mathbf{k}, z)$ связаны соотношениями

$$f = r_0(\mathbf{k}, z) V^{\frac{1}{2}} \varphi, \qquad \varphi = V^{\frac{1}{2}} f.$$

Кроме того имеет место принцип Бирмана-Швингера [8].

Лемма 3.1. *Число собственных значений оператора $H(\mathbf{k})$ лежащих ниже $z < m(\mathbf{k})$ совпадает с числом собственных значений оператора $G(\mathbf{k}, z)$ больше единице, т.е. имеет место равенство*

$$N(\mathbf{k}, z) = n(1,\ G(\mathbf{k}, z)).$$

Лемма 3.2. *Если предельный оператор* $\lim\limits_{z \to m(\mathbf{k})-} G(\mathbf{k}, z) = G(\mathbf{k}, m(\mathbf{k}))$ *существует и компактен, то имеет место равенство*

$$N(\mathbf{k}, m(\mathbf{k})) = n(1, G(\mathbf{k}, m(\mathbf{k}))). \tag{5}$$

Равенство (5) означает, что число собственных значений оператора $H(\mathbf{k})$ лежащих ниже $m(\mathbf{k})$ совпадает с числом собственных значений оператора $G(\mathbf{k}, m(\mathbf{k}))$ больше единице.

4. Инвариантные подпространства оператора $H(\mathbf{k})$

В этом параграфе мы рассмотрим оператор $H(\mathbf{k})$ с потенциалом $\hat{v}$ вида

$$\hat{v}(\mathbf{n}) = \hat{v}(n_1, n_2) = \begin{cases} \bar{v}(|n_2|), & \text{если} \quad n_1 = 0, \\ \bar{v}(|n_2| + 1), & \text{если} \quad |n_1| = 1, \\ 0, & \text{если} \quad |n_1| \geq 2, \end{cases} \tag{6}$$

носител которой принадлежит в полосе $D = \{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2 : \ |n_1| \leq 1\}$.

Здесь $\bar{v} : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ убывающая функция на $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$ (т.е., $\bar{v}(0) > \bar{v}(1) > \bar{v}(2) > \cdots$) и $\bar{v} \in \ell_2(\mathbb{Z}_+)$. Тогда ядро v интегралного оператора V, т.е. Фурье образ F потенциала $\hat{v}$ имеет вид:

$$v(\mathbf{p}) := (F\hat{v})(\mathbf{p}) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2} \hat{v}(\mathbf{n}) e^{i(\mathbf{n},\, \mathbf{p})}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \Big[\bar{v}(0) + 2\bar{v}(1) \cos p_1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \big(\bar{v}(n) \cos np_2 + 2\bar{v}(n+1) \cos p_1 \cos np_2 \big) \Big].$$

Пользуясь формулой $\cos(p - q) = \cos p \cos q + \sin p \sin q$ и равенством

$$\int_{\mathbb{T}^2} f(\mathbf{q})\, \mathrm{d}\mathbf{q} = \int_{\mathbb{T}^2} \cos nq_1 f(\mathbf{q})\, \mathrm{d}\mathbf{q} = \int_{\mathbb{T}^2} \cos nq_2 f(\mathbf{q})\, \mathrm{d}\mathbf{q} = 0$$

при любом $f \in L_2^o(\mathbb{T}^2)$

получим следующий вид для оператора V :

$$(Vf)(\mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{T}^2} \Big[2\bar{v}(1) \sin p_1 \sin q_1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \bar{v}(n) \sin np_2 \sin nq_2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \bar{v}(n$$
$$+1) [\cos np_2 \cos nq_2 \sin p_1 \sin q_1 + \sin np_2 \sin nq_2 \cos p_1 \cos q_1] \Big] f(\mathbf{q}) \mathrm{d}\mathbf{q}.$$

Если $k_1 = k_2 = \pi$, то спектр оператора $H(\pi, \pi) = 4I - V$ состоит только из собственных значений вида 4, $4 - \bar{v}(n)$, $n \in \mathbb{N}$ и существенного спектра $\{4\}$. При этом $z_1(\pi, \pi) = 4 - \bar{v}(1)$ является двухкратным собственным значением с соответствующими нормированными собственными функциями

$$\psi^{-+}_{1(0)}(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}\,\pi}\ \sin p_1, \qquad \psi^{+-}_{0(1)}(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}\,\pi}\ \sin p_2. \tag{7}$$

При каждом $n \geq 2$, число $z_n(\pi,\pi) = 4 - \bar{v}(n)$ является трехкратным собственным значением, ему соответствуют нормированные собственные функции:

$$\psi^{+-}_{0(n)}(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}\,\pi}\ \sin np_2, \qquad \psi^{+-}_{1(n-1)}(\mathbf{p}) = \frac{1}{\pi}\ \cos p_1 \sin(n-1)p_2,$$
$$\psi^{-+}_{1(n-1)}(\mathbf{p}) = \frac{1}{\pi}\ \sin p_1 \cos(n-1)p_2. \tag{8}$$

Число $z_\infty(\pi,\pi) = 4$ является бесконечнократным собственным значением, ему соответствуют собственные функции

$$\psi^{+-}_{(n,m)}(\mathbf{p}) = \cos np_1 \sin mp_2, \quad \psi^{-+}_{(n,m)}(\mathbf{p}) = \sin np_1 \cos mp_2, \ \ n \in \mathbb{N}, \ \ |m| \geq 2.$$

Наша основная цель – изучить поведение двухкратного собственного значения $z_1(\pi,\pi)$ и трехкратным собственным значениям $z_n(\pi,\pi)$, $n \geq 2$ оператора $H(\pi,\pi)$ при малых возмущениях β ($k_1 = \pi - 2\beta$). Мы разложим пространству $L_2^o(\mathbb{T}^2)$ на счетное число инвариантных подпространств $\Re^{+-}_n$, $n \in \mathbb{N}$ (см.(10)) и $\Re^{-+}_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$ (см.(11)) относительно оператора $H(k_1,\pi)$, при этом двухкратное собственное значение $z_1(\pi,\pi)$ является невырожденным собственным значением сужения $H^-(\pi,\pi)|_0$ и $H^+(\pi,\pi)|_1$ оператора $H(\pi,\pi)$ в соответствующих инвариантных подпространствах $\Re^{-+}_0$ и $\Re^{+-}_1$, а трехкратное собственное значение $z_n(\pi,\pi), n \geq 2$ есть невырожденное собственное значение сужения $H^+(\pi,\pi)|_n$, $H^-(\pi,\pi)|_n$ и $H^+(\pi,\pi)|_{n-1}$ оператора $H(\pi,\pi)$ в соответственно инвариантных подпространствах $\Re^{+-}_n$, $\Re^{-+}_n$ и $\Re^{+-}_{n-1}$.

Известно, что $L_2^o(\mathbb{T}^2) = L_2^{-+}(\mathbb{T}^2) \oplus L_2^{+-}(\mathbb{T}^2)$, где

$$L_2^{-+}(\mathbb{T}^2) := \{f \in L_2^o(\mathbb{T}^2) : f(p_1,p_2) = f(p_1,-p_2) = -f(-p_1,-p_2)\},$$

$$L_2^{+-}(\mathbb{T}^2) := \{f \in L_2^o(\mathbb{T}^2) : f(p_1,p_2) = f(-p_1,p_2) = -f(-p_1,-p_2)\}.$$

Здесь, $L_2^{-+}(\mathbb{T}^2)$ ($L_2^{+-}(\mathbb{T}^2)$) – подпространство нечетных (четных) по первому и четных (нечетных) функций по второму аргументу. Также,

$$L_2^{++}(\mathbb{T}^2) := \{f \in L_2(\mathbb{T}^2) : f(p_1,p_2) = f(-p_1,p_2) = f(-p_1,-p_2)\}$$

подпространство четных функций по каждому аргументу.

Лемма 4.1. *Пусть потенциал* $\hat{v}$ *имеет вид (6), тогда подпространства* $L_2^{+-}(\mathbb{T}^2)$ *и* $L_2^{-+}(\mathbb{T}^2)$ *являются инвариантными относительно оператора* $H(\mathbf{k})$.

Обозначим через $H^{+-}(\mathbf{k})$ и $H^{-+}(\mathbf{k})$ сужения оператора $H(\mathbf{k})$ соответственно в подпространствах $L_2^{+-}(\mathbb{T}^2)$ и $L_2^{-+}(\mathbb{T}^2)$. Действие оператора $H_0(\mathbf{k})$ остается неизменной, поэтому мы приведем виды операторов $V^{+-} = V|_{L_2^{+-}(\mathbb{T}^2)}$ и $V^{-+} = V|_{L_2^{-+}(\mathbb{T}^2)}$:

$$(V^{+-}f)(\mathbf{p}) = \frac{1}{2\pi^2}\int_{\mathbb{T}^2}\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\bar{v}(n)+2\bar{v}(n+1)\cos p_1\cos q_1\Big]\sin np_2\sin nq_2\, f(\mathbf{q})\,\mathrm{d}\mathbf{q},$$

$$(V^{-+}f)(\mathbf{p}) = \frac{1}{2\pi^2}\int_{\mathbb{T}^2}\Big[\bar{v}(1)+2\sum_{n=1}^{\infty}\bar{v}(n+1)\cos np_2\cos nq_2\Big]\sin p_1\sin q_1\, f(\mathbf{q})\,\mathrm{d}\mathbf{q}.$$

Можно проверить равенства

$$L_2^{+-}(\mathbb{T}^2) = L_2^{+}(\mathbb{T})\otimes L_2^{-}(\mathbb{T}) \quad \text{и} \quad L_2^{-+}(\mathbb{T}^2) = L_2^{-}(\mathbb{T})\otimes L_2^{+}(\mathbb{T}),$$

где $L_2^{+}(\mathbb{T}) = \{f\in L_2(\mathbb{T}) : f(-q) = f(q)\}$ и $L_2^{-}(\mathbb{T}) = \{f\in L_2(\mathbb{T}) : f(-q) = -f(q)\}$ подпространства соотвественно четных и нечетных функций на $\mathbb{T} = [-\pi,\pi]$.

Системы $\{\varphi_n(q) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nq\}_{n\in\mathbb{N}}$ и $\psi_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $\{\psi_n(q) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nq\}_{n\in\mathbb{N}}$ образуют ортонормированные базисы в $L_2^{-}(\mathbb{T})$ и $L_2^{-}(\mathbb{T})$ соответственно. Обозначим через $L^{-}(n)$ и $L^{+}(n-1)$, $n\in\mathbb{N}$ одномерное подпространства, натянутое на вектор φ_n и ψ_{n-1} соответственно. При этом, пространства $L_2^{-}(\mathbb{T})$ и $L_2^{+}(\mathbb{T})$ разлагаются в прямую сумму

$$L_2^{-}(\mathbb{T}) = \bigoplus_{n=1}^{\infty} L^{-}(n), \qquad L_2^{+}(\mathbb{T}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty}\oplus L^{+}(n). \tag{9}$$

Разложение (9) порождают разложения

$$L_2^{+}(\mathbb{T})\otimes L_2^{-}(\mathbb{T}) = \bigoplus_{n=1}^{\infty}\{L_2^{+}(\mathbb{T})\otimes L^{-}(n)\} = \bigoplus_{n=1}^{\infty}\Re_n^{+-}, \tag{10}$$

$$L_2^-(\mathbb{T}) \otimes L_2^+(\mathbb{T}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \{L_2^-(\mathbb{T}) \otimes L^+(n)\} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \Re_n^{-+}, \tag{11}$$

где $\Re_n^{+-} := L_2^+(\mathbb{T}) \otimes L^-(n)$ и $\Re_n^{-+} := L_2^-(\mathbb{T}) \otimes L_2^+(n)$.

Лемма 4.2. *Пусть потенциал $\hat{v}$ имеет вид (6), то для любого $n \in \mathbb{N}$ подпространство $\Re_n^{+-}$ $(\Re_{n-1}^{-+})$ является инвариантным относительно оператора $H^{+-}(k_1,\pi)$ $(H^{-+}(k_1,\pi))$.*

Доказательство. Пусть $(f\varphi_n)(p_1,p_2) := f(p_1)\,\varphi_n(p_2),\ f \in L_2^+(\mathbb{T}),\ \varphi_n \in L^-(n)$ произвольный элемент из $\Re_n^{-+}$. Несложные вычисление показывает, что

$$(H^{+-}(k_1,\pi) f\,\varphi_n)(p_1,p_2) = (H_0(k_1,\pi) f\,\varphi_n)(p_1,p_2) - (V^{+-} f\,\varphi_n)(p_1,p_2) =$$

$$\Big[(4-2\cos\frac{k_1}{2}\cos p_1) f(p_1) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [\bar{v}(n)+2\bar{v}(n+1)\cos p_1 \cos q_1] f(q_1)\ \mathrm{d}q_1\Big]\varphi_n(p_2) \tag{12}$$

что доказывает лемму. □

(12) показывают, что сужение $H^{+-}(k_1,\pi)|_n$ оператора $H^{+-}(k_1,\pi)$ на подпространстве $\Re_n^{+-} = L_2^+(\mathbb{T}) \otimes L^-(n)$ имеет вид:

$$H^{+-}(k_1,\pi)|_n = [2I + H_0(k_1) - V_n^+] \otimes I, \tag{13}$$

где $I-$ единичный оператор в $L^-(n)$, а $H^{+n}(k_1) := 2I + H_0(k_1) - V_n^+$ есть одномерный двухчастичный оператор, действующий в $L_2^+(\mathbb{T})$ по формуле:

$$(H^{+n}(k_1)f)(p) = (2+\varepsilon_{k_1}(p)) f(p) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [\bar{v}(n)+2\bar{v}(n+1)\cos p \cos s] f(s)\ \mathrm{d}s, \tag{14}$$

где $\varepsilon_{k_1}(p) = 2 - 2\cos\dfrac{k_1}{2}\cos p$.

Аналогично сужение $H^{-+}(k_1,\pi)|_n$ оператора $H^{-+}(k_1,\pi)$ на подпространстве $\Re_n^{-+} := L^-(\mathbb{T}) \otimes L_2^+(n)$:

$$H^{-+}(k_1,\pi)|_n = [2I + H_0(k_1) - V_n^-] \otimes I, \tag{15}$$

где I - единичный оператор в $L^+(n)$, а $H^{-n}(k_1) := 2I + H_0(k_1) - V_n^-$

есть одномерный двухчастичный оператор, действующий в $L_2^-(\mathbb{T})$ по формуле:

$$(H^{-n}(k_1)f)(p) = (2+\varepsilon_{k_1}(p))f(p) - \frac{\bar{v}(n+1)}{\pi}\sin p\int_{-\pi}^{\pi}\sin s f(s)ds,\ f\in L_2^-(\mathbb{T}).$$

Изучение собственных значений операторов $H^{+-}(k_1,\pi)|_n$ и $H^{-+}(k_1,\pi)|_n$ соответственно в силу представления (13) и (15) сводится к изучению собственных значений операторов $H^{+n}(k_1)$ и $H^{-n}(k_1)$, т.е. двумерная задача сводится к одномерной.

Заметим, что собственные функции $\psi_{1(0)}^{-+}(\mathbf{p}) = \sin p_1$ и $\psi_{0(1)}^{+-}(\mathbf{p}) = \sin p_2$ (см.(7)) отвечающему двухкратному собственному значению $z_1(\pi,\pi) = 4-\bar{v}(1)$ оператора $H(\pi,\pi)$ имеет место соотношение $\psi_{0(1)}^{+-}\in\Re_1^{+-}$ и $\psi_{1(0)}^{-+}\in\Re_0^{-+}$. Собственным функциям $\psi_{(n)0}^{+-}(\mathbf{p}) = \sin np_2$, $\psi_{1(n-1)}^{+-}(\mathbf{p}) = \cos p_1\,\sin(n-1)p_2$ и $\psi_{1(n-1)}^{-+}(\mathbf{p}) = \sin p_1\,\cos(n-1)p_2$ (см.(8)) отвечающему трехкратному собственному значению $z_n(\pi,\pi) = 4-\bar{v}(n)$, $n\geq 2$ оператора $H(\pi,\pi)$ имеет место включение $\psi_{(0)n}^{+-}\in\Re_n^{+-}$, $\psi_{1(n-1)}^{+-}\in\Re_{n-1}^{+-}$ и $\psi_{1(n-1)}^{-+}\in\Re_{n-1}^{-+}$, (см. (8)). Отсюда вытекает, что для $n\geq 2$ число $z_n(\pi,\pi)$ является невырожденным собственным значением операторов $H^{+-}(\pi,\pi)|_n$, $H^{+-}(\pi,\pi)|_{n-1}$ и $H^{-+}(\pi,\pi)|_{n-1}$.

5. Собственные значения оператора $H(\mathbf{k})$

В предидующей разделе изучение собственных значений оператора $H(k_1,\pi)$ мы привели изучением собственных значений (относительно простых) операторов $H^{+-}(k_1,\pi)|_n$, $n\in\mathbb{N}$ и $H^{-+}(k_1,\pi)|_n, n\in\mathbb{Z}_+$. В силу представления (13) и (15) достаточно изучить собственные значения одномерных операторов Шредингера $H^{+n}(k_1)$, $n\in\mathbb{N}$ и $H^{-n}(k_1)$, $n\in\mathbb{Z}_+$. Мы начнем изучением собственных значений оператора $H^{+n}(\pi-2\beta)$ при малых β. Из (14) вытекает, что при фиксированным $n\in\mathbb{N}$ оператор $H^{+n}(\pi)$ имеет два простых собственных значений $z_n^+(\pi) = 4-\bar{v}(n)$ и $z_{n+1}^+(\pi) = 4-\bar{v}(n+1)$.

Теорема 5.1. *Для любого $n\in\mathbb{N}$ существует $\delta_n>0$ такое, что для каждого $\beta\in(0,\delta_n)$ оператор $H^{+n}(\pi-2\beta)$ имеет два различных невырожденных собственных значений $z_n^+(\pi-2\beta)$ и $z_{n+1}^+(\pi-2\beta)$ имеющих асимптотики*

$$z_n^+(\pi-2\beta) = 4-\bar{v}(n) - \frac{2}{\bar{v}(n)-\bar{v}(n+1)}\beta^2 + O(\beta^4),\quad \beta\to 0,$$

$$z_{n+1}^{+}(\pi-2\beta)=4-\bar{v}(n+1)-\frac{\bar{v}(n)-3\bar{v}(n+1)}{\bar{v}(n+1)(\bar{v}(n)-\bar{v}(n+1))}\beta^{2}+O(\beta^{4}),\ \beta\to 0.$$

Теорема 5.2. *Для любого $n\in\mathbb{N}$ и $k_1\in\mathbb{T}$ оператор $H^{+n}(k_1)$ (определенное по формуле (14)) имеет хотя бы одно собственное значение ниже непрерывного спектра.*

Доказательство. Если мы покажем, что оператор Бирмана-Швингера $G_n^{+}(k_1,z)$ при некотором $z<m(k_1,\pi)$ (соотвествующий оператору Шредингера $H^{+n}(k_1)$) имеет собственное значение больше единице, тогда в силу леммы 3.1 оператор $H^{+n}(k_1)$ имеет собственное значение лежащих ниже $z<m(k_1,\pi)=m(k_1),\ m(k_1)=4-2\cos\frac{k_1}{2}$.

Из положительности и компактности оператора $G_n^{+}(k_1,z)$, следует, что число

$$\sup_{\|\psi\|=1}\big(G_n^{+}(k_1,z)\psi,\psi\big)=\|G_n^{+}(k_1,z)\|=\lambda^{+}(k_1,z)$$

является наибольшее собственное значение оператора $G_n^{+}(k_1,z)$. Рассмотрим скалярное произведение

$$\big(G_n^{+}(k_1,z)\psi,\psi\big)=\Big(\big(V_n^{+}\big)^{\frac{1}{2}}r_0(k_1,z)\big(V_n^{+}\big)^{\frac{1}{2}}\psi,\psi\Big)=$$

$$=\Big(r_0(k_1,z)\big(V_n^{+}\big)^{\frac{1}{2}}\psi,\big(V_n^{+}\big)^{\frac{1}{2}}\psi\Big)=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{|\big(V_n^{+}\big)^{\frac{1}{2}}\psi(p)|^{2}}{4-2\cos\dfrac{k_1}{2}\cos p-z}\,\mathrm{d}p. \tag{16}$$

Если, здесь в качестве в $\psi(p)$ (16) мы берем собственную функцию $\psi_0(p)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$ оператора $\big(V_n^{+}\big)^{\frac{1}{2}}$ отвечающую собственное значение $\sqrt{\bar{v}(n)}$, то получим

$$\big(G_n^{+}(k_1,z)\psi_0,\psi_0\big)=\frac{\bar{v}(n)}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}p}{4-2\cos\dfrac{k_1}{2}\cos p-z}.$$

Можно показать, что $\lim\limits_{z\to m(k_1)-}\big(G_n^{+}(k_1,z)\psi_0,\psi_0\big)=+\infty$. Отсюда следует существование число $\overline{z_n} \in (m(k_1) - \delta, m(k_1))$ такое, что

$$\big(G_n^+(k_1, \overline{z_n})\psi_0, \psi_0\big) > 1.$$

Это означает, что оператор Бирмана-Швингера $G_n^+(k_1, \overline{z_n})$ имеет собственное значение больше единице. $\square$

Теорема 5.3. *Для каждого $n \in \mathbb{Z}_+$ существует $\beta_n = \arcsin \bar{v}(n+1)$ такое, что для любого $\beta \in (0, \beta_n)$ оператор $H^{-n}(\pi - 2\beta)$ имеет единственное невырожденное собственное значение*

$$z_{n+1}^-(\beta) = 4 - \bar{v}(n+1) - \frac{1}{\bar{v}(n+1)} \sin^2 \beta.$$

Для $\beta \in \big(\beta_n, \ \dfrac{\pi}{2}\big]$ оператор $H^{-n}(\pi - 2\beta)$ не имеет собственных значений лежащих ниже непрерывного спектра. При $\beta = \beta_n$ оператор $H^{-n}(\pi - 2\beta)$ имеет виртуальный уровень в крае $m(\pi - 2\beta) = 4 - 2\sin\beta$.

6. Заключение

Заметим, что существенные спектры операторов $H^+(k_1, \pi)|_n$ и $H^-(k_1, \pi)|_n$ не зависит от n и совпадают со спектром невозмущенного оператора $H_0(k_1, \pi)$, т.е.

$$\sigma_{ess}\big(H^+(k_1, \pi)|_n\big) = \sigma_{ess}\big(H^-(k_1, \pi)|_n\big) =$$
$$\sigma\big(H_0(k_1, \pi)\big) = \Big[4 - 2\cos\frac{k_1}{2}, \ 4 + 2\cos\frac{k_1}{2}\Big].$$

Бесконечнократное собственное значение $z_\infty(\pi, \pi) = 4$ при любом возмушение $\beta > 0$ распадается, и вокруг него получается существенний спектр $\big[4 - 2\sin\beta, \ 4 + 2\sin\beta\big]$. В параграфе 5 мы изучили собственные значения оператора $H_n^+(\pi - 2\beta)$ с потенциалом $\hat{v}$ вида (6) при малых значениях параметра β. Мы вычислили первый и второй коэффициенты асимптотического разложения двухкратного собственного значения $z_1(\pi, \pi)$ и трехкратных собственных значений $z_n(\pi, \pi), \ n \geq 2$ при малых $\beta > 0$.

Все собственные значения являются четными функциями от β, поэтому можно считать $\beta \geq 0$.

Теорема 6.1. *Существует $\delta > 0$ такое, что для любого $\beta \in (0, \delta)$ оператор $H(\pi - 2\beta, \pi)$ имеет два различных невырожденных собствен-*

ных значений

$$\begin{aligned} z^{+-}_{0(1)}(\pi-2\beta,\pi) &= 4-\bar v(1)-\frac{2}{\bar v(1)-\bar v(2)}\beta^2+O(\beta^4), \quad \beta\to 0,\\ z^{-+}_{1(0)}(\pi-2\beta,\pi) &= 4-\bar v(1)-\frac{1}{\bar v(1)}\sin^2\beta, \quad \beta\in(0,\arcsin\bar v(1)) \end{aligned}$$

лежащее в малой окрестности $z_1(\pi,\pi)=4-\bar v(1)$ *соответствующем собственным функциям*

$$f^{+-}_{0(1)}(p_1,\,p_2)=\frac{c_{0(1)}\;+\gamma_{0(1)}\;\cos p_1}{4-2\sin\beta\cos p_1-z^{+-}_{0(1)}(\pi-2\beta,\pi)}\sin p_2\;\in\Re^{+-}_1,$$

$$f^{-+}_{1(0)}(p_1,\,p_2)=\frac{c_{1(0)}\;\sin p_1}{4-2\sin\beta\cos p_1-z^{-+}_{1(0)}(\pi-2\beta,\pi)}\in\Re^{-+}_0.$$

Теорема 6.2. *При каждом* $n\ge 2$ *существует* $\delta_n>0$ *такое, что для любого* $\beta\in(0,\delta_n)$ *оператор* $H(\pi-2\beta,\pi)$ *имеет три различных невырожденных собственных значений*

$$\begin{aligned} z^{+-}_{n(n)}(\pi-2\beta,\pi) &= 4-\bar v(n)-\frac{2}{\bar v(n)-\bar v(n+1)}\beta^2+O(\beta^4), \quad \beta\to 0,\\ z^{-+}_{n(n-1)}(\pi-2\beta,\pi) &= 4-\bar v(n)-\frac{1}{\bar v(n)}\sin^2\beta, \quad \beta\in(0,\arcsin\bar v(n)), \end{aligned}$$

$$z^{+-}_{n(n-1)}(\pi-2\beta,\pi)=4-\bar v(n)-\frac{\bar v(n-1)-3\bar v(n)}{\bar v(n)(\bar v(n-1)-\bar v(n))}\beta^2+O(\beta^4), \quad \beta\to 0$$

лежащее в малой окрестности $z_n(\pi,\pi)=4-\bar v(n)$ *соответствующим собственным функциям*

$$f^{+-}_{n(n)}(p_1,\,p_2)\;=\;\frac{c_{n(n)}\;+\gamma_{n(n)}\;\cos p_1}{4-2\sin\beta\cos p_1-z^{+-}_{n(n)}(\pi-2\beta,\pi)}\sin np_2\;\in\Re^{+-}_n,$$

$$f^{-+}_{n(n-1)}(p_1,\,p_2)=\frac{c_n\;\sin p_1}{4-2\sin\beta\cos p_1-z^{-+}_{n(n-1)}(\pi-2\beta,\pi)}\cos(n-1)p_2\in\Re^{-+}_{n-1},$$

$$f^{+-}_{n(n-1)}(p_1,\,p_2)=\frac{c_{n(n-1)}\;+\gamma_{n(n-1)}\;\cos p_1}{4-2\sin\beta\cos p_1-z^{+-}_{n(n-1)}(\pi-2\beta,\pi)}\sin(n-1)p_2\in\Re^{+-}_{n-1}.$$

При обозначении собственных значений $z_n^{-+}(\pi-2\beta,\pi)$ оператора $H(\pi-2\beta,\pi)$ мы добавили в индекси (n) которое означает соответствующая собственная функция принадлежит в $\Re_n^{-+}$. Если мы предположим, что собственные функции нормированы, то коэффициенты $c_{n(n)}, \gamma_{n(n)}$ (c_n и $c_{n(n-1)}, \gamma_{n(n-1)}$) определяются однозначны.

Литература

1. Маматов Ш.С., Минлос Р.А.. Связанные состояния двухчастичного кластерного оператора. ТМФ. Т.79, 2, 163-179, (1989).

2. Г.М. Жислин. О дискретном спектре гамильтонианов некоторых моделей квантовых систем. ТМФ. (2012), Т. 171, N.1, 44-64.

3. Г.М. Жислин. Спектральные свойства гамильтонианов заряженных систем в однородном магнитном поле. О структуре чисто точечного спектра. ТМФ. (2003), Т. 134, N.2, 273-288.

4. Абдуллаев Ж.И.. Связанные состояния системы двух фермионов на одномерной решетке. ТМФ. Т.147, 1, 36-47, (2006).

5. Абдуллаев Ж.И.. Теория возмущений для двухчастичного оператора Шредингера на решетке. ТМФ. Т.145, 1, 212-220, (2005).

6. Эшкабилов Ю.Х.. Об одном некомпактном возмущении в непрерывном спектре оператора умножения на функции. УзМЖ. 2003. N 1, 81-88.

7. M. Reed and B. Simon.. Методы современной математической физики. IV: Анализ операторов. М.: Мир. 1982.

8. Абдуллаев Ж.И.. Принцип Бирмана-Швингера оператора Шредингера на решетке. Вестник СамГУ, 2014. N 5.

Самаркандский государственный университет им. А.Навои

Uzbek Mathematical
Journal, 2016,№4, pp.16-23

УДК 512.554

Разрешимые алгебры Лейбница с 2-филиформным нильрадикалом

Абдурасулов К.К., Адашев Ж.К., Саттаров А.М.

Maqolada Li bo'lmagan 2-filiform nilradikalli yechimli Leybniz algebralari tasnif qilingan.

In this paper solvable Leibniz algebras with 2-filiform non-Lie nilradical are classified.

Понятие алгебры Лейбница было введено Лоде [1] как не антисимметрическое обобщение алгебр Ли. В течение последних 20 лет активно изучалась теория алгебр Лейбница, и многие результаты из теории алгебр Ли были продолжены до алгебр Лейбница.

В классической теории алгебр Ли известен результат о том, что любая конечномерная алгебра Ли представляется в виде полупрямой суммы полупростой подалгебры и ее максимального разрешимого идеала (теорема Леви-Мальцева). Аналогичный результат для алгебр Лейбница был получен Барнсом в 2011 году [8].

Работы [2-4] были посвящены исследованиям разрешимых алгебр Ли с различными нильрадикалами, такими как естественным образом градуированные филиформные и квази-филиформные алгебры, абелевые и т.д. Методы Мубаряkзанова Г.М. применяются также для разрешимых алгебр Лейбница. В работах [5-6] классифицированы разрешимые алгебры Лейбница с нуль-филиформным, естественным образом градуированным филиформным нильрадикалами.

Цель данной работы - классифицировать разрешимые алгебры Лейбница с не Лиевым 2-филиформным нильрадикалом.

Предварительные сведения. Приведем основные понятия и результаты, используемые при классификации алгебр Лейбница.

Определение 1. Алгебра G над полем F называется *алгеброй Лейбница*, если для любых $x, y, z \in G$ выполняется тождество:

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] - [[x, z], y],$$

где $[,]$ - умножение в G.

Для произвольной алгебры Лейбница определим ряды:

$$L^{[1]} = L, \quad L^{[k+1]} = [L^{[k]}, L^{[k]}];$$
$$L^1 = L, \quad L^{k+1} = [L^k, L^1].$$

Определение 2. Алгебра Лейбница L называется *разрешимой* (*нильпотентной*), если существует $s \in N$ такое, что $L^{[s]} = 0$ ($L^s = 0$). Минимальное число, обладающее таким свойством, называется *индексом разрешимости* (*нильпотентности*) алгебры L.

Напомним что $R(L) = \{x \in L : [L, x] = 0\}$ - правый аннулятор алгебры L.

Пусть x - нильпотентный элемент множества $L \backslash [L, L]$. Для нильпотентного оператора правого умножения R_x определим убывающую последовательность $C(x) = (n_1, n_2, \ldots, n_k)$, состоящую из размеров жордановых клеток оператора R_x. На множестве таких последовательностей определим лексикографический порядок.

Определение 3. Последовательность $C(L) = \max\limits_{\mathrm{x \in L} \backslash [L,L]} \mathrm{C}(x)$ назовем *характеристической последовательностью* алгебры L.

Определение 4. Алгебра Лейбница L называется 2-*филиформной*, если $C(L) = (n-2, 1, 1)$.

В работе [7] получена классификация таких алгебр.

Теорема 1. Пусть L - градуированная 2$-$филиформная не разложимая не Лиевая алгебра Лейбница. Тогда L изоморфна одной из следующих не изоморфных алгебр:

$$\mu_1 : \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \le i \le n-3, \\ [e_1, f_1] = f_2, & \end{cases}$$

$$\mu_2 : \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \le i \le n-3, \\ [e_1, f_1] = e_2 + f_2, & \\ [e_i, f_1] = e_{i+1}, & 2 \le i \le n-3, \end{cases}$$

где $\{e_1, e_2, \ldots, e_{n-2}, f_1, f_2\}$ - базис алгебры.

Определение 5. Линейное отображение d из L в себя называется *дифференцированием*, если для любых $x, y \in L$ выполняется тождество:

$$d([x, y]) = [d(x), y] + [x, d(y)].$$

Нильпотентная алгебра Лейбница называется характеристически нильпотентной, если все ее дифференцирования нильпотентны.

Теперь определим понятие ниль-независимости отображения.

Линейные отображения $f_1, ..., f_k$ называются *ниль-независимыми*, если

$$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + ... + \alpha_k f_k$$

не нильпотентно при всех значениях α_i, кроме нуля.

Дифференцирования вида $d_x(y) = [y, x]$ называются *внутренними.*

Пусть R - разрешимая алгебра Лейбница, следовательно, R можно записать как сумму векторных пространств $R = N + Q$, где $N-$ нильрадикал в R.

Предложение 1.[5] Пусть R - разрешимая алгебра Лейбница. Тогда размерность Q не превышает максимального числа ниль-независимых дифференцирований N.

Известно, что разрешимая не нильпотентная алгебра Лейбница имеет не характеристически нильпотентный нильрадикал.

Основные результаты. Мы будем исследовать разрешимые алгебры Лейбница с не Лиевыми 2-филиформным нильрадикалом. Для получения классификации таких алгебр были получены их дифференцирования.

Предложение 2. Любое дифференцирование алгебры μ_1 имеет вид:

$$\begin{aligned}
&D(e_1) = \sum_{i=1}^{n-2} a_i e_i + b_1 f_1 + b_2 f_2, \quad D(e_2) = 2a_1 e_2 + \sum_{i=3}^{n-2} a_{i-1} e_i + b_1 f_2,\\
&D(e_i) = i a_1 e_i + \sum_{j=i+1}^{n-2} a_{j-i+1} e_j, \quad 3 \le i \le n-2,\\
&D(f_1) = c_1 e_{n-2} + d_1 f_1 + d_2 f_2, \quad D(f_2) = (a_1 + d_1) f_2.
\end{aligned}$$

Доказательство. Доказательство вытекает из определения дифференцирования и умножения алгебры μ_1. $\square$

Из Предложения 2 следует, что число ниль-независимых дифференцирований равно двум. Приведем классификацию разрешимых алгебр Лейбница с нильрадикалом μ_1.

Теорема 2. Любая разрешимая алгебра Лейбница с нильрадикалом μ_1 изоморфна алгебре $L(a_2, \dots, a_{n-2}, \delta_{n-2})$.

$$\begin{array}{ll} [e_i,e_1]=e_{i+1}, \quad 1\le i\le n-3, & [e_1,f_1]=f_2,\\ [e_i,x]=\sum\limits_{j=i+1}^{n-2} a_{j-i+1}e_j,\ 1\le i\le n-2, & [f_1,x]=f_1,\ [f_2,x]=f_2,\\ [x,f_1]=-f_1, & [x,x]=\delta_{n-2}e_{n-2}, \end{array}$$

кроме того, первые ненулевые параметры $a_2,\dots,a_{n-2},\delta_{n-2}$ можно принять равным единице.

Доказательство. Из дифференцирования алгебры получим умножение:

$$\begin{array}{ll} [e_i,e_1]=e_{i+1},\ 1\le i\le n-3, & [e_1,f_1]=f_2,\\ [e_1,x]=\sum\limits_{i=1}^{n-2} a_ie_i+b_1f_1+b_2f_2, & [e_2,x]=2a_1e_2+\sum\limits_{i=3}^{n-2} a_{i-1}e_i+b_1f_2,\\ [e_i,x]=ia_1e_i+\sum\limits_{j=i+1}^{n-2} a_{j-i+1}e_j, & 3\le i\le n-2,\\ [f_1,x]=c_1e_{n-2}+d_1f_1+d_2f_2, & [f_2,x]=(a_1+d_1)f_2,\\ [x,e_1]=\sum\limits_{i=1}^{n-2} \beta_ie_i+\beta_{n-1}f_1+\beta_nf_2, & [x,f_1]=\sum\limits_{i=1}^{n-2} \gamma_ie_i+\gamma_{n-1}f_1+\gamma_nf_2,\\ [x,x]=\sum\limits_{i=1}^{n-2} \delta_ie_i+\delta_{n-1}f_1+\delta_nf_2. & \end{array}$$

Мы имеем $\{e_2,e_3,\dots,e_{n-2}\}\in R(L)$. Поэтому $[x,e_i]=0$ для $2\le i\le n-2$.

Рассмотрев тождество Лейбница для троек $\{x,f_1,e_1\}$ и $\{e_1,x,e_1\}$, имеем

$$\gamma_i=0, \quad \text{для} \quad 1\le i\le n-3, \quad \beta_1=0,$$

$$a_1=0, \quad \beta_{n-1}=-b_1.$$

Из $[x,f_2]=[x,[e_1,f_1]]$ и $0=[e_1,[f_1,x]+[x,f_1]]$ получим $[x,f_2]=0$ и $\gamma_{n-1}=-d_1$. Из тождества Лейбница для $\{e_1,x,x\}$ имеем $\delta_1=0$ и $\delta_{n-1}=0$.

Известно, что $d_1\ne 0$, иначе оператор R_x будет нильпотентен. Сделав замену $x'=\frac{1}{d_1}x,\ f_1'=f_1-\gamma_{n-2}e_{n-2}-\gamma_nf_2$, можно полагать, что $d_1=1$ и $[x,f_1]=-f_1$. Рассмотрим тождество Лейбница для $\{x,f_1,x\}$:

$$[x,[f_1,x]]=[[x,f_1],x]-[[x,x],f_1]=$$

$$= -[f_1, x] - \Big[\sum_{i=2}^{n-2} \delta_i e_i + \delta_n f_2, f_1\Big] = -c_1 e_{n-2} - f_1 - d_2 f_2.$$

С другой стороны,

$$[x, [f_1, x]] = [x, c_1 e_{n-2} + f_1 + d_2 f_2] = -f_1.$$

Отсюда имеем $c_1 = d_2 = 0$.

Если возьмем замену $x' = x - \sum\limits_{i=2}^{n-2} \beta_i e_{i-1}$, то получим $[x', e_1] = -b_1 f_1 + \beta_n f_2$. Т.е. $\beta_i = 0$ для $2 \leq i \leq n-2$.

А также проверив тождество Лейбница для $\{x, e_1, x\}$, получим $\beta_n = 0$ и $\delta_i = 0$ для $2 \leq i \leq n-3$. Применив замену вида $e_1' = e_1 - b_1 f_1 - (b_2 + a_2 b_1) f_2, \quad x' = x - \delta_n f_2$, получим $b_1 = b_2 = \delta_n = 0$.

Теперь рассмотрим общую замену базиса:

$$e_1' = \sum_{i=1}^{n-2} A_i e_i + A_{n-1} f_1 + A_n f_2, \quad f_i' = \sum_{i=1}^{n-2} B_i e_i + B_{n-1} f_1 + B_n f_2, \ 1 \leq i \leq k,$$
$$x' = \sum_{i=1}^{n-2} C_i e_i + C_{n-1} f_1 + C_n f_2 + C_{n+1} x.$$

Тогда из $[e_1', x'] = \sum\limits_{i=2}^{n-2} a_i' e_i', \ [x', x'] = \delta_{n-2}' e_{n-2}'$, получим следующие ограничения:

$$a_i' = \frac{a_i}{A_1^{i-1}}, \qquad 2 \leq i \leq n-2, \quad \delta_{n-2}' = \frac{\delta_{n-2}}{A_1^{n-2}}.$$

$\square$

Теперь рассмотрим разрешимую алгебру Лейбница с нильрадикалом μ_2 и приведем общий вид дифференцирования алгебры.

Предложение 3. Любое дифференцирование алгебры μ_2 имеет вид:

$$D(e_1) = \sum_{i=1}^{n-2} a_i e_i + b_1 f_1 + b_2 f_2, \quad D(e_2) = (2a_1 + b_1) e_2 + \sum_{i=3}^{n-2} a_{i-1} e_i + b_1 f_2,$$
$$D(e_i) = (i a_1 + (i-1) b_1) e_i + \sum_{j=i+1}^{n-2} a_{j-i+1} e_j, \quad 3 \leq i \leq n-2,$$
$$D(f_1) = c_1 e_{n-2} + (a_1 + b_1) f_1 + d_2 f_2, \quad D(f_2) = 2 a_1 f_2.$$

Доказательство. Доказательство вытекает из определения дифференцирования и умножения алгебры μ_2. $\square$

В следующей теореме мы приведем классификацию разрешимых алгебр Лейбница с нильрадикалом μ_2.

Теорема 3. Любая разрешимая алгебра Лейбница с нильрадикалом μ_2 изоморфна одной из следующих попарно неизоморфных алгебр:

$$R_1(0,0,0); \quad R_2(0,0,1); \quad R_3(0,1,\delta_n); \quad R_4(1,\beta_n,\delta_n),$$

где $R(b_2,\beta_n,\delta_n),\ b_2,\beta_n,\delta_n \in \mathbb{C}:$

$$\begin{array}{ll}
[e_i,e_1]=e_{i+1},\ \ 1\le i\le n-3, & [e_1,f_1]=e_2+f_2,\\
[e_i,f_1]=e_{i+1},\ \ 2\le i\le n-3, & [e_1,x]=f_1+b_2f_2,\\
[e_2,x]=e_2+f_2, & [e_i,x]=(i-1)e_i,\ \ 3\le i\le n-2,\\
[f_1,x]=f_1,\ \ [x,e_1]=-f_1+\beta_nf_2, & [x,f_1]=-f_1,\ \ [x,x]=\delta_nf_2.
\end{array}$$

.

Из Предложения 3 мы получим следующие произведения:

$$\begin{array}{l}
[e_i,e_1]=e_{i+1},\ \ 1\le i\le n-3,\ \ [e_1,f_1]=e_2+f_2,\\
[e_i,f_1]=e_{i+1},\ \ 2\le i\le n-3,\ \ [e_1,x]=\sum\limits_{i=1}^{n-2}a_ie_i+b_1f_1+b_2f_2,\\
[e_2,x]=(2a_1+b_1)e_2+\sum\limits_{i=3}^{n-2}a_{i-1}e_i+b_1f_2,\\
[e_i,x]=(ia_1+(i-1)b_1)e_i+\sum\limits_{j=i+1}^{n-2}a_{j-i+1}e_j,\ \ 3\le i\le n-2,\\
[f_1,x]=c_1e_{n-2}+(a_1+b_1)f_1+d_2f_2,\ \ [f_2,x]=2a_1f_2,\\
[x,e_1]=\sum\limits_{i=1}^{n-2}\beta_ie_i+\beta_{n-1}f_1+\beta_nf_2,\ \ [x,f_1]=\sum\limits_{i=1}^{n-2}\gamma_ie_i+\gamma_{n-1}f_1+\gamma_nf_2,\\
[x,x]=\sum\limits_{i=1}^{n-2}\delta_ie_i+\delta_{n-1}f_1+\delta_nf_2.
\end{array}$$

Из таблицы умножения видно, что $\{e_2,e_3,\dots,e_{n-2}\}\in R(L)$. Поэтому $[x,e_i]=0$, где $2\le i\le n-2$. Рассмотрев тождество Лейбница для $\{x,f_1,e_1\}$ и $\{e_1,x,e_1\}$, имеем

$$\begin{array}{l}
\gamma_i=\beta_i,\quad 2\le i\le n-3,\quad \beta_1=\gamma_1=0,\\
a_1=0,\quad \beta_{n-1}=-b_1.
\end{array}$$

Из соотношений $[x,f_2]=[x,[e_1,f_1]]$ и $0=[e_1,[f_1,x]+[x,f_1]]$ получим

$[x, f_2] = 0$ и $\gamma_{n-1} = -b_1$. Из тождества Лейбница для $\{e_1, x, x\}$ имеем $\delta_1 = 0$ и $\delta_{n-1} = 0$.

Очевидно, что $b_1 \neq 0$. Тогда сделав замену $x' = \frac{1}{b_1}x$, $f_1' = f_1 - \gamma_{n-2}e_{n-2} - \gamma_n f_2$ имеем $b_1 = 1$ и $[x, f_1] = -f_1$. Рассмотрим тождество Лейбница для $\{x, f_1, x\}$.

$$[x, [f_1, x]] = [[x, f_1], x] - [[x, x], f_1] = -c_1e_{n-2} - f_1 - d_2f_2 - \sum_{i=2}^{n-3} \delta_i e_{i+1}.$$

С другой стороны,

$$[x, [f_1, x]] = [x, c_1e_{n-2} + f_1 + d_2f_2] = -f_1.$$

Отсюда имеем $d_2 = 0,\ \delta_{n-3} = -c_1$ и $\delta_i = 0,\ 2 \leq i \leq n-4$.

Теперь рассмотрим замену $x' = x - \sum\limits_{i=2}^{n-2} \beta_i e_{i-1}$. Тогда $[x', e_1] = -b_1f_1 + \beta_n f_2$, т.е. $\beta_i = 0$ для $2 \leq i \leq n-2$. При замене базиса

$$f_1' = f_1 - \frac{c_1}{n-4}e_{n-2},$$

$$x' = x + \frac{c_1}{n-4}e_{n-3} - \frac{(n-4)\delta_{n-2} + c_1a_2}{(n-4)(n-3)}e_{n-2},$$

получим $c_1 = \delta_{n-2} = 0$.

При замене $e_i' = e_i + \sum\limits_{j=i+1}^{n-2} A_{j-i+1}e_j,\quad 1 \leq i \leq n-2$, где $A_2 = -a_2,\quad A_i = -\frac{1}{i-1}\Big(a_i + \sum\limits_{j=2}^{i-1} a_jA_{i+1-j}\Big),\ 3 \leq i \leq n-2$ получим

$$\begin{array}{ll}
[e_i, e_1] = e_{i+1},\ 1 \leq i \leq n-3, & [e_1, f_1] = e_2 + f_2,\\
[e_i, f_1] = e_{i+1},\ 2 \leq i \leq n-3, & [e_1, x] = f_1 + b_2f_2,\\
[e_2, x] = e_2 + f_2, & [e_i, x] = (i-1)e_i,\quad 3 \leq i \leq n-2,\\
[f_1, x] = f_1, & [x, e_1] = -f_1 + \beta_n f_2,\\
[x, f_1] = -f_1, & [x, x] = \delta_n f_2.
\end{array}$$

Аналогично, рассмотрев общую замену базиса получим следующие ограничения:

$$b'_2 = \frac{b_2}{A_1}, \quad \beta'_n = \frac{\beta_n}{A_1}, \quad \delta'_n = \frac{\delta_n}{A_1^2}.$$

Если $b_2 = \beta_n = \delta_n = 0$, то эта алгебра изоморфна $R_1(0,0,0)$.
Если $b_2 = \beta_n = 0,\ \delta_n \neq 0$, то алгебра изоморфна $R_2(0,0,1)$.
Если $b_2 = 0,\ \ \beta_n \neq 0$, то алгебра изоморфна $R_3(0,1,\delta_n)$.
Если $b_2 \neq 0$, то алгебра изоморфна $R_4(1,\beta_n,\delta_n)$. □

Литература

1. Loday J.-L. Une version non commutative des algébres de Lie: les algébres de Leibniz. Enseign. Math. vol.39, 1993, p. 269-293.

2. J.M. Ancochea Bermudez, R. Campoamor-Stursberg, L. Garcia Vergnolle, Classification of Lie algebras with naturally graded quasi-filiform nilradicals, J. Geom. Phys. 61 (2011) 2168-2186.

3. J.C. Ndogmo, P. Winternitz, Solvable Lie algebras with abelian nilradicals, J. Phys. A 27 (1994) 405-423.

4. Y. Wang, J. Lin, S. Deng, Solvable Lie algebras with quasi-filiform nilradicals, Comm. Algebra 36 (2008) 4052-4067

5. J.M. Casas, M. Ladra, B.A. Omirov, I.A. Karimjanov. Classification of solvable Leibniz algebras with null-filiform nilradical, Linear and Multilinear Algebra, 2013 Vol. 61, No. 6, 758-774

6. J.M. Casas, M. Ladra, B.A. Omirov, I.A. Karimjanov. Classification of solvable Leibniz algebras with naturally graded filiform nilradical, Linear Algebra and its Applications 438 (2013) 2973-3000

7. L.M. Camacho, J.R. Gomez, A.J. Gonzalez, B.A. Omirov, Naturally graded 2-filiform Leibniz algebras,Comm. Algebra 38 (10)(2010), 3671-3685.

8. D.W. Barnes, On Levi's theorem for Leibniz algebras, Bulletin of the Australian Mathematical Society 86 (2) (2012), 184-185.

Институт математики при НУУз.

Uzbek Mathematical
Journal, 2016,№4, pp.24-30

УДК 514.765

Биинвариантные метрики на группах ли

Аслонов Ж.О., Абдуназаров Ф.Х.

Maqolada $SO(3)$ va $G = S^3 \times R$ Li gruppalaridagi biinvariant metrikalar o‘rganilgan va $G = S^3 \times R$ gruppa seksion egriligining yuqori va quyi chegaralari topilgan.

In this paper invariant metrics on groups Lie $SO(3)$ and $G = S^3 \times R$ are studied and lower and upper bounds for the sectional curvature's of the group $G = S^3 \times R$ are found.

Пусть M - гладкое риманово многообразие с римановой метрикой g размерности n, $V(M)$ - множество всех гладких векторных полей на M. В статье всюду под гладкостью понимается гладкость класса C^∞.

Риманова метрика g индуцирует метрическую связность (связность Леви-Чивита) ∇. Напомним,что связностью называется отображение $\nabla : V(M) \times V(M) \to V(M)$, обозначаемое $(X, Y) \to \nabla_X Y$ и обладающее следующими свойствами:

1.$\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,

2.$\nabla_{X+Y} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$,

3.$\nabla_{fX} Y = f\nabla_X Y$,

4.$\nabla_X fY = X(f)Y + f\nabla_X Y$, где f -гладкая функция.

Для векторных полей X, Y обозначим через [X,Y] скобку Ли векторных полей X, Y. Связность Леви-Чивита ∇ и скобка Ли [X,Y] связаны соотношением

$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$.

Определение 1. Линейное отображение $R : V(M)\times V(M)\times V(M) \to V(M)$, определенное по формуле

$$R_{XY} Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

называется тензором кривизны, а скалярная величина
$k(X, Y) = \langle R_{XY} Y, X\rangle$ называется кривизной римана [2].

Определение 2. Секционная кривизна риманова многообразия M в точке p в двумерном направлении σ , определяемых векторами $u, v \in T_p M$, определяется по правилу

$$K_{u,v} = \frac{k(u,v)}{|u|^2|v|^2 - \langle u,v\rangle^2} = \frac{\langle R_{uv}v,u\rangle}{|u|^2|v|^2 - \langle u,v\rangle^2}.$$

Известно,что если многообразие является двумерной поверхностью, погруженное в трехмерное евклидово пространство,то секционная кривизна совпадает с гауссовой кривизной поверхности.

Если секционная кривизна $K_{u,v}$ постоянна для всех плоскостей σ в T_pM и всех точек $p \in M$,то многообразие M называется многоообразием постоянной кривизны.

Напомним, что группой Ли называется группа G являющаяся одновременно гладким многообразием, причем групповая и гладкая ее структуры связаны требованием, чтобы отображения $\varphi : G \to G,\ \psi : G \times G \to G$ определяемые равенствами $\varphi(g) = g^{-1},\ \psi(g,h) = gh$, были гладкими.

Множество всех вещественных неособых $(n \times n)$-матриц с обычным матричным умножением образует группу Ли, обозначаемую $GL(n)$. Действительно, множество всех $(n \times n)$-матриц $A = \left(a^{ij}\right)$, включая и особые, образует векторное пространство размерности n^2. Его базисом могут служить матрицы, один элемент которых единица, а остальные - нули. Тогда $GL(n)$ есть открытое подмножество в R^{n^2}, выделенное условием $\det A \neq 0$.

Определение 1. Каждому элементу g группы Ли G можно сопоставить два его автоморфизмы $L_g : G \to G$ и $R_g : G \to G$ действующие по правилу $L_g h = gh,\ R_g h = hg$. Эти отображения называют левым и правым сдвигами.

Определение 2. Векторное поле X на группе Ли G называется левоинвариантной, если для любого $g \in G$ выполняется равенство $dL_g X = X$

Для любого вектора $u \in T_eG$, где e - единичный элемент G, $X_g = (d_eL_g)u$ определяет левоинвариантное векторное поле.

Риманова метрика $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ на группе Ли G называется левоинвариантной, если для любых $g,h \in G$ и любых касательных векторов $u,v \in T_gG$ выполняется

$$\langle\, d\,L_h u, d\,L_h v\rangle_{hg} = \langle u,\, v\rangle_g. \tag{1}$$

Требование (1) равносильно требованию, чтобы любых левоинвариантных векторных полей $\langle X,Y\rangle = \mathrm{const}$.

Риманова метрика, являющаяся одновременно и лево- и правоинвариантной, называется биинвариантной. Такие метрики существуют не на всех группах Ли. Имеет место следующая [4]

Теорема 1. На каждой компактной группе Ли существует хотя бы одна биинвариантная риманова метрика.

Далее приведем свойства биинвариантных метрик в виде теорем [3].

Теорема 2. Для биинвариантной метрики на группе Ли G и любых левоинвариантных векторных полей X, Y, Z на группе Ли G

$$\langle X, [Y, Z] \rangle = \langle [X, Y], Z \rangle .$$

Теорема 3. Для левоинвариантных векторных полей X, Y связность Леви-Чивита биинвариантной римановой метрики на группе Ли G имеет вид

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2} [X, Y] .$$

Теорема 4. Для биинвариантной метрики на группе Ли G секционная кривизна в точке $p \in G$ в направлении $\sigma = X_p \wedge Y_p$ выражается формулой

$$K_\sigma(X_p \wedge Y_p) = \frac{1}{4} \frac{\langle [X, Y], [X, Y] \rangle}{\langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle - \langle X, Y \rangle^2} |_p,$$

где X, Y- левоинвариантные векторные поля.

Известно, что если $\varphi : M \to M$ дифференцирумое отображение,то имеет место $[d\varphi X, d\varphi Y] = d\varphi [X, Y]$. [2]

Пусть из единицы E группы $GL(n)$ выходит путь $U(t) = \big(u^{ij}(t)\big)$. Его начальная скорость обозначим через $X_E = \big(x^{ij}\big)$, где $x^{ij} = \frac{d}{dt} u^{ij}(t) |_{t=0}$.

Определим поле X в точке $A = \big(a^{ij}\big)$ следующим образом

$$X_A = dL_A(X_E) = \frac{d}{dt} \left(\sum_k a^{ik} u^{ki}(t) \right) = AX_E . \qquad (*)$$

Из соотношение (*) вытекает, что скобка Ли имеет вид $[X, Y] = XY - YX$.

Рассмотрим теперь группу $SO(n)$ вещественных ортогональных $(n \times n)$ матриц с условием $\det A \neq 0$. Секционная кривизна группы Ли

$SO(n)$ выражается следующим образом [3]:

$$K_\sigma = \frac{1}{4} \frac{\sum\limits_{i<j} \left(\sum\limits_k X^{ik} y^{kj} - \sum\limits_k y^{ik} X^{kj} \right)^2}{\sum\limits_{i<j} (X^{ij})^2 \sum\limits_{i<j} (y^{ij})^2 - \left(\sum\limits_{i<j} X^{ij} y^{ij} \right)^2}.$$

В частности, для $SO(3)$, например, $K_\sigma = \frac{1}{4}$.

Введем на касательной пространстве $T_E SO(3)$ базис следующим образом

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ X_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Это базис является ортонормированным и скобка Ли базисных элементов определяем таблицей

$$[X_1, X_2] = X_3, \quad [X_2, X_3] = X_1, \quad [X_3, X_1] = X_2.$$

Если сопоставить базису X_1, X_2, X_3 базисные векторы $\{1, 0, 0\}$, $\{0, 1, 0\}$, $\{0, 0, 1\}$ в R^3, то линейный изоморфизм между $T_E SO(3)$ и R^3 оказывается изометрией.

Рассмотрим трехмерную сферу S^3 радиуса 2 со стандартной римановой метрикой. Векторы X_1, X_2, X_3 в стандартной метрике сферы S^3 образует ортонормированный базис в $T_e S^3$, а как левоинвариантные поля - ортонормированный базис для любой точки S^3. При этом скалярное произведение $< X, Y >_p = \lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2 + \lambda_3 \mu_3$, для любых $X, Y \in T_e S^3$, таких, что

$$X = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3, \ Y = \mu_1 X_1 + \mu_2 X_2 + \mu_3 X_3.$$

Введем на S^3 новую метрику $\ll, \gg$ следующим образом

$$\ll X, Y \gg = \frac{1}{3} \lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2 + \lambda_3 \mu_3.$$

Отличие метрики $\ll, \gg$ от стандартной состоит в том, что каждое касательное пространство "сжимается"в направлении вектора X_1.

Рассмотрим группу Ли $G = S^3 \times R$ с метрикой прямого произведе-

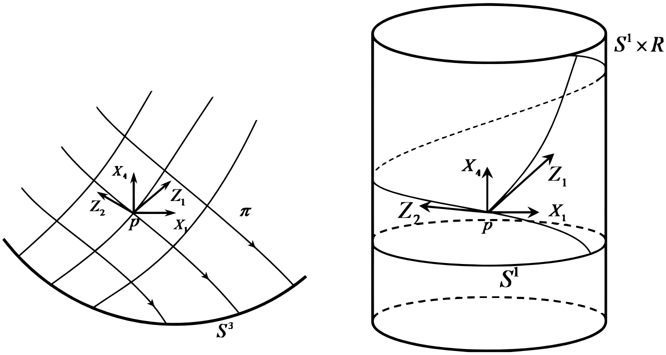

Рис.1

ния сферы и прямой. Эта метрика биинвариантна. Алгебра Ли группы G получается из алгебры Ли группы S^3 добавлением к базису X_1, X_2, X_3 касательного к R единичного вектора X_4, для которого при всех i выполняется равенства $[X_i, X_4] = 0$. Полученный базис является ортонормированным.

Теорема. Многообразие $G = S^3 \times R$ является многообразием строго положительной ограниченной секционной кривизны.

Доказательство. На группе G рассмотрим векторные поля

$$Z_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}X_1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}X_4, \ \ Z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}X_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}X_4.$$

Пусть $\pi : G \to S^3 \times \{0\}$ проектирование вдоль интегральных кривых векторного поля Z_2. Сферу $S^3 \times \{0\}$ с метрикой $\ll, \gg$ обозначим через M . При этом отображение $\pi : G \to M$ является римановой субмерсией, где поле Z_1- горизонтальное, а поле Z_2 - вертикальное (Рис.1), так что

$$|d\pi Z_1| = |Z_1| = 1, \ \ |d\pi Z_2| = 0.$$

Поскольку $X_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}Z_1 - \sqrt{\frac{2}{3}}Z_2$ то $|d\pi X_1| = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

С помощью формулы О'Нейла вычислим секционную кривизну K_σ многообразия M. Пусть $X, Y \in T_pM$ примем

$$X = \sqrt{3}\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3, \ Y = \sqrt{3}\mu_1 X_1 + \mu_2 X_2 + \mu_3 X_3,$$

так что

$$|X \wedge Y|_M^2 = \langle\langle X, X\rangle\rangle \langle\langle Y, Y\rangle\rangle - \langle\langle X, Y\rangle\rangle^2 = \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2,$$

где $\nu_1 = \lambda_2\mu_3 - \lambda_3\mu_2$, $\nu_2 = \lambda_3\mu_1 - \lambda_1\mu_3$, $\nu_3 = \lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1$.

Горизонтальными подъемами векторных полей X, Y в G являются векторные поля

$$\overline{X} = \lambda_1 Z_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3 = \tfrac{1}{\sqrt{3}}\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3 + \sqrt{\tfrac{2}{3}}\lambda_1 X_4,$$
$$\overline{Y} = \mu_1 Z_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3 = \tfrac{1}{\sqrt{3}}\mu_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3 + \sqrt{\tfrac{2}{3}}\mu_1 X_4$$

Их скобка Ли

$$\left[\overline{X}, \overline{Y}\right] = \nu_1 X_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\nu_2 X_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\nu_3 X_3$$

и вертикальное составляющая

$$\left[\overline{X}, \overline{Y}\right]^V = -\sqrt{\frac{2}{3}}\nu_1 Z_2.$$

Секционная кривизна K_σ многообразия M для $\sigma = X \wedge Y$ равна

$$K_\sigma = \frac{k(X,Y)}{|X \wedge Y|_M^2} = \frac{k(\overline{X}, \overline{Y})_G + \frac{3}{4}(\left[\overline{X}, \overline{Y}\right]^V)_G^2}{|X \wedge Y|_M^2} =$$

$$= (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)^{-1}\left(\frac{1}{4}\left[\overline{X}, \overline{Y}\right]_G^2 + \frac{3}{4}\left(\left[\overline{X}, \overline{Y}\right]^V\right)_G^2\right) =$$

$$= \frac{\left(1 + 3\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2\right)v_1^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2(\nu_2^2 + \nu_3^2)}{4\,(\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2)} = \frac{9\nu_1^2 + \left(\nu_2^2 + \nu_3^2\right)}{12\,(\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2)}.$$

Таким образом, секционная кривизна многообразия M строго положительно и удовлетворяет неравенство $\frac{1}{12} \le K_\sigma \le \frac{3}{4}$. Теорема доказана.

Литература

1. А.Я.Нарманов. *Дифференциал геометрия.* Т. 2003. 218 стр.

2. Ш.Кобаяси, К.Номидзу. Основы дифференциальной геометрии.

М.: Наука, 1981. Т.1.

3. А.Бессе. Многообразия Эйнштейна. М.:,Мир, 1990, 318с.
4. O'Neil B. Semi-Riemannian geometry (with applications to relativity). N.Y. etc.: Acad. Press, 1983, 468 p.
5. O'Neil B. The Fundamental equations of a submersions. Michigan Mathematical Journal, v.13, 1966, p. 459-469
6. Hermann R. A sufficient condition that a mapping of Riemannian manifolds to be a fiber bundle. Proc. Amer. Math. Soc.11 (1960), 236-242.

Национальный университет Узбекистана имени М.Улугбека

Uzbek Mathematical
Journal, 2016,№4, pp.31-40

УДК 517.957

Интегрирование уравнения типа периодической цепочки Тоды с самосогласованным источником

Бабажанов Б.А.

Mazkur ishda teskari spektral masalalar usuli moslangan manbali davriy Toda zanjiri turidagi tenglamani integrallashga tadbiq etilgan.

In this paper, the inverse spectral problem is applied to the integration of the Periodic Toda-type Lattice.

1. Введение

Цепочка Тоды [1] описывающая динамику частиц на прямой с экспоненциальным взаимодействием в переменных Флашке [2] имеет вид

$$\begin{cases} \dot{a}_n = a_n(b_{n+1} - b_n)\,, \\ \dot{b}_n = 2(a_n^2 - a_{n-1}^2), \quad n \in Z. \end{cases}$$

В данной работе рассматривается N-периодическое уравнение типа цепочки Тоды с самосогласованным источником

$$\begin{cases} \dot{a}_n = a_n(b_{n+1} - b_n) + a_n(a_{n+1}^2 - a_{n-1}^2) + a_n(b_{n+1}^2 - b_n^2) + \\ \qquad + a_n \sum\limits_{i=1}^{2N} \tilde{\theta}_{N+1}(\lambda_i, t)\left[(f_{n+1}^i)^2 - (f_n^i)^2\right], \\ \dot{b}_n = 2(a_n^2 - a_{n-1}^2) - 2a_{n-1}^2(b_n + b_{n-1}) + 2a_n^2(b_{n+1} + b_n) - \\ \qquad -2\sum\limits_{i=1}^{2N} \tilde{\theta}_{N+1}(\lambda_i, t) f_n^i (a_n f_{n+1}^i - a_{n-1} f_{n-1}^i), \\ a_{n-1} f_{n-1}^i + b_n f_n^i + a_n f_{n+1}^i = \lambda_i f_n^i, \\ a_{n+N} = a_n, \;\; b_{n+N} = b_n, \;\; (f_{n+N}^i)^2 = (f_n^i)^2, \;\; i = 1,\, 2,\, ...,\, 2N, \;\; n \in Z, \end{cases} \tag{1}$$

при начальных условиях

$$a_n(0) = a_n^0, \;\; b_n(0) = b_n^0, \quad n \in Z, \tag{2}$$

с заданными N-периодическими последовательностями $a_n^0, \ \ b_n^0, \ \ n \in Z$. В системе (1) $\{a_n(t)\}_{-\infty}^{\infty}$, $\{b_n(t)\}_{-\infty}^{\infty}$, $\{f_n^1(t)\}_{-\infty}^{\infty}$, $\{f_n^2(t)\}_{-\infty}^{\infty}, \ldots, \{f_n^{2N}(t)\}_{-\infty}^{\infty}$ – неизвестные функции, причем функции $\{f_n^i(t)\}_{-\infty}^{\infty}$ являются решениями Флоке-Блоха для дискретного уравнения Хилла

$$(L(t)y)_n \equiv a_{n-1}y_{n-1} + b_n y_n + a_n y_{n+1} = \lambda y_n, \tag{3}$$

которые соответствуют собственным значениям λ_i, и нормированы условиями

$$f_1^i(t) = 1, \quad i = 1, \ 2, \ ..., \ 2N. \tag{4}$$

Собственные значения λ_i уравнения Хилла являются решениями уравнения

$$\Delta^2(\lambda) - 4 = 0,$$

где $\Delta(\lambda) = \theta_N(\lambda, t) + \varphi_{N+1}(\lambda, t)$, а $\theta_n(\lambda, t)$, $n \in Z$ и $\varphi_n(\lambda, t)$, $n \in Z$ решения уравнения (3) при начальных условиях

$$\theta_0(\lambda, t) = 1, \ \ \theta_1(\lambda, t) = 0, \quad \varphi_0(\lambda, t) = 0, \ \ \varphi_1(\lambda, t) = 1.$$

Множители $\tilde{\theta}_{N+1}(\lambda, t)$ в системе (1) определяются из равенства $\tilde{\theta}_{N+1}(\lambda, t) = \prod\limits_{j=1}^{N-1} (\lambda - \mu_j(t))$, где $\mu_1(t), \ \mu_2(t), \ ..., \ \mu_{N-1}(t)$ являются корнями уравнения $\theta_{N+1}(\lambda, t) = 0$.

В работах [2], [3] показана интегрируемость цепочки Тоды методом обратной задачи рассеяния в быстроубывающем случае. Периодическая цепочка Тоды рассматривалась в работах [4]-[6] (см. также литературы приведенные в этих работах).

Интегрируемость уравнения КдФ с самосогласованным источником в классе "быстроубывающих" функций показана в работе [7], а для цепочки Тоды в работе [8]. Нелинейные уравнения с самосогласованным источником в классе периодических функций изучались в работе [9], аналогичный результат в случае периодической цепочки Тоды получен в работах [10], [11].

В этой работе получено представление для решений задачи (1)-(4), в рамках обратной спектральной задачи для уравнения (3), а именно, найден аналог системы уравнений Дубровина для спектральных параметров дискретного оператора $L(t)$.

Для однозонного случая выписаны явные формулы для решения аналога системы уравнений Дубровина, и тем самым цепочки Тоды с источником (1), которые выражаются в терминах эллиптических функций Якоби.

2. Необходимые сведения о прямой и обратной спектральной задаче для дискретного уравнения Хилла

В данном параграфе будут приведены необходимые для дальнейшего сведения прямой и обратной спектральной задаче для уравнения Хилла [9].

Рассмотрим дискретное уравнение Хилла

$$(Ly)_n \equiv a_{n-1}y_{n-1} + b_n y_n + a_n y_{n+1} = \lambda y_n, \tag{5}$$

$$a_{n+N} = a_n, \quad b_{n+N} = b_n, \quad n \in Z\,,$$

со спектральным параметром λ, и периодом $N > 0$. Обозначим через $\theta_n(\lambda)$, $n \in Z$ и $\varphi_n(\lambda)$, $n \in Z$ решения уравнения () при начальных условиях $\theta_0(\lambda) = 1$, $\theta_1(\lambda) = 0$, $\varphi_0(\lambda) = 0$, $\varphi_1(\lambda) = 1$.

Обозначим через $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{2N}$ корни уравнения $\Delta^2(\lambda) - 4 = 0$, а через $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_{N-1}$ корни уравнения $\theta_{N+1}(\lambda) = 0$.

Определение 1. Набор чисел μ_j, $j = 1, 2, ..., N-1$ и последовательности знаков $\sigma_j = sign(\theta_N(\mu_j) - \varphi_{N+1}(\mu_j))$, $j = 1, 2, ..., N-1$ называется спектральными параметрами уравнения Хилла ().

Определение 2. Набор, состоящий из спектральных параметров $\{\mu_j, \sigma_j\}_{j=1}^{N-1}$ и чисел λ_i, $i = 1, 2, ..., 2N$ называется спектральными данными уравнения Хилла (5).

Восстановление коэффициентов a_n, b_n уравнения Хилла по его спектральным данным называется обратной спектральной задачей для уравнения (5).

3. Эволюция спектральных параметров

В этой части статьи будет доказан основной результат данной работы.

Теорема. Если функции $a_n(t)$, $b_n(t)$, $f_n^k(t)$, $n \in Z$, $k = 1, 2, ..., 2N$ являются решением задачи (1)-(4), то спектр оператора Хилла (3) не зависит от t, а спектральные параметры $\mu_j(t)$, $j = 1, 2, ..., N-1$

удовлетворяют следующей системе уравнений

$$\dot{\mu}_j(t) = 2\frac{\sigma_j(t)\cdot\sqrt{\prod\limits_{k=1}^{2N}(\mu_j(t)-\lambda_k)}}{\prod\limits_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{N-1}(\mu_j(t)-\mu_k(t))}\cdot\left[1+b_1(t)+\mu_j(t)+\sum_{i=1}^{2N}\frac{\tilde{\theta}_{N+1}(\lambda_i,t)}{\lambda_i-\mu_j(t)}\right], \tag{6}$$

где

$$b_1(t) = \frac{\lambda_1+\lambda_{2N}}{2}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N-1}(\lambda_{2k}+\lambda_{2k+1}-2\mu_k(t)).$$

Доказательство. Обозначим через $y^j(t) = (y_0^j(t),\ y_1^j(t),\ ...,\ y_N^j(t))^T$, $j=1,\ 2,\ ...,\ N-1$ нормированные собственные вектор-функции, соответствующие собственным значениям $\lambda=\mu_j(t)$, $j=1,\ 2,\ ...,\ N-1$, следующей граничной задачи

$$\begin{cases} (L(t)y)_n \equiv a_{n-1}y_{n-1}+b_ny_n+a_ny_{n+1}=\lambda y_n, & 1\le n\le N\\ y_1=0, \quad y_{N+1}=0. \end{cases}$$

В работе [11] было показано, что

$$\dot{\mu}_j(t) = \sum_{n=1}^{N}(2\dot{a}_n(t)y_n^jy_{n+1}^j+\dot{b}_n(t)(y_n^j)^2).$$

На основании (1), последнее равенство можно переписать в виде

$$\dot{\mu}_j(t) = \sum_{n=1}^{N}\Big\{2[a_n(b_{n+1}-b_n)+a_n(a_{n+1}^2-a_{n-1}^2)+a_n(b_{n+1}^2-b_n^2)]y_n^jy_{n+1}^j+$$

$$+[2(a_n^2-a_{n-1}^2)+2a_n^2(b_{n+1}+b_n)-2a_{n-1}^2(b_n+b_{n-1})](y_n^j)^2+$$

$$+\sum_{i=1}^{2N}[2a_n\tilde{\theta}_{N+1}(\lambda_i,t)((f_{n+1}^i)^2-(f_n^i)^2)y_n^jy_{n+1}^j]+$$

$$+\sum_{i=1}^{2N}\left[2a_n\tilde{\theta}_{N+1}(\lambda_i,t)(f_n^if_{n+1}^i)(y_n^j)^2-2a_{n-1}\tilde{\theta}_{N+1}(\lambda_i,t)(f_{n-1}^if_n^i)(y_n^j)^2\right]\Big\}.$$

Для удобства введем обозначение

$$F_i^j = \tilde{\theta}_{N+1}(\lambda_i,t)\sum_{n=1}^{N}\Big\{2a_n[(f_{n+1}^j)^2-(f_n^j)^2]y_n^j y_{n+1}^j+$$

$$+2a_n(f_n^i f_{n+1}^i)(y_n^j)^2-2a_{n-1}(f_{n-1}^i f_n^i)(y_n^j)^2\Big\},$$

$$H_n = 2[a_n(b_{n+1}-b_n)+a_n(a_{n+1}^2-a_{n-1}^2)+a_n(b_{n+1}^2-b_n^2)]y_n^j y_{n+1}^j+$$

$$+[2(a_n^2-a_{n-1}^2)+2a_n^2(b_{n+1}+b_n)-2a_{n-1}^2(b_n+b_{n-1})](y_n^j)^2.$$

Найдем последовательность u_n, такое, что $u_{n+1}-u_n = H_n$. Ищем u_n в виде

$$u_n = A_n(y_n^j)^2+2B_n y_n^j y_{n+1}^j + C_n(y_{n+1}^j)^2, \tag{7}$$

где $A_n = A_n(t,\,\mu_j)$, $B_n = B_n(t,\,\mu_j)$ и $C_n = C_n(t,\,\mu_j)$ пока неизвестные коэффициенты. Учитывая равенство

$$y_{n+2}^j = \frac{1}{a_{n+1}}[(\mu_j-b_{n+1})y_{n+1}^j - a_n y_n^j]$$

имеем

$$(A_{n+1}-C_n)(y_{n+1}^j)^2-A_n(y_n^j)^2-2B_n y_n^j y_{n+1}^j+\frac{2B_{n+1}}{a_{n+1}}y_{n+1}^j[(\mu_j-b_{n+1})y_{n+1}^j-a_n y_n^j]+$$

$$+\frac{C_{n+1}}{a_{n+1}^2}(\mu_j-b_{n+1})^2(y_{n+1}^j)^2-\frac{2C_{n+1}}{a_{n+1}^2}a_n(\mu_j-b_{n+1})y_n^j y_{n+1}^j+\frac{C_{n+1}}{a_{n+1}^2}a_n^2(y_n^j)^2 = H_n. \tag{8}$$

Из () получим

$$-B_n-\frac{a_n}{a_{n+1}}B_{n+1}-\frac{a_n(\mu_j-b_{n+1})}{a_{n+1}^2}C_{n+1} =$$

$$= a_n(b_{n+1}-b_n)+a_n(a_{n+1}^2-a_{n-1}^2)+a_n(b_{n+1}^2-b_n^2), \tag{9}$$

$$-C_{n-1}+\frac{2(\mu_j-b_n)}{a_n}B_n+\frac{(\mu_j-b_n)^2}{a_n^2}C_n+\frac{a_n^2}{a_{n+1}^2}C_{n+1} =$$

$$= 2(a_n^2-a_{n-1}^2)-2a_{n-1}^2(b_n+b_{n-1})+2a_n^2(b_{n+1}+b_n). \tag{10}$$

Нетрудно видеть, что

$$C_n = 2a_n^2(b_n + \mu_j + 1), \quad B_n = a_n(b_n^2 + b_n + a_{n-1}^2 - a_n^2 - \mu_j - \mu_j^2),$$

являются решениями системы (9) и (10). В силу (7)

$$\dot{\mu}_j(t) = C_{N+1}(y_{N+2}^j)^2 - C_1(y_2^j)^2 + \sum_{i=1}^{2N} F_i^j =$$

$$= 2a_0^2(\mu_j(t) + b_1(t) + 1)[(y_N^j)^2 - (y_0^j)^2] + \sum_{i=1}^{2N} F_i^j. \tag{11}$$

Пользуясь видом F_i^j находим, что (см [10])

$$F_i^j = \frac{2\tilde{\theta}_{N+1}(\lambda_i, t)a_0^2(f_1^i)^2}{\lambda_i - \mu_j(t)}[(y_N^j)^2 - (y_0^j)^2]. \tag{12}$$

Подставляя () в () выводим

$$\dot{\mu}_j(t) = 2a_0^2[(y_N^j)^2 - (y_0^j)^2]\left\{1 + \mu_j(t) + b_1(t) + \sum_{i=1}^{2N} \frac{\tilde{\theta}_{N+1}(\lambda_i, t)}{\lambda_i - \mu_j(t)}\right\}. \tag{13}$$

Учитывая равенства

$$\left\|\theta^j\right\|^2 = \sum_{n=1}^{N} (\theta_n^j)^2 = a_N \theta_N^j (\theta_{N+1}^j)'\big|_{\lambda=\mu_j}, \quad (\theta^j)' = \frac{d\theta^j}{d\lambda},$$

$$(y_0^j)^2 = \frac{(\theta_0^j)^2}{\left\|\theta^j\right\|^2}, \quad (y_N^j)^2 = \frac{(\theta_N^j)^2}{\left\|\theta^j\right\|^2},$$

уравнение () можно переписать в виде

$$\dot{\mu}_j(t) = 2a_0\left(\theta_N^j(\mu_j(t), t) - \frac{1}{\theta_N^j(\mu_j(t), t)}\right) \frac{1 + \mu_j(t) + b_1(t) + \sum\limits_{i=1}^{2N} \frac{\tilde{\theta}_{N+1}(\lambda_i, t)}{\lambda_i - \mu_j(t)}}{(\theta_{N+1}^j)'\Big|_{\lambda=\mu_j(t)}}. \tag{14}$$

Нетрудно видеть, что

$$\theta_N^j(\mu_j(t),t) - \frac{1}{\theta_N^j(\mu_j(t),t)} = \sigma_j(t)\sqrt{\Delta^2(\mu_j(t)) - 4}, \tag{15}$$

$$\theta'_{N+1}(\lambda)\big|_{\lambda=\mu_j(t)} = -a_0 \left(\prod_{k=1}^{N} a_k\right)^{-1} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{N-1} (\mu_j(t) - \mu_k(t)), \tag{16}$$

где $\sigma_j(t) = sign\left(\theta_N^j(\mu_j(t),t) - \varphi_{N+1}^j(\mu_j(t),t)\right)$, $j = 1,\ 2,\ ...,\ N-1$.

Подставляя (14) и (15) в (13) получим равенство (6).

Теперь покажем, что $\lambda_k(t)$ не зависит от t. Пусть $\left\{g_n^k(t)\right\}$ - нормированная собственная функция оператора $L(t)$ соответствующая собственному значению $\lambda_k(t)$, $k = 1,\ 2,\ ...,\ 2N$, т.е.

$$a_{n-1}g_{n-1}^k + b_n g_n^k + a_n g_{n+1}^k = \lambda_k g_n^k.$$

Дифференцируя это равенство по t, умножая на g_n^k и суммируя по n получим

$$\frac{d\lambda_k}{dt} = \sum_{n=1}^{N}\left(2\dot{a}_n(t)g_n^k g_{n+1}^k + \dot{b}_n(t)\left(g_n^k\right)^2\right). \tag{17}$$

Используя уравнение (1), равенство () можно переписать в виде

$$\dot{\lambda}_k(t) = 2\sum_{n=1}^{N}[a_n(a_{n+1}^2 - a_{n-1}^2) + a_n(b_{n+1}^2 - b_n^2)]g_n^k g_{n+1}^k +$$

$$+\sum_{n=1}^{N}[2a_n^2(b_{n+1} + b_n) - 2a_{n-1}^2(b_n + b_{n-1})](g_n^k)^2 + \sum_{i=1}^{2N} F_i^j. \tag{18}$$

Аналогично (), из () выводим $\dot{\lambda}_k(t) = 0$. **Теорема доказана.**

Замечание. Эта теорема дает метод решения задачи (1)-(4). Для этого сначала найдем спектральные данные λ_i, $\mu_j(0)$, $\sigma_j(0)$ по заданным последовательностям $\{a_n^0\}$ и $\{b_n^0\}$. Затем, используя приведенный в работе [11] алгоритм решения обратной задачи определим $\mu_{j,k}(0)$, $\sigma_{j,k}(0)$. Применяя доказанную теорему вычислим $\mu_{j,k}(t)$, $\sigma_{j,k}(t)$. С учетом независимости от k и t собственных значений $\lambda_{i,k}$, используя формулы следов (см. [11]) находим $a_k(t)$, $b_k(t)$.

Проиллюстрируем, применение основной теоремы для решения задачи (1)-() при начальных условиях

$$(a_n^0)^2 = \frac{5}{2} \ - (-1)^n \frac{3}{2}, \quad b_n^0 = 0, \quad n \in Z.$$

В этом случае $N = 2$, $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 1$, $\lambda_4 = 3$, $\mu_1(0) = 0$, $\sigma_1(0) = 1$. Используя, вышеприведенное замечание получим

$$a_n^2(t) = \frac{5}{2} \ - \frac{1}{2}\mu^2(t) - (-1)^n \frac{\sigma(t)}{2} \sqrt{(\mu^2(t)-1)(\mu^2(t)-9)},$$

$$b_n(t) = (-1)^n \mu(t), \quad n \in Z,$$

$$f_0^k(t) = \frac{\lambda_k^2 - \mu^2(t) - \sigma(t)\sqrt{(\mu^2(t)-9)(\mu^2(t)-1)}}{2a_0(t)(\lambda_k - \mu(t))} \ , \ f_1^k(t) = 1, \ k = 1,2,3,4,$$

где $\mu(t)$ определяется из уравнения

$$\frac{d\mu(t)}{dt} = 10\sigma(t)\sqrt{(1-\mu^2(t))(9-\mu^2(t))},$$

с начальными условиями $\mu(0) = 0$, $\sigma(0) = 1$, и $\sigma(t)$ меняет свой знак при каждом столкновении точки $\mu(t)$ с концами лакуны $[-1, \ 1]$. Введя преобразование $\mu(t) = \sin x(t)$, с учетом равенства $sign \ \sigma(t) \cdot sign \ \ (\cos x(t)) = \sigma(0)$, получим:

$$a_n^2(t) = \frac{5}{2} \ - \frac{1}{2}\sin^2 x(t) - (-1)^n \frac{3}{2} \cos \ x(t) \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 \sin^2 x(t)},$$

$$b_n(t) = (-1)^n \sin \ x(t), \quad n \in Z,$$

$$f_0^k(t) = \frac{\lambda_k^2 - \sin^2 x(t) - \cos x(t)\sqrt{9 - \sin^2 x(t)}}{2a_0(t)(\lambda_k - \sin x(t))} \ , \ f_1^k(t) = 1, \ k = 1,2,3,4,$$

где $x(t)$ решение следующей задачи Коши

$$\dot{x}(t) = 30 \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 \sin^2 x(t)}\,,$$

$$x(0) = 0.$$

Известно (см. [12]), что

$$x(t) = am\left(30t, \frac{1}{3}\right),$$

где am амплитудная функция Якоби. Таким образом,

$$a_n(t) = \sqrt{\frac{5}{2} - \frac{1}{2}sn^2\left(30t, \frac{1}{3}\right) - (-1)^n\frac{3}{2}cn\left(30t, \frac{1}{3}\right)dn\left(30t, \frac{1}{3}\right)},$$

$$b_n(t) = (-1)^n sn\left(30t, \frac{1}{3}\right),$$

$$f_0^k(t) = \frac{\lambda_k^2 - sn^2\left(30t, \frac{1}{3}\right) - 3cn\left(30t, \frac{1}{3}\right)dn\left(30t, \frac{1}{3}\right)}{2a_0(t)\left[\lambda_k - sn\left(30t, \frac{1}{3}\right)\right]}, \quad f_1^k(t) = 1, \ \ k = 1, 2, 3, 4,$$

где sn, cn и dn суть эллиптические функции Якоби.

Литература

1. Toda M. Waves in nonlinear lattice. - Suppl., Progress Thoer. Physics, 1970, 45, p. 174-200.

2. Flaschka H. On the Toda lattice. II.-Progress Theor. Physics, 1974, 51, No. 3, p. 703-716.

3. Манаков С.В. О полной интегрируемости и стохастизации в дискретных динамических системах. - Журн. эксп. и теор. физики, 1974, 67, є 2, с. 543-555.

4. Date E., Tanaka S. Analog of inverse scattering theory for discrete Hill‘s equation and exact solutions for the periodic Toda lattice.- Progress Theor. Physics, 1976, 55, No. 2, p. 217-222.

5. Teschl G. Jacobi Operators and Completely Integrable Lattices, Mathematical Surveys and Monographs, vol.72, AMS, 2000.

6. Бабажанов Б.А. Об одном методе интегрирования периодической цепочки Тоды. УзМЖ, 2015, N 2, с. 16-24.

7. Mel’nikov V.K. Exact solutions of the Korteweg-de Vries equation with a self-consistent source // Phys. Lett. A – UK, 1988. – v. 128. – pp. 488-492.

8. Urazboev G. U. Toda lattice with a special self-consistent source, Theor. Math. Phys., 2008, 154, 305–315.

9. Хасанов А.Б., Яхшимуратов А.Б. Об уравнении Кортевега–де Фриза с самосогласованным источником в классе периодических функций. Теорет. и мат. физика. 2010. Т. 164. є 2. С. 214–221.

10. Babajanov B.A., Feckan M., Urazbaev G.U., On the periodic Toda Lattice with self-consistent source, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. Volume 20, Issue 3, 2014.

11. Бабажанов Б.А., Хасанов А.Б. О периодической цепочке Тоды с нтегральным источником. ТМФ, 2015, Том 184, N 2, с. 253-268.

12. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М., Физико-математической литературы, 1963.

Ургенчский государственный университет

Uzbek Mathematical
Journal, 2016,№4, pp.41-49

УДК 517.956

О некоторых краевых задачах для уравнения третьего порядка с нагруженным слагаемым

Балтаева У.И.

Mazkur maqolada uchinchi tartibli yuklangan tenglama uchun kichik hadli koeffitsentlarining ta‘siri ostida qo‘yilgan chegaraviy masalalar va regulyar yechimlar sinfida uning bir qiymatli yechilishlari o‘rganilgan.

In this paper boundary value problems are studied for the third order loaded equation under the influence of lowest term and to proof the unique solvability in the class of regular solutions.

1. Введение

Теория краевых задач для уравнений смешанного типа благодаря важным приложениям при решении многих вопросов как прикладного, так и теоретического характера, является одним из основных разделов современной теории дифференциальных уравнений с частными производными.

Систематическое изучение уравнений третьего порядка, содержащих в главной части смешанные операторы параболо-гиперболического и эллиптико-параболического типов началось в начале семидесятых годов и интенсивно развивается во многих работах. Следует отметить работы М.С.Салахитдинова, Т.Д.Джураева и их учеников[1-3].

Заметим, что краевые задачи для нагруженных уравнений гиперболического, параболо-гиперболического, эллиптико-гиперболического типов третьего порядка, изучены сравнительно мало.

Рассмотрим линейное нагруженное [4] уравнение

$$\left(a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}+c\right)Lu=0, \tag{1}$$

где

$$Lu\equiv\left\{\begin{array}{ll} L_1u\equiv u_{xx}-u_y-\lambda_1u-\mu_1u\,(x,0)\,, & y\geq 0,\\ L_2u\equiv u_{xx}-u_{yy}+\lambda_2u-\mu_2u\,(x,0)\,, & y\leq 0,\end{array}\right.$$

$a,\, b,\, c-$ заданные вещественные числа. $\lambda_i, \mu_i\, (i=1,\, 2)$ – действительные постоянные, $\lambda_1>0$.

Пусть Ω_1 - область, ограниченная отрезками AB, BB_0, AA_0, A_0B_0 прямых $y=0,\ x=1,\ x=0,\ y=h$, соответственно, при $y>0$. Ω_2 - характеристический треугольник, ограниченный отрезком AB оси OX и двумя характеристиками $AC:x+y=0$, $BC:x-y=1$ уравнения (1) при $y<0$.

Введем следующие обозначения:

$$I=\{(x,y):0<x<1,\ y=0\},\ \ \Omega=\Omega_1\cup\Omega_2\cup I.$$

Заметим [2], что коэффициенты уравнения (1) при младших членах существенно влияют на постановку и исследование краевых задач [8]. Следует отметить, если уравнение (1), $b=0$ и $c=0$, то получаем уравнение, изученные в [8], при $a^2+b^2\neq 0$, $0<b/a\leq 1$, то получаем уравнения, изученные в [9] с нагруженным оператором. Исходя из этого, мы рассмотрим следующие задачи для уравнения (1) при $a^2+b^2\neq 0$, $1<b/a<\infty$.

Задача 1. Требуется определить функцию $u=u(x,y)$, обладающую следующими свойствами:

1) $u(x,y)\in C(\bar{\Omega})\cap C^1(\Omega)$;

2) $u(x,y)-$ регулярное решение уравнения (1) в областях Ω_1 и Ω_2;

3) $u_x(u_y)$ непрерывна вплоть до $AA_0\ \cup AC\cup BC$ $(AC\cup BC)$;

4) на AB выполняются условия склеивания со своими вторыми производными;

5) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u\left(0,y\right)=\varphi_1\left(y\right),\qquad u\left(1,y\right)=\varphi_2\left(y\right),\quad 0\leq y\leq h, \tag{2}$$

$$u_x\left(0,y\right)=\varphi_3\left(y\right),\qquad 0\leq y\leq h, \tag{3}$$

$$u(x,y)|_{AC}=\psi_1\left(x\right),\qquad 0\leq x\leq \frac{1}{2}, \tag{4}$$

$$\left.\frac{\partial u(x,y)}{\partial n}\right|_{AC}=\psi_2\left(x\right),\qquad 0\leq x\leq \frac{1}{2}, \tag{5}$$

$$\left.\frac{\partial u(x,y)}{\partial n}\right|_{BC}=\psi_3\left(x\right),\qquad \frac{1}{2}\leq x\leq 1, \tag{6}$$

где n - внутренняя нормаль; $\varphi_i(y), \psi_i(x) (i = 1, 3)$ - заданные гладкие функции, причем $\varphi_1(0) = \psi_1(0), \psi_1^{'}(0) = \sqrt{2}\psi_2(0) - 2\varphi_1^{'}(0)$.

В задаче вместо условий (3) можно взять следующий условий:

$$u_{xx}(0, y) = \varphi_3^*(y), \qquad 0 \le y \le h,$$

Задача 2. Требуется определить функцию $u = u(x, y)$, обладающую следующими свойствами:

1) $u(x, y) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$;

2) $u(x, y)$– регулярное решение уравнения (1) в области Ω при $x \neq 0$;

3) $u_x(u_y)$ непрерывна вплоть до $AA_0 \cup AC \cup BC$ $(AC \cup BC)$;

4) на AB выполняются условия склеивания со своими вторыми производными;

5) $u(x, y)$ удовлетворяет краевым условиям (2),(3),(5), (6) и

$$u(x, y)|_{BC} = \psi_1^*(x), \qquad \frac{1}{2} \le x \le 1, \tag{7}$$

где n - внутренняя нормаль; $\varphi_i(y), \psi_i, \psi_1^*(x) (i = 1, 3)$ - заданные гладкие функции, причем $\varphi_2(0) = \psi_1^*(0)$.

Из условий 1), 4) задачи 1 и 2 следует

$$u(x, +0) = u(x, -0) = \tau(x), \tag{8}$$

$$u_y(x, +0) = u_y(x, -0) = \nu(x), \tag{9}$$

$$u_{yy}(x, +0) = u_{yy}(x, -0) = \mu(x), \tag{10}$$

где $\tau(x)$, $\nu(x)$ и $\mu(x)$ – пока неизвестные функции.

Полагая

$$u(x, y) = \begin{cases} u_1(x, y), & (x, y) \in \overline{\Omega}_1 \\ u_2(x, y), & (x, y) \in \overline{\Omega}_2, \end{cases}$$

уравнение (1) можно переписать в виде двух систем [2]

$$\left.\begin{array}{l} L_1 u_1 = \upsilon_1(x, y), \\ a\upsilon_{1x} + b\upsilon_{1y} + c\upsilon_1 = 0, \end{array}\right\} (x, y) \in \bar{\Omega}_1, \tag{11}$$

$$
\left.\begin{array}{l} L_2u_2 = \upsilon_2(x,y), \\ a\upsilon_{2x} + b\upsilon_{2y} + c\upsilon_2 = 0, \end{array}\right\} (x,y) \in \bar{\Omega}_2, \tag{12}
$$

где $\upsilon_1(x,y)$, $\upsilon_2(x,y)$ – произвольные достаточно гладкие функции.

Нетрудно заметить, что общее решение уравнения

$$
a\upsilon_{ix} + b\upsilon_{iy} + c\upsilon_i = 0, \quad i = 1,\, 2
$$

при $ab \neq 0$ имеет вид:

$$
\upsilon_i(x,y) = w_i(bx - ay)\exp\left[-\frac{c}{2ab}(bx + ay)\right], \tag{13}
$$

где $w_i(bx - ay)$ – произвольные, непрерывно дифференцируемые функции.

2. Исследование задачи 1

В силу $1 < b/a < +\infty$, без ограничения общности можно положить $a > 0$ и $b > 0$, и тогда выполняются неравенства $0 < (b + a)/2 < b$. Отсюда получаем

$$
0 \leq bx - ay \leq (b + a)/2, \ \ (x,y) \in \Omega_{21},
$$

$$
(b + a)/2 \leq bx - ay \leq b, \ \ (x,y) \in \Omega_{22},
$$

здесь Ω_{21}– треугольник с вершинами $A(0,0)$, $C(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, $E(\frac{b+a}{2b}, 0)$; Ω_{22}– треугольник с вершинами $B(1,0)$, $C(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, $E(\frac{b+a}{2b}, 0)$ и

$$
\Omega_{21} \cup CE \cup \Omega_{22} = \Omega_2.
$$

Учитывая (13), вместо систем уравнений (11) и (12) можем рассмотреть уравнения:

$$
u_{1xx} - u_{1y} - \lambda_1 u_1 - \mu_1 u_1(x,0) = w_1(bx - ay)\exp\left[-\frac{c}{2ab}(bx + ay)\right],
$$

$$
u_{2xx} - u_{2yy} + \lambda_2 u_2 - \mu_2 u_2(x,0) = w_2(bx - ay)\exp\left[-\frac{c}{2ab}(bx + ay)\right].
$$

Таким образом, система уравнения в области $\bar{\Omega}_2$ перепишем в виде

$$
L_2 u = w_2(bx - ay)\exp\left(-\frac{c}{2ab}(bx + ay)\right). \tag{14}
$$

После перехода в характеристические координаты уравнение (14) примет вид

$$u_{2\xi\eta}+\frac{\lambda_2}{4}u_2-\frac{\mu_2}{4}u_2\left(\frac{\xi+\eta}{2},0\right)=\frac{1}{4}w_2\left(\frac{b-a}{2}\xi+\frac{b+a}{2}\eta\right)\times$$

$$\times\exp\left(-\frac{c}{2ab}\left(\frac{b+a}{2}\xi+\frac{b-a}{2}\eta\right)\right), \tag{15}$$

а условия (4), (5) и (6) переходят в

$$u_2|_{\xi=0}=\psi_1\left(\frac{\eta}{2}\right),\quad 0\le\eta\le1, \tag{16}$$

$$\left.\frac{\partial u_2}{\partial\xi}\right|_{\xi=0}=\frac{1}{\sqrt{2}}\psi_2\left(\frac{\eta}{2}\right),\quad 0\le\eta\le1, \tag{17}$$

и

$$\left.\frac{\partial u_2}{\partial\eta}\right|_{\eta=1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\psi_3\left(\frac{\xi+1}{2}\right),\quad 0\le\xi\le1. \tag{18}$$

Из решение уравнения (15), удовлетворяющее условиям (17) и

$$(u_{2\xi}-u_{2\eta})|_{\eta=\xi}=\nu(\xi),\quad 0<\xi<1, \tag{19}$$

(задача Коши-Гурса), с учетом (18), [6], получаем

$$\frac{1}{4}\int\limits_0^\eta w_2\left(\frac{b+a}{2}s\right)\exp\left(-\frac{c}{2ab}\left(\frac{b-a}{2}s\right)\right)ds+\frac{\mu_2}{4}\int\limits_0^\eta\tau\left(\frac{t}{2}\right)dt=\frac{1}{\sqrt{2}}\psi_2\left(\frac{\eta}{2}\right)-$$

$$-\nu(0)+\frac{\lambda_2}{4}\int\limits_0^\eta\psi_1\left(\frac{t}{2}\right)dt-\frac{1}{2}\psi_1'(0),\qquad 0\le\eta<1, \tag{20}$$

где $\nu(0)=u_{2\eta}(0,0)=u_{1\eta}(0,0)=\varphi_1'(0)$ и выполняется равенство

$$\varphi_1'(0)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}\,\psi_2(0)-\psi_1'(0)\right).$$

Дифференцируя соотношение (20) по η, приходим к следующему виду:

$$w_2\left(\frac{b+a}{2}\eta\right)=\exp\left(\frac{c}{2ab}\left(\frac{b-a}{2}\eta\right)\right)\left\{-\mu_2\tau\left(\frac{\eta}{2}\right)+\sqrt{2}\psi_2'\left(\frac{\eta}{2}\right)+\lambda_2\psi_1\left(\frac{\eta}{2}\right)\right\}. \tag{21}$$

При выполнения второго из неравенств $(b+a)/2\le bx-ay\le b,\ \ (x,y)\in\Omega_{22}$, воспользуемся решениям уравнения (15) удовлетворяюшего условиям (16) и

$$u_2(\xi,\eta)|_{\eta=\xi}=\tau(\xi),\quad 0\le\xi\le 1,$$

которое имеет вид

$$u_2(\xi,\eta)=\tau(\xi)+\psi_1\left(\frac{\eta}{2}\right)-\psi_1\left(\frac{\xi}{2}\right)+\frac{\lambda_2(\xi-\eta)}{2}\int\limits_0^{\xi}\tau(t)\overline{J}_1\left[\sqrt{\lambda_2(t-\xi)(t-\eta)}\right]dt-$$

$$-\frac{\lambda_2\xi}{2}\int\limits_0^{\eta}\psi_1\left(\frac{t}{2}\right)\overline{J}_1\left[\sqrt{\lambda_2\xi(\eta-t)}\right]dt+\frac{\lambda_2\eta}{2}\int\limits_0^{\xi}\psi_1\left(\frac{t}{2}\right)\overline{J}_1\left[\sqrt{\lambda_2\eta(\xi-t)}\right]dt+$$

$$+\int\limits_0^{\xi}dt\int\limits_t^{\eta}\left[\frac{\mu_2}{4}\tau\left(\frac{t+s}{2}\right)+\frac{1}{4}w_2\left(\frac{b-a}{2}t+\frac{b+a}{2}s\right)\exp\left(-\frac{c}{2ab}\left(\frac{b+a}{2}t+\frac{b-a}{2}s\right)\right)\right]\times$$

$$\times J_0\left[\sqrt{\lambda_2(t-\xi)(s-\eta)}\right]ds-\int\limits_0^{\xi}dt\int\limits_t^{\xi}J_0\left[\sqrt{\lambda_2(s-\xi)(t-\eta)}\right]\times \tag{22}$$

$$\times\left[\frac{\mu_2}{4}\tau\left(\frac{t+s}{2}\right)+\frac{1}{4}w_2\left(\frac{b-a}{2}t+\frac{b+a}{2}s\right)\exp\left(-\frac{c}{2ab}\left(\frac{b+a}{2}t+\frac{b-a}{2}s\right)\right)\right]ds,$$

где $\bar{J}_1(z)=J_1(z)/z,\ J_1(z)\,J_0(z)\ -$ функция Бесселя[7].

Подставляя (22) в (18) с учетом $\psi_3\left(\frac{1}{2}\right)=\psi_1'\left(\frac{1}{2}\right)$, и после несколько преобразования имеем имеем:

$$\omega_2\left(\frac{b-a}{2}\xi+\frac{b+a}{2}\right)-\int\limits_{-\frac{b+a}{b-a}}^{\xi}\widetilde{K}(\xi,s)\omega_2\left(\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}s\right)ds=\widetilde{f}(\xi), \tag{23}$$

Решение интегральное уравнения имеет вид

$$\omega_2\left(\frac{b-a}{2}\xi+\frac{b+a}{2}\right)=\widetilde{f}(\xi)+\int\limits_{-\frac{b+a}{b-a}}^{\xi}\widetilde{R}(\xi,s)\widetilde{f}\left(\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}s\right)ds,\quad (24)$$

где

$$\widetilde{f}(\xi)=(\lambda_2\tau(\xi)-\mu_2\tau\left(\frac{\xi+1}{2}\right)-\mu_2\int\limits_0^{\frac{\xi+1}{2}}K_1^*(\xi,s)\tau(s)ds$$

$$+\int\limits_0^{\xi}\mu_2K_2^*(\xi,s)\tau(s)ds)\exp\left(\frac{c}{2ab}\left(\frac{b+a}{2}\xi+\frac{b-a}{2}\right)\right),$$

$$K_2^*(\xi,s)=\mu_2K_2^*(\xi,s)+\lambda_2^2(t-1)\overline{J}_2\left[\sqrt{\lambda_2(t-\xi)(t-\eta)}\right]-$$

$$-\lambda_2\frac{\partial}{\partial\xi}(\lambda_2(t-\xi)(\xi-1))\overline{J}_2\left[\sqrt{\lambda_2(t-\xi)(t-\eta)}\right]+f(\xi),$$

где $0\leq\xi\leq 1$. Если выполняется равенства $\psi_2'(\frac{1}{2})=-\psi_3'(\frac{1}{2})$ то функции $\omega_2(z)$ в Ω_{21}, и $\omega_2(z)$ в Ω_{22} будут непрерывными и в точках прямой $bx-ay=(b+a)/2$, т.е. уравнения (1) при $y<0$ выполняется и в точках этой прямой.

Дальнейшее исследование проводится аналогично как и в случае $a^2+b^2\neq 0$, $0<b/a\leq 1$.

Теорема. Если $\lambda_1\geq 0$, $1<b/a<\infty$ и выполнены условия

$$\varphi_j(y)\in C^1[0,h],\ (j=1,2),\ \varphi_3(y)\in C[0,h]\cap C^1(0,h),$$
$$\psi_1(x)\in C^1[0,1/2]\cap C^3\left(0,1/2\right),\ \psi_2(x)\in C[0,1/2]\cap C^2\left(0,1/2\right),$$
$$\psi_2'(1/2)=-\psi_3'(1/2),\ \psi_3(x)\in C[1/2,1]\cap C^2\left(1/2,1\right),$$

то в области Ω существует единственное решение задачи 1.

Аналогично можно доказать однозначную разрешимость задач 1 и 2 в случае $a^2+b^2\neq 0$, $-\infty<b/a\leq -1$. В этом случае при помощи замены независимого переменного $x=1-\xi$ задачи 1 и 2 редицируется к случаю $1<b/a\leq\infty$.

Замечания. Задач 1 и 2 можно рассмотреть с общими разрывными условиями склеивания. В этом случае условие 1) задач 1 и 2 меняется на следующее: функция $u(x,y)$ непрерывна в каждой из замкнутых областей $\bar{\Omega}_1$ и $\bar{\Omega}_2$, а условия 2), 3) и 5) остаются неизменными. В самом деле, выполняются условия

$$u(x,+0)=\alpha_1(x)\,u(x,-0)+\gamma_1(x),\;\;0<x<1,$$

$$u_y(x,+0)=\beta_1(x)\,u_y(x,-0)+\alpha_2(x)\,u(x,-0)+\gamma_2(x),\;\;0<x<1,$$

$$u_{yy}(x,+0)=\delta_1(x)\,u_{yy}(x,-0)+\beta_2(x)\,u_y(x,-0)+$$
$$+\alpha_3(x)\,u(x,-0)+\gamma_3(x),\;\;0<x<1,$$

где $\alpha_1(x)\,\gamma_1(x)\in C^3$, $\beta_1(x)\,,\alpha_2(x)$, $\gamma_2(x)\in C^2$, $\delta_1(x),\alpha_3(x)\,\beta_2(x)$, $\gamma_3(x)\in C^0-$ заданные функции, причем $\alpha_1(x)\,\beta_1(x)\,\delta_1(x)\neq 0$. Задачи 1 и 2 в этом случае имеют единственное решение.

Литература

1. Салахитдинов М.С. Джураев Т.Д. Об одной смешанной задаче для уравнения третьего порядка параболо-гиперболического типа. // Изв. АН УзССР. сер. физ.-мат. наук. 1971. -№4. -С. 26-31.

2. Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамажонов М. Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа. Т.: ФАН. 1986. 220с.

3. Салахитдинов М.С. Уравнение смешанно-составного типа. Т.: Фан. 1974. 156с.

4. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. Москва: Высшая школа. 1995. 301 с.

5. 19. Дженалиев М.Т. К теории линейных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений. Алматы: ИТПМ., 1995г, -270с.

6. Сабитов К.Б. Построения в явном виде решений задач Дарбу для телеграфного уравнения и их применение при обращении интегральных уравнений. 1. // Дифференциальные уравнения. 1990.Т. 26. -№6. С. 1023–1032.

7. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. – М.: Наука. 1966. -Т. 2. -296 с.

8. Baltaeva U.I.: Solvability of the analogs of the problem Tricomi for the mixed type loaded equations with parabolic-hyperbolic operators. // Boundary Value Problems, 2014, 2014:21.

9. Балтаева У.И. Об одной краевой задаче с непрерывными условиями склеивания для смешанного нагруженного уравнения третьего порядка. // Узбекский математический журнал. 2014. - №3. -С. 40–47.

Национальный университет Узбекистана
им. М.Улугбека

Uzbek Mathematical
Journal, 2016, №4, pp.50-59

УДК 517.55

Аналог интегральной формулы Коши для A-аналитических функций

Жабборов Н.М., Отабоев Т.У.

Ushbu maqolada A-analitik funksiyalar uchun Koshi teoremasi analogi isbotlangan va Koshining integral formulasi analogi keltirilgan.

In this article we prove the Cauchy's theorem for A-analytical functions and an analogue of the Cauchy's integral formula for A-analytical functions.

1. Введение. Пусть Ω - область в комплексной плоскости $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$. Если $z = x + iy$, то как обычно

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

и

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

Для функции $A(z) \in C(\Omega)$ мы положим

$$D_A = \frac{\partial}{\partial z} - \overline{A(z)} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{z}},\ \overline{D}_A = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} - A(z) \cdot \frac{\partial}{\partial z}$$

Определение 1. Функция $f(z) \in C^1(\Omega)$ называется A-аналитической функцией в области Ω, если для любого $z \in \Omega$ выполняется равенство

$$\overline{D}_A f(z) = 0. \tag{1}$$

Уравнение (1), как известно, называется уравнением Бельтрами и при $|A(z)| < 1$ его гомеоморфное решение дает нам квазиконформное отображение $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Теория квазиконформных отображений хорошо известна и является предметом многочисленных исследований и приложений в различные направления математики, механики, физики и др. Здесь мы ограничимся лишь ссылкой к книге Альфорса [1] для рассмотрения обзора по квазиконформным отображениям.

В цикле работ А.Л.Бухгейма и С.Г.Казанцева ([11], [13], см. также [4]) исследована приложения A-аналитических функций к ряде задач томографии: рентгеновской, сейсмической и др. Эти задачи связаны с задачей Радона о восстановлении функций по интегралом от функции по всевозможным гиперплоскостям. Оказывается Задачу Радона о восстановлении функции можно интерпретировать как краевые задачи для уравнения

$$f_{\bar{z}} - Af_z = 0. \qquad (2)$$

Здесь f – функция комплексного переменного z со значениями в некотором банаховом пространстве X и A – линейно непрерывный оператор $A : X \to X$ такой, что $\|A\| < 1$. Уравнение (2) имеет прямое отношение к уравнению (1) и поэтому его решение $f(z)$ названо A-аналитической функцией.

В выше указанных работах исследуются класс A-аналитических функций и доказывается ряд свойств таких функций. Рассматривая в качестве X различные банахово пространство, мы получаем различные классы A-аналитических функций. В работе Э.В.Арбузова [12] (см. также [14]) рассмотрено вещественное банахово пространство $X = \mathbb{R}^n$ и показано что решение задачи Коши для эллиптического уравнения

$$B\frac{\partial^2}{\partial x^2}V + 2C\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}V + D\frac{\partial^2}{\partial y^2}V = 0, \ V : \Omega \to \mathbb{R}^n,$$

$$V\left(x, y\right)\big|_M = G\left(x, y\right),$$

$$P_\partial V\left(x, y\right)\big|_M = H\left(x, y\right)$$

просто выражается через некоторой A-аналитической функции $f : \Omega \to \mathbb{C}^n$. Здесь $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – заданная область, $M \subset \partial\Omega$ – некоторое множество положительной меры Лебега, $V(x, y) \in C^2\left(\Omega\right) \bigcap C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ – искомая векторозначная функция, $G(x, y)$, $H(x, y) \in C\left(\Omega\right)$ – заданные функции, B, C, D – постоянные матрицы порядка $n \times n$, P_∂ – некоторой дифференциальный оператор первого порядка. Пример A-аналитических функций и их приложения наиболее часто встречаются также в известных работах [3-4].

Так как в вышеупомянутых работах A является линейно-непрерывным оператором, то в случае $\mathbb{R}^n$ она будет постоянной матрицей. В случае когда $X = \mathbb{C}$ – комплексного банахово пространство, линейно-непрерывный оператор A в (2) будет константой. В отличие от этих работ, в нашей работе мы исследуем A-аналитические функции, когда A – функция от комплексной переменной $z: A = A(z)$, для которой $|A(z)| < 1$.

2. Интегральная теорема Коши. Для глубокого изучения функциональных свойств A-аналитических функций, в этой работе мы рассмотрим случай, когда $A(z)$ – *антианалитическая функция* в односвязной области D, т.е. $\frac{\partial A}{\partial z} = 0$.

Теорема 1.(Аналог теоремы Коши). Если $f(z)$ является A-аналитической функцией в односвязной области D, то интеграл $\int\limits_{\gamma} f(z)(dz + A(z)\,d\bar{z})$, взятый вдоль любой замкнутой кривой γ, лежащей в области D, равен нулю.

Эта теорема является одной из важнейших теорем теории A-аналитических функций. В работе [6] эта теорема доказана при дополнительных условиях и сформулирована следующим образом:

Теорема 2.[6]. Если $f(z) \in C^1(D)\bigcap C\left(\overline{D}\right)$ является A-аналитической функцией в D, то имеет место следующая формула

$$\int\limits_{\partial D} f(z)(dz + A(z)\,d\bar{z}) = 0.$$

Доказательство теоремы 1. Докажем сначала теорему для случая, когда кривая γ является контуром треугольника Δ, лежащего в области D. Положим $\left|\int\limits_{\partial\Delta} f(z)(dz + A(z)\,d\bar{z})\right| = M$ и покажем, что $M = 0$. Разделив стороны данного треугольника пополам, соединив попарно полученные точки деления, мы разобьем данный треугольник на четыре конгруэнтных треугольника: $\Delta_1,\ \Delta_2,\ \Delta_3,\ \Delta_4$. Тогда имеем:

$$\int\limits_{\partial\Delta} f(z)(dz + A(z)\,d\bar{z}) = \int\limits_{\partial\Delta_1} + \int\limits_{\partial\Delta_2} + \int\limits_{\partial\Delta_3} + \int\limits_{\partial\Delta_4}, \tag{3}$$

ибо интегрирование по каждому отрезку, соединяющему точки деления, совершается два раза в противоположных направлениях и потому уничтожается. Так как

$$\left|\int\limits_{\partial\Delta} f\,(z)\,(dz + A\,(z)\,d\,\bar{z})\right| = M,$$

то из равенства (3) следует, что найдется хотя бы один треугольник $\Delta_k\,(k = 1, 2, 3, 4)$, модуль интеграла по его контуру будет не меньше, чем $\frac{M}{4}$. Пусть, например, это будет треугольник Δ_1:

$$\left|\int\limits_{\partial\Delta_1} f\,(z)\,(dz + A\,(z)\,d\,\bar{z})\right| \geq \frac{M}{4}$$

С треугольником Δ_1 поступим так же, как с первоначальным, разбив его на четыре конгруэнтных треугольника. Следовательно, опять найдется такой треугольник Δ_2, принадлежащий треугольнику, что:

$$\left|\int\limits_{\partial\Delta_2} f\,(z)\,(dz + A\,(z)\,d\,\bar{z})\right| \geq \frac{M}{4^2}$$

Очевидно, этот процесс можно продолжать до бесконечности. Таким образом, мы получим последовательность треугольников с периметрами $\Delta = \Delta_0,\ \Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n, \ldots$, из которых каждый содержит следующий, и таких, что имеют место неравенства

$$\left|\int\limits_{\partial\Delta_n} f\,(z)\,(dz + A\,(z)\,d\,\bar{z})\right| \geq \frac{M}{4^n},\ (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{4}$$

Обозначая длину контура Δ через l, заметим, что длины контуров $\Delta_1,\ \Delta_2, \ldots, \Delta_n, \ldots$ суть соответственно $\frac{l}{2},\ \frac{l}{2^2}, \ldots, \frac{l}{2^n}, \ldots$.

Последовательность треугольников Δ_n, длины контуров которых стремится к нулю при неограниченном возрастании n, содержит единственную точку $z_0 \in \Delta_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Эта точка z_0 принадлежит в области D, где функция $f\,(z)$ является A-аналитической. Следовательно, в достаточно малой окрестности $\{|z - z_0| < \varepsilon\}$ точки z_0 функция

$f(z)$ представляется в виде:

$$f(z) = f(z_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\Big|_{z=z_0} (z - z_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right)\Big|_{z=z_0} (\bar{z} - \bar{z}_0) + o(|z - z_0|) \tag{5}$$

Так как функция $A(z)$ – антианалитическая в области D, то в той же окрестности точки z_0 ее можно представит в следующем виде:

$$A(z) = A(z_0) + \left(\frac{\partial A}{\partial \bar{z}}\right)\Big|_{z=z_0} (\bar{z} - \bar{z}_0) + o(|z - z_0|) \tag{6}$$

Обозначим значении производных $\frac{\partial f}{\partial z}$ и $\frac{\partial A}{\partial \bar{z}}$ в точке z_0 через α и β соответственно. Теперь используя равенств (5) и (6), а также, A-аналитичность функции $f(z)$, имеем:

$$\int\limits_{\partial\Delta_n} f(z)(dz + A(z)\,d\,\bar{z}) =$$

$$= \int\limits_{\partial\Delta_n} [f(z_0) + \alpha \cdot (z - z_0 + A(z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0)) + o(|z - z_0|)] \times$$

$$\times [dz + (A(z_0) + \beta \cdot (\bar{z} - \bar{z}_0) + o(|z - z_0|))\,d\bar{z}].$$

Перегруппируя подынтегральное выражение, последний интеграл можно переписать в виде:

$$\int\limits_{\partial\Delta_n} f(z)(dz + A(z)\,d\,\bar{z}) = \int\limits_{\partial\Delta_n} f(z_0) \cdot [dz + (A(z_0) + \beta \cdot (\bar{z} - \bar{z}_0))\,d\bar{z}] +$$

$$+ \int\limits_{\partial\Delta_n} [\alpha \cdot (z - z_0) + \alpha A(z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0)] \cdot \beta \cdot (\bar{z} - \bar{z}_0)\,d\bar{z} +$$

$$+ \int\limits_{\partial\Delta_n} [\alpha \cdot (z - z_0) + \alpha A(z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0)] \cdot [dz + A(z_0)\,d\bar{z}] + \int\limits_{\partial\Delta_n} o(|z - z_0|)\,dz.$$

Первый и третий интегралы в правой части последнего равенство равен нулю, так как для пар функций $f_1(z) = f(z_0)$, $A_1(z) = A(z_0) + \beta \cdot (\bar{z} - \bar{z}_0)$ и $f_2(z) = \alpha \cdot (z - z_0) + \alpha A(z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0)$, $A_2(z) = A(z_0)$ выполняются все условия теоремы 2. Отсюда можно написать, что

$$\int\limits_{\partial\Delta_n} f(z)(dz + A(z)\,d\bar{z}) = \int\limits_{\partial\Delta_n} [\alpha\cdot(z-z_0) + \alpha A(z_0)(\bar{z}-\bar{z}_0)]\cdot\beta\cdot(\bar{z}-\bar{z}_0)\,d\bar{z} +$$

$$+\int\limits_{\partial\Delta_n} o(|z-z_0|)\,dz.$$

Фиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда для достаточно большого n имеем: $o(|z-z_0|) < \varepsilon\cdot d(\Delta_n)$, где $d(\Delta_n)$ – диаметр треугольника Δ_n и $d(\Delta_n) \le \frac{l}{2^n}$. Отсюда

$$\left|\int\limits_{\partial\Delta_n} f(z)(dz + A(z)\,d\bar{z})\right| \le \left[|\alpha\beta|\cdot\frac{l^2}{4^n}\cdot(1+|A(z_0)|)\cdot\frac{l}{2^n} + \varepsilon\cdot\frac{l^2}{4^n}\right] \le$$

$$\le C\cdot\left(\frac{l}{2^n}+\varepsilon\right)\cdot\frac{l^2}{4^n},$$

где $C = const$. Отсюда учитывая (4) получается, что

$$\frac{M}{4^n} < C\cdot\left(\frac{l}{2^n}+\varepsilon\right)\cdot\frac{l^2}{4^n}$$

или

$$M < Const\cdot\varepsilon$$

отсюда следует, что $M = 0$, так как ε – сколь угодно малое число. Итак, мы доказали, что для любого треугольника $\Delta \subset D$,

$$\int\limits_{\partial\Delta} f(z)(dz + A(z)\,d\bar{z}) = 0.$$

Отсюда можно вывести, что

$$\int\limits_{\partial P} f(z)(dz + A(z)\,d\bar{z}) = 0,$$

для любого многоугольника $P \Subset D$. Далее, общим топологическим способом доказывается, что

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,(dz + A(z)\,d\,\bar{z}) = 0,$$

для любого гладкого замкнутого кривая γ, внутренность которого содержится в D. Теорема доказана.

3. Интегральная формула Коши. Теперь мы хотим получит аналог интегральной формулы Коши для A-аналитических функций. Для этого нам понадобытся следующее

Определение 2. Множество вида $\left\{ z \in \mathbb{C} : \left| z - z_0 + \overline{\int\limits_{z_0}^{z} \overline{A(\tau)} d\tau} \right| < R \right\}$ будем называть A-лемнискатой с "центром"в точке z_0. Связную компоненту этого множество содержащую z_0 обозначим через $L_R(z_0)$.

Замечание. Нам неизвестно, является ли множество $\left\{ z \in \mathbb{C} : \left| z - z_0 + \overline{\int\limits_{z_0}^{z} \overline{A(\tau)} d\tau} \right| < R \right\}$ вообще связным.

Рассмотрим в области $D \subset \mathbb{C}$ функцию $K(z) = \frac{1}{z + \overline{\int\limits_0^z \overline{A(\tau)} d\tau}}$, где как было сказано выше, $A(z)$ – антианалитическая функция в D. Предположим без нарушения общности, область D содержит начало координат. Эта функция имеет следующими свойствами:

1) $K(z)$ является A-аналитической функцией в области $D \setminus \{0\}$.

Действительно, $\frac{\partial K}{\partial \bar{z}} = -\frac{A(z)}{\left(z + \overline{\int\limits_0^z \overline{A(\tau)} d\tau} \right)^2}$ и $\frac{\partial K}{\partial z} = -\frac{1}{\left(z + \overline{\int\limits_0^z \overline{A(\tau)} d\tau} \right)^2}$. Отсюда и получим при $z \neq 0$ требуемое утверждение.

2) Для любого $\varepsilon > 0$, следующий интеграл по границе связной компоненты A-лемнискаты с "центром"в начале координат $L_\varepsilon(0) \Subset D$ равен $2\pi i$:

$$\int\limits_{\partial L_\varepsilon(0)} K(z)(dz + A(z) d\bar{z}) = 2\pi i. \tag{7}$$

Доказательство. Для доказательство этого равенство, введем обозначение: $w = z + \overline{\int\limits_0^z \overline{A(\tau)} d\tau}$. Тогда $dw = dz + A(z) d\bar{z}$. Действительно,

$dw = \frac{\partial}{\partial z}\left(z + \overline{\int\limits_0^z \overline{A(\tau)}d\tau}\right)dz + \frac{\partial}{\partial \bar z}\left(z + \overline{\int\limits_0^z \overline{A(\tau)}d\tau}\right)d\bar z = dz + A(z)d\bar z$. Отсюда интеграл в левой части равенство (7) перепишется следующим образом :

$$\int\limits_{\partial L_\varepsilon(0)} K(z)(dz + A(z)d\bar z) = \int\limits_{|w|=\varepsilon} \frac{dw}{w} = 2\pi i.$$

Теперь мы хотим получить представление функций, A-аналитических в компактной области, при помощи интеграла по границе этой области.

Теорема 3. Пусть $f(z)$ – A-аналитическая функция в области D и $G \Subset D$ область, ограниченная конечным числом гладких кривых. Тогда в любой точке $z \in G$ функция $f(z)$ представима в виде

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G} f(\zeta)K(\zeta - z)(d\zeta + A(\zeta)d\bar\zeta),$$

где ∂G – ориентированная граница G.

Доказательство. Возьмем $\rho > 0$ так, чтобы

$$U_\rho = \left\{z' : \left|z - z' + \overline{\int\limits_{z'}^{z} \overline{A(\tau)}d\tau}\right| < \rho\right\}$$

компактно лежало в G. Введем обозначение $G_\rho = G\backslash\overline{U}_\rho$. Тогда функция

$$g(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z + \overline{\int\limits_z^\zeta \overline{A(\tau)}d\tau}}$$

является A-аналитической в $\overline{G}_\rho$ и по теореме 2,

$$\int\limits_{\partial G_\rho} g(\zeta)\left(d\zeta + A(\zeta)d\bar\zeta\right) = 0.$$

Отсюда,

$$\int\limits_{\partial G} g(\zeta)\left(d\zeta + A(\zeta)\,d\bar{\zeta}\right) = \int\limits_{\partial U_\rho} g(\zeta)\left(d\zeta + A(\zeta)\,d\bar{\zeta}\right). \tag{8}$$

Так как функция $f(z)$ непрерывная в точке z, то для любого $\varepsilon > 0$ можно выбирать $\delta > 0$ сколь угодно малым, что при $\rho < \delta$ выполняется неравенство $|f(z) - f(\zeta)| < \varepsilon$, $\zeta \in \partial U_\rho$. Поэтому

$$\left| f(z) - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial U_\rho} g(\zeta)\left(d\zeta + A(\zeta)\,d\bar{\zeta}\right) \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial U_\rho} \frac{(f(z) - f(\zeta))\left(d\zeta + A(\zeta)\,d\bar{\zeta}\right)}{\overline{\zeta - z + \int\limits_z^\zeta \overline{A(\tau)}d\tau}} \right| < \frac{1}{2\pi} \cdot \varepsilon \cdot 2\pi = \varepsilon.$$

Следовательно, разность $f(z) - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial U_\rho} g(\zeta)\left(d\zeta + A(\zeta)\,d\bar{\zeta}\right)$ стремится к нулю при $\rho \to 0$. Отсюда получаем требуемое равенство. Теорема доказана.

Литература

1. Альфорс Л., Лекции по квазиконформным отображениям, М., "Мир 1969 г.

2. Векуа И.Н., Обобщенные аналитические функции, М., “Наука”, гл. ред. физ.-мат. лит., 1988 г. 512 с.

3. Лаврентьев М.М., Савельев Л.Я., Линейные операторы и некорректные задачи, М. “Наука”, 1991 г. 332 с.

4. Жабборов Н.М., Имомназаров Х.Х., Некоторые начально-краевые задачи механики двухскоростных сред, Т. “Университет”, 2012 г. 212 с.

5. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ, часть 1, М., “Наука”, 1985г.

6. Жабборов Н.М., Отабоев Т.У., Теорема Коши для $A(z)$-аналитических функций, Узбекский математический журнал, 2014 г., №1, стр. 15-18.

7. Аниконов Ю. Е., Некоторые методы исследования многомерных обратных задач для дифференциальных уравнений. - Новосибирск: Наука Сиб. отделение, 1978 г.

8. Аниконов Ю. Е., Пестов Jl. Н., Формулы в линейных и нелинейных задачах томографии - Новосибирск: Из-во НГУ, 1990 г.

9. Бухгейм А. Л., Введение в теорию обратных задач - Новосибирск: Наука Сиб. отделение, 1988 г. -С. 184.

10. Бухгейм А. Л., Казанцев С. Г., Задачи томографии и эллиптические системы типа Бельтрами, 4-Всесоюзный сим. по вычислит, томографии. Тез. док. ч.1, Ташкент, 1989 г.

11. Бухгейм А. Л., Казанцев С. Г., Эллиптические системы типа Бельтрами и задачи томографии, Докл. АН СССР, 1990 г., Т. 315, №1. С. 15-19.

12. Арбузов Э.В., Задача Коши для эллиптических систем второго порядка на плоскости, СМЖ, 2003 г., т. 44, №1, С. 3-20.

13. Бухгейм А. Л., Казанцев С. Г., Уравнения в частных производных с операторными коэффициентами и их приложения к обратным задачам, Численные методы оптимизации и анализа. Новосибирск: Наука Сиб. отделение, 1992. С. 97-111.

14. Солдатов А. П., Эллиптические системы второго порядка в полуплоскости, Изв. РАН. Сер. матем., 2006, том 70, выпуск 6, 161-192

Национальный университет Узбекистана
им. М.Улугбека

Uzbek Mathematical
Journal, 2016,№4, pp.60-67

УДК 517.956.6

Задача с интегральным условием для нагруженного псевдопараболического уравнения третьего порядка

Зикиров О.С., Холиков Д.К.

Maqolada uchinchi tartibli yuklangan psevdoparabolik tenglama uchun integral shartli nolokal masala tadqiq qilingan. Qaralayotgan masala klassik yechimining yagonaligi va mavjudligi haqida teorema Riman usulda isbotlangan.

In this paper we study solvability of non–local problem with integral condition for loaded pseudoparabolic equation of third order. The existence uniqueness of classical solution of considered problem is proved by Riemann's method.

1. Постановка задачи и основные результаты

В плоскости независимых переменных (x, t) рассмотрим нагруженное уравнение в частных производных третьего порядка

$$Mu \equiv Lu + \int_0^l k(x,t)u(x,t)dx = -f(x,t), \tag{1}$$

где $Lu \equiv u_{xxt} + a(x,t)u_{xx} + b(x,t)u_{xt} + c(x,t)u_x + d(x,t)u_t + e(x,t)u$ – псевдопараболический оператор, а $k(x,t)$ и $f(x,t)$ — заданные функции.

Такого вида уравнения возникают в теории фильтрации жидкостей в пористых средах [1], не установившегося движения грунтовых вод со свободной поверхностью [2], в теории влагопереноса в почве [3], и многих других дисциплинах, связанных с математическим моделированием.

Изучению краевых задач для псевдопараболических уравнений посвящено большое количество работ (см. например [4]–[9]).

В данной работе для уравнения (1) изучается разрешимость следующую задачу: *Найти в области* $D = \{(x,t) : 0 < x < l,\ 0 < t < T\}$

решение $u(x,t)$ уравнения (1), удовлетворяющее начальному

$$u(x,0)=\varphi(x), \qquad 0\le x\le l, \tag{2}$$

и следующим граничным условиям:

$$u(0,t)=\beta(t)\int\limits_0^l u(x,t)dx+\int\limits_0^t \rho(t,\tau)u(l,\tau)d\tau+\psi_1(t), \qquad 0\le t\le T, \tag{3}$$

$$u_x(0,t)=\psi_2(t), \qquad 0\le t\le T, \tag{4}$$

здесь функции $\varphi_0(x)$, $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$, $\beta(t)$, $\rho(t,\tau)$ заданы, непрерывны на $[0,l]$ и $[0,T]$, $0\le\tau\le t$, соответственно. Кроме того удовлетворяют условиям согласования

$$\varphi_0(0)=\beta(0)\int_0^l \varphi_0(x)dx+\psi_1(0), \qquad \varphi_0'(0)=\psi_2(0).$$

Заметим, что нелокальное условие (3) можно заменить условием

$$u(0,t)=\beta(t)\int\limits_0^h u(x,t)dx+\int\limits_0^t \rho(t,\tau)u(l,\tau)d\tau-\psi_1(t),$$

где h — глубина корнеобитаемого слоя [4] или активный слой почвы, который участвует в водоснабжении корневой системы, в процессах испарения и транспирации.

Введем некоторые необходимые для дальнейшего обозначения и определения.

Пусть $C^{k,l}(D)$ класс функций $u(x,t)$, непрерывных вместе со своими частными производными порядка $\partial^{m+n}u/\partial x^m\partial t^n$ для всех ($m=\overline{0,k}$; $n=\overline{0,l}$), где $C^{k,0}(D)=C^{0,k}(D)=C^k(D)$ и $C^{0,0}(D)=C(D)$. Решение из класса $C^{2,1}(D)\bigcap C^{1,0}(\overline{D})$ называется классическим.

Задачу (1)–(4) исследуем в пространстве $C^{2,1}(D)\bigcap C^{1,0}(\overline{D})$ и в этом случае будем требовать выполнения следующих условий:

Условие 1. Коэффициенты уравнения (1) для всех $(x,t)\in D$ удовлетворяют условиям

$$a(x,t)\in C^{1,0}(\overline{D})\cap C^{2,0}(D); \quad b(x,t)\in C^1(\overline{D})\cap C^{1,1}(D);$$

$$c(x,t) \in C(\overline{D}) \cap C^{1,0}(D); \quad d(x,t) \in C(\overline{D}) \cap C^{0,1}(D); \quad e(x,t) \in C(D).$$

Кроме того, $d(x,t) < 0$ для любой $(x,t) \in D$.

Условие 2. Заданные функции удовлетворяют условиям

$$\varphi_0(x) \in C^2[0,l];\ \psi_1(t),\ \psi_2(t) \in C^1[0,T];\ \beta(t),\ \rho(t,\tau) \in C[0,T];$$

$f(x,t)$, $k(x,t) \in C(\overline{D})$ и $\beta(t) < 0$ для всех $t \in [0,T]$.

Имеет место следующая теорема разрешимости задачи (1)–(4):

Теорема. *Пусть выполнены Условие 1 и Условие 2. Тогда задача (1)–(4) имеет единственное классическое в области $\overline{D}$ решение.*

Справедливость сформулированной выше теоремы докажем методом Римана.

2. Решение задачи Гурса, функции Римана. Согласно работам (см. например [5], [6], [7]), введем функцию Римана $v(x,t) = v(x,t;\xi,\tau)$, для уравнения (1), которая определяется как решение следующей задачи:

$$L^*v \equiv -v_{xtx} + (av)_{xx} + (bv)_{xt} - (cv)_x - (dv)_t + ev = 0, \tag{5}$$

$$v(\xi,t;\xi,\tau) = 0, \qquad v_x(\xi,t;\xi,\tau) = exp\left\{\int\limits_{\tau}^{t} a(\xi,\tau_1)d\tau_1\right\}, \tag{6}$$

$$v(x,\tau;\xi,\tau) = \omega(x,\tau;\xi,\tau), \tag{7}$$

где (ξ,τ) — произвольная фиксированная точка из области $\overline{D}$, а $\omega(x,\tau;\xi,\tau)$ — решение следующей задачи Клши

$$v_{xx}(x,\tau;\xi,\tau) + (bv)_x(x,\tau;\xi,\tau) + d(x,\tau)v(x,\tau;\xi,\tau) = 0,$$

$$v(\xi,\tau;\xi,\tau) = 0, \qquad v_x(\xi,\tau;\xi,\tau) = 1. \tag{8}$$

Известно [5], [7], что

$$\frac{\partial^{i+j}v(x,t;\xi,\tau)}{\partial x^i \partial t^j}, \quad \frac{\partial^{i+j}v(x,t;\xi,\tau)}{\partial \xi^i \partial \tau^j} \in C(\overline{D} \times \overline{D}), \quad i = 0,1,2; \quad j = 0,1,$$

и для регулярного решения $u(x,t)$ уравнения (1) имеет место интегральное представление

$$u(x,t) = [v_x(0,t;x,t) - (bv)(0,t;x,t)]\psi(t) + (bv)(0,0;x,t)\varphi(0)+$$

$$+\int_0^x [v_x(\xi,0;x,t)\varphi'(\xi)+(bv)_x(\xi,0;x,t)\varphi(\xi)-(dv)(\xi,0;x,t)\varphi(\xi)]d\xi-$$

$$-\int_0^t [v(0,\tau;x,t)\psi_2'(\tau)+(av)(0,\tau;x,t)\psi_2(\tau)]d\tau-$$

$$-\int_0^t [v_{xt}(0,\tau;x,t)-(av)_x(0,\tau;x,t)-(bv)_t(0,\tau;x,t)+(cv)(0,\tau;x,t)]\psi(\tau)d\tau+$$

$$+\int_0^x d\xi\int_0^t v(\xi,\tau;x,t)F(\xi,\tau)d\tau. \tag{9}$$

Теперь с помощью свойств функции Римана $v(x,t;\xi,\tau)$, непосредственно можно проверить, что функция (9) удовлетворяет краевым условиям (2), (6) и уравнению (5).

3. Сведение задачи (1)–(4) к системе интегральных уравнений. Представление (9) после некоторых преобразований перепишем в виде

$$u(x,t)=[v_x(0,t;x,t)-(bv)(0,t;x,t)]\psi(t)+$$

$$-\int_0^t k_0(\tau;x,t)\psi(\tau)d\tau+\int_0^x\int_0^t v(\xi,\tau;x,t)\mu(\tau)dx_1d\xi d\tau+g(x,t), \tag{10}$$

здесь

$$k_0(\tau;x,t)=v_{xt}(0,\tau;x,t)-(av)_x(0,\tau;x,t)-(bv)_t(0,\tau;x,t)+(cv)(0,\tau;x,t);$$

$$\mu(t)=\int\limits_0^l k(x,t)u(x,t)dx,\qquad \mu(0)=\int\limits_0^l k(x,0)\varphi(x)dx; \tag{11}$$

$g(x,t)$ — известная функция.

Сначала проинтегрируем (10) по x в пределах от 0 до l и после несложных преобразований, имеем

$$\int_0^l u(x,t)dx=A_0(t)\psi(t)-\int_0^t K_0(\tau,t)\psi(\tau)d\tau+$$

$$+\int_0^l dx\int_0^x\int_0^t v(\xi,\tau;x,t)\mu(\tau)d\xi d\tau+\int_0^l g(x,t)dx, \tag{12}$$

где

$$A_0(t)=v_x(0,t;l,t)-b(0,t)\int_0^l v(0,t;x,t)dx;$$

$$K_0(\tau,t)=v_t(0,\tau;l,t)-a(0,\tau)v(0,\tau;l,t)+\frac{\partial}{\partial t}\int_0^l (bv)(0,\tau;x,t)dx+$$
$$+\int_0^l c(0,\tau)v(0,\tau;x,t)dx.$$

В формуле (10) полагаем $x=l$ и умножим на $\rho(\tau,t)$, полученное при этом выражение интегрируем по τ в пределах от 0 до t, после ряда преобразований получим

$$\int_0^t \rho(\tau,t)u(l,\tau)d\tau=\int_0^t \rho(\tau,t)[v_x(0,\tau;l,t)-(bv)(0,\tau;l,t)]\psi(\tau)d\tau-$$
$$-\int_0^t \psi(\tau)d\tau\int_\tau^t \rho(t,s)k_0(s;l,\tau)ds+$$
$$+\int_0^t \mu(\tau)d\tau\int_\tau^t \rho(t,s)\left(\int_0^l v(\xi,s;l,\tau)d\xi\right)ds+\int_0^t \rho(\tau,t)g(l,\tau)d\tau, \qquad (13)$$

Теперь соберем все слагаемые, отвечающие условию (3) в точке $x=0$ и получим следующее соотношение между $\psi(t)$ и $\mu(t)$ в виде

$$A_1(t)\psi(t)+\int_0^t K_\psi(t,\tau)\psi(\tau)d\tau+\int_0^t K_\mu(t,\tau)\mu(\tau)d\tau=g_0(t), \qquad (14)$$

где

$$A_1(t)=\beta(t)[v(0,t;l,t)-b(0,t)\int_0^l v(0,t;x,t)dx];$$

$$K_\psi(t,\tau)=k_0(\tau;l,t)-\beta(t)\Big[v_t(0,\tau;l,t)-a(0,\tau)v(0,\tau;l,t)+\frac{\partial}{\partial t}\int_0^l (bv)(0,\tau;x,t)dx+$$
$$+\int_0^l (bv)(0,\tau;x,t)dx\Big]+\rho(\tau,t)[v_x(0,\tau;l,t)-(bv)(0,\tau;l,t)]-\int_\tau^t \rho(t,s)k_0(s;l,t)ds;$$

$$K_\mu(t,\tau)=\beta(\tau)\int_0^l dx\int_0^x v(\xi,\tau;x,t)d\xi+\int_\tau^t \rho(t,s)ds\int_0^l v(\xi,s;l,\tau)d\xi;$$

$$g_0(t)=g(0,t)-\beta(t)\int_0^l g(x,t)dx-\int_0^t \rho(t,\tau)g(l,\tau)d\tau-\psi_1(t).$$

Теперь умножим обе части (10) на функцию $k(x,t)$ и проинтегрируем по x от 0 до l и после преобразований, получим второе соотношение между функциями $\psi(t)$ и $\mu(t)$:

$$A_2(t)\psi(t)-\mu(t)-\int_0^t K_\psi^*(t,\tau)\psi(\tau)d\tau-\int_0^t K_\mu^*(t,\tau)\mu(\tau)d\tau=g_1(t), \quad (15)$$

здесь

$$A_2(t)=\int_0^l k(x,t)[v(0,t;x,t)-(bv)(0,t;x,t)]dx;$$

$$K_\mu^*(t,\tau)=\int_0^l k(x,t)dx\int_0^x v(\xi,\tau;x,t)d\xi;$$

$$K_\psi^*(t,\tau)=\int_0^l k(x,t)k_0(\tau;x,t)dx; \quad g_1(t)=\int_0^l k(x,t)g(x,t)dx.$$

Таким образом, разрешимость задачи (1)–(4) сведена к разрешимости системы интегральных уравнений типа Вольтерра (14), (15).

Введя обозначения

$$\mathcal{A}(t)=\begin{pmatrix} A_1(t) & 0 \\ A_2(t) & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}(t,\tau)=\begin{pmatrix} K_\psi(t,\eta) & K_\mu(t,\tau) \\ -K_\psi^*(t,\tau) & K_\mu^*(t,\tau) \end{pmatrix}, \quad w(t)=\begin{pmatrix} \psi(t) \\ \mu(t) \end{pmatrix},$$

систему интегральных уравнений (14)–(15) перепишем в операторном виде

$$\mathcal{A}(t)w(t)+\int_0^t \mathcal{B}(t,\tau)w(\tau)d\tau=g(t), \quad (16)$$

здесь

$$det|\mathcal{A}(t)|=-\beta(t)v(0,t;l,t)+\beta(t)b(0,t)\int_0^l v(0,t;x,t)dx.$$

Покажем, что определитель $det|\mathcal{A}(t)|\neq 0$. Следуя рассуждениям [5], можно выделить класс задач, для которых $det|\mathcal{A}(t)|$ нигде в $[0,T]$ не обращается в нуль. Действительно, функция $v(0,t;l,t)$ на $[0,T]$ нигде не обращается в нуль, если нуль не является собственным значением задачи

$$v_{xx}(x,t;l,t)+(bv)_x(x,t;l,t)+(dv)(x,t;l,t)=0,$$
$$v(0,t;l,t)=0, \qquad v(l,t;l,t)=0. \quad (17)$$

Так будет, например при $d(x,t)\leq 0$. В самом деле, если при каком либо $t \in [0, T]$ функция $v(0, t; l, t) = 0$, то задача (17) имеет только тривиальное решение $v(x, t; l, t) \equiv 0$, значит, $v_x(x, t; l, t) = 0$, что противоречит условию $v_x(l, t; l, t) = 1$.

На основании леммы, доказанной в работах [4, 5], легко убедиться, что если $\beta(t) < 0$ для $\forall t \in [0, T]$, то $det|\mathcal{A}(t)| \neq 0$. Поэтому система уравнений (14), (15) является системой интегральных уравнений Вольтерра второго рода, которая безусловно разрешима.

Таким образом, находя из интегральных уравнений Вольтерра $\psi(t)$, $\mu(t) \in C^1[0, T]$, задачу (1)–(4) редуцируем к задаче Гурса для уравнения (1), однозначная разрешимость которой установлена в работе (см. например [5]). Теорема доказана.

Литература

1. Баренблатт Г.Н., Желтов Ю.П., Кочина И.Н. Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах.//*Прикладная математика и механика.* 1960. – том 24, №5. – С. 852–864.
2. Дзекцер Е.С. Уравнение движения подземных вод со свободной поверхностью в многослойных средах.//*ДАН.* 1975. – том 220, №3. – С. 540–543.
3. Чудновский А.Ф. *Теплофизика почв.* – М:, Наука. 1976. – 352 с.
4. Бештоков М.Х. Метод Римана для решения нелокальных краевых задач для псевдопараболических уравнений третьего порядка.//*Вест.Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат.науки.* 2013, №4 (33). – С. 15–24.
5. Шхануков М.Х. О некоторых краевых задачах для уравнения третьего порядка, возникающих при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах.// *Дифференц. уравнения.* 1982. – том 18, №4. – С. 689–699.
6. Солдатов А.П., Шхануков М.Х. Краевые задачи с общим нелокальным условиям А.А.Самарского для псевдопараболических уравнений высокого порядка.// *ДАН.* 1987. – том 297, №3. – С. 547–552
7. Жегалов В.И., Миронов А.Н. *Дифференциальные уравнения со старшими частными производными.* – Казань, 2001. – 226 с.

8. Кожанов А.И. Об одной нелокальной краевой задаче с переменными коэффициентами для уравнения теплопроводности и Аллера.// *Дифференциальные уравнения.* 2004. – том 40, №6. – С. 763–774.

9. Джохадзе О.М. *Влияние младших членов на корректность постановки характеристических задач для гиперболических уравнений третьего порядка.*// Матем. заметки. 2003. том 74, вып. 4. – С. 517–528.

Национальный университет Узбекистана им. М.Улугбека.

Uzbek Mathematical
Journal, 2016,№4, pp.68-72

УДК 532.5

Об одном частном решении системы типа Навье-Стокса

Имомназаров Х.Х.[1], Мамасолиев Б.Ж. [2]

Ushbu maqolada ikki fazali siqilmaydigan muhitlarda to'yingan o'zgarmas fazali Nave-Stoks tipidagi tenglamalar sistemasi qaraladi. Nave-Stoks tenglamalar sistemasining tekislikda xususiy yechimi topilgan va bu yechim chiziqsiz issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasini qanoatlantirishi integro-differensial tenglama orqali ko'rsatilgan.

A system of the Navier-Stokes type equations for incompressible two-phase media with a constant saturation phase is obtained. An explicit formula for a class of a particular solution to the Navier-Stokes type equations in the plane case has been obtained. It is shown that the solution of the system of Navier-Stokes equations in the plane case satisfes integrodifferential nonlinear heat equation.

1. Введение

В классической механике сплошной среды, состоящей только из единственной компоненты, в принципе нельзя моделировать процессы фильтрации, то есть движение насыщающих жидкостей, относительно скелета, образующего пористое твердое тело, или процессы седиментации (осаждения) и флотации (всплывания), то есть движение твердых частиц во вмещающей жидкости. Причина заключается в том, что в этих и многих других процессах твердые и жидкие компоненты движутся по-разному. Это приводит к необходимости рассматривать механику и термодинамику гетерогенных сред.

Уравнения Навье-Стокса полученное А.Навье(1822) на основе молекулярно-кинетического представления о движении однофазной жидкости. В работе Дж.Г.Стокса (1845) понятие вязкой (сжимаемой / несжимаемой) жидкости было сформулировано с помощью постулатов, которые отражают естественные свойства симметрии пространства времени и движущейся в нем жидкости. Поэтому не удивительно, что уравнения Навье-Стокса обладают богатыми групповыми свойствами. Эти свойства имеют различные проявления, но наиболее важное из них - возможность построения точных решений указанной системы уравнений.

Известно, что между появлением уравнений Навье-Стокса и публикацей первых результатов о разрешимости начально-краевых задач для этих уравнений прошло более ста лет. Еще позже появились методы и средства численного решения этих задач. Поэтому на начальном этапе развития теории роль точных решений уравнений Навье-Стокса была особенно велика. Точные решения незаменимы при тестировании численных методов, анализе сингулярностей в решениях дифференциальных уравнений в частных производных. Они имеют и прикладное значение - достаточно вспомнить формула Пуазейля Куэтта или теорию дискового электрода Левича.

В данной работе получена система уравнений типа Навье-Стокса для двухфазных несжимаемых сред в случае постоянства насыщенности фаз. Получена явная формула для одного класса частных решений системы типа Навье-Стокса в плоском случае. Показано, что решения исходной системы в плоском случае удовлетворяют нелинейному интегро-дифференциальному уравнению теплопроводности.

2. Динамические уравнения двухфазных сред

Двухскоростная двухжидкостная гидродинамическая теория с условием равновесия надсистем по температуре, была построена в данной работе. Уравнения движения двухскоростной среды в диссипативном случае, в изотермическом случае имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\rho \mathbf{u}) = 0, \qquad \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\tilde{\rho}\tilde{\mathbf{u}}) = 0, \tag{1}$$

$$\bar{\rho}\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}, \nabla)\mathbf{u}\right) = -\nabla p + \frac{\tilde{\rho}}{2\,\bar{\rho}}\nabla q + \nu\,\Delta\mathbf{u} + (\nu/3 + \mu)\nabla \mathrm{div}\,\mathbf{u} + \bar{\rho}\mathbf{f}, \tag{2}$$

$$\bar{\rho}\left(\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} + (\tilde{\mathbf{u}}, \nabla)\tilde{\mathbf{u}}\right) = -\nabla p - \frac{\rho}{2\,\bar{\rho}}\nabla q + \tilde{\nu}\,\Delta\tilde{\mathbf{u}} + (\tilde{\nu}/3 + \tilde{\mu})\nabla \mathrm{div}\,\tilde{\mathbf{u}} + \bar{\rho}\mathbf{f}, \tag{3}$$

где $\tilde{\mathbf{u}}$ и $\mathbf{u}$ векторы скоростей подсистем, составляющих двухскоростной континуум с соответствующими парциальными плотностями $\tilde{\rho}$ и ρ, ν (μ) – соответствующие сдвиговые (объемные) вязкости, $\bar{\rho} = \tilde{\rho} + \rho$ – общая плотность двухскоростного континуума; $p = p(\bar{\rho}, (\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u})^2)$, $q =$

$q(\bar{\rho}, (\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u})^2)$ – уравнение состояния двухскоростного континуума; $\mathbf{f}$ – вектор массовой силы, отнесенной к единице массы.

3. Система уравнений типа Навье-Стокса

В случае однородных несжимаемых сред, т.е. при условии $\rho^f = const$, $\tilde{\rho}^f = const$ и постоянстве объемных насыщенностей веществ, составляющего двухфазного континуума ⇒

$$\rho = const, \qquad \tilde{\rho} = const$$

где ρ^f, $\tilde{\rho}^f$ – физические плотности фаз. Другими словами, векторы $\mathbf{u}$, $\tilde{\mathbf{u}}$ являются соленоидальными

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \qquad \operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}} = 0. \tag{4}$$

С учетом этих равенств уравнения (2) и (3) примут вид

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}, \nabla)\mathbf{u} = -\frac{1}{\bar{\rho}}\nabla p + \frac{\tilde{\rho}}{2\,\bar{\rho}^2}\nabla q + \nu\,\Delta\mathbf{u} + \mathbf{f}, \tag{5}$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} + (\tilde{\mathbf{u}}, \nabla)\tilde{\mathbf{u}} = -\frac{1}{\bar{\rho}}\nabla p - \frac{\rho}{2\,\bar{\rho}^2}\nabla q + \tilde{\nu}\,\Delta\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{f}. \tag{6}$$

Здесь и далее через ν и $\tilde{\nu}$ обозначаем соответствующие кинематические вязкости фаз.

Заметим, что если $\phi(\mathbf{x}, t)$ и $\tilde{\phi}(\mathbf{x}, t)$ – гармонические функции переменной x, то поля скорости $\mathbf{u} = \nabla\phi$ и $\tilde{\mathbf{u}} = \nabla\tilde{\phi}$ и давление $p - \frac{\tilde{\rho}}{2\,\bar{\rho}}\,q = -\bar{\rho}\left(\phi_t + \frac{1}{2}|\nabla\phi|^2\right)$ и $p + \frac{\rho}{2\,\bar{\rho}}\,q = -\bar{\rho}\left(\tilde{\phi}_t + \frac{1}{2}|\nabla\tilde{\phi}|^2\right)$ удовлетворяют системе уравнений (5), (6) в случае отсутствия массовых сил.

4. Частные решения системы уравнений типа Навье-Стокса

Нас будут интересовать решения системы уравнений (4)-(6) в плоском случае в виде

$$u_1 = u(x,t), \quad u_2 = v(x,t) = -y\,u_x + \phi(x,t), \quad x = x_1,$$

$$\tilde{u}_1 = \tilde{u}(x,t), \quad \tilde{u}_2 = \tilde{v}(x,t) = -y\,\tilde{u}_x + \tilde{\phi}(x,t), \quad y = x_2.$$

Эти функции удовлетворяют законам сохранения (4) автоматически. Подставим эти функции в (5) и (6) получим переопределенную систему для давлений $p(x,y,t)$ и $q(x,y,t)$

$$p_x - \frac{\tilde{\rho}}{2\,\bar{\rho}}\,q_x = \bar{\rho}\,(\nu\,u_{xx} - u_t - u\,u_x),$$

$$p_y - \frac{\tilde{\rho}}{2\,\bar{\rho}}\,q_y = \bar{\rho}\,[y\,(\nu\,u_{xxx} - u_{tx} - u\,u_{xx} + u_x^2) + \nu\,\phi_{xx} - \phi_t - u\phi_x + u_x\,\phi],$$

$$p_x + \frac{\rho}{2\,\bar{\rho}}\,q_x = \bar{\rho}\,(\tilde{\nu}\,\tilde{u}_{xx} - \tilde{u}_t - \tilde{u}\,\tilde{u}_x), \tag{7}$$

$$p_y - \frac{\rho}{2\,\bar{\rho}}\,q_y = \bar{\rho}\,[y\,(\tilde{\nu}\,\tilde{u}_{xxx} - \tilde{u}_{tx} - \tilde{u}\,\tilde{u}_{xx} + \tilde{u}_x^2) + \tilde{\nu}\,\tilde{\phi}_{xx} - \tilde{\phi}_t - \tilde{u}\tilde{\phi}_x + \tilde{u}_x\,\tilde{\phi}].$$

Условия совместности системы (7) приводят к уравнениям для функциям u, $\tilde{u}$, ϕ, $\tilde{\phi}$

$$\begin{aligned} \nu\,u_{xxx} - u_{tx} - u\,u_{xx} + u_x^2 &= \alpha(t), \\ \nu\,\phi_{xx} - \phi_t - u\phi_x + u_x\,\phi &= \beta(t), \\ \tilde{\nu}\,\tilde{u}_{xxx} - \tilde{u}_{tx} - \tilde{u}\,\tilde{u}_{xx} + \tilde{u}_x^2 &= \tilde{\alpha}(t), \\ \tilde{\nu}\,\tilde{\phi}_{xx} - \tilde{\phi}_t - \tilde{u}\tilde{\phi}_x + \tilde{u}_x\,\tilde{\phi} &= \tilde{\beta}(t). \end{aligned} \tag{8}$$

Если эта система решена, функции p и q удовлетворяют формулам

$$p - \frac{\tilde{\rho}}{2\,\bar{\rho}}\,q = \bar{\rho}\,\left(\frac{1}{2}\,y^2\,\alpha(t) + y\,\beta(t) + \nu\,u_x - \frac{1}{2}\,u^2 - \int_0^x u_t(\xi,t)d\,\xi\right) + \gamma(t),$$

$$p + \frac{\rho}{2\,\bar{\rho}}\,q = \bar{\rho}\,\left(\frac{1}{2}\,y^2\,\tilde{\alpha}(t) + y\,\tilde{\beta}(t) + \tilde{\nu}\,\tilde{u}_x - \frac{1}{2}\,\tilde{u}^2 - \int_0^x \tilde{u}_t(\xi,t)d\,\xi\right) + \tilde{\gamma}(t),$$

где $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$, $\tilde{\alpha}(t)$, $\tilde{\beta}(t)$, $\tilde{\gamma}(t)$ – произвольные функции t.

Отсюда p и q определяются явными формулами

$$p = \tfrac{\tilde{\gamma}(t)+\gamma(t)}{2} + \bar{\rho}\left(\tfrac{y^2}{2}\,\tfrac{\tilde{\alpha}(t)+\alpha(t)}{2} + y\tfrac{\tilde{\beta}(t)+\beta(t)}{2} + \tfrac{\tilde{v}\tilde{u}_x+vu_x}{2} - \right.$$
$$\left. - \tfrac{\tilde{u}^2+u^2}{4} - \int\limits_0^x \tfrac{\tilde{u}_t(\xi,t)+u_t(\xi,t)}{2}d\xi\right),$$

$$q = 2(\tilde{\gamma}(t) - \gamma(t)) + 2\bar{\rho}\left(\tfrac{y^2}{2}\,(\tilde{\alpha}(t) + \alpha(t)) + y(\tilde{\beta}(t) + \beta(t)) + \tilde{v}\tilde{u}_x - \right.$$
$$\left. - vu_x - \tfrac{\tilde{u}^2+u^2}{4} - \int\limits_0^x \tilde{u}_t(\xi,t) + u_t(\xi,t)d\xi\right).$$

Подчиним функции u и $\tilde{u}$ условиям $u=0$, $\tilde{u}=0$ при $x=0$ и положим $\alpha(t)=\beta(t)=\tilde{\alpha}(t)=\tilde{\beta}(t)=0$. Тогда второе и четвертое уравнения системы (8) допускают тривиальные решения $\phi=0$, $\tilde{\phi}=0$, а решения системы (4)-(6) $u(x,t)$, $v(x,t)$, $\tilde{u}(x,t)$, $\tilde{v}(x,t)$ принимают вид

$$u=-\int_0^x f(\xi,t)d\,\xi, \quad v=y\,f(x,t),$$

$$\tilde{u}=-\int_0^x \tilde{f}(\xi,t)d\,\xi, \quad \tilde{v}=y\,\tilde{f}(x,t),$$

где функции $f(x,t)$, $\tilde{f}(x,t)$ являются решениями следующей системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений

$$f_t+f^2-f_x\int_0^x f(\xi,t)d\,\xi=\nu\,f_{xx},$$

$$\tilde{f}_t+\tilde{f}^2-\tilde{f}_x\int_0^x \tilde{f}(\xi,t)d\,\xi=\tilde{\nu}\tilde{f}_{xx}.$$

Литература

1. Пухначев В.В. Симметрия в уравнениях Навье-Стокса // Успехи механики. 1 (2006) 6–76.

2. Перепечко Ю.В., Сорокин К.Э., Имомназаров Х.Х. Влияние акустических колебаний на конвекцию в сжимаемой двухжидкостной среде // Труды XVII Международная конференция "Современные проблемы механики сплошной среды Ростова-на-Дону.(2014), с.166-169.

[1]Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения РАН, Новосибирск
[2]Национальный университет Узбекистана им. М.Улугбека.

Uzbek Mathematical
Journal, 2016, №4, pp.73-83

УДК 517.955

Приложение многомерного оператора Эрдейи-Кобера к решению аналога задачи Гурса для уравнения четвертого порядка с сингулярными коэффициентами

Каримов Ш.Т.

Ko‘p o‘lchovli Erdeyi-Kober operatori yordamida ikkita singuliyar koeffitsientga ega bo‘lgan to‘rtinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglama uchun Gursa masalasi analogini yechimi oshkor ko‘rinishda topilgan.

A solution of the analog of the Goursat's problem for the fourth order partial differential equation with two singular coefficients is found in an explicit form by means of multidimensional Erdelyi-Kober operator.

В области $\Omega = \{(x, y):\, 0 < x < l,\ 0 < y < h\}$ рассмотрим уравнение

$$L^c_{a,b}(u) \equiv \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{a}{x}\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{b}{y}\frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x^2} + \frac{ab}{xy}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + cu = 0, \qquad (1)$$

где $l, h, a, b, c \in R$, причем $l, h > 0$, $0 < a, b < 1$.

Уравнение (1) при $a = b = 0$ исследовано в работе [1] и, по классификации данной работы, оно принадлежит гиперболическому типу.

Прямые $x = const$, $y = const$ являются действительными двукратными характеристиками уравнения (1). Это уравнение относится к классу уравнений с сингулярными коэффициентами, так как коэффициенты данного уравнения имеют особенность на линиях $x = 0$, $y = 0$. Кроме того, линии сингулярности одновременно являются характеристиками данного уравнения.

Систематическое изучение двумерных уравнений третьего и четвертого порядка рассматривались в работах М.С. Салахитдинова, Т.Д. Джураева, А.М. Нахушева, В.И. Жегалова, В.Ф. Волкодавова, А.И. Кожанова, А.П. Солдатова и их учеников. В работах Т.Д. Джураева и Я. Попелек [2], Т.Д. Джураева и А. Сопуева [1] исследованы вопросы полной классификации и приведения к каноническому виду общего линейного уравнения соответственно третьего и четвертого порядков с двумя независимыми переменными.

Известно, что вырождающиеся и сингулярные уравнения второго порядка обладают той особенностью, что для них не всегда имеет место корректность классических задач. На постановку задачи существенно влияют младшие коэффициенты. Такие вопросы для уравнений высокого порядка с сингулярными коэффициентами почти не исследованы.

В данной работе в области Ω исследуется аналог задачи Гурса для уравнения (1).

Задача G. Требуется найти функцию $u(x, y) \in C(\bar{\Omega})$, удовлетворяющую уравнению (1) и краевым условиям

$$u(0, y) = \varphi_1(y), \quad \lim_{x\to 0} x^a u_x(x, y) = \varphi_2(y), \;\; 0 \leqslant y \leqslant h; \tag{2}$$

$$u(x, 0) = \psi_1(x), \quad \lim_{y\to 0} y^b u_y(x, y) = \psi_2(x), \;\; 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{3}$$

где $\varphi_k(y)$, $\psi_k(x)$ $(k = 1, 2)-$ заданные гладкие функции, причем $\varphi_1(0) = \psi_1(0)$, $\varphi_2(0) = \psi_2(0) = 0$.

Для построения решения поставленной задачи применим многомерный оператор Эрдейи-Кобера.

В работах [3], [4] и [5] был введен и исследован свойства многомерного обобщенного оператора Эрдейи-Кобера дробного порядка

$$J_\lambda \begin{pmatrix} \alpha \\ p \end{pmatrix} f(x) = J_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n} \begin{pmatrix} \alpha_1, \, \ldots, \, \alpha_n \\ p_1, \, \ldots, \, p_n \end{pmatrix} f(x_1, \, \ldots, \, x_n) =$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \left[\frac{2x_k^{-2(\alpha_k+p_k)}}{\Gamma(\alpha_k)} \right] \int_0^{x_1}\int_0^{x_2} \ldots \int_0^{x_n} \prod_{k=1}^{n} \Big[t_k^{2p_k+1} \left(x_k^2 - t_k^2\right)^{\alpha_k - 1} \times$$

$$\times \, \bar{J}_{\alpha_k-1}\left(\lambda_k \sqrt{x_k^2 - t_k^2}\right)\Big] f(t_1, \, \ldots, \, t_n) dt_1 \ldots dt_n, \tag{4}$$

где $\alpha_k > 0$, $p_k \geqslant -1/2$, $k = \overline{1, n}$, $\bar{J}_\nu(z)-$ функция Бесселя - Клиффорда [6], которая выражается через функции Бесселя $J_\nu(z)$ по формуле $\bar{J}_\nu(z) = \Gamma(\nu + 1)(z/2)^{-\nu} J_\nu(z)$, $\Gamma(\nu)$ - гамма - функция Эйлера [7].

Интеграл (4) является многомерным аналогом одномерного обобщенного оператора Эрдейи - Кобера с функцией Бесселя в ядре [6]. В работах [3], [4] и [5] он применен к исследованию задач для многомерных уравнений гиперболического и параболического типов с сингулярными коэффициентами.

Для интеграла (4) справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $\alpha_k > 0$, $p_k \geqslant -1/2$, $k = \overline{1, n}$, $f(x) \in C^{2n}(\Omega_n)$, $x_k^{2p_k+1} B_{p_k}^{x_k} f(x)-$ *интегрируемы в нуле и* $\lim\limits_{x_k \to 0} x_k^{2p_k+1} f_{x_k}(x) = 0$, $k = \overline{1,\, n}$. *Тогда имеет место равенство*

$$\prod_{k=1}^{n} (B_{p_k+\alpha_k}^{x_k} + \lambda_k^2) J_\lambda \begin{pmatrix} \alpha \\ p \end{pmatrix} f(x) = J_\lambda \begin{pmatrix} \alpha \\ p \end{pmatrix} \prod_{k=1}^{n} B_{p_k}^{x_k} f(x),$$

где $\Omega_n = \prod\limits_{k=1}^{n} (0,\, a_k)$ *- декартово произведение,* $a_k > 0$, $k = \overline{1, n}$, $B_{p_k}^{x_k} = \dfrac{\partial^2}{\partial x_k^2} + \dfrac{2p_k + 1}{x_k} \dfrac{\partial}{\partial x_k}$ *- оператор Бесселя по переменной* x_k.

Теорема верна и при некоторых или всех $\lambda_k = 0$, $k = \overline{1, m}$, $m \leqslant n$.

Доказательство. Оператор (4) можно представить в виде

$$J_\lambda \begin{pmatrix} \alpha \\ p \end{pmatrix} f(x) = J_{\lambda_1}^{(x_1)}(p_1, \alpha_1) J_{\lambda_2}^{(x_2)}(p_2, \alpha_2) ... J_{\lambda_n}^{(x_n)}(p_n, \alpha_n) f(x), \tag{5}$$

где

$$J_{\lambda_k}^{(x_k)}(p_k, \alpha_k) f(x) = \frac{2x_k^{-2(\alpha_k + p_k)}}{\Gamma(\alpha_k)} \int\limits_0^{x_k} t_k^{2p_k+1} \left(x_k^2 - t_k^2\right)^{\alpha_k - 1} \times$$

$$\times \bar{J}_{\alpha_k - 1} \left(\lambda_k \sqrt{x_k^2 - t_k^2}\right) f(x_1,\, ..., x_{k-1}, t_k, x_{k+1}, ...,\, x_n) dt_k. \tag{6}$$

Интеграл (6) является одномерным частным интегралом Эрдейи - Кобера порядка α_k по $k-$ ой переменной, верхний индекс x_k в операторах означает переменную, по которой действуют эти операторы.

Применяя к (5) по каждой переменной оператор $(B_{p_k+\alpha_k}^{x_k} + \lambda_k^2)$, имеем

$$\prod_{k=1}^{n} (B_{p_k+\alpha_k}^{x_k} + \lambda_k^2) J_\lambda \begin{pmatrix} \alpha \\ p \end{pmatrix} f(x) =$$

$$= \prod_{k=1}^{n} (B_{p_k+\alpha_k}^{x_k} + \lambda_k^2) J_{\lambda_k}^{(x_k)}(p_k, \alpha_k) f(x). \tag{7}$$

В работе [8] для одномерного обобщенного оператора Эрдейи-Кобера вида (6) при выполнении условия теоремы 1 доказано следующее равенство

$$(B^{x_k}_{p_k+\alpha_k}+\lambda_k^2)J^{(x_k)}_{\lambda_k}(p_k,\alpha_k)f(x)=J^{(x_k)}_{\lambda_k}(p_k,\alpha_k)B^{x_k}_{p_k}f(x).$$

Применяя это равенство к (7), получим

$$\prod_{k=1}^{n}(B^{x_k}_{p_k+\alpha_k}+\lambda_k^2)J_\lambda\begin{pmatrix}\alpha\\ p\end{pmatrix}f(x)=\prod_{k=1}^{n}J^{(x_k)}_{\lambda_k}(p_k,\alpha_k)B^{x_k}_{p_k}f(x)=$$

$$=J_\lambda\begin{pmatrix}\alpha\\ p\end{pmatrix}\prod_{k=1}^{n}B^{x_k}_{p_k}f(x),$$

что и требовалось доказать.

Теорема 1 позволяет применить оператор (4) как оператор преобразования, позволяющий преобразовать уравнения высокого четного порядка с сингулярными коэффициентами в уравнения без сингулярных коэффициентов. Этот факт применим к исследованию задачи G для уравнения (1).

В силу линейности уравнения (1), сначала рассмотрим следующую вспомогательную задачу.

Задача G_0. Требуется найти функцию $u_1(x,y)\in C(\bar\Omega)$, удовлетворяющую уравнению (1) и краевым условиям

$$u_1(0,y)=\varphi_1(y),\quad u_{1x}(0,y)=0,\ 0\leqslant y\leqslant h; \tag{8}$$

$$u_1(x,0)=\psi_1(x),\quad u_{1y}(x,0)=0,\ 0\leqslant x\leqslant l, \tag{9}$$

где $\varphi_1(y)$, $\psi_1(x)$, - заданные гладкие функции, причем $\varphi_1(0)=\psi_1(0)$.

Предположим, что решение задачи $\{(1),\ (8),\ (9)\ \}$ существует. Это решение ищем в виде

$$u_1(x,y)=J_{0,0}\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ -\frac{1}{2}, & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}U(x,y), \tag{10}$$

где $U(x,y)$ - неизвестная дифференцируемая функция, $\alpha=a/2$, $\beta=b/2$.

Подставляя (10) в уравнение (1) и в краевые условия (8), (9), а затем, используя теорему 1 при $n=2$, $\lambda_1=0$, $\lambda_2=0$, $p_1=p_2=-1/2$, получим задачу нахождения решения $U(x,y)$ уравнения

$$U_{xxyy} + cU = 0, \quad (x,y) \in \Omega, \tag{11}$$

удовлетворяющего краевым условиям

$$U(0,y) = \Phi_1(y), \quad U_x(0,y) = 0, \ 0 \leqslant y \leqslant h; \tag{12}$$

$$U(x,0) = \Psi_1(x), \quad U_y(x,0) = 0, \ 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{13}$$

где

$$\Phi_1(y) = A_0 \frac{d}{dy} \int\limits_0^y \left(y^2 - s^2\right)^{-\beta} s^{2\beta} \varphi_1(s) ds, \ A_0 = \frac{\Gamma(\alpha + 1/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(1-\beta)}, \tag{14}$$

$$\Psi_1(x) = B_0 \frac{d}{dx} \int\limits_0^x \left(x^2 - s^2\right)^{-\alpha} s^{2\alpha} \psi_1(s) ds, \ B_0 = \frac{\Gamma(\beta + 1/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(1-\alpha)}. \tag{15}$$

Для построения решения задачи $\{(11)\text{-}(13)\}$ применим метод Римана.

Функция Римана $R(x,y;\,\xi,\eta)$ является решением сопряженного уравнения [1]

$$L^*(R) = R_{\eta\eta\xi\xi} + cR = 0, \tag{16}$$

удовлетворяющего условиям

$$R(x,y;\,\xi,\eta)|_{\xi=x} = 0, \quad R_\xi(x,y;\,\xi,\eta)|_{\xi=x} = \eta - y,$$

$$R(x,y;\,\xi,\eta)|_{\eta=y} = 0, \quad R_\eta(x,y;\,\xi,\eta)|_{\eta=y} = \xi - x.$$

Если известна функция Римана, то решение задачи $\{(11)\text{-}(13)\}$ можно представить в виде [1]

$$U(x,y) = R_{\eta\xi}(x,y;0,y)\Phi_1(y) - \int\limits_0^y R_{\xi\eta\eta}(x,y;0,\eta)\Phi_1(\eta)d\eta -$$

$$-\int\limits_0^x R_\eta(x,y;\xi,0)\Psi_1''(\xi)d\xi. \qquad (17)$$

Функцию Римана ищем в виде

$$R(x,y;\,\xi,\eta)=p\,w(\sigma), \qquad (18)$$

где $p=(\xi-x)(\eta-y)$, $\sigma=\lambda(\xi-x)^2(\eta-y)^2$, $\quad\lambda=-c/16$, $w(\sigma)$ - неизвестная функция.

Вычисляя производные от выражения (18) и подставляя в сопряженное уравнение (16), находим уравнение

$$\sigma^3w''''(\sigma)+7\sigma^2w'''(\sigma)+\frac{41}{4}\sigma w''(\sigma)+\frac{9}{4}w'(\sigma)-w(\sigma)=0. \qquad (19)$$

Обобщенная гипергеометрическая функция [7]

$${}_0F_3(a,b,c;\,z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(a)_n(b)_n(c)_n n!}$$

удовлетворяет уравнению

$$z^3w''''(z)+(3+a+b+c)z^2w'''(z)+(1+a+b+c+ab+ac+bc)zw''(z)+$$

$$+abcw'(z)-w(z)=0. \qquad (20)$$

Сравнивая (19) и (20) относительно параметров a,b и c, получим систему уравнений

$$\begin{cases} 3+a+b+c=7, \\ 1+a+b+c+ab+ac+bc=41/4, \\ abc=9/4. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим решение уравнения (19) в виде $w(\sigma)={}_0F_3(3/2,\ 3/2,\ 1;\ \sigma)$. Подставляя это решение в представление (10), определяем функцию Римана для задачи $\{$(11)-(13)$\}$:

$$R(x,y;\,\xi,\eta)=p\ {}_0F_3(3/2,\ 3/2,\ 1;\ \sigma). \qquad (21)$$

В силу равенств $(3/2)_n = 2^{-2n}(2n+1)!/n!$ и $(1)_n = n!$, функция (21) совпадает с функцией Римана работы [1], построенной в виде ряда

$$R(x,y;\,\xi,\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n c^n (\xi - x)^{2n+1}(\eta - y)^{2n+1}}{[(2n+1)!]^2}.$$

Вычисляя соответствующие производные от функции (21) и подставляя их в равенство (17), после интегрирования по частям во втором интеграле, получим решение задачи $\{(11)\text{-}(13)\}$ в виде

$$U(x,y) = \Phi_1(y) + \Psi_1(x) - {}_0F_3(1/2,\,1/2,\,1;\lambda x^2 y^2)\Psi_1(0)+$$

$$+\frac{cx^2}{2}\int\limits_0^y [{}_0F_3(3/2,\,3/2,\,2;\sigma_0)(t-y)]\Phi_1(t)dt+$$

$$+\frac{cy^2}{2}\int\limits_0^x [{}_0F_3(3/2,\,3/2,\,2;\omega_0)(s-x)]\Psi_1(s)ds, \tag{22}$$

где $\sigma_0 = \lambda x^2(t-y)^2$, $\omega_0 = \lambda y^2(s-x)^2$, $\lambda = -c/16$.

Подставляя (22) в (10), учитывая равенства (14), (15), меняя порядок интегрирования в кратных интегралах и вычисляя внутренние интегралы, получим

$$u_1(x,y) = \psi_1(x) + \varphi_1(y) - {}_0F_3(\alpha+1/2,\,\beta+1/2,2;\,\lambda x^2 y^2)\varphi_1(0)-$$

$$-\gamma_1 y^2 \int\limits_0^x K_1(x,y,s;\alpha,\beta)\psi_1(s)ds - \gamma_2 x^2 \int\limits_0^y K_2(x,y,s;\alpha,\beta)\varphi_1(s)ds, \tag{23}$$

где $\gamma_1 = c2^{2\alpha-2}/(1+2\beta)$, $\gamma_2 = c2^{2\beta-2}/(1+2\alpha)$,

$$K_1(x,y,s;\alpha,\beta) = \frac{s^{2\alpha}(x-s)}{(x+s)^{2\alpha}} F^{1;0;1}_{1;3;0}\left[\begin{matrix} 1/2+\alpha;\,-;\,\alpha; \\ 3/2;\,3/2+\beta,\,1/2+\alpha,2;\,-; \end{matrix}\ \sigma_1,\,\omega_1\right],$$

$$K_2(x,y,s;\alpha,\beta) = \frac{s^{2\beta}(y-s)}{(y+s)^{2\beta}} F^{1;0;1}_{1;3;0}\left[\begin{matrix} 1/2+\beta;\,-;\,\beta; \\ 3/2;\,3/2+\alpha,\,1/2+\beta,2;\,-; \end{matrix}\ \sigma_2,\,\omega_2\right],$$

$\sigma_1 = \lambda y^2(x-s)^2$, $\omega_1 = (x-s)^2/(x+s)^2$, $\sigma_2 = \lambda x^2(y-s)^2$, $\omega_2 = (y-$

$s)^2/(y+s)^2$, причем $0 \leq \omega_k \leq 1,\ k=1,2;\ F^{p;q;k}_{l;m;n}$ - гипергеометрическая функция Кампе де Ферье, которая имеет вид [9]

$$F^{p;q;k}_{l;m;n}\left[\begin{array}{cccc} (a_p)\,; & (b_q)\,; & (c_k)\,; & \\ (\alpha_l)\,; & (\beta_m)\,; & (\gamma_n)\,; & x,y \end{array}\right]=$$

$$=\sum_{r,s=0}^{\infty}\frac{\prod\limits_{j=1}^{p}(a_j)_{r+s}\prod\limits_{j=1}^{q}(b_j)_r\prod\limits_{j=1}^{k}(c_j)_s}{\prod\limits_{j=1}^{l}(\alpha_j)_{r+s}\prod\limits_{j=1}^{m}(\beta_j)_r\prod\limits_{j=1}^{n}(\gamma_j)_s}\frac{x^r}{r!}\frac{y^s}{s!},$$

здесь $(a_p)=a_1,a_2,\ldots,a_p$. Этот ряд сходится при

1. $p+q<l+m+1,\ p+k<l+n+1,\ |x|<\infty,\ |y|<\infty$ или

2. $p+q=l+m+1,\ p+k=l+n+1$ и

$$\left\{\begin{array}{l} |x|^{1/(p-l)}+|y|^{1/(p-l)}<1,\ \ p>l, \\ \max\{|x|\,,\,|y|\}<1,\ p\leq l\,, \end{array}\right.$$

и кроме этого $\alpha_j\neq 0,-1,-2,\ldots,\ j=\overline{1,l};\ \ \beta_j\neq 0,-1,-2,\ldots,\ j=\overline{1,m};\ \ \gamma_j\neq 0,-1,-2,\ldots,\ j=\overline{1,n}$.

Для построения решения уравнения (1), удовлетворяющего условиям

$$u(0,y)=0,\quad \lim_{x\to 0}x^{2\alpha}u_x(x,y)=\varphi_2(y),\ \ 0\leqslant y\leqslant h;$$

$$u(x,0)=0,\quad \lim_{y\to 0}y^{2\beta}u_y(x,y)=\psi_2(x),\ \ 0\leqslant x\leqslant l,$$

воспользуемся следующим, легко доказываемым свойством решения уравнения (1): если $u_1(x,y;2(1-\alpha),2(1-\beta))$ является решением уравнения $L^c_{2(1-\alpha),2(1-\beta)}(u_1)=0$, удовлетворяющим условиям (8) и (9), то функция $u_2(x,y)=x^{1-2\alpha}y^{1-2\beta}u_1(x,y;2(1-\alpha),\,2(1-\beta))$ при $0<\alpha,\beta<1/2$ будет решением уравнения $L^c_{2\alpha,2\beta}(u_2)=0$, удовлетворяющего условиям

$$u_2(0,y)=0,\quad \lim_{x\to 0}x^{2\alpha}u_{2x}(x,y)=(1-2\alpha)y^{1-2\beta}\varphi_1(y),\ \ 0\leqslant y\leqslant h;$$

$$u_2(x,0)=0,\quad \lim_{y\to 0}y^{2\beta}u_{2y}(x,y)=(1-2\beta)x^{1-2\alpha}\psi_1(x),\ \ 0\leqslant x\leqslant l.$$

Учитывая это свойство и заменив $(1-2\alpha)y^{1-2\beta}\varphi_1(y)$ и $(1-2\beta)x^{1-2\alpha}\psi_1(x)$ соответственно на $\varphi_2(y)$ и $\psi_2(x)$, из равенства (23) получим

$$u_2(x,y)=\frac{y^{1-2\beta}}{1-2\beta}\psi_2(x)+\frac{x^{1-2\alpha}}{1-2\alpha}\varphi_2(y)-$$

$$-\widetilde{\gamma}_1 y^{3-2\beta}\int\limits_0^x K_1(x,y,s;\alpha,1-\beta)\psi_2(s)ds-$$

$$-\widetilde{\gamma}_2 x^{3-2\alpha}\int\limits_0^y K_2(x,y,s;1-\alpha,\beta)\varphi_2(s)ds, \tag{24}$$

где $\widetilde{\gamma}_1=c2^{2\alpha-2}/(3-2\beta)(1-2\beta)$, $\widetilde{\gamma}_2=c2^{2\beta-2}/(3-2\alpha)(1-2\alpha)$.

В силу принципа линейной суперпозиции, решение задачи G представимо в виде $u(x,y)=u_1(x,y)+u_2(x,y)$.

Нетрудно убедиться в том, что найденное нами решение задачи G удовлетворяет уравнению (1) и условиям (2), (3).

Заметим, что задача G эквивалентно интегральному уравнению Вольтерра второго рода вида

$$u(x,y)+c\int\limits_0^x\int\limits_0^y K(x,y;s,t)u(s,t)dsdt=F(x,y) \tag{25}$$

где

$$K(x,y;s,t)=\frac{s^a t^b}{(1-a)(1-b)}[x^{1-a}-s^{1-a}][y^{1-b}-t^{1-b}],$$

$$F(x,y)=\frac{x^{1-a}}{1-a}[\varphi_2(y)-\varphi_2(0)]+\frac{y^{1-b}}{1-b}[\psi_2(y)-\psi_2(0)]+\psi_1(x)+\varphi_1(y)-\varphi_1(0).$$

В силу общей теории интегральных уравнений Вольтерра второго рода [10], интегральное уравнение (25) имеет единственное решение. При этом справедлива

Теорема 2. *Если $0<a,b<1$ и $\varphi_k(y)\in C[0,h]\bigcap C^2(0,h)$, $\psi_k(x)\in C[0,l]\bigcap C^2(0,l)$, $k=1,\,2$, причем $\varphi_2'(y)$ и $\psi_2'(x)$ соответсвенно могут иметь особенност порядка меньше b при $y\to 0$ и меньше a при $x\to 0$, то существует единственное классическое решение задачи G.*

При других значениях параметров a и b поставленная задача решается методом аналитического продолжения оператора (4) по этим параметрам при $a=2\alpha$ и $b=2\beta$.

Данный метод также можно применить к решению краевых задач для многомерного уравнения, уравнения высокого порядка типа (1) и неклассического уравнения типа Соболева с многими сингулярными коэффициентами.

Литература

1. Джураев Т.Д., Сопуев А. К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка. -Тошкент: ФАН, 2000, -144 с.

2. Джураев Т.Д., Попелек Я. О классификации и приведении к каноническому виду уравнений с частными производными третьего порядка.//Дифференциальные уравнения. 1991.т. 27. №10. С. 1734-1745.

3. Каримов Ш.Т. Решение задачи Коши для многомерного гиперболического уравнения с сингулярными коэффициентами методом дробных интегралов. // Доклады АН РУз, 2013, №1, с. 11-13.

4. Каримов Ш.Т. Об одном методе решения краевых задач для многомерных параболических уравнений с операторами Бесселя. // Труды межд. науч. конф. Дифференциальные уравнения и смежные проблемы, т.1, -Уфа, РИЦ БашГУ, 2013, с. 54-59.

5. Karimov Sh.T. Multidimensional generalized Erdélyi-Kober operator and its application to solving Cauchy problems for differential equations with singular coefficients.// Fract. Calc. Appl. Anal., Vol. 18, №4 (2015), 845-861.

6. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и их приложения. -Минск: Наука и техника, 1987.-702 с.

7. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, Т.1. -М.: Наука, 1973. -296 с.

8. Lowndes J.S. An application of some fractional integrals // Glasgow Math. J. 20 (1979). -p. 35-41.

9. Appell P., Kampe de Feriet J. Fonctions Hypergeometriques et Hyperspheriques; Polynomes d'Hermite. Paris, Gauthier - Villars., 1926, -p. 440.

10. Мюнтц Г. Интегральные уравнения. Ч.1. -Л.-М.: Гостехиздат, 1934. -320 с.

Ферганский государственный университет

Uzbek Mathematical
Journal, 2016,№4 , pp.84-94

УДК 517.956

Интегрирование нагруженного уравнения Кортевега-де Фриза с самосогласованным источником в классе периодических функций

Матякубов М.М.

Mazkur ishda teskari spektral masalalar usuli moslangan manbali yuklangan Korteveg-de Friz tenglamasini davriy funksiyalar sinfida integrallashga qo'llanilgan.

In this paper, the method of inverse spectral problem is applied for integrating a loaded Korteweg-de Vries equation with a self-consistent source in the class of periodic functions.

1. В работах С.П.Новикова [1], Б.А.Дубровина и С.П.Новикова [2], В.А.Марченко [3], А.Р.Итса и В.Б.Матвеева [4], П.Лакса [5], Г.Мак-Кина и Е.Трубовица [6] и др. исследовано уравнение Кортевега-де Фриза (КдФ), в классе периодических функций.

Отметим, что уравнение КдФ с самосогласованным источником в классе быстроубывающих функций было рассмотрено в работах [7-8] и др., а нелинейные уравнения с источником в классе периодических функций в различных постановках изучены в работах [9-11].

В данной работе изучается нагруженное уравнение Кортевега-де Фриза с самосогласованным источником,

$$q_t = q_{xxx} - 6qq_x + \gamma(t) \cdot q|_{x=0} \cdot q_x +$$

$$+2\int\limits_0^\infty \beta(\lambda,t)s(\pi,\lambda,t)\left(\psi_+(x,\lambda,t)\cdot\psi_-(x,\lambda,t)\right)_x d\lambda, x\in R,\ t>0 \qquad (1)$$

с начальным условием

$$q(x,t)|_{t=0} = q_0(x), \qquad (2)$$

где $\gamma(t)$ заданная действительная непрерывная функция. Требуется найти действительную функцию $q(x,t)$, которая π-периодическая по переменной x:

$$q(x+\pi,t)\equiv q(x,t),\quad x\in R,\quad t>0 \tag{3}$$

и удовлетворяет условиям гладкости:

$$q(x,t)\in C_x^3(t>0)\cap C_t^1(t>0)\cap(t\geqslant 0). \tag{4}$$

Здесь $\beta(\lambda,t)\in C\left((-\infty,\ \infty)\times[0,\ \infty)\right)$ - заданная действительная функция, имеющая равномерную асимптотику $\beta(\lambda,t)=O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$, $|\lambda|\to\infty$, $\psi_\pm(x,\lambda,t)$ - решения Флоке (нормированные условием $\psi_\pm(0,\lambda,t)=1$) уравнения Штурма-Лиувилля

$$L(t)y\equiv -y''+q(x,t)y=\lambda\, y,\quad x\in R, \tag{5}$$

$s(x,\lambda,t)$ - решение уравнения (5), удовлетворяющая начальным условиям $s(0,\lambda,t)=0$, $s'(0,\lambda,t)=1$.

Замечание 1. Покажем равномерную сходимость интеграла участвующего в уравнении (1). Для этого воспользуемся следующим тождеством

$$s(\pi,\lambda,t)\psi_+(\tau,\lambda,t)\psi_-(\tau,\lambda,t)=s(\pi,\lambda,t,\tau), \tag{6}$$

где $s(x,\lambda,t,\tau)$ - решение уравнения

$$-y''+q(x+\tau,t)y=\lambda y\,,\quad x\in R^1,$$

удовлетворяющее начальным условиям $s(0,\lambda,t,\tau)=0$, $s'(0,\lambda,t,\tau)=1$.

Из асимптотических формул

$$c(x,\lambda,t)=\cos\sqrt{\lambda}x+O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right),\quad s(x,\lambda,t)=\frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}}+O\left(\frac{1}{\lambda}\right),$$

$$c'(x,\lambda,t)=-\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x+O(1),\quad s'(x,\lambda,t)=\cos\sqrt{\lambda}x+O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right),$$

$(\lambda\to\infty)$ и равенства

$$s(\pi,\lambda,t,\tau)=c(\tau,\lambda,t)s(\pi+\tau,\lambda,t)-s(\tau,\lambda,t)c(\pi+\tau,\lambda,t)$$

следуют оценки

$$s(\pi,\lambda,t,\tau)=O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right),\quad \frac{\partial s(\pi,\lambda,t,\tau)}{\partial\tau}=O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)\quad \lambda\to\infty.$$

Эти оценки и равенство (6) обеспечивают равномерную сходимость интеграла участвующего в уравнении (1).

2. В этом пункте, для полноты изложения, приведем некоторые основные сведения, касающиеся обратной спектральной задачи для оператора Штурма-Лиувилля с периодическим потенциалом (см. [12-14]).

Рассмотрим следующий оператор Штурма-Лиувилля на всей прямой

$$Ly \equiv -y'' + q(x)y = \lambda\, y, \quad x \in R \tag{7}$$

где $q(x)$ - действительная непрерывная π-периодическая функция.

Обозначим через $c(x,\lambda)$ и $s(x,\lambda)$ решения уравнения (7) удовлетворяющие начальным условиям $c(0,\lambda) = 1$, $c'(0,\lambda) = 0$ и $s(0,\lambda) = 0$, $s'(0,\lambda) = 1$. Функция $\Delta(\lambda) = c(\pi,\, \lambda) + s'(\pi,\, \lambda)$ называется функцией Ляпунова или дискриминантом Хилла.

Спектр оператора (7) чисто непрерывный и совпадает со следующим множеством

$$E = \{\lambda \in R^1 : \ \ -2 \leqslant \Delta(\lambda) \leqslant 2\ \} = [\lambda_0, \lambda_1] \cup [\lambda_2,\ \lambda_3] \cup ... \cup [\lambda_{2n}, \lambda_{2n+1}] \cup \dots .$$

Интервалы $(-\infty,\ \lambda_0)$, $(\lambda_{2n-1},\ \lambda_{2n})$, $n \geqslant 1$ называются лакунами. Здесь $\lambda_0,\ \lambda_{4k-1},\ \lambda_{4k}$ - собственные значения периодической задачи ($y(0) = y(\pi)$, $y'(0) = y'(\pi)$), а $\lambda_{4k+1},\ \lambda_{4k+2}$ - собственные значения антипериодической задачи ($y(0) = -y(\pi)$, $y'(0) = -y'(\pi)$) для уравнения (7).

Пусть ξ_n, $n \geqslant 1$ корни уравнения $s(\pi,\lambda) = 0$. Отметим, что ξ_n, $n \geqslant 1$ совпадают с собственными значениями задачи Дирихле ($y(0) = y(\pi) = 0$) для уравнения (7), кроме того выполняются следующие включения $\xi_n \in [\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$, $n \geqslant 1$.

Числа ξ_n, $n \geqslant 1$ вместе со знаками $\sigma_n = sign\{s'(\pi,\xi_n) - c(\pi,\xi_n)\}$, $n \geqslant 1$ называются спектральными параметрами задачи (7). Спектральные параметры ξ_n, σ_n, $n \geqslant 1$ вместе с границами λ_n, $n \geqslant 0$ спектра называют спектральными данными оператора (7). Восстановление коэффициента $q(x)$ по спектральным данным называется обратной спектральной задачей для оператора (7).

Спектр оператора Штурма-Лиувилля с коэффициентом $q(x+\tau)$ не зависит от действительного параметра τ, а спектральные параметры зависят от τ: $\xi_n(\tau)$, $\sigma_n(\tau)$, $n \geqslant 1$. Спектральные параметры удовлетворяют следующей системе уравнений Дубровина

$$\frac{d\xi_n}{d\tau} = 2(-1)^{n-1}\sigma_n(\tau)h_n(\xi), \quad n \geqslant 1,$$

где

$$h_n(\xi) = \sqrt{(\xi_n - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n)} \times \sqrt{(\xi_n - \lambda_0) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{(\lambda_{2k-1} - \xi_n)(\lambda_{2k} - \xi_n)}{(\xi_k - \xi_n)^2}}.$$

Система уравнений Дубровина и следующая формула первого следа

$$q(\tau) = \lambda_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_{2k-1} + \lambda_{2k} - 2\xi_k(\tau))$$

дают метод решения обратной задачи.

Цель данной работы дать процедуру построения решения $q(x,t)$, $\psi_{\pm}(x,\lambda,t)$ задачи (1)-(5), в рамках обратной спектральной задачи для оператора Штурма-Лиувилля с периодическим коэффициентом.

3. Основной результат настоящей работы заключается в следующей теореме.

Теорема. *Пусть $q(x,t)$, $\psi_{\pm}(x,\lambda,t)$ решение задачи (1)-(5). Тогда границы спектра λ_n, $n \geqslant 0$ следующего оператора*

$$L(\tau,t)y \equiv -y'' + q(x+\tau,t)y = \lambda y, \quad x \in R \tag{8}$$

не зависят от параметров τ и t, а спектральные параметры $\xi_n(\tau,t)$, $n \geqslant 1$ удовлетворяют аналогу системы уравнений Дубровина:

$$\frac{\partial \xi_n}{\partial t} = 2(-1)^n \sigma_n(\tau,t)[2q(\tau,t) - \gamma(t)q(0,t) + 4\xi_n +$$

$$+\int_0^{\infty} \frac{s(\pi,\lambda,t,\tau)\beta(\lambda,t)}{\xi_n - \lambda} d\lambda] h_n(\xi), \quad n \geqslant 1, \tag{9}$$

где знак $\sigma_n(\tau,t)$ меняется на противоположный при каждом столкновении точки $\xi_n(\tau,t)$ с границами своей лакуны $[\lambda_{2n-1},\ \lambda_{2n}]$. Кроме того, выполняются следующие начальные условия:

$$\xi_n(\tau,t)|_{t=0} = \xi_n^0(\tau), \quad \sigma_n(\tau,t)|_{t=0} = \sigma_n^0(\tau)\,, \quad n \geqslant 1, \tag{10}$$

где $\xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n^0(\tau)$ $n \geqslant 1$ - спектральные параметры оператора Штурма-Лиувилля с коэффициентом $q_0(x+\tau)$.

Доказательство. Обозначим через $y_n = y_n(x,\tau,t)$, $n \geqslant 1$ ортонормированные собственные функции задачи Дирихле ($y(0)=0, \quad y(\pi)=0$) для уравнения (8), соответствующие собственным значениям $\xi_n=\xi_n(\tau,t)$, $n\geqslant 1$.

Дифференцируя по t тождество $(L(\tau,t)y_n,y_n)=\xi_n$, и используя симметричность оператора $L(\tau,t)$, имеем

$$\dot{\xi}_n=(L(\tau,t)\dot{y}_n+q_t y_n,y_n)+(L(\tau,t)y_n,\dot{y}_n)=$$

$$=(\dot{y}_n,L(\tau,t)y_n)+(L(\tau,t)y_n,\dot{y}_n)+(q_t y_n,y_n)=$$

$$=\xi_n\dot{((y_n,y_n))}+(q_t y_n,y_n)=\int\limits_0^\pi q_t y_n^2 dx. \tag{11}$$

Вводя обозначение

$$G(x,t)=2\int\limits_0^\infty \beta(\lambda,t)s(\pi,\lambda,t)\left(\psi_+(x,\lambda,t)\cdot\psi_-(x,\lambda,t)\right)_x d\lambda,$$

уравнение (1) можно переписать в виде

$$q_t(x+\tau,t)=q_{xxx}(x+\tau,t)-6q(x+\tau,t)q_x(x+\tau,t)+$$

$$+\gamma(t)\cdot q(0,t)\cdot q_x(x+\tau,t)+G(x+\tau,t)$$

Используя это тождество равенство (11) перепишем в виде

$$\dot{\xi}_n=\int\limits_0^\pi [q_{xxx}-6qq_x+\gamma(t)\cdot q(0,t)\cdot q_x]y_n^2 dx+\int\limits_0^\pi G\cdot y_n^2 dx. \tag{12}$$

Ищем первообразную подынтегральной функции в первом интеграле в виде квадратичной формы от y_n и y_n', т. е. пусть

$$(ay_n^2+by_n{y'}_n+c{y'}_n^2)'=[q_{xxx}-6qq_x+\gamma(t)q(0,t)q_x]y_n^2, \tag{13}$$

где функции a, b, c не зависят от y_n и y_n'. Используя равенство $y_n''=(q-\xi_n)y_n$ и приравнивая соответствующие коэффициенты, из (13) получим

$$b=-c',\quad a=\frac{1}{2}c''-c\cdot(q-\xi_n),$$

$$\frac{1}{2}c''' - 2c' \cdot (q - \xi_n) - cq_x = q_{xxx} - 6qq_x + \gamma(t)q(0,t)q_x. \qquad (14)$$

Нетрудно видеть, что $c = 2q + \alpha$, где $\alpha = 4\xi_n - \gamma(t)q(0,t)$, удовлетворяет равенству (14). Таким образом, при

$$a = q_{xx} - [2q + 4\xi_n - \gamma(t)q(0,t)] \cdot (q - \xi_n), \quad b = -2q_x, \quad c = 2q + 4\xi_n - \gamma(t)q(0,t)$$

выполняется равенство (13). Значит,

$$\dot{\xi}_n = (ay_n^2 + by_n{y'}_n + c{y'}_n^2)\Big|_0^\pi + \int\limits_0^\pi G \cdot y_n^2 dx =$$

$$= [2q(\tau,t) - \gamma(t)q(0,t) + 4\xi_n][{y'}_n^2(\pi,\tau,t) - {y'}_n^2(0,\tau,t)] + \int\limits_0^\pi G \cdot y_n^2 dx. \quad (15)$$

Теперь займемся вычислением второго интеграла в (12):

$$\int\limits_0^\pi G \cdot y_n^2 dx = \int\limits_0^\infty s(\pi,\lambda,t,\tau)\beta(\lambda,t)\left\{2\int\limits_0^\pi y_n^2 \cdot (\psi_+\psi_-)' dx\right\} d\lambda.$$

Интегрируя по частям, нетрудно видеть, что

$$I = 2\int\limits_0^\pi y_n^2 \cdot (\psi_+\psi_-)' dx = \int\limits_0^\pi y_n^2 \cdot (\psi_+\psi_-)' dx + \int\limits_0^\pi y_n^2 \cdot d(\psi_+\psi_-) =$$

$$= \int\limits_0^\pi \{y_n^2 \cdot (\psi_+\psi_-)' - (y_n^2)' \cdot (\psi_+\psi_-)\} dx =$$

$$= \int\limits_0^\pi \{y_n\psi_-(y_n\psi'_+ - y'_n\psi_+) + y_n\psi_+(y_n\psi'_- - y'_n\psi_-)\} dx.$$

Используя тождество

$$(y_n\psi'_\pm - y'_n\psi_\pm)' = (\xi_n - \lambda)y_n\psi_\pm,$$

выводим

$$I = \frac{1}{\xi_n - \lambda} \cdot [{y'}_n^2(\pi,t) - {y'}_n^2(0,t)].$$

Значит,

$$\int_0^\pi G{\cdot}y_n^2 dx = [{y'}_n^2(\pi,t) - {y'}_n^2(0,t)] \cdot \int_0^\infty \frac{s(\pi,\lambda,\tau,t)\beta(\lambda,t)}{\xi_n - \lambda} d\lambda.$$

Подставляя это в (15) получим

$$\dot{\xi}_n = [{y'}_n^2(\pi,t) - {y'}_n^2(0,t)] \times$$

$$\times \left\{ 2q(\tau,t) - \gamma(t)q(0,t) + 4\xi_n + \int_0^\infty \frac{s(\pi,\lambda,t,\tau)\beta(\lambda,t)}{\xi_n - \lambda} d\lambda \right\}. \qquad (16)$$

Обозначим через $s(x,\lambda,\tau,t)$ решение уравнения (8) удовлетворяющее начальным условиям $s(0,\lambda,t,\tau) = 0$, $s'(0,\lambda,t,\tau) = 1$. Тогда

$$y_n(x,\tau,t) = \frac{1}{c_n(\tau,t)} s(x,\xi_n,t,\tau),$$

где

$$c_n^2(\tau,t) \equiv \int_0^\pi s^2(x,\xi_n,t,\tau)dx = s'(\pi,\xi_n,t,\tau)\frac{\partial s(\pi,\xi_n,t,\tau)}{\partial\lambda}.$$

Используя эти равенства имеем

$${y'}_n^2(\pi,\tau,t) - {y'}_n^2(0,\tau,t) = \frac{1}{\frac{\partial s(\pi,\xi_n,t,\tau)}{\partial\lambda}} \left(s'(\pi,\xi_n,t,\tau) - \frac{1}{s'(\pi,\xi_n,t,\tau)} \right).$$

Подставляя сюда выражение

$$s'(\pi,\xi_n,t,\tau) - \frac{1}{s'(\pi,\xi_n,t,\tau)} = \sigma_n(\tau,t)\sqrt{\Delta^2(\xi_n) - 4}$$

получим

$${y'}_n^2(\pi,\tau,t) - {y'}_n^2(0,\tau,t) = \frac{\sigma_n(\tau,t)\sqrt{\Delta^2(\xi_n) - 4}}{\frac{\partial s(\pi,\xi_n,t,\tau)}{\partial\lambda}}.$$

Здесь

$$\sigma_n(\tau,t) = sign\left\{ s'(\pi,\xi_n,t,\tau) - \frac{1}{s'(\pi,\xi_n,t,\tau)} \right\}.$$

Из разложений

$$\Delta^2(\lambda) - 4 = 4\pi^2(\lambda_0 - \lambda)\prod_{k=1}^{\infty}\frac{(\lambda_{2k-1}-\lambda)(\lambda_{2k}-\lambda)}{k^4},$$

$$s(\pi,\lambda,t,\tau) = \pi\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\xi_k - \lambda}{k^2}$$

следует, что

$$y'^2_n(\pi,\tau,t) - y'^2_n(0,\tau,t) = 2(-1)^n\sigma_n(\tau,t)h_n(\xi). \qquad (17)$$

Из (16) и (17) получим (9).

Известно, что границы λ_n, $n \geqslant 0$ спектра оператора (8), совпадают либо с собственными значениями периодической задачи, либо антипериодической задачи для уравнения Штурма-Лиувилля (8). Обозначив через $v_n(x,\tau,t)$ нормированную собственную функцию, соответствующую собственному значению λ_n, периодической или антипериодической задачи для уравнения Штурма-Лиувилля (8). Аналогично формуле (15) можно показать, что

$$\dot{\lambda}_n(t) = \int_0^{\pi} G(x,\tau,t)v_n^2(x,\tau,t)dx.$$

Учитывая вид функции $G(x,\tau,t)$, и действуя как прежде, получим $\dot{\lambda}_n(t) = 0$, $n \geqslant 0$. Это и означает не зависимость от параметра t спектра оператора (8). **Теорема доказана.**

Замечание 2. Используя формулу первого следа

$$q(\tau,t) = \lambda_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_{2k-1} + \lambda_{2k} - 2\xi_k(\tau,t)) \qquad (18)$$

систему (9) можем переписать в “замкнутой” форме.

Замечание 3. Покажем, что построенная функция $q(\tau,t)$ удовлетворяет уравнению (1). Для этого используем также систему Дубровина

$$\frac{\partial \xi_n}{\partial \tau} = 2(-1)^{n-1}\sigma_n(\tau,t)h_n(\xi), \quad n \geqslant 1 \tag{19}$$

и формулу следов

$$q^2(\tau,t) - \frac{1}{2}q_{\tau\tau}(\tau,t) = \lambda_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_{2k-1}^2 + \lambda_{2k}^2 - 2\xi_k^2(\tau,t)). \tag{20}$$

С помощью систем Дубровина (9) и (19) имеем

$$\frac{\partial \xi_k}{\partial t} = -[2q(\tau,t) - \gamma(t)q(0,t) + 4\xi_k\int\limits_0^{\infty}\frac{\beta(\lambda,t)s(\pi,\lambda,t,\tau)}{\xi_k-\lambda}d\lambda]\frac{\partial \xi_k}{\partial \tau}, \quad k \geqslant 1. \tag{21}$$

Из формулы первого следа (18) учитывая (21) находим

$$q_t = -2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial \xi_k}{\partial t} = 4q\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial \xi_k}{\partial \tau} - 2\gamma(t)q(0,t)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial \xi_k}{\partial \tau} + 8\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\frac{\partial \xi_k}{\partial \tau} +$$

$$+2\int\limits_0^{\infty}\beta(\lambda,t)\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{s(\pi,\lambda,t,\tau)}{\xi_k-\lambda}\frac{\partial \xi_k}{\partial \tau}\right\}d\lambda. \tag{22}$$

Дифференцируя по τ формулы следов (18) и (20) получим

$$2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial \xi_k}{\partial \tau} = -q_\tau, \quad 4\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\frac{\partial \xi_k}{\partial \tau} = \frac{1}{2}q_{\tau\tau\tau} - 2qq_\tau.$$

Используя эти равенства из (22) выводим

$$q_t = -2qq_\tau + \gamma(t)q(0,t)q_\tau + q_{\tau\tau\tau} - 4qq_\tau + 2\int\limits_0^{\infty}\beta(\lambda,t)\frac{\partial s(\pi,\lambda,t,\tau)}{\partial \tau}d\lambda.$$

Из равенства (6) следует, что

$$q_t = q_{\tau\tau\tau} - 6qq_\tau + \gamma(t)q(0,t)q_\tau + 2\int\limits_0^{\infty}\beta(\lambda,t)s(\pi,\lambda,t)\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\psi_+(\tau,\lambda,t)\cdot\psi_-(\tau,\lambda,t)\right)d\lambda.$$

Следствие 1. Эта теорема дает метод решения задачи (1)-(5). Для этого сначала найдем спектральные данные λ_n, $n \geqslant 0$, $\xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n^0(\tau)$, $n \geqslant 1$ для уравнения

$$-y'' + q_0(x+\tau)y = \lambda y, \quad x \in R.$$

Далее, решая при $\tau = 0$ задачу Коши (9)+(10) находим $\xi_n(0,t)$, $n \geqslant 1$. После этого, подставляем эти данные в уравнение (9) и решая задачу Коши при произвольном значении τ находим $\xi_n(\tau,t)$, $n \geqslant 1$. По формуле следов (18) находим $q(\tau,t)$. После этого нетрудно найти решения Флоке $\psi_\pm(x,\lambda,t)$.

Следствие 2. В работе [13] доказана следующая теорема: для экспоненциального убывания длин лакун оператора Штурма-Лиувилля с π-периодическим действительным коэффициентом необходима и достаточна аналитичность этих коэффициентов. Отсюда выводим, что если начальная функция $q_0(x)$ является действительной аналитической функцией, то длины лакун, соответствующие этому потенциалу, убывают экспоненциально. Потенциалу $q(x,t)$ соответствуют те же лакуны, значит, $q(x,t)$ - является действительной аналитической функцией по x.

Следствие 3. В работе [14] доказано обобщение обратной теоремы Борга: для того чтобы число $\frac{\pi}{n}$ являлось периодом π-периодического потенциала оператора Штурма-Лиувилля, необходимо и достаточно исчезновение всех лакун, номера которых не делятся на n. В силу этой теоремы, если число $\frac{\pi}{n}$ является периодом начальной функции $q_0(x)$, то лакуны, номера которых не делятся на n, исчезают. Потенциалу $q(x,t)$ соответствуют те же лакуны, значит, по обобщенной обратной теореме Борга, число $\frac{\pi}{n}$ является периодом и для функции $q(x,t)$ по переменной x. Здесь $n \geqslant 2$ натуральное число и лакуна $(\lambda_{2k-1}, \lambda_{2k})$ имеет номер k.

Литература

1. Новиков С.П. Периодическая задача Кортевега-де Фриза I. // Функц. анализ и прил., 1974, т. 8, №3, с. 54-66.

2. Дубровин Б.А., Новиков С.П. Периодический и условно периодический аналоги многосолитонных решений уравнения Кортевега-де Фриза. // ЖЭТФ, 1974, т. 67, №12, с. 2131-2143.

3. Марченко В.А. Периодическая задача Кортевега-де Фриза. // Мат. сб. 1974, т. 95, №3, с. 331-356.

4. Итс А.Р., Матвеев В.Б. Операторы Шредингера с конечнозонным спектром и N-солитонные решения уравнения Кортевега-де Фриза. // Теор. и мат. физика, 1975, т. 23, №1, с. 51-68.

5. Lax P. Periodic Solutions of the KdV equation. // Comm. Pure Appl. Math., 1975, v. 28, p. 141-188.

6. McKean H.P., Trubowitz E. Hill's operator and Hyperelliptic Function Theory in the Presence of infinitely Many Branch Points. // Comm. Pure Appl. Math., 1976, v. 29, p. 143-226.

7. Mel'nikov V.K. Integration of the nonlinear Schrodinger equation with a source. // Inverse Probl., 1992, v. 8, p. 133-147.

8. Хасанов А.Б., Уразбоев Г.У. Интегрирование общего уравнения КдФ с правой частью в классе быстроубывающих функций. // Узб. матем. журнал. 2003, №2, с. 53-59.

9. Grinevich P.G., Taimanov I.A. Spectral conservation laws for periodic nonlinear equations of the Melnikov type. //Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 2008, v. 224, p. 125-138.

10. Хасанов А.Б., Яхшимуратов А.Б. Об уравнении Кортевега-де Фриза с самосогласованным источником в классе периодических функций. // Теор. и мат. физика. 2010, т. 164, №2, с. 214-221.

11. Яхшимуратов А. Б., Матякубов М. М., Интегрирование нагруженного уравнения Кортевега-де Фриза в классе периодических функций. // Известия вузов. Математика. 2016, №2, с. 87-92.

12. Станкевич И.В. Об одной задаче спектрального анализа для уравнения Хилла.// ДАН СССР, 1970, т. 192, №1, с. 34-37.

13. Trubowitz E. The inverse problem for periodic potentials.// Comm. Pure. Appl. Math., 1977, v. 30, p. 321-337.

14. Hochstadt H. A Generalization of Borg's Inverse Theorem for Hill's Equations. // Journal of math. analysis and applications, 102, 1984, p. 599-605.

Ургенчский государственный университет

Uzbek Mathematical
Journal, 2016,№4, pp.95-100

УДК 513.8

Римановы субмерсии над плоскими многообразиями

Нарманов А.Я., Зоидов А.

Maqolada riman submersiyasi seksion egriligi nolga teng ko‘pxillik ustida berilsa, bu ko‘pxillikning evklid fazosiga isometrik ekanligi ko‘rsatilgan.

In this paper it is proved that if a riemannian submersion is given over flat manifold than the manifold is isometric to euclid space.

Дифференцируемые отображения максимального ранга играют важную роль во всех разделах математики, в частности в римановой геометрии. Одним из важных классов дифференцируемых отображений максимального ранга состоит из погружений.

Погружения интенсивно изучались с самого зарождения римановой геометрии. Первыми простыми примерами римановых многообразий являются поверхности, вложенные в трехмерное евклидово пространство. Поэтому дифференциальная геометрия изометричных погружений и вложений хорошо изучена и достаточно представлена во многих учебниках по дифференциальной геометрии.

Двойственное понятие субмерсии сформировалось относительно недавно, во второй половине двадцатого века. Геометрия субмерсий впервые изложена в работах [5], [6],[7]. Изучение геометрии субмерсий, в частности римановых субмерсий оказалось очень плодотворным в силу того, что римановы субмерсии имеют приложения во всех разделах современной римановой геометрии.

Пусть $M-$ гладкое связное риманово многообразие размерности n с римановой метрикой g. Обозначим через $V(M)-$ множество всех гладких векторных полей, определенных на M, через $[X, Y]$ скобку Ли векторных полей $X, Y \in V(M)$. Относительно скобки Ли множество $V(M)$ является алгеброй Ли.

Гладкость в данной работе означает гладкость класса C^∞.

Определение 1. Дифференцируемое отображение $\pi : M \to B$ максимального ранга, где B-гладкое риманово многообразие размерности m, называется субмерсией при $n > m$.

По теореме о ранге дифференцируемой функции для каждой точки $p \in B$ полный прообраз $\pi^{-1}(p)$ является подмногообразием размерности $k = n - m$. Таким образом субмерсия $\pi : M \to B$ порождает слоение F размерности $k = n - m$ на многообразии M, слоями которого являются подмногообразия $L_q = \pi^{-1}(q), p \in B$.

Пусть $P : x \to P(x)$, где $x \in M$, $P(x) \subset T_xM$,- вполне интегрируемое распределение, максимальными подмногообразиями которого являются слои слоения F, $H : x \to H(x)$ - распределение, которое является ортогональным дополнением P, т.е. $T_xM = P(x) \oplus \ominus H(x)$ для всех $x \in M$.

Каждое векторное поле X можно представить в виде $X = X^v + X^h$, где X^v, X^h- ортогональные проекции X на P, H соответственно. Здесь для удобства, P, H рассматриваются как подрасслоения касательного расслоения TM. Если $X^h = 0$, то X называется вертикальным полем (оно является касательным к слоению),а если $X^v = 0$, то X называется горизонтальным полем.

Определение 2. Субмерсия $\pi : M \to B$ называется римановой, если ее дифференциал $d\pi$ сохраняет длину горизонтальных векторов.

Изучению геометрии римановых субмерсий посвящены многочисленные исследования ([4]- [7]), в частности в работе [5] получены фундаментальные уравнения римановой субмерсии.

Теорема.Пусть $\pi : R^n \to B$- риманова субмерсия, $B-$ гладкое связное многообразие нулевой секционной кривизны. Тогда риманово многообразие B изометрично евклидову пространству R^m .

Доказательство.Сначала напомним понятие секционной кривизны [1]. Риманова метрика g индуцирует метрическую связность (связность Леви-Чивита) ∇. Напомним,что связностью называется отображение $\nabla : V(M) \times V(M) \to V(M)$, обозначаемое $(X, Y) \to \nabla_X Y$ и обладающее следующими свойствами:

1.$\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,

2.$\nabla_{X+Y} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$,

3.$\nabla_{fX} Y = f\nabla_X Y$,

4.$\nabla_X fY = X(f)Y + f\nabla_X Y$, где f -гладкая функция.

Связность Леви-Чивита ∇ и скобка Ли [X,Y] связаны соотношением $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$.

Линейное отображение $R : V(M) \times V(M) \times V(M) \to V(M)$, определенное по формуле

$$R_{XY}Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

называется тензором кривизны, а скалярная величина $k(X,Y) = \langle R_{XY}Y, X\rangle$ называется кривизной Римана [1].

Секционная кривизна риманова многообразия M в точке p в двумерном направлении σ , определяемых векторами $u, v \in T_pM$, определяется по правилу

$$K_{u,v} = \frac{k(u,v)}{|u|^2|v|^2 - \langle u,v\rangle^2} = \frac{\langle R_{uv}v, u\rangle}{|u|^2|v|^2 - \langle u,v\rangle^2}.$$

Известно,что если многообразие является двумерной поверхностью, погруженное в трехмерное евклидово пространство,то секционная кривизна совпадает с гауссовой кривизной поверхности.

Если секционная кривизна $K_{u,v}$ постоянна для всех плоскостей σ в T_pM и всех точек $p \in M$,то многообразие M называется многоообразием постоянной кривизны.

Теперь докажем, что горизонтальное распределение $H : x \to H(x)$ вполне интегрируемо. Будем писать $X \in H$ для векторного поля, если $X(q) \in H(q)$ для всех $q \in M$. По известной теореме Фробениуса для того,чтобы распределение $q \to H(q)$ было вполне интегрируемым необходимо и достаточно, чтобы распределение $q \to H(q)$ было инволютивным.

Распределение называется инволютивным, если из того, что $X, Y \in H$ следует $[X,Y] \in H$.

Покажем, что распределение H инволютивно. Пусть X, Y - горизонтальные векторные поля, т.е $X, Y \in H$. Для произвольной точки $q \in R^n$ рассмотрим секционное кривизны $K_{u,v}$, $K^*_{u^*,v^*}$ многообразий R^n и B соответсвенно. Здесь $u = X(q)$, $v = Y(q)$, $u^* = d\pi_q(u)$, $v^* = d\pi_q(v)$. В работе [5]показано,что имеет место

$$K_{u,v} = K^*_{u_*,v_*} - \frac{3\|A_u v\|^2}{|u|^2|v|^2 - \langle u,v\rangle^2},$$

где тензор A определяется по формуле $A_E F = \nabla^h_{E^h} F^v + \nabla^v_{E^h} F^h$.

Так как многообразия R^n, B является многообразиями постоянной нулевой секционной кривизны,имеет место $K_{u,v} = 0$, $K^*_{u^*,v^*} = 0$. Поэтому из вышеприведенной формулы следует, что $A_u v = 0$, т.е $\nabla^v_X Y = 0$

в точке q. Другими словами, векторное поле $\nabla_X Y$ является горизонтальным векторным полем. В силу равенстве $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$ векторное поле $[X, Y]$ также является горизонтальным. Это означает, что ортогональное распределение инволютивно т.е оно вполне интегрируемо.Следовательно,распределение порождает слоение $F^{\perp}$.

В силу того,что $\pi : R^n \to B$- риманова субмерсия, слоение F является римановым [7].Напомним,что слоение F называется римановым, если каждая геодези- ческая, ортогональная в некоторой своей точке к слою слоения F, остается ортогональной ко всем слоям F во всех своих точках.Поэтому каждый слой слоения $F^{\perp}$ является вполне геодезическим подмногообразием.Вполне геодезическое $m-$ мерное подмногообразие R^n является $m-$ мерной плоскостью.

Пусть $q_0 \in B$, $L^{\perp}$ -слой слоения $F^{\perp}$, проходящий через точку $p \in \pi^{-1}(q_0)$. Рассмотрим для точки $q \in B$ кривую $\gamma : [0, 1] \to B$ соединящую точку q_0 с точкой $q \in B$. Существует единственное горизонтальное поднятие $\gamma^h : [0, 1] \to L^{\perp}$ кривой γ с началом в точке p, длина которой равна длине $\gamma : [0, 1] \to B$ [7]. Если точке q сопоставим точку $\gamma^h(1)$, то образ точки q не зависит от кривой γ. Поэтому мы получим корректно определенно отображение $\pi^{\perp} : B \to L^{\perp}$, которое является изометрией по определению. Это означает,что многообразие B изометрично R^m.Теорема доказана.

Пример. Приведем пример римановой субмерсии $\pi : R^n \to B$, где многообразие B является многообразием неотрицательной секционной кривизны,и следовательно, утверждение теоремы неверно.

На евклидовой плоскости R^2 с декартовыми координатами u, v векторные поля

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial u}, X_2 = \frac{\partial}{\partial v}, X_3 = -v\frac{\partial}{\partial u} + u\frac{\partial}{\partial v}.$$

Нетрудно проверить,что эти векторные поля являются полями Киллинга. Напомним, что векторное поле X на M называется векторным полем Киллинга, если однопараметрическая группа локальных преобразований $x \to X^t(x)$, порожденная полем X, состоит из изометрий [4].
.

Для точки $x \in M$ через $t \to X^t(x)$ обозначим интегральную кривую векторного поля X, проходящую через точку x при $t = 0$. Отображение $t \to X^t(x)$ определено в некоторой области $I(x) \subset R$, которая в общем случае зависит от поля X, и от начальной точки x. В дальнейшем, всюду в формулах вида $X^t(x)$ будем считать, что $t \in I(x)$.

Результаты работы [4] позволяет построить субмерсии на R^3 над плоскости R^2, помощью векторных полей X_1, X_2, X_3, полагая

$$\pi(t_1, t_2, t_3) = X_3^{t_3}(X_2^{t_2}((X_1^{t_1}(O)...))),$$

где $O-$ начало координат плоскости $R^2(u, v)$. Отображение π имеет вид

$$\pi(t_1, t_2, t_3) = \{f_1(t_1, t_2, t_3), f_2(t_1, t_2, t_3)\},$$

где

$$f_1(t_1, t_2, t_3) = t_1 cost_1 - t_2 sint_3,$$
$$f_2(t_1, t_2, t_3) = t_1 sint_1 + t_2 cost_3.$$

Нетрудно проверить.что ранг отображения равен двум, и поэтому оно является субмерсией.Эта субмерсия порождает одномерное слоение на R^3. Найдем касательный вектор слоя (кривой), который является вертикальным векторным полем. Вертикальное поле V находим из уравнений $V(f_1) = 0, V(f_2) = 0$, которое имеет вид: $V = \{-t_2, t_1, 1\}$.

Теперь введем такую риманову метрику g_* на R^2 что отображение $\pi : R^3 \to R^2$ будет римановой субмерсией. В силу того, вертикальное поле V является полем Киллинга, имеет место (см. [4])

$$Vg(Y, Z) = g([V, Y], Z) + g(Y, [V, Z]), (*)$$

где $Y, Z \in V(M)$, a $g(Y, Z)$-скалярное произведение векторных полей Y, Z.

Пусть Y, Z векторные поля на многообразии R^2, Y^h, Z^h- горизонтальные поднятия этих полей на R^3. Нетрудно проверить, что для вертикального поля V имеет место $[V, Y^h] = 0, [V, Z^h] = 0$. Поэтому из равенства (*) получим, что $Vg(Y^h, Z^h) = 0$ для вертикального поля V. Это означает,что $g(Y^h, Z^h)(p) = const$ для точек $p \in \pi^{-1}(q)$ при $q \in B$. Поэтому полагая $g_*(Y, Z)(q) = g(Y^h, Z^h)(p)$ определим риманову метрику g_* на R^2. Теперь по определению римановой метрики g_* отображение $\pi : R^3 \longrightarrow (R^2, g_*)$ является римановой субмерсией.

Ортогональное распределение $H : p \longrightarrow H(p)$ в каждой точке задаųтся горизонтальными векторными полями

$$Y = \frac{\partial}{\partial t_1} + t_2 \frac{\partial}{\partial t_3}, Z = \frac{\partial}{\partial t_2} - t_1 \frac{\partial}{\partial t_3}.$$

Рассмотрим векторные поля $Y_* = d\pi(Y), Z_* = d\pi(Z)$ на (R^2, g_*). В силу того, что отображение $\pi : R^3 \to R^2$ имеет максимальный ранг, векторные поля Y_*, Z_* линейно независимы в каждой точке многообразия R^2.

Вычислим секционную кривизну многообразия (R^2, g_*) в двумерном направлении, определенного векторами $Y_*(q), Z_*(q)$ в точке $q \in B$. По формуле О'Нейла, если (t_1, t_2, t_3)- декартовы координаты точки $p \in \pi^{-1}(q)$, то получим следующее выражение для кривизны

$$K_*(Y_*, Z_*)(q) = \frac{3}{(t_1^2 + t_2^2 + 1)^2}.$$

Таким образом, в этом случае многообразие (R^2, g_*) является двумерным многообразием строго положительной кривизны.

Литература

1. Ю.Д.Бураго, В.А.Залгаллер. *Введение в Риманову геометрию.* Санкт-Петербург. Наука. 1994г. 318 стр.

2. Нарманов А.Я., Саитова С. О геометрии орбит векторных полей Киллинга. Дифференциальные уравнения. 2014,том 50, №12,с.1582-1589.

3. Нарманов А.Я., Абдишукурова Г. О геометрии римановых субмерсий. Узбекский математический журнал. 2016,№2,с.

4. Нарманов А.Я., Норжигитов Ш. О геометрии многообразий неотрицательной кривизны. Узбекский математический журнал, 2014, №3,83-88

5. O'Neil B. The Fundamental equations of a submersions. Michigan Mathematical Journal, v.13, 1966, p. 459-469

6. Hermann R. A sufficient condition that a mapping of Riemannian manifolds to be a fiber bundle. Proc. Amer. Math. Soc.11 (1960), 236-242.

7. Reinhart B. L. Foliated manifolds with bundle-like metrics. Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 69, No. 1,1959, pp. 119-132

Национальный университет Узбекистана им.М.Улугбека

Uzbek Mathematical
Journal, 2016,№4, pp.101-105

УДК 517.98

Инъективность вещественной W*-алгебры $B(H)$

Нуриллаев М.Э., Рахимов А.А.

Maqolada inektiv haqiqiy W^*-algebralar o'rganilgan. Haqiqiy Gilbert fazosi H uchun haqiqiy W^*-algebra $B(H)$ ning inektiv bo'lishi isbotlandi.

In the paper injective real W*-algebras are investigated. It is proven that for real Hilbert space H the real W*-algebra $B(H)$ is injective.

1. Введение.

Известно, для алгебр фон Неймана понятие инъективности изучено достаточно хорошо. Полностью классифицированы все инъективные факторы. Показана, что все понятия близкие к инъективности, такие как E-свойство, гиперфинитность т.д., эквивалентны инъективности. Аналогичные результаты получены и для вещественных факторов. Однако, в вещественном случае под инъективностью всегда подразумевалось E-свойство. Поэтому вещественный фактор $B(H)$ автоматически становится инъективным, т.е. оно обладает E-свойством. С другой стороны, представляется интересным выяснить является ли инъективным вещественный фактор $B(H)$ в смысле морфизмов? В настоящей работе дан положительный ответ на этот вопрос. Именно, доказана, что вещественный $B(H)$ является инъективным в смысле морфизмов.

2. Предварительные сведения.

Пусть $B(H)$ - алгебра всех ограниченных линейных операторов, действующих в комплексном гильбертовом пространстве H. Напомним, что слабо замкнутая *-подалгебра $M \subset B(H)$ с единицей $\mathbb{1}$ называется W*-*алгеброй.* Вещественная *-подалгебра $R \subset B(H)$ с $\mathbb{1}$ называется *вещественной* W*-*алгеброй*, если она слабо замкнута и $R \cap iR = \{0\}$.

Пусть A - банахова *-алгебра над полем $\mathbb{C}$. Напомним, что алгебра A называется C*-*алгеброй*, если $\|aa^*\| = \|a\|^2$ для любого $a \in A$. Вещественная банахова *-алгебра R называется *вещественной* C*-*алгеброй*, если $\|aa^*\| = \|a\|^2$ и элемент $\mathbb{1} + aa^*$ обратим для любого $a \in R$. Это эквивалентно тому, что норму на R можно поднять на комплексификацию $A = R + iR$ алгебры R так, чтобы алгебра A являлась (комплексной) C*-алгеброй (см. [1, 5.2.11]). Обозначим через $M_n(A)$ алгебру $n \times n$ матриц над A, которая является C*-алгеброй, относительно обычных операций над матрицами. Положительное линейное отображение φ между C*-алгебр A и B называется *вполне положительным*, если отображение $\varphi_n : M_n(A) \to M_n(B)$, определяемое как $\varphi_n((a_{i,j})_{i,j=1}^n) = (\varphi(a_{i,j}))_{i,j=1}^n$, является положительным для всех n. Комплексная (или вещественная) W*-алгебра A называется *инъективной*, если для любой комплексной (соответственно, вещественной) C*-алгебры B с $\mathbb{1}$ и для каждого самосопряженного подпространства $S \subset B$, содержащего $\mathbb{1}$, всякое вполне положительное линейное отображение $\varphi : S \to A$ можно продолжить до вполне положительного линейного отображения $\overline{\varphi} : B \to A$.

3. Инъективность $B(H)$.

Ниже докажем вещественный аналог теоремы В.Ф.Стайнспринга.

Теорема 1. *Пусть R - вещественная C*-алгебра с единицей и H - вещественное гильбертово пространство. Тогда каждое вполне положительное отображение $\varphi : R \to B(H)$ имеет вид $\varphi(x) = V^*\pi(x)V$, где π - представление R на некотором вещественном гильбертовом пространстве K и V - ограниченный оператор из H в K.*

Доказательство. Пусть $\varphi : R \to B(H)$ - вполне положительное отображение. Рассмотрим тензорное произведение $R \otimes H$ и определим билинейную форму $< \cdot, \cdot >$ на $R \otimes H$ следующим образом: для $u = x_1 \otimes \xi_1 + x_2 \otimes \xi_2 + \ldots + x_m \otimes \xi_m$ и $v = y_1 \otimes \eta_1 + y_2 \otimes \eta_2 + \ldots + y_n \otimes \eta_n$ положим

$$< u, v >= \sum_{i,j} (\varphi(y_i^* x_j)\xi_j, \eta_i).$$

Тогда форма $< \cdot, \cdot >$ - положительно полу-определена. Для каждого $x \in R$, определим линейное преобразование $\pi_0(x)$ на $R \otimes H$, положив

$$\pi_0(x) : \sum x_j \otimes \xi_j \to \sum x x_j \otimes \xi_j.$$

Легко показать, что отображение π_0 является гомоморфизмом и имеет место $< u, \pi_0(x)v >=< \pi_0(x^*)u, v >$, для всех $u, v \in R \otimes H$. Кроме того, для фиксированного u, отображение ϱ, определяемое как $\varrho(x) =< \pi_0(x)u, u >$, является положительным линейным функционалом на R, т.е. $\varrho(x^*x) \geq 0$. Отсюда имеем

$$< \pi_0(x)u, \pi_0(x)u >=< \pi_0(x^*)\pi_0(x)u, u >=< \pi_0(x^*x)u, u >=$$

$$= \varrho(x^*x) \leq \|x^*x\|\varrho(e) = \|x\|^2 < u, u >.$$

Положим $F = \{u \in R \otimes H :< u, u >= 0\}$. Множество F является линейным подпространством $R \otimes H$ и инвариантным относительно $\pi_0(x)$ для каждого $x \in R$. Кроме того, равенство $< u + S, v + S >=< u, v >$ задает положительно определенное скалярное произведение на $(R \otimes H)/F$. Пусть K – пополнение фактор пространства $(R \otimes H)/F$. Очевидно, что K является вещественным гильбертовом пространством, и существует единственное представление π из R в $B(K)$ такое, что $\pi(x)(u + S) = \pi_0(x)u + S$, $x \in R$, $u \in R \otimes H$.

Определим линейное отображение $V : H \to K$ как: $V\xi = \mathbb{1} \otimes \xi + S$. Тогда $\|V\xi\|^2 = (\varphi(\mathbb{1})\xi, \xi) \leq \|\varphi(e)\| \cdot \|\xi\|^2$, т.е. V является ограниченным. По определению V имеем $\varphi(x) = V^*\pi(x)V$. Теорема доказана.

Пусть S - подпространство вещественной C*-алгебры R и пусть H - вещественное гильбертово пространство. Обозначим через $B(S, H)$ (соответственно через $B(R, H)$) векторное пространство всех ограниченных линейных операторов из S (соответственно из R) в $B(H)$. Заметим, что $B(S, H)$ является вещественным банаховым пространством, относительно естественной нормы. Определим топологию на $B(S, H)$ следующим образом. Для $a \in S$ и $l > 0$ пусть $B_l(S, H) = \{\varphi \in B(S, H) : \|\varphi(a)\| \leq l\|a\|\}$. Скажем, что сеть $\varphi_\nu \in B_l(S, H)$ *сходится* к $\varphi \in B_l(S, H)$, если для каждого $a \in S$, $\varphi_\nu(a) \to \varphi(a)$ в слабой операторной топологии. Выпуклое подмножество $U \subset B(S, H)$ называется *открытом*, если для каждого $l > 0$ множество $U \cap B_l(S, H)$ является открытым подмножеством $B_l(S, H)$. Выпуклые открытые множества порождают базу для хаусдорфовой топологии на $B(S, H)$, которую мы назовем BW-*топологией.* Легко показать, что линейный функционал f на $B(S, H)$ является BW-непрерывным, тогда и только тогда, когда сужение f на каждое $B_l(S, H)$ является непрерывным. Из линейности f, следует что f является BW-непрерывным, тогда и только тогда, когда сужение f на $B_1(S, H)$ является непрерывным.

Замечание. Для каждого $l > 0$, $B_l(S,H)$ является компактным относительно BW-топологии.

Обозначим через $CP(S,H)$ (соответственно через $CP(R,H)$) множество всех вполне положительных отображений из S (соответственно из R) в $B(H)$. Тогда $CP(S,H) \subset B(S,H)$, $CP(R,H) \subset B(R,H)$ и множества $CP(S,H)$, $CP(R,H)$ являются выпуклыми конусами. Кроме, того множество $CP(R,H)|_S$ (сужение всех отображений из $CP(R,H)$ на S) является подконусом $CP(S,H)$.

Лемма 1. $CP(R,H)|_S$ является замкнутым конусом в $B(S,H)$, относительно BW-топологии.

Доказательство. Пусть $\varphi \in CP(R,H)$. По теореме 1, φ имеет вид $\varphi(x) = V^*\pi(x)V$, где π - представление R на вещественном гильбертовом пространстве K, и V - ограниченный оператор из H в K. Тогда $\|\varphi\| \leq \|V^*\| \cdot \|V\| = \|V^*V\| = \|\varphi(\mathbb{1})\|$. Поскольку $\mathbb{1} \in S$, то $\|\varphi\| \leq \|\varphi|_S\|$. Обратное неравенство очевидно, следовательно $\|\varphi\| = \|\varphi|_S\|$.

Покажем, что подмножество $CP(R,H)$ является BW-замкнутым. Поскольку $CP(R,H)$ - выпукло, то оно замкнуто, тогда и только тогда, когда множество $CP(R,H) \cap B_l(R,H)$ - (относительно) замкнуто, для каждого $l > 0$. Пусть сеть $\varphi_\nu \subset CP(R,H)$ - ограниченна и $\varphi_\nu \to \varphi \in B(R,H)$. Тогда для каждого $x \in R$, $\varphi_\nu(x) \to \varphi(x)$ относительно слабо операторной топологии. Следовательно, φ является вполне положительным. В силу замечания, для каждого $l > 0$, подмножество $CP(R,H) \cap B_l(R,H)$ является BW-компактным. Так как отображение $\varphi \to \varphi|_S$ из множество $CP(R,H) \cap B_l(R,H)$ на $CP(R,H)|_S \cap B_l(S,H)$ является BW-непрерывным, то множество $CP(R,H)|_S \cap B_l(S,H)$ является компактным, а значит оно замкнуто. Поскольку $CP(R,H)|_S$ - выпукло, то оно BW-замкнуто. Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть f - произвольный BW-непрерывный линейный функционал такой, что

$$f(CP(R,H)|_S) \geq 0.$$

Тогда $f(\varphi) \geq 0$, для каждого $\varphi \in CP(S,H)$.

Доказательство леммы проводится аналогично доказательствам лемм 1.2.5 и 1.2.6 из [2].

Теорема 2. *Множество $CP(S,H)$ является подконусом $CP(R,H)|_S$.*

Доказательство теоремы следует из лемм 1 и 2, с использованием теоремы об отделимости.

Следствие. *Множество $CP(S,H)$ совпадает с множеством $CP(R,H)|_S$, т.е. $CP(R,H)|_S = CP(S,H)$.*

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 3. *Если H - вещественное гильбертово пространство, тогда вещественная W^*-алгебра $B(H)$ - инъективна.*

Доказательство. Пусть S - самосопряженное линейное подпространство вещественной C*-алгебры R, содержащее $\mathbb{1}$, и пусть $\varphi : S \to B(H)$ - вполне положительное отображение. Тогда $\varphi \in CP(S,H)$. По следствию получим $\varphi \in CP(R,H)|_S$, т.е. отображение φ имеет вполне положительное линейное продолжение на R. Следовательно, $B(H)$ - инъективна. Теорема доказана.

Литература

1. Li B.R. Real operator algebras. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. 2003, 241p.

2. Arveson W.B. Subalgebras of C*-algebras. Acta Math. 123 (1969), 141-224.

[1] Tashkent automobile and road construction institute. Tashkent, Uzbekistan, email:rakhimov@iam.uni-bonn.de

[2] Tashkent Institute of Textile and Light Industry. Tashkent, Uzbekistan, email:$nurillaev\_muzaffar$@mail.ru

Uzbek Mathematical
Journal, 2016,№4, pp.106-112

УДК 513.8

Классификация орбит векторных полей киллинга

Саитова С.С.

Maqolada evklid fazosidagi Killing vektor maydonlari oilasi hosil qilgan Killing vektor maydonlari Li algebrasining bazisining tuzilishiga ko'ra orbitaning geometriyasi aniqlangan.

In the paper a geometrical classification is obtained of the orbits of Killing vector fields when basis family of Lie algebra consists of irreducible Killing vector fields.

Геометрия векторных полей является одним из основных объектов в современной римановой геометрии. Изучению геометрии векторных полей посвящены многочисленные работы [1], [2]. Понятие векторного поля Киллинга возникло в связи с задачами физики и связано с именем немецкого математика W.Killing [7] В этой работе изучаются геометрическая классификация орбит векторных полей Киллинга.

Пусть M - гладкое многообразие размерности n, а $V(M)-$ множество всех гладких векторных полей на многообразии M. Множество $V(M)$ является линейным пространством над полем действительных чисел и является алгеброй Ли относительно скобки Ли векторных полей.

Для векторного поля $X \in D$ через $X^t(p)$ обозначим интегральную кривую векторного поля X, проходящую через точку $p \in M$ при $t = 0$. Отображение $t \to X^t(p)$ определено в некоторой области $I(x)$, которая в общем случае зависит не только от поля X , но и от начальной точки p. В дальнейшем всюду в формулах вида $X^t(x)$ будем считать, что $t \in I(x)$. В статье всюду под гладкостью понимается гладкость класса C^∞.

Пусть $D \subset V(M)-$семейство гладких векторных полей, заданных на многообразии M.

Определение 1. Орбита $L(p)$ семейства D векторных полей, проходящая через точку $p \in M$, определяется как множество таких точек q из M, для которых существуют действительные числа $t_1, t_2, \ldots, t_k$ и векторные поля $X_1, X_2, \ldots, X_k$ из D (где k произвольное натуральное число) такие, что

$$q = X_k^{t_k}(X_{k-1}^{t_{k-1}}(\dots(X_1^{t_1}(p))\dots)).$$

Ясно, что, если D состоит из одного векторного поля, орбита является гладкой кривой (одномерным многообразием).

Определение 2. Векторное поле X на римановом многообразии M называется векторным полем Киллинга, если однопараметрическая группа локальных преобразований (инфинитезимальные преобразования) $p \to X^t(p)$, порожденная полем X, состоит из изометрий многообразия M.

Отметим, что скобка Ли двух полей Киллинга дает опять поле Киллинга и линейная комбинация полей Киллинга над полем действительных чисел тоже является полем Киллинга. Поэтому множество всех векторных полей Киллинга на многообразии M, обозначаемое $K(M)$, образует алгебру Ли над полем действительных чисел. Кроме того известно, что алгебра Ли $K(M)$ векторных полей Киллинга связного риманова многообразия M имеет размерность не более чем $\frac{1}{2}n(n+1)$, где $n = \dim M$. Если $\dim K(M) = \frac{1}{2}n(n+1)$, то M есть многообразие постоянный кривизны ([3],стр.282).

Теперь предположим,что D состоит из векторных полей Килинга и через $A(D)$ обозначим наименьшую подалгебру Ли алгебры $K(M)$, содержащую множество D. Так как алгебра $K(M)$ конечномерна, то существуют такие векторные поля $X_1, X_2, ..., X_m$ из $A(D)$, что векторы $X_1(p), X_2(p), ..., X_m(p)$ образуют базис для подпространства $A_p(D)$ для каждого $p \in M$.

Пример. Рассмотрим на двумерной евклидовой плоскости R^2 с декартовыми координатами x, y векторные поля $X_1 = \frac{\partial}{\partial x}$, $X_2 = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}$. Для произвольной точки p преобразования р $\to X^t(p)$ первого векторного поля являются параллельными переносами по направлениям оси Ox, а для второго поля - вращениями вокруг начала координат.

Определение 3. Векторное поле Киллинга называется неприводимым, если оно не может быть выражено через линейную комбинацию каких-либо векторных полей Киллинга над полем действительных чисел.

Замечание 1. Неприводимое векторное поле Киллинга является либо параллельным переносом вдоль координатных осей, либо вращением вокруг $(n-2)-$ мерных координатных подпространств в R^n.

Пусть $D-$ семейство состоящее из векторных полей Киллинга в R^n. $A(D)-$ минимальная подалгебра Ли алгебры $K(M)$, содержащую D, а семейство $B(D) = \{X_1, X_2, ..., X_m\}$ образуют базис подалгебры $A(D)$.

В [4] доказана следующая теорема, которая показывает, что каждая точка из орбиты $L(p)$ достижима из p с помощью конечного числа "переключений"с использованием векторных полей $X_1, X_2, ..., X_m$ в определенном порядке.

Теорема 1. Множество точек вида $y = X_m^{t_m}(X_{m-1}^{t_{m-1}}...(X_1^{t_1}(p)...))$, где $(t_1, t_2, ..., t_m) \in R^m$, совпадает с орбитой $L(p)$.

Кроме того из результатов работы [4] следует, что в каждой точке q орбиты $L(p)$ подпространство, порожденное векторами $X_1(q), X_2(q), ..., X_m(q)$ совпадает с касательным пространством орбиты в этой точке. Это означает, что для каждой точки q среди векторов $X_1(q), X_2(q), ..., X_m(q)$ существуют векторы $Y_1(q), Y_2(q), ..., Y_k(q)$, которые линейно независимы в точке q, где $k = dimL(p)$.

Докажем теорему о геометрии орбит векторных полей Киллинга в евклидовом пространстве при предположении, что семейство $B(D)$ состоит из неприводимых вращений и переносов.

Теорема 2. Пусть в R^n задано семейство D векторных полей Киллинга, а базисное семейство состоит из m неприводимых векторных полей. Тогда орбиты орбита L_p произвольной точки $p \in R^n$ является одним из следующих подмногообразий:

1. $k-$ мерной плоскостью,где $0 \leq k \leq min(m, n)$;
2. $k-$мерным тором $T^k = S^1 \times S^1 \times \cdots \times S^1$, где $1 \leq k \leq min(m, [\frac{n}{2}])$;
3. $k-$мерной сферой S^k, где $0 \leq k \leq min(m, n-1)$;
4. $k-$мерным торическим цилиндром $T^{k_1} \times R^{k_2}$, где $k = k_1 + k_2$ и $k_2 \leq k \leq min(m, [\frac{n}{2}])$;
5. $k-$мерным сферическим цилиндром $S^{k_1} \times R^{k_2}$, где $k = k_1 + k_2$ и $k_2 \leq k \leq min(m, n-1)$.
6. $k-$мерным подмногообразием вида $L(p) = T^{j_1} \times R^{j_2} \times S^{k-j}$, где $0 \leq j_1 + j_2 = j$.

Доказательство теоремы. Для векторного поля $X \in B(D)$ через N_X обозначим множество неподвижных точек, т.е. $N_X = \{p : X(p) = 0\}$. Известно, что для векторных полей Киллинга, множество N_X является подпространством четной коразмерности [8]. Ортогональное дополнение $N_X^{\perp}$ является инвариантным подпространством векторного поля X, как и само множество N_X. В случае переносов множества неподвижных точек пусто, а инвариантное подпространство состоит из параллельных прямых. Из этих инвариантных прямых только одна содержит начало координат, т.е. в этом случае они представляют собой соответствующие координатные оси.

Мы в дальнейшем рассмотрим только инвариантные подпространства, которые содержит начало координат. В случае, неприводимых вращений множество неподвижных точек представляет собой $n-2$ -мерные координатные подпространства, а инвариантного подпространства представляют собой соответствующие 2-мерные координатные плоскости.

Рассмотрим несколько случаев. Предположим, что размерность орбиты равна k.

A) Ясно,что если состоит $B(D)$ только из переносов, то орбита является $k-$ мерной плоскостью.

B) Рассмотрим случай, когда $B(D)$ состоит только из коммутирующих вращений.

Пусть $B(D) = \{X_1, X_2, \ldots, X_m\}$, и через $N_1, N_2, \ldots, N_m-$ обозначим подпространство неподвижных точек полей, а через $N_1^{\perp}, N_2^{\perp}, \ldots, N_m^{\perp}-$ их соответствующее ортогональное дополнения, т.е. инвариантные подпространства. Так как векторные поля из $B(D)$ коммутируют, то мы имеем следующее разложение евклидова пространства: $R^n = N_1^{\perp} \bigoplus N_2^{\perp} \bigoplus \ldots \bigoplus N_k^{\perp} \bigoplus N^{\perp}$, где $N^{\perp} = \bigcap N_i$. Произвольную точку $p \in R^n$ представим в виде: $p = (p_1, p_2, \ldots p_k, p_{k+1})$, где $p_i \in N_i^{\perp}-$ортогональная проекция точки $p \in R^n$ на $N_i^{\perp}$, $i = 1, 2, \ldots k$, а $p_{k+1} \in N^{\perp}$ ортогональная проекция точки $p \in R^n$ на $N^{\perp}$. Так как поток каждого векторного поля "сдвигает"свою составляющую, и не меняет другие, мы получим,что имеет место следующее равенство

$$X_1^{t_1}(X_2^{t_2}(\ldots X_k^{t_k}(p))) = (X_1^{t_1}(p_1), X_2^{t_2}(p_2), \ldots, X_k^{t_k}(p_k), p_{k+1}).$$

Как следствие, орбита семейства векторных полей D является множеством вида $L(p) = L(p_1) \times L(p_2) \times \ldots \times L(p_k) \times p_{k+1}$, так как $X_i^{t_i}(p_{k+1}) = p_{k+1}$. Так как $B(D)$ состоит только из вращений, то каждая составляющая описывает некоторую окружность, и следовательно, орбита точки $p \in R^n$ представляет собой $k-$ мерный тор $L(p) = S^1 \times S^1 \times \ldots \times S^1 = T^k$. Причем, размерность орбиты k в этом случае, не превышает $\frac{n}{2}$, так как нет возможности задать большее количество коммутирующих неприводимых вращений. Если $B(D)$ состоит из коммутирующих вращений и переносов, то орбита точки $p \in R^n$ представляет собой торический цилиндр $L(p) = S^1 \times S^1 \times \ldots \times S^1 \times R^1 \ldots \times R^1 = T^{j_1} \times R^{j_2}$, где $k = j_1 + j_2$, а j_1, j_2- количество вращений и переносов, соответственно.

C) Для изложения следующего случая, предположим, что в $B(D)$ имеются как коммутирующие (j_1 вращений и j_2 переносов, $j = j_1 + j_2$), так и не коммутирующие вращения, тогда точку $p \in R^n$ представим в виде $j+1$ проекции этой точки на инвариантные подпространства вращений или/и переносов коммутирующих со всеми из $B(D)$ в выбранном порядке, а последняя проекция будет общей для всех остальных не коммутирующих вращений: $p = (p_1, p_2, \ldots p_j, p_{j+1})$.

И вновь, при воздействии первых j_1 вращений или j_2 переносов каждая соответствующая ортогональная проекция точки, кроме последней, описывает некоторую окружность (прямую), а последняя будет принадлежать некой сфере размерности $k-j$, где $k-$ размерность орбиты в точке $p \in R^n$. (См.ниже) Тогда орбиты заданного семейства представляют собой подмногообразия вида: $L(p) = T^{j_1} \times R^{j_2} \times S^{k-j}$, где $0 \leq j_1 + j_2 = j$.

D) Рассмотрим случай, когда $B(D)$ состоит из не коммутирующих вращений. Предположим,что в каждой точке векторы образуют $k-$мерное подпространство в касательном пространстве. Так как векторные поля не коммутируют, имеем $dim(N_i^{\perp} \bigcap N_j^{\perp}) = 1$, и по методу математической индукции получим что, $dim(\sum_{i=1}^{i=k} N_i^{\perp}) = k+1$. Так как начало координат неподвижно, а потоки векторных полей состоят из движений, то все точки орбиты принадлежат сечению сферы S^{n-1} инвариантным подпространством $\sum_{i=1}^{i=k} N_i^{\perp} \cong R^{k+1}$. Т.е все точки орбиты принадлежит некоторой $k-$мерной сфере соответствующего радиуса с центром в начале координат. Известно, что орбита векторных полей Киллинга в евклидовом пространстве является замкнутым подмножеством [4]. Следовательно, она замкнута в $k-$ мерной сфере S^k. Покажем,что она является открытом подмножеством в S^k.

Пусть $q \in L_p$, и

$$q = X_m^{t_m}(X_{m-1}^{t_{m-1}}(\ldots(X_1^{t_1}(p))\ldots)).$$

В силу того, что векторные поля $X_1, X_2, \ldots, X_m\}$ линейно независимы, то ранг отображения

$$f : (t_1, t_2, \ldots, t_m) \to X_m^{t_m}(X_{m-1}^{t_{m-1}}(\ldots(X_1^{t_1}(p))\ldots))$$

равен k в каждой точке области определения. Поэтому по теореме о локально плоском отображении существует такая мерная окрестность U точки p , на которой отображение f является диффеоморфизмом ([5], стр 213). Поэтому образ $f(U)$ является окрестностью точки q в L_p. Следовательно, орбита одновременно является открытым и замкнутым подмножеством сферы, и в силу связности сферы,совпадает со сферой.

E) Рассмотрим случай, когда $B(D)$ содержит не коммутирующие векторные поля типа вращений, векторные поля типа переносов, не коммутирующие со всеми вращениями. Как следствие из вышеизложенных случаев вытекает что,орбиты некоммутирующих неприводимых вращений являются гиперсферами в подпространстве $\sum_{i=1}^{i=k} N_i^{\perp}$, определенного радиуса, зависящего от исходной точки. Так как векторные поля типа переносов,не коммутируют с вращениями,как вытекает из теоремы [6], инвариантные пространства переносов являются подпространствами инвариантного пространства всех вращений $\sum_{i=1}^{i=k} N_i^{\perp}$. Тогда за счет переносов в этом инвариантном пространстве мы получаем сферы сколь угодно большого/малого радиуса. Следовательно, орбитой является инвариантное подпространство $\sum_{i=1}^{i=k} N_i^{\perp}$.**Теорема доказана.**

Замечание. В общем случае, когда базисное семейство $B(D)$ состоит необязательно из неприводымих векторных полей, классификация орбит является более сложной задачей. Полная классификация орбит для векторных полей Киллинга в трехмерном евклидовом пространстве получена в работе [1]

Примеры.

1. Рассмотрим орбиты семейства векторных полей из примера 1. На плоскости R^2 с декартовыми координатами x, y, заданы неприводимые и некоммутирующие вращение и перенос: $X(x,y) = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$ и $Y(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}$, скобка Ли этих векторных полей имеет вид $Z = [X,Y], Z(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}$. В этом случае орбита произвольной точки совпадает с плоскостью(Случай E).

2. В четырехмерном пространстве R^4, с декартовыми координатами x, y, z, w, рассмотрим неприводимые векторные поля $X_1 = \{-y, x, 0, 0\}$ и $X_2 = \{0, 0, -w, z\}$. Очевидно, что они коммутируют. А орбита точки $p \in R^4$ представляет собой или точку $L(p) = O(0,0,0,0)$, если $p = O$, или окружность $L(p) = S^1$, если $p \in Oxy(Ozw)$, или двумерный тор $L(p) = S^1 \times S^1$ в другом случае (случай B) .

3. В R^5 с декартовыми координатами x, y, z, w, s, рассмотрим неприводимые векторные поля $X_1 = \{-y, x, 0, 0, 0\}$, $X_2 = \{0, 0, -w, z, 0\}$, $X_3 = \{0, 0, 0, 0, 1\}$. Очевидно, что они коммутируют. А орбита точки $p \in R^4$ представляет собой или $L(p) = Os$, если $p = O$ или $L(p) = S^1 \times R^1$, если $p \in Oxy(Ozw)$ или $L(p) = S^1 \times S^1 \times R^1$, в противном случае (Случай D).

4. В R^4, с декартовыми координатми x, y, z, w, рассмотрим неприводимые векторные поля $X_1 = \{-y, x, 0, 0\}$, $X_2 = \{-z, 0, x, 0\}$, $X_3 =$

$\{0,0,0,1\}$. Очевидно, что они некоммутируют. А орбита точки $p \in R^4$ по теореме представляет собой или $L(p) = Ow$, если $p \in Ow$ или $L(p) = S^2 \times R^1$, в противном случае (Случай С).

5. В $R^3(x, y, z)$, рассмотрим семейство D состоящее из двух неприводимых векторных полей Киллинга, точнее из двух вращений:$X = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$ и $Y = -z\frac{\partial}{\partial y} + y\frac{\partial}{\partial z}$.

В этом случае $B(D)$ состоит из трех неприводимых векторных полей Киллинга, и по теореме орбиты либо точка (начало координат - общая неподвижная точка), либо концентрические сферы с центром в начале координат (случай D).

Литература

1. Аслонов Ж.О. Геометрия орбит векторных полей Киллинга.// Узбекский математический журнал, Ташкент, 2011, - №3, - с. 129-135

2. Берестовский В.Н., Никифоров Ю.Г. Киллинговы векторные поля постоянной длины на римановых многообразиях. // Сиб. Мат.журнал, 2008, том 49, №3, стр 497-514

3. Ш. Кобаяси, К. Номидзу Оновы дифференцияальной геометриии, Т1, М.:Наука, 1984, 344 стр

4. Нарманов А.Я.,Саитова С. О геометрии орбит векторных полей Киллинга. // Дифференциальные уравнения. 2014, том 50, №12,с.1582-1589.

5. М.М. Постников Гладкие многообразия, М., Наука, 1987, 480 стр.

6. Саитова С.С Коммутирующие векторные поля Киллинга. // УзМАТ Журнал, 3, 2013,

7. Killing W. Über die Grundlagen der Geometrie // J. Reine Angew. Math. 1892. Bd 109. S. 121-186.

8. Kobayashi S. Fixed points of isometries. // Nagoya Math. J. 1958, 13, 63-68 12.

Национальный университет Узбекистана
им. М.Улугбека

Uzbek Mathematical
Journal, 2016,№4, pp.113-118

УДК 517.98

Описание конечномерных вещественных сильно гранево симметричных пространств

Сейпуллаев Ж.Х.

Bu ishda JP xossasiga ega bo‘lgan chekli o‘lchamli haqiqiy kuchli tomoniy simmetrik fazoning gilbert fazolari yig‘indisi ko‘rinishida tasvirlanishi isbotlangan.

In this paper we prove that a finite dimensional real strongly facially symmetric space with the property JP can be represented as a sum of hilbertian spaces.

0. Введение. В середине 80-х годов прошлого века Я.Фридман и Б.Руссо [1, 2] начали изучать гранево симметричные пространства. Ими было доказано, что предсопряженное пространство комплексных алгебры фон Неймана, или более общее JBW*-троек является нейтральным SFS-пространством (см. [3]). Проект классификации SFS-пространств был начат в работе [4], где были даны геометрическая характеризация гильбертовых пространств и комплексных спин факторов.

Одним из важных понятий в SFS-пространствах является понятие ранга пространства, введенное в работе [5]. В работе [6] было дано описание единичного шара n-мерного вещественного SFS-пространства ранга n, а в работе [7] было получено описание единичного шара рефлексивного SFS-пространства ранга 1. Вопрос о характеризации SFS-пространств относительно ранга остается открытым до сих пор. Настоящая работа посвящена описание конечномерных вещественных SFS-пространств.

1. Предварительные сведения. Пусть Z — вещественное или комплексное нормированное пространство. Элементы $f, g \in Z$ называются *ортогональными,* обозначение $f\diamondsuit g$, если $\|f+g\| = \|f-g\| = \|f\| + \|g\|$. Подмножества $S, T \subset Z$ называются *ортогональными,* обозначение $(S\diamondsuit T)$, если $f\diamondsuit g$ для всех $(f,g) \in S \times T$. Для подмножества S пространства Z положим $S^{\diamondsuit} = \{f \in Z : f\diamondsuit g, \forall g \in S\}$ и назовем $S^{\diamondsuit}$ *ортогональным дополнением* к S. Грань F единичного шара

$Z_1 = \{f \in Z : \|f\| \leq 1\}$ называется *выставленной по норме,* если $F = F_u = \{f \in Z : u(f) = 1\}$ для некоторого $u \in Z^*$ с $\|u\| = 1$. Элемент $u \in Z^*$ называется *проективной единицей,* если $\|u\| = 1$ и $u(g) = 0$ при всех $g \in F_u^\diamondsuit$ (см. [1]).

Выставленная по норме грань F_u из Z_1 называется *симметричной гранью,* если существует линейная изометрия S_u из Z на Z такая, что $S_u^2 = I$, и множество неподвижных точек которой в точности совпадает с топологической прямой суммой замыкания $\overline{sp}F_u$ линейной оболочки грани F_u и ее ортогонального дополнения $F_u^\diamond$.

Пространство Z называется *слабо гранево симметричным пространством* (WFS-пространством), если каждая выставленная по норме грань из Z_1 — симметрична (см. [1]).

Для каждой симметричной грани F_u определяются сжимающие проекторы $P_k(F_u)$, $k = 0, 1, 2$ на Z следующим образом: Во-первых $P_1(F_u) = (I - S_u)/2$ является проектором на собственное подпространство соответствующий собственному значению -1 симметрии S_u. Далее определим $P_2(F_u)$ и $P_0(F_u)$ как проекторы из Z на $\overline{sp}F_u$ и $F_u^\diamondsuit$, соответственно, т.е. $P_2(F_u)+P_0(F_u) = (I+S_u)/2$. Проекторы $P_k(F_u)$ называются *геометрическими Пирсовскими проекторами.*

Проективная единица u из Z^* называется *геометрическим трипотентом,* если F_u является симметричной гранью и $S_u^* u = u$ для симметрии S_u соответствующей к F_u. Через $\mathcal{GT}$ и $\mathcal{SF}$ обозначим множество всех геометрических трипотентов и симметричных граней соответственно, и соответствие $\mathcal{GT} \ni u \mapsto F_u \in \mathcal{SF}$ является биективным (см. [2, предложение 1.6]). Для каждого геометрического трипотента u из сопряженного WFS-пространства Z, мы обозначим Пирсовские проекторы через $P_k(u) = P_k(F_u), k = 0, 1, 2$. Далее $U = Z^*, Z_k(u) = Z_k(F_u) = P_k(u)Z$ и $U_k(u) = U_k(F_u) = P_k(u)^*(U)$, и следовательно имеет место разложение Пирса $Z = Z_2(u) + Z_1(u) + Z_0(u)$ и $U = U_2(u) + U_1(u) + U_0(u)$. Трипотенты u и v называются *ортогональными,* если $u \in U_0(v)$ (которое влечет $v \in U_0(u)$) или эквивалентно $u \pm v \in \mathcal{GT}$ (см. [1, лемма 2.5]). Более общо, элементы a и b из U называются *ортогональными,* если один из них принадлежит $U_2(u)$ и другой принадлежит $U_0(u)$ для некоторого геометрического трипотента u.

Сжимающий проектор Q на Z называется *нейтральным,* если для каждого $f \in Z$ равенство $\|Qf\| = \|f\|$ влечет $Qf = f$. Пространство Z называется *нейтральным,* если для каждой симметричной граньи F_u, проектор $P_2(u)$, соответствующий симметрии S_u, является нейтральным.

WFS-пространство Z называется *сильно гранево симметричным пространством* (SFS-пространством), если для каждой выставленной по норме грани F_u из Z_1 и каждого $x \in Z^*$ с $\|x\| = 1$ и $F_u \subset F_x$, мы имеем $S_u^* x = x$, где S_u – симметрия, соответствующая F_u (см. [1]).

В нейтральном SFS-пространстве Z, каждый ненулевой элемент допускает *полярное разложение*(см. [2, теорема 4.3]): для $0 \neq f \in Z$ существует единственный геометрический трипотент $v = v_f$ с $v(f) = \|f\|$ и $\langle v, f^\diamond \rangle = 0$. Если $f, g \in Z$, то $f \diamond g$ в том и только в том случае, когда $v_f \diamond v_g$ (см. [1, следствие 1.3(б) и лемма 2.1]).

2. Основной результат. Говорят, что SFS-пространство обладает свойством JP, если для любой пары u и v взаимно ортогональных геметрических трипотентов выполняется равенство $S_u S_v = S_{u+v}$.

SFS-пространство Z называется *пространством ранга* n, если всякое семейство взаимно ортогональных геометрических трипотентов имеет мощность не более n, и существует по крайней мере одно семейство взаимно ортогональных геометрических трипотентов содержащее ровно n элементов (обозначение $rankZ = n$) (см. [5]).

Следующая теорема дает описание конечномерных вещественных нейтральных SFS-пространств.

Теорема 1. Пусть Z – конечномерное вещественное нейтральное сильно гранево симметричное пространство со свойством JP. Тогда

$$Z \cong \bigoplus_{k=1}^{n} H_k,$$

где H_k – гильбертово пространство, $k \in \overline{1,n}$ и $n = rankZ$.

Для доказательства теоремы нам понадобиться несколько лемм.

Лемма 2. Пусть $u \diamond v$, где $u, v \in \mathcal{GT}$. Тогда

а) $F_{u+v} = F_u \oplus_c F_v$;

б) $P_2(u+v) = P_2(u) + P_2(v)$;

в) $P_1(u)P_1(v) = 0$.

Доказательство. а) Пусть $u \diamond v$, $u, v \in \mathcal{GT}$. Тогда в силу [1, лемма 2.1] вытекает, что $F_u, F_v \subset F_{u+v}$ и $F_u \diamond F_v$. Поэтому учитывая, что в конечномерном SFS-пространстве Z всякая грань является симплексом (см. [8, предложение 1]), то получим $F_u \oplus_c F_v \subset F_{u+v}$ и $F_u \oplus_c F_v$ является симметричной гранью. Тогда в силу [1, лемма 2.7] следует, что $F_u \oplus_c F_v = F_{u+v}$, либо $(F_u \oplus_c F_v)^\diamond \cap F_{u+v} \neq \emptyset$.

Пусть $0 \neq f \in (F_u \oplus_c F_v)^\diamond \cap F_{u+v}$. Тогда $f \in F_u^\diamond$, $f \in F_v^\diamond$ и $f \in F_u^\diamond \cap F_v^\diamond$. Поэтому и $F_u^\diamond \cap F_v^\diamond = F_{u+v}^\diamond$ (см. [2, лемма 1.8]) вытекает, что $f \in F_{u+v}^\diamond$.

Это противоречит тому, что $f \in F_{u+v}$. Значит, $F_{u+v} = F_u \oplus_c F_v$.

Так как Z – конечномерное SFS-пространство, то из а) следует б).

в) Пусть $u \diamond v$, $u, v \in \mathcal{GT}$. Тогда в силу [5, замечание 4.2] следует, что

$$P_2(u+v) = P_2(u) + P_2(v) + P_1(u)P_1(v).$$

С другой стороны из б) имеем

$$P_2(u+v) = P_2(u) + P_2(v).$$

Значит,

$$P_1(u)P_1(v) = 0.$$

Лемма доказана.

Лемма 3. Для всякого $u \in \mathcal{GT}$, имеет место $Z_1(u) \diamond Z_0(u)$.

Доказательство. Пусть $f \in Z_1(u)$ и $g \in Z_0(u)$, то в силу [4, следствие 2.2] следует, что $v_f \in U_1(u)$ и $v_g \in U_0(u)$. Тогда в силу [2, следствие 3.4] вытекает, что $P_2(v_g)^* P_1(u)^* = 0$, и в силу леммы 2 в) имеем $P_1(v_g)^* P_1(u)^* = 0$. Используя эти соотношения получим

$$v_f = P_1(u)^* v_f = [P_2(v_g)^* + P_1(v_g)^* + P_0(v_g)^*] P_1(u)^* v_f =$$

$$= P_2(v_g)^* P_1(u)^* v_f + P_1(v_g)^* P_1(u)^* v_f + P_0(v_g)^* P_1(u)^* v_f =$$

$$= P_0(v_g)^* P_1(u)^* v_f = P_0(v_g)^* v_f.$$

Отсюда $v_f \in U_0(v_g)$, и поэтому по определению ортогональности геометрических трипотентов имеем, что $v_f \diamond v_g$. Следовательно, $f \diamond g$. Это означает, что $Z_1(u) \diamond Z_0(u)$. Лемма доказана.

Напомним, что геометрический трипотент u называется максимальным, если $P_0(u) = 0$.

Замечание. Пусть $u, v \in \mathcal{GT}$ и $u \diamond v$. Если $u + v$ является максимальным, то

$$P_0(u)P_0(v) = 0.$$

Лемма 4. Пусть $u, v \in \mathcal{GT}$ и $u \diamond v$. Если $u+v$ является максимальным, тогда

а) $Z_0(u) \diamond Z_0(v)$;

б) $Z = Z_0(u) \oplus Z_0(v)$.

Доказательство. а) Пусть $f \in Z_0(u)$. Тогда

$$f = [P_2(v) + P_1(v) + P_0(v)] P_0(u) f =$$

$$= P_2(v)P_0(u)f + P_1(v)P_0(u)f + P_0(v)P_0(u)f = P_2(v)f + P_1(v)f.$$

В силу [2, предложение 1.5] вытекает, что $P_2(v)f \diamond Z_0(v)$, и из леммы 3 имеем, что $P_1(v)f \diamond Z_0(v)$. Значит, $(P_2(v)f + P_1(v)f) \diamond Z_0(v)$. Это означает, что $f \diamond Z_0(v)$, т.е.

$$Z_0(u) \diamond Z_0(v).$$

б) Так как $(Z_2(u)+Z_1(u)) \diamond Z_0(u)$, $(Z_2(v)+Z_1(v)) \diamond Z_0(v)$ и $Z_0(u) \diamond Z_0(v)$, то Пирсовское разложение можно переписать как

$$Z = Z_0(u) \oplus Z_0(v).$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы. В случае когда $dimZ = 2$ и $dimZ = 3$, то утверждение теоремы вытекают из [9, предложение 1 и теорема 2].

Предположим, что утверждение теоремы верно, когда $\dim Z < m$. Пусть $\dim Z = m$ и $\operatorname{rank} Z = n$. Тогда по определению ранга пространства существует максимальное семейство взаимно ортогональных геометрических трипотентов $u_1, u_2, ..., u_n$, и в силу [1, лемма 2.5] вытекает, что $u_1 + u_2 + ... + u_n$ является максимальным геометрическим трипотентом. Тогда в силу леммы 4 следует, что

$$Z = Z_0(u) \oplus Z_0(v), \ \ Z_0(u) \diamond Z_0(v), \qquad (1)$$

где $u = u_1, v = u_2 + ... + u_n$.

В силу [2, предложение 4.1] подпространства $Z_0(u)$ и $Z_0(v)$ являются нейтральными SFS-пространствами. Следовательно, для пространств $Z_0(u)$ и $Z_0(v)$ выполняется утверждение теоремы. Отсюда и в силу равенств (1) для пространство Z выполняется утверждение теоремы. Теорема доказана.

Следствие 5. Если Z – конечномерное вещественное нейтральное SFS-пространство, то Z обладает свойством чистого состояния, т.е.

а) каждая экстремальная точка из Z_1 является выставленной по норме;

б) для любой пары экстремальных точек f и g из Z_1 выполняется равенство $\langle f, v_g \rangle = \langle g, v_f \rangle$;

в) для каждого $u \in \mathcal{GT}$ и каждой экстремальной точки $f \in Z_1$ существуют $\alpha \in \mathbb{R}$ и экстремальная точка $h \in Z_1$ такие, что $P_2(u)f = \alpha h$.

Литература

1. Friedman Y. and Russo B. A geometric spectral theorem // Quart. J. Math. Oxford. 1986. №2 (37). P. 263-277.

2. Friedman Y. and Russo B. Affine structure of facially symmetric spaces // Math. Proc. Camb. Philos. Soc. 1989. №1 (106). P. 107-124.

3. Friedman Y. and Russo B. Some affine geometric aspects of operator algebras // Pac. J. Math. 1989. №1 (137). P. 123-144.

4. Friedman Y. and Russo B. Geometry of the dual ball of the spin factor // Proc. Lon. Math. Soc. 1992. №3 (65). P. 142-174.

5. Friedman Y. and Russo B. Classification of atomic facially symmetric spaces // Canad. J. Math. 1993. №1 (45). P. 33-87.

6. Ибрагимов М.М., Сейпуллаев Ж.Х. Геометрические свойства единичного шара SFS-пространства конечного ранга // Узб. матем. журн. 2005. №2. С. 10-19.

7. Сейпуллаев Ж.Х. Геометрическая характеризация гильбертовых пространств // Узб. матем. журн. 2008. №2. С. 107-112.

8. Ибрагимов М.М., Сейпуллаев Ж.Х. Описание n-мерных вещественных сильно гранево симметричных пространств ранга n-1 // Узб. матем. журн. 2015. №4. С. 39-46.

9. Ибрагимов М.М., Сейпуллаев Ж.Х. Описание единичных шаров гранево симметричных пространств малых размерности // Вестник КГУ. 2009. №2. С. 3-5.

Институт математики при Национальном
Университете Узбекистана

Uzbek Mathematical
Journal, 2016, №4, pp. 119-129

УДК 517.956

Задача со свободной границей для систем квазилинейных параболических уравнений

Тахиров Ж.О., Расулов М.С.

Ushbu maqolada kvazichiziqli parabolik tenglamalar sistemasi uchun noma'lum chegarali masala qaraladi. Chegaraviy shartlar nolokal formada berilgan. Masala yechimi va noma'lum chegara uchun aprior baholar o'rnatilgan. Olingan aprior baholar asosida mavjudlik va yagonalik teoremalari isbotlangan.

In this work we investigate a free boundary problem with nonlocal boundary condition for the quasi-linear parabolic system. For the solutions of the problem apriori estimates are established. On the base of apriori estimations the existence and uniqueness of theorems are proved.

1. Введение Статья посвящена исследованию задач со свободной границей для систем квазилинейных параболических уравнений реакции-диффузии, которая описывает процесс заживания раны.

Модель была предложена и исследована в работе [1].

Аналогичная модель в областях с фиксированными границами предложена в работе [2].

2. Постановка задачи Требуется найти функции $(s(t), u(t,x), v(t,x)$, удовлетворяющие условиям

$$u_t = (a_1(u,v)u_x)_x + f_1(u,v), D = \{(t,x) : 0 < t \leq T, 0 < x < s(t)\}, \quad (2.1)$$

$$v_t = (a_2(u,v)v_x)_x + f_2(u,v), Q = \{(t,x) : 0 < t \leq T, 0 < x < l\}, \quad (2.2)$$

$$u(0,x) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq s_0 = s(0) < l, \quad (2.3)$$

$$v(0,x) = v_0(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (2.4)$$

$$u_x(t,0) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.5)$$

$$v(t,0) = m_1 v(t,x_1), \quad 0 \leq t \leq T, \ 0 \leq x_1 < x_2 < l, \quad (2.6)$$

$$v(t,l) = m_2 v(t,x_2), \quad 0 \leq t \leq T, \ 0 < x_1 < x_2 < l, \quad (2.7)$$

$$u(t,s(t))=0, \quad 0\le t\le T, \tag{2.8}$$

$$u(t,x)=0, \quad s(t)\le x\le l, \tag{2.9}$$

$$\dot{s}(t)=-a_1(0,v)u_x(t,s(t)), \quad 0\le t\le T, \tag{2.10}$$

где $x=s(t)$ - свободная (неизвестная) граница, которая представляет фронт распространения раны и определяется вместе с функциями $u(t,x)$, $v(t,x)$.

Относительно данных задачи предполагаются выполненными следующие условия:

a) $a_i(u,v)\ge a_{i0}>0$, $a_{i0}, m_i, x_i - const, 0<m_i<1$, $i=1,2$;

b) Для $0\le u(t,x)\le M_1$, $0\le v(t,x)\le M_2$ определим множество

$$\Omega=\left\{(u,v): 0\le u(t,x)\le M_1,\, 0\le v(t,x)\le M_2\right\},$$

причем $0<M_2\le M_1$, $a_i(u,v)\in C^{1+\alpha}(Q)$, $0<\alpha<1$, $a_{iu}(u,v)\le 0$, $f_{iu}(u,v)\le 0$, $f_{1u}(u,v)\le 0$;

c) $f_1(u,v)\in C^{1+\alpha}(\Omega)$;

$f_1(u,v)>0$ если $u(t,x)\le 0$,

$f_1(u,v)\le 0$ если $u(t,x)\ge M_1$ при любом $v(t,x)$;

d) $f_2(u,v)\in C^{1+\alpha}(\Omega)$,

$f_2(u,v)\ge 0$ если $v(t,x)\le 0$,

$f_2(u,v)\le 0$ если $u(t,x)\ge M_2$ при любом $u(t,x)$;

e) $u_0(x)\in C^{2+\alpha}$, $0<u_0(x)<M_1$, $0\le x\le s_0$,

$u_0'(0)=0$, $u_0(s_0)=0$, $u_0'(s_0)<0$,

$v_0(x)\in C^{2+\alpha}[0,l]$, $0\le v_0(x)\le M_2$.

Задача (2.1)-(2.10) исследована в работе [1] в случае $a_2(u,v)\equiv 1$, а вместо нелокальных условий (2.6), (2.7) заданы однородные условия второго рода.

Здесь и в дальнейшем через M_i обозначим константы, зависящие от данных задачи.

3. Априорные оценки.

В этом разделе установим некоторые априорные оценки шаудеровского типа, которые будут использованы при доказательстве глобальной разрешимости задачи.

Лемма 3.1. *Пусть функции $(s(t),u(t,x),v(t,x))$ являются решением задачи (2.1)-(2.10). Тогда существуют положительные постоянные M_1, M_2, не зависящие от T, для которых справедливы оценки*

$$0\le u(t,x)\le M_1(|u_0|,|f_1(0,0)|), \quad (t,x)\in D, \tag{3.1}$$

$$0 \le v(t,x) \le M_2(|v_0|, |f_2(0,0)|), \quad (t,x) \in Q, \tag{3.2}$$

$$0 < \dot{s}(t), \quad 0 \le t \le T. \tag{3.3}$$

Доказательство. Пусть в некоторой произвольной точке $P \in D$ $u(P) = 0$. Тогда в этой точке имеем

$$u_t - (a_1(u,v)u_x)_x \ge 0.$$

Следовательно, по строгому принципу максимума $u(t,x) > 0$ в D. Точно так же, если предположить, что $u(P) \ge M_1$, $P \in D$, то $u(t,x) < M_1$ в D.

Теперь докажем неравенство (3.3). Так как $f(0,v) > 0$, то $u_t - (a_1 u_x)_x = f(u,v) > 0$ вблизи свободной границы. Следовательно, $u(t,x) \ge u(t,s(t)) = 0$. Тогда по строгому принципу максимума $u_x(t,s(t)) < 0$, $0 \le t \le T$ и из условия (2.10) имеем $\dot{s}(t) > 0$.

Лемма 3.1 доказана.

Верхняя оценка для $\dot{s}(t)$ устанавливается при помощи оценок для $|u_x|$, $|v_x|$, которые будут построены в следующей теореме 3.1.

Основной трудностью при построении нелокальной теории для задач нелинейных уравнений является получение оценки $\max|u_x|$. Различные методы получения априорных оценок Шаудеровского типа предложены многими авторами (см.напр.[3,4]). В том числе С.Н.Кружков [5] предлагает своеобразный метод получения априорных оценок и исследования задач. При этом построение априорных оценок вплоть до границы области существенно опирается на гладкие граничные условия. Поэтому в случае нелокальных граничных условий, а также в задачах со свободной границей требуются дополнительные рассуждения.

Будем придерживаться обозначений, принятых в [5]:

$$Q^\delta = \{(t,x) : 0 \le t \le T,\, \delta \le x \le l - \delta\}.$$

Предполагая, что начальные условия приведены к нулю, для каждого уравнения системы отдельно сформулируем соответствующую задачу:

$$\begin{cases} a_1(u,v)u_{xx} + b_1(u,v,u_x,v_x) - u_t = 0 \quad \text{в} \quad D, \\ u(0,x) = 0, 0 \le x \le s_0, \\ u_x(t,0) = 0, 0 \le t \le T, \\ u(t,s(t)) = 0, 0 \le t \le T, \end{cases} \tag{A},$$

$$\begin{cases} a_2(u,v)u_{xx} + b_2(u,v,u_x,v_x) - v_t = 0 \quad \text{в} \quad Q, \\ v(0,x) = 0,\ 0 \le x \le l, \\ v(t,0) = m_1 v(t,x_1), 0 \le t \le T, \\ v(t,l) = m_2 v(t,x_2), 0 \le t \le T,\ 0 < x_1 < x_2 < l, \end{cases} \qquad (B),$$

где

$$b_1(u,v,u_x,v_x) = a_{1u}u_x^2 + a_{1v}v_x u_x + f_1(u,v),$$

$$b_2(u,v,u_x,v_x) = a_{2v}v_x^2 + a_{2u}u_x v_x + f_2(u,v).$$

Теорема 3.1. *Пусть непрерывная в $\bar{Q}$ функция $v(t,x)$ удовлетворяет условиям задачи (B). Предположим, что непрерывные функции $a_2(u,v)$, $b_2(u,v)$ для $(t,x) \in \bar{Q}$, $|u| \le M_1$, $|v| \le M_2$ и произвольных u_x, v_x удовлетворяют условиям*

$$\frac{|b_i(x,u,v,u_x,v_x)|}{a_i(u,v)} \le K_i(u_x^2 + v_x^2 + 1),\ i = 1,2. \qquad (3.4)$$

Тогда

$$|v_x(t,x)| \le P_0(M_2, a_{20}, K_2, \delta), \quad (t,x) \in Q^\delta, \qquad (3.5)$$

$$|v|_{1+\gamma}^{Q^{2\delta}} \le C(M_2, a_{20}, a_{22}, P_0, K_2, \delta), \quad 0 < \gamma < 1, \qquad (3.6)$$

$$|v|_{2+\beta}^{Q^{4\delta}} \le C(M_2, a_{20}, a_{22}, P_0, K_2, \delta), \quad 0 < \beta < 1, \qquad (3.7)$$

где $a_{22} = \max\limits_{\Omega} a_2(u,v)$. И если еще известно, что $v(t,x)$ обладает в $\bar{Q}$ суммируемыми с квадратом обобщенными производными v_{tx}, v_{xx} и $4\delta < x_1 < x_2 < l - 4\delta$. Тогда оценки (3.5)-(3.7) справедливы и в $\bar{Q}$.

Доказательство. Выбирая δ таким, что $x_2 \le l - 4\delta$, и используя нелокальное условие (2.7), получим, что ограниченная функция $v_t(t,l)$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем $0 < \beta = \alpha\gamma$. Теперь в области $Q_+ = \{(t,x) : 0 \le t \le T, l - 4\delta \le x \le l\}$ введем функции

$$V(t,x) = v(t,x) - g_1(t,x), \quad U(t,x) = u(t,x),$$

$$g_1(t,x) = \frac{l-x}{4\delta} v(t, l-4\delta) + \frac{x-l+4\delta}{4\delta} v(t,l).$$

Для $V(t,x)$ получим задачу

$$\begin{cases} V_t = \tilde{a}_2(U,V)V_{xx} + \tilde{b}_2(U,V,U_x,V_x) \text{ в } Q_+, \\ V(0,x) = 0,\ l-4\delta \le x \le l \\ V(t,l-4\delta) = 0,\ V(t,l) = 0,\ 0 \le t \le T. \end{cases}$$

Отсюда, применяя теорему 4 работы [5], находим

$$|V|_{1+\gamma}^{Q_+} \le C_1. \tag{3.8}$$

Аналогичным путем устанавливаются оценки типа (3.8) и в области $Q_- = \{(t,x) : 0 \le t \le T, 0 \le x \le 4\delta\}$.

Полученные оценки вместе с оценками (3.5)-(3.7) дают основные результаты в области $\bar{Q}$. Оценки старших производных устанавливаются при помощи результатов для линейных уравнений [6].

Прежде чем перейти к задаче (A), сформулируем следующий результат.

Лемма 3.2. *При выполнении условий леммы 3.1 и теоремы 3.1 справедливо неравенство*

$$\dot{s}(t) \le M_3,$$

где M_3 зависит только от данных задачи и не зависит от T.

Лемма доказывается, как и в работе [1]. При этом используется оценка (3.5).

В случае задачи (A) априорные оценки строятся следующим образом. Внутренние оценки в области $\{(t,x) : 0 \le t \le T, 0 \le x \le s_0\}$ и вплоть до левой границы $x = 0$ устанавливаются как и в [5]. Чтобы получить оценки вблизи свободной границы, произведя замену $y = \frac{x}{s(t)}$, распрямляем границу. Далее, получается задача для уравнении с непрерывными по Гельдеру коэффициентами в фиксированной области. При этом воспользуемся вышеустановленными результатами.

Далее, как и в [2], доказано, что существует такое $t = T^*$, что $s(T^*) = l$. Это означает, что исследуемый процесс останавливается в момент $t = t^*$.

4. Единственность решения

Для доказательства используем идеи работы [7]. Сначала выводим интегральное представление, эквивалентное к (2.10).

Интегрируя уравнение (2.1) по области D, находим

$$s(t) = s_0 + \int\limits_0^{s_0} u_0(\xi)d\xi - \int\limits_0^{s(t)} u(\xi,t)d\xi + \int\limits_0^{t} d\eta \int\limits_0^{s(\eta)} f_1(u,v)d\xi. \qquad (4.1)$$

Теорема 4.1. *При выполнении условий леммы 3.2 решение задачи (2.1)-(2.10) единственно.*

Доказательство. Пусть $s_1(t), u_1(t,x), v_1(t,x)$ и $s_2(t), u_2(t,x), v_2(t,x)$ являются решениями задачи (2.1)-(2.10). Пусть $y(t) = \min(s_1(t), s_2(t))$, $h(t) = \max(s_1(t), s_2(t))$. Тогда, с учетом (4.1), имеем

$$|s_1(t) - s_2(t)| \leq \int\limits_0^{y(t)} |u_1(t,\xi) - u_2(t,\xi)|d\xi + \int\limits_0^{t} d\eta \int\limits_0^{y(\eta)} |f_1(u_1,v_1) - f_1(u_2,v_2)|d\xi$$

$$+ \int\limits_0^{t} d\eta \int\limits_{y(\eta)}^{h(\eta)} |f_1(u_i,v_i)|d\xi, \qquad (4.2)$$

где $u_i, v_i (i = 1,2)$ - решения между $y(t)$ и $h(t)$.

Далее, необходимо оценить разности $V(t,x) = v_1(t,x) - v_2(t,x)$, $U(t,x) = u_1(t,x) - u_2(t,x)$.

Из задачи (B) для функции $V(t,x)$ находим

$$\begin{cases} V_t = r_1(u_1,v_1)V_{xx} + b_1(\cdot)V_x + c_1(\cdot)V + k_1(t,x)U(t,x) \,\text{в}\, Q, \\ V(0,x) = 0,\ 0 \leq x \leq l, \\ V(t,0) = m_1 V(t_1,x_1),\ V(t,l) = m_2 V(t,x_2),\ 0 \leq t \leq T, \end{cases} \qquad (4.3)$$

где коэффициенты r_1, b_1, c_1, k_1 - ограниченные функции.

Из задачи (4.3) по принципу максимума находим

$$|V(t,x)| \leq M_4 \cdot \max_D |U(t,x)|t, \qquad (4.4)$$

где M_4 зависит от $k_1(t,x)$.

В силу установленных оценок для $s_i(t), u_i(t,x), v_i(t,x)$ имеем

$$0 < u_i(t,x) \leq N(y(t) - x),\ i = 1,2, \qquad (4.5)$$

$$|u_1(t,y(t)) - u_2(t,y(t))| \leq N|s_1(t) - s_2(t)|, \tag{4.6}$$

где $N = \max\limits_D |u_x(t,x)|$.

Для функции $U(t,x) = u_1(t,x) - u_2(t,x)$ из задачи (A) находим

$$\begin{cases} U_t = r_2(u,v)U_{xx} + b_2(u,v)U_x + c_2(u,v)U + k_2(t,x)V(t,x), \\ U(0,x) = 0,\ 0 \leq x \leq s_0, \\ U_x(t,0) = 0,\ 0 \leq t \leq T, \\ U(t,y(t)) \leq N \max\limits_{0\leq\eta\leq t} |s_1(\eta) - s_2(\eta)| \end{cases} \tag{4.7}$$

где коэффициенты уравнения непрерывные и ограниченные функции.

Отсюда по принципу максимума

$$|U(t,x)| \leq N \max_{0\leq\eta\leq t} |s_1(\eta) - s_2(\eta)| + M_5 \max_\Omega |V(t,x)|t, \tag{4.8}$$

где M_5 зависит от M_4 и коэффициента $k_2(t,x)$.

Теперь оценим составляющие формулы (4.2):

$$I_1 \leq \int\limits_0^{y(t)} |u_1(t,\xi) - u_2(t,\xi)|d\xi,$$

$$I_2 \leq \int\limits_{y(t)}^{h(t)} |u_i(t,\xi)|d\xi \leq M_1 \cdot \max_t |s_1(t) - s_2(t)|^2,$$

$$I_3 \leq \int\limits_0^t d\eta \int\limits_0^{y(\eta)} |f_1(u_1,v_1) - f(u_2,v_1)| + |f(u_2,v_1) - f(u_2,v_2)|d\xi \leq$$

$$\leq \int\limits_0^t d\eta \int\limits_0^{y(\eta)} \{f'_{1u}(\cdot)|u_1 - u_2| + f'_{1v}|v_1 - v_2|\}d\xi \leq \int\limits_0^t d\eta \int\limits_0^{y(\eta)} M_6[\max |U(\eta,\xi)|d\xi],$$

$$I_4 \leq M_7 \max_t |s_1(t) - s_2(t)| \cdot t,$$

где M_6 зависит от $M_4, M_5, f'_{1u}(\cdot), M_7 = \max\limits_\Omega |f_1(u,v)|$.

Пусть $A(t_0) = \max\limits_{0\leq t\leq t_0} |s_1(t) - s_2(t)| > 0$. Тогда $A(t_0) \leq M_3 t_0, t_0 < 1$.

При этом находим

$$I_1 \le \int\limits_0^{y(t)} |u_1(t,\xi) - u_2(t,\xi)| d\xi, \quad I_2 \le M_1 A^2(t_0),$$

$$I_3 \le M_6 \int\limits_0^t d\eta \int\limits_0^{y(\eta)} \max_D |U| d\xi, \quad I_4 \le M_7 A(t_0) t.$$

Имеем

$$A(t_0) \le \int\limits_0^{y(t)} |U(t,\xi)| d\xi + M_6 \int\limits_0^t d\eta \int\limits_0^{y(\eta)} \max_D |U| d\xi$$

$$+ M_1 A^2(t_0) + M_7 A(t_0) t_0. \tag{4.9}$$

Далее разделим (4.9) на $A(t_0)$ и получим

$$1 \le \int\limits_0^{y(t)} \frac{\max |U(t,\xi)|}{A(t_0)} d\xi + \int\limits_0^t d\eta \int\limits_0^{y(\eta)} \frac{\max |U|}{A(t_0)} d\xi + M_5 t_0^2 + M_7 t_0. \tag{4.10}$$

Теперь для функции $U(t,x) = u_1(t,x) - u_2(t,x)$ из (4.8) имеем

$$|U(t,x)| \le N A(t_0) + M_8 \max |U(t,x)| t^2, \quad 0 \le t \le t_0,$$

или

$$|U(t,x)| \le M_9 A(t_0), \tag{4.11}$$

где

$$M_9 = \frac{N}{1 - M_8 t_0},\ t_0 < \frac{1}{M_8}.$$

Оценим интегральный член

$$\int\limits_0^{y(t)} \frac{\max |U(t,\xi)|}{A(t_0)} d\xi \le \int\limits_0^{y(0)} \frac{\max |U(t,\xi)|}{A(t_0)} d\xi + \int\limits_{y(0)}^{y(t)} \frac{\max |U(t,\xi)|}{A(t_0)} d\xi$$

$$\leq \int_{0}^{y(0)} \frac{\max|U(t,\xi)|}{A(t_0)} d\xi + M_9 t_0,$$

где $M_9 = \dfrac{N}{1 - M_8 t_0}$, $t_0 < \dfrac{1}{M_8}$.

Рассмотрим вспомогательную задачу

$$W_t = r_2(u,v)W_{xx} + b_2(u,v)W_x + c_2(u,v)W + k_3 V(t,x),$$

$$W(0,x) = 0,\ 0 \leq x \leq y(0),$$

$$W_x(t,0) = 0,\ W(t,y(0)) = 1,\ t \geq 0,$$

где $k_3(t,x) = \dfrac{k_2(t,x)}{M_9 A(t_0)}$.

Отсюда по принципу максимума

$$|W(t,x)| \leq \max_{Q} |k_3 V(t,x)| t_0 + 1 = M_{10}.$$

Введем функцию

$$Z(t,x) = \frac{U(t,x)}{M_9 A(t_0)} - W(t,x),\ 0 < x < y(0),\ 0 \leq t \leq t_0.$$

Находим

$$Z_t = r_2(u,v)Z_{xx} + b_2 Z_x + c_2(u,v)Z,$$

$$Z(0,x) = 0,$$

$$Z_x(t,0) = 0,$$

$$Z(t,y(0)) = \frac{U(t,y(0))}{M_9 A(t_0)} - W(t,y(0)) \leq 0.$$

Отсюда по принципу максимума

$$\frac{U(t,x)}{M_9 A(t_0)} \leq W(t,x),\ 0 \leq t \leq t_0.$$

Так как $\lim\limits_{t\to 0} W(t,x) = 0, 0 \le x \le y(0)$, то

$$\lim_{t\to 0}\int\limits_0^{y(0)} W(t,x)dx = 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{t\to 0}\int\limits_0^{y(0)} \frac{|U(t,\xi)|\xi}{M_9 A(t_0)} d\xi \to 0.$$

Если в (4.10) перейти к пределу при $t_0 \to 0$, то правая часть (4.10) стремится к нулю и мы придем к противоречию. Следовательно, $s_1(t) \equiv s_2(t)$ и далее $u_1(t,x) \equiv u_2(t,x), 0 \le t \le t_0$.

Единственность решения задачи для любого $0 < t < \infty$ устанавливается следующим образом.

Пусть $t_1 = \sup\{t : s_1(\eta) = s_2(\eta), 0 \le \eta \le t\}$. Если $t_1 = \infty$, то вопрос будет решен. В противном случае, предполагая, что параметр t_1 ограничен и, повторяя выше выполненные выкладки в промежутке $t_1 \le t \le t_1 + \Delta t$, снова придем к противоречию.

Теорема 4.1 доказана.

5. Существования решения

При определении максимального интервала существования решения задач Стефана учитываются три фактора:

1) невырожденность области;

2) наличие априорных оценок норм в соответствующем пространстве;

3) ограниченность снизу и сверху модуля градиента решения на свободной границе.

Если наложить некоторые ограничения (обеспечивающие выполнение вышеуказанных факторов на произвольном интервале времени) на данных задачи, то классическое решение задачи Стефана существуют при всех положительных значениях времени.

Теорема 5.1. *При условиях теоремы 3.1, а также соответствующих условиях согласования в угловых точках существует единственное решение $u(x,t) \in C^{2+\gamma}\left(\bar{D}\right), s(t) \in C^{1+\gamma}\left([0,T]\right)$ задачи (2.1)-(2.10).*

Доказательство. При доказательстве теоремы 3.1 и леммы 3.2 уже установлены необходимые априорные оценки. Свободная граница $x =$

$s(t)$ монотонно возрастает с ростом времени. Гельдеровость $\dot{s}(t)$ доказана и априорные оценки норм в пространстве $C^{2+\gamma}$ для $u(x,t)$ получены, то можно доказать глобальную разрешимость задачи до стандартной схеме[8].

Заключение. В работе исследована задача с нелокальными граничными условиями со свободной границей для систем квазилинейных параболических уравнений. Изучено поведение свободной границы в рассматриваемом промежутке времени. Установлены априорные оценки шаудеровского типа, при помощи которых доказана теорема существование. □

Литература

1. X.Chen, A.Friedman. A free boundary problem arising in a model of wound healing. SIAM J.Math.Anal. 32. 2000. P. 788-800.

2. P.D.Dale, Ph.K.Maini, J.A.Sheratt. Mathematical Modeling of Corneal Epithelial Wound Healing. Math.Biosciences. 124. 1994. P. 127-147.

3. О.А.Ладыженская, В.А.Солонников, Н.Н.Уральцева. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. -М.:Наука. 1967. 736 с.

4. Н.В.Крылов. Нелинейные эллиптические и параболические уравнения второго порядка. -М.:Наука. 1985. 376 с.

5. С.Н.Кружков. Нелинейные параболические уравнения с двумя независимыми переменными. Тр.ММО., Т.16. 1967. С. 329-346.

6. C.Ciliberto. Formule di maggiorazione e teoremi di esistenza per le soluzioni delle equazioni paraboliche in due variabili. Ricerche di Matem. 3. 1954. P. 40-75.

7. Douglas J., Jr. A uniqueness theorem for the solution of the Stefan problem. Proc. Amer. Math. Soc. 8. 1952. P. 402-408.

8. А.М.Мейрманов. Задача Стефана. -Новосибирск:Наука. 1986. 239 с.

Навоийский государственный педагогический институт
Институт математики при НУУз.

Uzbek Mathematical
Journal, 2016,№4, pp.130-138

УДК 517.956.6

Задача со свободной границей типа Флорина с одним нелокальным граничным условием

Тураев Р.Н., Бегмуродов О.А.

Maqolada parabolik tenglama uchun nolokal shartli noma'lum chegarali Florin masalasi qaralgan. Masala yechimi va noma'lum chegara uchun Shauder tipidagi aprior baholar o'rnatilgan. Olingan aprior baholar asosida mavjudlik va yagonalik teoremalari isbotlangan.

In this paper, we deal with free boundary problem with nonlocal boundary condition for a parabolic equation. For the solutions of the apriori estimates of Shauder's type (Holder's norm) are established. On the base of apriori estimations the existence and uniqueness of theorems are proved.

I.Введение. Актуальные математические модели разнообразных явлений и процессов в механике, физике, биологии, экологии, социологии и др. приводят к изучению задачи со свободной границей для параболических уравнений второго порядка [1,2,3,4].

Требования современной науки и техники приводят к необходимости рассматривать нелокальные задачи. Нелокальные задачи представляют собой одно из динамично развивающихся направлений современной теории дифференциальных уравнений и используются для математического моделирования процессов загрязнения в реках, морях, вызываемого сточными водами [5,6].

В настоящей работе исследуется нелокальная задача со свободной границей для параболических уравнений.

1. Постановка задачи

Требуется найти на некотором отрезке $0 < t \leq T$ непрерывно дифференцируемую функцию $s(t)$, такую, что $s(0) = s_0 > 0$, $0 < \dot{s}(t) \leq N$, $s(t)-$удовлетворяет условию Гельдера, а функция $u(t,x)$ в области $D = \{(t,x) : 0 < t \leq T, 0 < x < s(t)\}$ удовлетворяет уравнению

$$u_t = a(t,x)u_{xx} + b(t,x), \quad (t,x) \in D, \tag{1}$$

и следующим начальным и граничным условиям

$$u(0,x) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le s_0, \tag{2}$$

$$u_x(t,0) = \psi_1(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{3}$$

$$\alpha u(t,x_0) = u(t,s(t)), \quad 0 \le t \le T, \tag{4}$$

$$u_x(t,s(t)) = \psi_2(t), \quad 0 \le t \le T. \tag{5}$$

Нелокальное условие (4) обеспечивает согласованность граничного режима с процессом внутри области, а условие (5) обеспечивает поток на подвижной границе [9].

Всюду в работе предполагаем, что для заданных функций выполнены следующие основные условия:

1. Функции a и b определены для $(t,x) \in \Omega = \{(t,x) : 0 \le t \le T, 0 \le x < \infty\}$ и ограничены на любом замкнутом множестве своих аргументов.

2. Для $(t,x) \in \Omega$

$$a(t,x) \ge a_0 > 0.$$

3. Функции $\varphi(x)$–трижды, $\psi_i(t)$–один раз непрерывно дифференцируемы, $\varphi'''(x)$, $\psi_i'(t)$– удовлетворяют условию Гельдера, причем

$$\varphi'(0) = \psi_1(0), \alpha\varphi(x_0) = \varphi(s_0), \varphi'(s_0) = \psi_2(0), \psi_1(t) \ge \psi_2(t) \ge \psi(0) > 0,$$

$$0 \le t \le T, \varphi'(x) \ge \psi_2(0), 0 \le x \le s_0, \psi_1'(t) \ge 0, \psi_2'(t) \le 0.$$

2. Априорные оценки

Исследование проводится по следующей схеме. Сначала устанавливаются некоторые априорные оценки. Чтобы оценить $u_x(t,x)$, а также исследовать характер и гладкость свободной границы $s(t)$, мы перейдем к задаче типа Стефана. Для этого нужно будет дифференцировать уравнение (1) по x в области D. Поэтому всюду дальше будем предполагать, что функции $a(t,x)$ и $b(t,x)$ и их производные по x ограничены и удовлетворяют условию Гельдера на любом замкнутом множестве своих аргументов.

Продифференцировав уравнение (1) в D по x, для $u_x(t,x) = v(t,x)$ получим следующую задачу

$$v_t = a(t,x)v_{xx}(t,x) + a_x(t,x)v_x(t,x) + b_x(t,x), \quad (t,x) \in D \tag{6}$$

$$v(0,x)=\varphi'(x),\quad 0\le x\le s_0, \tag{7}$$

$$v(t,0)=\psi_1(t),\quad 0\le t\le T, \tag{8}$$

$$v(t,s(t))=\psi_2(t),\quad 0\le t\le T, \tag{9}$$

$$\psi_2(t)\cdot\dot s(t)=\alpha a(t,x_0)v_x(t,x_0)-a(t,s(t))v_x(t,s(t))+$$
$$+\alpha b(t,x_0)-b(t,s(t)),\quad 0\le t\le T. \tag{10}$$

Далее, доказывается эквивалентность задач (1)-(5) и (6)-(10). Для решения задачи типа Стефана устанавливаются априорные оценки старших производных. На основе установленных оценок исследуется поведение свободной границы в рассматриваемом промежутке времени, доказывается единственность решения первоначальной задачи. И в итоге доказывается существование решения полученной и первоначальной задачи [8,9].

Сначала доказывается эквивалентность задач (6)-(10) и (1)-(5), а затем устанавливаются некоторые априорные оценки решения задачи (6)-(10).

Лемма 1. *Пусть пара функций $(s(t),v(t,x))$ является решением задачи (6)-(10). Тогда пара $(s(t),u(t,x))$, где*

$$u(t,x)=\int\limits_{x_0}^{x}v(t,\xi)d\xi+\frac{1}{\alpha-1}\int\limits_{x_0}^{s(t)}v(t,\xi)d\xi, \tag{11}$$

является решением задачи (1)-(5).

Доказательство. Действительно, $u_{xx}=v_x$. Из (11) имеем

$$u_t(t,x)=\int\limits_{x_0}^{x}v_t(t,\xi)d\xi+\frac{1}{\alpha-1}\dot s(t)v(t,s(t))+\frac{1}{\alpha-1}\int\limits_{x_0}^{s(t)}v_t(t,\xi)d\xi, \tag{12}$$

Пользуясь уравнением (6), которое записано в виде

$$v_t=\frac{d}{d\xi}[a(t,\xi)v_\xi+b(t,\xi)],$$

из (12) с учетом (10) находим

$$u_t(t,x) = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{d}{d\xi}[a(t,\xi)v_\xi + b(t,\xi)]d\xi + \frac{1}{\alpha-1}\dot{s}(t)v(t,s(t))+$$

$$+\frac{1}{\alpha-1}\int\limits_{x_0}^{s(t)} \frac{d}{d\xi}[a(t,\xi)v_\xi + b(t,\xi)]d\xi = av_x(t,x)+b(t,x) = a(t,x)u_{xx}+b(t,x),$$

т.е.уравнение (1) выполняется.

Проверим выполнение начального условия:

$$u(0,x) = \int\limits_{x_0}^{x} v(0,\xi)d\xi + \frac{1}{\alpha-1}\int\limits_{x_0}^{s_0} v(0,\xi)d\xi = \int\limits_{x_0}^{x} \varphi'(\xi)d\xi + \frac{1}{\alpha-1}\int\limits_{x_0}^{s_0} \varphi^{'}(\xi)d\xi =$$

$$= \varphi(x)-\varphi(x_0)+\frac{1}{\alpha-1}[\varphi(s_0)-\varphi(x_0)] = \varphi(x)+\frac{1}{\alpha-1}[\varphi(s_0)-\alpha\varphi(x_0)] = \varphi(x),$$

т.е. условия (2) выполняется.

Выполнение условий (3),(4),(5) доказывается легко.

Лемма 1 доказана.

Далее, через N_i обозначим положительные постоянные, которые зависят от заданных функций. Пусть

$$N_0 = \max\{\max_t |\psi_i(t)|, \max_x |\varphi'(x)|\}.$$

Лемма 2. *Пусть для $(t,x) \in Q$ и произвольного v выполнено неравенство $0 \le b_x(t,x) \le N_1$. Тогда для решения задачи (6)-(9) справедлива оценка*

$$0 < \psi_2(t) \le v(t,x) \le \max\{N_0 e^{mT}, \frac{N_1 e^{mT}}{m}\} = N_2, \tag{13}$$

где, $m > 0$.

Доказательство. Сначала установим внутреннюю оценку. Введем функцию $\omega(t,x) = e^{-mt}v(t,x), m > 0$, которая удовлетворяет уравнению

$$m\omega + \omega_t = a\omega_{xx} + a_x\omega_x + b_x e^{-mt}; \tag{14}$$

умножив (14) на $\omega(t,x)$, получим

$$m\omega^2 + \omega_t \cdot \omega = a\omega_{xx} \cdot \omega + a_x\omega_x \cdot \omega + b_x e^{-mt}\omega. \tag{15}$$

Пусть $\omega(t,x)$ принимает максимальное значение, отличное от нуля, в некоторой точке внутри области. В точке положительного максимума и отрицательного минимума $\omega \cdot \omega_{xx} \le 0, \omega \cdot \omega_x = 0, \omega_t \cdot \omega \ge 0$. Следовательно, из (15) имеем

$$|\omega| \le \frac{\max\limits_{D}|b_x(t,x)|}{m}, m > 0D.$$

В силу принципа максимума и условий (7),(8),(9), для $v(t,x) = e^{mt}\omega(t,x)$ имеем оценку

$$|v| \le \max\left\{N_0 e^{mt}, \frac{N_1 e^{mt}}{m}\right\} = N_2.$$

Так как $b_x(t,x)$, то $v(t,x)$ свой минимум достигает на правой границе (учитывается $\psi_1'(t) \ge 0, \psi_2'(t) \le 0$), т.е.

$$0 < \psi_2(t) \le u_x(t,x) = v(t,x) \le N_3.$$

Таким образом, $v(t,x) \ge v(t,s(t))$.Отсюда

$$v_x(t,s(t)) \le 0. \tag{16}$$

Лемма 2 доказана.

3. Единственность решения

Теорема 1.Пусть выполнены условия 1-4 и леммы 2. Тогда решение задачи (1)-(5) единственно.

Доказательство. Пусть существуют два решения задачи (1)-(5): $s_1(t)$ на отрезке $[0,T_1]$,$u_1(t,x)$ в области $\{(t,x) : 0 < t \le T_1, 0 < x < s_1(t)\}$ и $s_2(t)$ на отрезке $[0,T_2]$,$u_2(t,x)$ в области $\{(t,x) : 0 < t \le T_2, 0 < x < s_2(t)\}$. Пусть $T = \min[T_1,T_2]$, $h(t) = \min\{s_1(t), s_2(t)\}$ и $\Omega = \{(t,x) : 0 < t \le T, 0 < x < h(t)\}$.

Рассмотрим в области $\bar{\Omega}$ функцию

$$W(t,x) = u_1(t,x) - u_2(t,x).$$

Тогда для $W(t,x)$ получим следующую задачу

$$W_t = a(t,x)W_{xx} + b(t,x)W_x, \quad (t,x) \in \Omega, \tag{17}$$

$$W(0,x) = 0, \quad 0 \le x \le s_0, \tag{18}$$

$$W_x(t,0) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{19}$$

$$\alpha W(t,x_0) = u_1(t,s_1(t)) - u_2(t,s_2(t)), \quad 0 \le t \le T, \tag{20}$$

$$W_x(t,h(t)) = u_{1x}(t,h(t)) - u_{2x}(t,h(t)), \quad 0 \le t \le T. \tag{21}$$

Всюду в Ω нет точки экстремума функции $W(t,x)$. В силу (18), (19) точки экстремума функции $W(t,x)$ в Ω должны лежать на кривой в $h(t)$.

Пусть P– точка максимума функции $W(t,x)$ в $\bar{\Omega}$. С учетом (18), (19) можно утверждать, что точка P должна лежать на кривой $x = h(t)$, т.е. $P = (t_0, h(t_0)), t_0 \in [0,T]$. Сначала пусть для определенности $s_1(t_0) < s_2(t_0)$, тогда $h(t_0) = s_1(t_0)$. Тогда по известному свойству решений уравнения параболического типа $W_x(P) > 0$ [4]. Учитывая, что $0 < \psi_2(t) \le u_x(t,x)$ в D, и условие (5), имеем

$$0 < W_x(p) = W_x(t_0,s_1(t_0)) = u_{1x}(t_0,s_1(t_0)) - u_{2x}(t_0,s_1(t_0)) =$$

$$= \psi_2(t_0) - u_{2x}(t_0,s_1(t_0)) \le 0.$$

Мы получили противоречие. Значит, в этом случае нет положительного максимума. Теперь докажем, что в этом случае нет и отрицательного минимума. Пусть $W(t,x)$ в точке $P = (t_0, s_1(t_0))$ достигает своего отрицательного минимума, тогда $W(P) < 0$. В силу неравенства $u_x(t,x) > 0$ и условия (20) имеем

$$0 > W(P) = W(t_0,s_1(t_0)) = u_1(t_0,s_1(t_0)) - u_2(t_0,s_1(t_0)) > u_1(t_0,s_1(t_0)) -$$

$$- u_2(t_0,s_2(t_0)) = \alpha W(t_0,x_0) < W(t_0,x_0).$$

Мы получили противоречие. Значит, в этом случае нет отрицательного минимума.

Пусть теперь $s_1(t_0) > s_2(t_0)$, тогда $(h(t_0) = s_2(t_0))$. Пусть функция $W(t,x)$ в точке $P = (t_0, s_2(t_0))$ достигает своего положительного максимума. Тогда следует, что $W(P) > 0$.

$$0 > W(P) = W(t_0,s_2(t_0)) = u_1(t_0,s_2(t_0)) - u_2(t_0,s_2(t_0)) < u_1(t_0,s_1(t_0)) -$$

$$-u_2(t_0, s_2(t_0)) = \alpha W(t_0, x_0),$$

т.е.в этом случае нет максимума.

Теперь докажем отсутствие отрицательного минимума. Тогда должно быть $W_x(P) < 0$ [6]. Из условия (21) имеем

$$0 > W_x(P) = W_x(t_0, s_2(t_0)) =$$

$$= u_{1x}(t_0, s_2(t_0)) - u_{2x}(t_0, s_2(t_0)) = u_{1x}(t_0, s_2(t_0)) - \psi_2(t) \geq 0,$$

и опять мы пришли к противоречию. Отсутствие экстремума в случае $s_1(t_0) = s_2(t_0)$ следует из равенства

$$W_x(t_0, s_1(t_0)) = u_{1x}(t_0, s_1(t_0)) - u_{2x}(t_0, s_1(t_0)) =$$

$$= u_{1x}(t_0, s_1(t_0)) - u_{2x}(t_0, s_2(t_0)) = 0,$$

т.е. в $\bar{\Omega}$ получили, что $W(t, x) \equiv 0$.

Теперь докажем, что $s_1(t) = s_2(t), 0 \leq t \leq T$. Пусть в некоторой точке $t = t_0, s_1(t_0) < s_2(t_0)$.

Имеем

$$\alpha u_1(t_0, x_0) = u_1(t_0, s_1(t_0)) = u_2(t_0, s_1(t_0)) > u_2(t_0, s_2(t_0)) =$$

$$= \alpha u_2(t_0, x_0) = \alpha u_1(t_0, x_0).$$

Пришли к противоречию.

Теорема 1. доказана.

4.Поведение свободной границы

Теорема 2. *Пусть для* $(t, x) \in D$ *и* $0 < \psi_2(t) \leq u_x(t, x) \leq N_2$ *справедливы неравенства* $0 < a_0 \leq a(t, x) \leq N_3, \psi_1' - b_x(t, x) \geq 0$, *а также выполнены условия леммы 2.* Тогда

$$0 < \dot{s}(t) \leq N_4, 0 \leq t \leq T, \tag{22}$$

где

$$N_6 \geq \max\left\{\max_{0 \leq t \leq T} \frac{\psi_1(t) - \psi_2(t)}{s_0}, \max_{0 \leq x \leq s_0} \frac{|\varphi'(x) - \psi_2(0)|}{s_0 - x}\right\}.$$

А если еще известна и оценка (22), то справедлива оценка

$$|v|_{1+\gamma}^{\bar{D}} \leq N_5. \tag{23}$$

Чтобы доказать теорему, мы должны доказать отрицательность и ограниченность снизу функций $v_x(t, x_0), v_x(t, s(t))$, как в работах [7,8].

5. Существование решения

При определении максимального интервала существования решения задач Стефана учитываются три фактора: 1) невырожденность области; 2) наличие априорных оценок норм в соответствующем пространстве; 3) ограниченность снизу и сверху модуля градиента решения на свободной границе.

Если наложить некоторые ограничения (обеспечивающие выполнение вышеуказанных факторов на произвольном интервале времени) на данные задачи, то классическое решение задачи Стефана существует при всех положительных значениях, времени

Одномерная задача имеет несколько преимуществ перед многомерной. Например, область всегда не вырожденная, так как свободная граница $s(t)-$ монотонно возрастающая функция, а требования дифференциальных свойств данных задач минимальные.

И в случае задачи Флорина мы следим за соблюдением этих условий.

Теорема 3. *При условиях теоремы 1. и условиях согласования в силу уравнения (1) в точках* $(0, 0)$ *и* $(0, s_0)$ *существует единственное решение* $u(t, x) \in C^{2+\gamma}(\bar{D})$, $s(t) \in C^{1+\gamma}[0, T]$ задачи (1)-(5).

Доказательство. Так как рассматриваемая область не вырождается, гельдеровость производной $\dot{s}(t)$ доказана и априорные оценки норм в пространстве $C^{2+\gamma}$ для $u(t, x)$ получены, то можно доказать глобальную разрешимость задачи (см. [7,8]).

Замена переменных $\tau = t, y = \frac{x}{s(t)}$ отображает область D в прямоугольник $Q = \{(t, x) : 0 < t \leq T, 0 < x < l\}$, а функция $U(t, x)$ является решением следующей задачи

$$U_\tau(\tau, x) = A(\tau, y)U_{yy} + \bar{B}(\tau, y),$$

$$U|_\Gamma = 0.$$

Так как коэффициенты этого уравнения удовлетворяют условию Гельдера, то в силу результатов по линейным уравнениям находим оценку

$$|U|_{2+\alpha}^{\bar{Q}} \leq C.$$

При наличии необходимых априорных оценок для свободной границы и решения уравнения разработаны методы доказательства глобальной разрешимости задач. Так как у нас эти оценки уже установлены, то в силу результатов работ [7,8] получается утверждение теоремы.

Литература

1. *Fasano A., Primicerio M.* Free boundary problems for nonlinear parabolic equations with nonlinear free boundary equations.//–J.Math.Anal.and Appl., 1979, p.247-273.

2. *Мейрманов А.М. Задача Стефана.* –Новосибирск."Наука 1986,–239 с.

3. *Рубенштейн Л.И* Проблема Стефана. Рига: Звайзгне, 1967. 468.

4. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. М.: Мир, 1968.428 с.

5. *Нахушев А.М.* Уравнения математической биологии. -Москва: Выс.шк., 1995, – 301 с.

6. *Самарский А.А., Михайлов А.П.* Математическое моделирование: Идеи. Методы.Примеры., М.: Наука.Физматлит,1997,320.

7. *Кружков С.Н. Нелинейные параболические уравнения с двумя независимыми переменными.* //Труды Моск.Матем.Общ-ва. –1967.– Т.16.–С.329-346.

8. *Тахиров Ж.О.* Неклассические нелинейные задачи и задачи со свободной границей. Ташкент, 2014. 240.

9. *Тахиров Ж.О., Тураев Р.Н.* Задача с нелокальным условием на свободной границе.// -Укр.Мат.Журнал, 2012,том.64. No1.с.38-46.

Институт математики при НУУз.

Uzbek Mathematical
Journal, 2016,№4 , pp.139-147

УДК 517.956

Интегрирование модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза с нагруженным членом в классе периодических функций

Хасанов М.М.

Mazkur ishda teskari spektral masalalar usuli yuklangan hadli modifitsirlangan Korteveg-de Friz tenglamasini davriy funksiyalar sinfida integrallashga qo‘llanilgan.

In this paper, the inverse spectral problem is applied to the integration of the modified Korteweg-de Vries equation with a loaded term in the class of periodic functions.

1. Обратные спектральные задачи играют существенную роль при интегрировании некоторых важных эволюционных уравнений математической физики. В 1967 г. Гарднер, Грин, Крускал и Миура [1] обнаружили глубокую связь между хорошо известным нелинейным уравнением Кортевега-де Фриза (КдФ)

$$q_t - 6qq_x + q_{xxx} = 0, \quad q(x,t)|_{t=0} = q_0(x), \quad x \in R$$

и спектральной теорией операторов Штурма-Лиувилля

$$L \equiv -y'' + q(x)y = \lambda y, \quad x \in R.$$

Они сумели найти глобальное решение задачи Коши для уравнения КдФ, сведением ее к обратной задачи теории рассеяния.

Обратная задача теории рассеяния для оператора Штурма-Лиувилля на всей прямой изучалась в работах Л.Д.Фаддеева [2], В.А.Марченко [3], Б.М.Левитана [4] и др.

В работе [5] П.Лакс показал универсальность метода обратной задачи рассеяния и обобщил уравнение КдФ, введя понятие высшего уравнения КдФ.

В своей оригинальной работе [6] В.Е.Захаров и А.Б.Шабат показали, что нелинейное уравнение Шредингера (НУШ)

$$iu_t \pm 2u|u|^2 + u_{xx} = 0,$$

также включается в формализм метода обратной задачи рассеяния. Используя прием предложенный П.Лаксом, они смогли решить уравнение НУШ для заданных начальных функций $u(x,0)$, достаточно быстро убывающих при $|x| \to \infty$. Вскоре М.Вадати [7], используя идеи работы В.Е.Захарова и А.Б.Шабата, предложил метод решения модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза (мКдФ)

$$u_t \pm 6u^2 u_x + u_{xxx} = 0.$$

Применение метода обратной задачи рассеяния для уравнений НУШ и мКдФ опирается на задачу рассеяния для оператора Дирака

$$L = i \begin{pmatrix} \frac{d}{dx} & -q(x) \\ r(x) & -\frac{d}{dx} \end{pmatrix}$$

на всей оси. Обратная задача рассеяния для оператора Дирака на всей оси изучалась в работах В.Е.Захарова, А.Б.Шабата [6], И.С.Фролова [8], Л.А.Тахтаджяна, Л.Д Фаддеева [9] и др. С помощью обратной задачи для оператора Штурма-Лиувилля с периодическим потенциалом в работах С.П.Новикова, Б.А. Дубровина [10], А.Р.Итса, В.Б.Матвеева [11], П.Лакса [12] и др. доказана полная интегрируемостъ уравнения КдФ в классе конечнозонных функций. В работах А.Р.Итса, В.П.Котлярова [13], А.О.Смирнова [14] и др. методом обратной задачи для оператора Дирака было установлена полная интегрируемостъ нелинейного уравнения Шредингера в классе конечнозонных функций. В данной работе изучается уравнение мКдФ с нагруженным членом

$$q_t = 6q^2 q_x - q_{xxx} + \gamma(t) \cdot q(0,t) \cdot q_x, \quad t > 0 \ , \ \ x \in R \tag{1}$$

с начальным условием

$$q(x,t)|_{t=0} = q_0(x), \tag{2}$$

где $\gamma(t)$ заданная действительная непрерывная функция. Требуется найти действительную функцию $q(x,t)$, которая π-периодическая по переменной x:

$$q(x+\pi,t) \equiv q(x,t), \quad x \in R, \quad t > 0 \tag{3}$$

и удовлетворяет условиям гладкости:

$$q(x,t) \in C_x^3(t>0) \cap C_t^1(t>0) \cap C(t \geqslant 0). \tag{4}$$

Цель данной работы дать процедуру построения решения $q(x,t)$ задачи (1)-(4), в рамках обратной спектральной задачи для оператора Дирака.

2. В этом пункте, для полноты изложения, приведем некоторые основные сведения, касающиеся обратной спектральной задачи для оператора Дирака с периодическими коэффициентами (см. [15], [16]).

Рассмотрим систему уравнений Дирака на всей прямой

$$Ly \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad x \in R \tag{5}$$

где $p(x)$ и $q(x)$ действительные непрерывные функции из класса $C^1(R)$, имеющие период π, а λ комплексный параметр.

Обозначим через $c(x,\lambda) = (c_1(x,\lambda), c_2(x,\lambda))^T$ и $s(x,\lambda) = (s_1(x,\lambda), s_2(x,\lambda))^T$ решения уравнения (5) удовлетворяющие начальным условиям $c(0,\lambda) = (1,0)^T$ и $s(0,\lambda) = (0,1)^T$. Функция $\Delta(\lambda) = c_1(\pi,\lambda) + s_2(\pi,\lambda)$ называется функцией Ляпунова или дискриминантом Хилла для оператора Дирака (5).

Спектр оператора (5) состоит из следующего множества

$$E = \{\lambda \in R : \ -2 \le \Delta(\lambda) \le 2\ \} = R \backslash \left\{ \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} (\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}) \right\}.$$

Интервалы $(\lambda_{2n-1},\ \lambda_{2n})$, $n \in Z$ называются лакунами.

Корни уравнения $s_1(\pi,\lambda) = 0$ обозначим через ξ_n, $n \in Z$. Число ξ_n, $n \in Z$ совпадают с собственными значениями задачи Дирихле $y_1(0) = 0$, $y_1(\pi) = 0$ для системы (5) и выполняются соотношения $\xi_n \in [\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$, $n \in Z$.

Числа $\xi_n \in [\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$, $n \in Z$ и знаки $\sigma_n = sign\{s_2(\pi,\xi_n) - c_1(\pi,\xi_n)\}$, $n \in Z$ называются спектральными параметрами задачи (5). Спектральные параметры ξ_n, σ_n, $n \in Z$ и границы спектра λ_n, $n \in Z$ называются спектральными данными задачи (5). Нахождение спектральных данных задачи (5) называется прямой задачей, а восстановление коэффициентов $p(x)$ и $q(x)$ по спектральным данным называется обратной задачей.

Если в задаче (5) вместо $p(x)$ и $q(x)$ рассмотреть $p(x+\tau)$ и $q(x+\tau)$, то спектр полученной задачи не зависит от параметра τ: $\lambda_n(\tau) \equiv \lambda_n$, $n \in Z$, а спектральные параметры зависят от параметра τ:$\xi_n(\tau)$, $\sigma_n(\tau)$, $n \in Z$. Эти спектральные параметры удовлетворяют аналогу системы уравнений Дубровина:

$$\frac{d\xi_n}{d\tau} = (-1)^{n-1}\sigma_n(\tau)h_n(\xi(\tau))\left\{2\xi_n(\tau) + \sum_{k=-\infty}^{\infty}(\lambda_{2k-1} + \lambda_{2k} - 2\xi_k(\tau))\right\}, \quad n \in Z,$$

где

$$h_n(\xi) = \sqrt{(\xi_n(\tau) - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n(\tau))} \cdot \sqrt{\prod_{\substack{k=-\infty \\ k\neq n}}^{\infty} \frac{(\lambda_{2k-1} - \xi_n(\tau))(\lambda_{2k} - \xi_n(\tau))}{(\xi_k(\tau) - \xi_n(\tau))^2}}.$$

Знак $\sigma_n(\tau)$ - меняется на противоположный при каждом столкновении $\xi_n(\tau)$ с границами своей лакуны $[\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$.

Система уравнений Дубровина, а также следующие формулы следов

$$p(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{\lambda_{2k-1} + \lambda_{2k}}{2} - \xi_k(\tau)\right), \quad q(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^{n-1}\sigma_n(\tau)h_n(\xi(\tau))$$

дают метод решения обратной задачи.

В работе [17] доказан следующий аналог обратной теоремы Борга в случае оператора Дирака.

Теорема 1. *Для того чтобы число $\frac{\pi}{2}$ являлось периодом коэффициентов $p(x)$ и $q(x)$ системы уравнений (5), необходима и достаточна двукратность всех собственных значений антипериодической задачи ($y(0) = -y(\pi)$) для системы (5).*

В работе [16] используя систему уравнений Дубровина и формулы следов, доказана следующая теорема, связывающая убывание длин лакун с аналитичностью коэффициентов $p(x)$ и $q(x)$ системы уравнений Дирака (5).

Теорема 2. *Для того, чтобы коэффициенты $p(x)$ и $q(x)$ оператора Дирака являлись действительными, аналитическими, π-периодическими функциями необходима и достаточна экспоненциальное убывание длин лакун в спектре, т.е. существование постоянных чисел $a > 0$, $b > 0$, для которых $\lambda_{2n} - \lambda_{2n-1} < ae^{-b|n|}$, при любых целых n.*

3. Основной результат настоящей работы заключается в следующей теореме.

Теорема 3. *Пусть $q(x,t)$ решение задачи (1)-(4). Тогда границы* *спектра* λ_n, $n \in Z$ *оператора Дирака*

$$L(\tau,t)y \equiv B\frac{dy}{dx} + \Omega(x+\tau,t)y = \lambda y, \quad x \in R, \tag{6}$$

где

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega(x,t) = \begin{pmatrix} 0 & q(x,t) \\ q(x,t) & 0 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix},$$

не зависят от параметров τ *и* t, *а спектральные параметры* $\xi_n(\tau,t)$, $n \in Z$ *удовлетворяют аналогу системы уравнений Дубровина:*

$$\frac{\partial \xi_n}{\partial t} = 2(-1)^n \sigma_n(\tau,t) h_n(\xi) \cdot \{-2\xi_n[q^2(\tau,t) + q_x(\tau,t)] - 4\xi_n^3 - \gamma(t)\xi_n q(0,t)\}. \tag{7}$$

Здесь знак $\sigma_n(\tau,t)$ *меняется на противоположный при каждом столкновении точки* $\xi_n(\tau,t)$ *с границами своей лакуны* $[\lambda_{2n-1},\ \lambda_{2n}]$. *Кроме того, выполняются следующие начальные условия:*

$$\xi_n(\tau,t)|_{t=0} = \xi_n^0(\tau), \quad \sigma_n(\tau,t)|_{t=0} = \sigma_n^0(\tau), \quad n \in Z, \tag{8}$$

при этом $\xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n^0(\tau)$ $n \in Z$ *- спектральные параметры оператора Дирака с коэффициентом* $q_0(x+\tau)$.

Доказательство. Обозначим через $y_n = (y_{n,1}(x,\tau,t), y_{n,2}(x,\tau,t))^T$, $n \in Z$ ортонормированные собственные вектор-функции задачи Дирихле ($y_1(0) = 0$, $y_1(\pi) = 0$) для уравнения (6), соответствующие собственным значениям $\xi_n = \xi_n(\tau,t)$, $n \in Z$. Дифференцируя по t тождество $(L(\tau,t)y_n, y_n) = \xi_n$, и используя симметричность оператора $L(\tau,t)$, имеем

$$\dot{\xi}_n = (\dot{\Omega}(x+\tau,t)y_n, y_n). \tag{9}$$

Используя явный вид скалярного произведения

$$(y,z) = \int_0^\pi [y_1(x)\bar{z}_1(x) + y_2(x)\bar{z}_2(x)]\,dx, \quad y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \end{pmatrix},$$

равенство (9) перепишем в виде $\dot{\xi}_n = 2\int_0^\pi y_{n,1} y_{n,2}\, q_t(x+\tau,t)dx$. Из тождества

$$q_t(x+\tau,t) = 6q^2(x+\tau,t)q_x(x+\tau,t) - q_{xxx}(x+\tau,t) + \gamma(t)\cdot q(0,t)\cdot q_x(x+\tau,t)$$

следует, что

$$\dot{\xi}_n = 2\int\limits_0^\pi y_{n,1}y_{n,2}(6q^2q_x - q_{xxx})dx + 2\gamma(t)\cdot q(0,t)\int\limits_0^\pi y_{n,1}y_{n,2}q_x\,dx. \qquad (10)$$

Прямым вычислением производной показывается, что

$$\{2\xi_n q_x\cdot(y_{n,1}^2 - y_{n,2}^2) + 2(4\xi_n^2 q + 2q^3 - q_{xx})y_{n,1}y_{n,2} - 2\xi_n(2\xi_n^2 + q^2)\cdot(y_{n,1}^2 + y_{n,2}^2)\}'_x =$$

$$= 2y_{n,1}y_{n,2}(6q^2q_x - q_{xxx}).$$

Поэтому

$$2\int\limits_0^\pi y_{n,1}y_{n,2}(6q^2q_x - q_{xxx})dx =$$

$$= -2\xi_n[q^2(\tau,t) + q_x(\tau,t) + 2\xi_n^2]\cdot[y_{n,2}^2(\pi,\tau,t) - y_{n,2}^2(0,\tau,t)]. \qquad (11)$$

Теперь вычислим второй интеграл в равенстве (10):

$$\int\limits_0^\pi 2y_{n,1}y_{n,2}q_x dx = -\,\xi_n[y_{n,2}^2(\pi,\tau,t) - y_{n,2}^2(0,\tau,t)]. \qquad (12)$$

Из (10), (11) и (12) выводим, что

$$\dot{\xi}_n = [y_{n,2}^2(\pi,\tau,t) - y_{n,2}^2(0,\tau,t)]\times$$

$$\times\{-2\xi_n[q^2(\tau,t) + q_x(\tau,t)] - 4\xi_n^3 - \gamma(t)\xi_n q(0,t)\}. \qquad (13)$$

Обозначим через $s(x,\lambda,\tau,t)$ решение уравнения (6) удовлетворяющее начальным условиям $s_1(0,\lambda,\tau,t) = 0$, $s_2(0,\lambda,\tau,t) = 1$. Тогда $y_n(x,\tau,t) = \frac{1}{c_n(\tau,t)}s(x,\xi_n,\tau,t)$, где

$$c_n^2(\tau,t) = \int\limits_0^\pi [s_1^2(x,\xi_n,\tau,t) + s_2^2(x,\xi_n,\tau,t)]dx = -\frac{\partial s_1(\pi,\xi_n,\tau,t)}{\partial\lambda}\cdot s_2(\pi,\xi_n,\tau,t).$$

Используя эти равенства имеем

$$y_{n,2}^2(\pi,\tau,t) - y_{n,2}^2(0,\tau,t) = \frac{s_2^2(\pi,\xi_n,\tau,t)-1}{c_n^2(\tau,t)} = -\frac{s_2(\pi,\xi_n,\tau,t) - \frac{1}{s_2(\pi,\xi_n,\tau,t)}}{\frac{\partial s_1(\pi,\xi_n,\tau,t)}{\partial\lambda}}. \tag{14}$$

Подставляя сюда выражение

$$s_2(\pi,\xi_n,\tau,t) - \frac{1}{s_2(\pi,\xi_n,\tau,t)} = \sigma_n(\tau,t)\sqrt{\Delta^2(\xi_n)-4}. \tag{15}$$

Из (14) и (15) выводим

$$y_{n,2}^2(\pi,\tau,t) - y_{n,2}^2(0,\tau,t) = -\frac{\sigma_n(\tau,t)\sqrt{\Delta^2(\xi_n)-4}}{\frac{\partial s_1(\pi,\xi_n,\tau,t)}{\partial\lambda}}. \tag{16}$$

Используя следующее разложение

$$\Delta^2(\lambda) - 4 = -4\pi^2 \prod_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(\lambda-\lambda_{2k-1})(\lambda-\lambda_{2k})}{a_k^2},$$

где $a_0 = 1$ и $a_k = k$ при $k \neq 0$, равенство (16) перепишем в виде:

$$y_{n,2}^2(\pi,\tau,t) - y_{n,2}^2(0,\tau,t) = 2(-1)^n\sigma_n(\tau,t)h_n(\xi). \tag{17}$$

Подставляя выражение (17) в тождество (13) выводим (7). Если заменить граничные условия Дирихле периодическими $y(\pi) = y(0)$ или антипериодическими $y(\pi) = -y(0)$ граничными условиями, то вместо уравнения (13) имеем $\dot{\lambda}_n = 0$. Значит, собственные значения λ_n, $n \in Z$ периодической и антипериодической задачи не зависят от параметра t. **Теорема доказана.**

Следствие 1. Учитывая формулы следов

$$q^2(\tau,t) + q_x(\tau,t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{\lambda_{2k-1}^2+\lambda_{2k}^2}{2} - \xi_k^2(\tau,t)\right),$$

$$q(\tau,t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^{k-1}\sigma_k(\tau,t)h_k(\xi(\tau,t)) \tag{18}$$

систему (7) можно переписать в замкнутой форме.

Следствие 2. Эта теорема дает метод решения задачи (1)-(4). Для этого, сначала найдем спектральные данные λ_n, $\xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n^0(\tau)$, $n \in Z$, оператора Дирака соответствующие потенциалу $q_0(x+\tau)$. Далее, решая при $\tau = 0$ задачу Коши (7)-(8) находим $\xi_n(0,t)$ и $\sigma_n(0,t)$, $n \in Z$. По этим данным найдем $q(0,t)$. После этого, подставляем выражение для $q(0,t)$ в уравнение (7), и, решая задачу Коши при произвольном значении τ находим $\xi_n(\tau,t)$, $n \in Z$. По формуле следов (18) определяем $q(x,t)$.

Следствие 3. Используя результаты работы [16] выводим, что если начальная функция $q_0(x)$ является действительной аналитической функцией, то и решение $q(x,t)$ - является действительной аналитической функцией по x.

Следствие 4. Если число $\frac{\pi}{2}$ является периодом для начальной функции $q_0(x)$, то все корни уравнения $\Delta(\lambda) + 2 = 0$ являются двукратными. Так как функция Ляпунова, соответствующая коэффициенту $q(x,t)$,совпадает с $\Delta(\lambda)$, то по обратной теореме Борга (см. [17]), число $\frac{\pi}{2}$ является также периодом для решения $q(x,t)$, по переменной x.

Литература

1. Gardner C.S., Greene J.M., Kruskal M.D., Miura R.M. Method for solving the Korteweg-de Vries equation // Phys. Rev. Lett., 1967, v. 19, N 19, P. 1095-1097.

2. Фаддеев Л.Д. Обратная задача квантовой теории рассеяния // УМН, 1959, т. 14, N 4, С. 57-119.

3. Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. Киев: Наукова думка, 1977.

4. Левитан Б.М. Обратные задачи Штурма-Лиувилля. М.: Наука, 1984.

5. Lax P.D. Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves // Comm. Pure and Appl. Math., 1968, v. 21, P. 467-490.

6. Захаров В.Е., Шабат А.Б. Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах // ЖЭТФ, 1971, т. 61, N 1, С. 118-134.

7. Wadati M. The exact solution of the modified Korteweg-de Vries equation // J. Phys. Soc., 1972, v. 32, P. 1681.

8. Фролов И.С. Обратная задача рассеяния для системы Дирака на всей оси // ДАН СССР, 1972, Т. 207, N 1, С.44-47.

9. Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. Гамильтонов подход в теории солитонов. М.: Наука, 1986.

10. Дубровин Б.А., Новиков С.П. Периодический и условно периодический аналоги многосолитонных решений уравнения Кортевега-де Фриза // ЖЭТФ, 1974, т. 67, N 12, С. 2131-2143.

11. Итс А.Р., Матвеев В.Б. Операторы Шредингера с конечнозонным спектром и N-солитонные решения уравнения Кортевега-де Фриза // ТМФ, 1975, т. 23, N 1, С. 51-68.

12. Lax P.D. Periodic solutions of the KdV equations // Lecture in Appl. Math. AMS. 1974, v. 15, P. 85-96.

13. Итс А.Р., Котляров В.П. Явные формулы для решений нелинейного уравнения Шредингера // ДАН УССР сер. А., 1976, N 11, С. 965-968.

14. Смирнов А.О. Эллиптические решения нелинейного уравнения Шредингера и модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза // Мат. сб., 1994, т. 185, N 8, С. 103-114.

15. Левитан Б.М., Саргсян И.С. Операторы Штурма-Лиувилля и Дирака. - М.: Наука, 1988.

16. Хасанов А.Б., Ибрагимов А.М. Об обратной задаче для оператора Дирака с периодическим потенциалом // УзМЖ, 2001, N 3-4, с. 48-55.

17. Хасанов А.Б., Яхшимуратов А.Б. Аналог обратной теоремы Г.Борга для оператора Дирака.// УзМЖ, 2000, N 3, с. 40-46.

Ургенчский государственный университет

Uzbek Mathematical
Journal, 2016,№4 , pp.148-157

УДК 517.946

Краевая задача для уравнения в частных производных восьмого порядка смешанного типа

Хажиев И.О., Фаязова З.К.

Ushbu ish sakkizinchi tartibli aralash turdagi xususiy xosilali differensial tenglamaga qo‘yilgan chegaraviy masalani o‘rganishga bag‘ishlangan. Bu masala J. Adamar ma’nosida nokorrekt ekanligi ko‘rsatilib korrektlik to‘plamida shartli korrektligi isbotlangan. Masala yechimi yagonaligi va shartli turg‘unligi haqidagi teoremalar keltirilgan.

The work is devoted to the study boundary value problem for eighth order mixed type partial differential equation. It is proved that this problem is incorrect in the sense of J. Hadamard. Conditional correctness of the problem on the set of correctness is established. The theorem on the uniqueness and conditional stability are proved.

Корректные и некорректные задачи для модельных дифференциальных уравнений рассматривались многими авторами, в том числе T. Carleman, L.Hormander, L. Nirenberg, A. Calderon, М. М. Лаврентьевым, Е. М. Ландисом, F. Jonh, H. Levine, С. Г. Крейн, С.А.Терсенов, В.Н. Врагов, А.И. Кожанов, Н. Кислов, С.Г. Пятков и др., а для дифференциально-операторных уравнений С. Г. Крейном, H. Levine, А.В. Костин, К. С. Фаязовым и др.

Исследуемая нами задача относится к классу некорректно поставленных задач математической физики. В работе доказано отсутствия устойчивости относительно начальных данных решения исследуемой задачи. В первой части работы приводится обзор исследований по данной теме и некоторые вспомогательные факты для изложения основных результатов работы. Вторая часть посвящена получению априорной оценки для решения уравнения в соответствующим классе функций. В третьей части доказывается теорема о единственности и выводится оценка устойчивости искомого решения на множестве корректности.

1. Постановка задачи и вспомогательные факты

Рассмотрим уравнение

$$sgn\, x\, \frac{\partial^8 u(x,t)}{\partial t^8} + \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0, \tag{1}$$

в области $\Omega = \{-1 < x < 1,\ x \neq 0,\ 0 < t < T\}$.

Задача. Ищется функция $u(x,t)$удовлетворяющая уравнению (1) в Ω и следующим условиям:
начальным

$$\left.\frac{\partial^j u(x,t)}{\partial t^j}\right|_{t=0} = \varphi_j(x),\ j = 0,1,2,...,7.,\ \ -1 \leqslant x \leqslant 1; \tag{2}$$

граничным

$$u(-1,t) = u(1,t) = 0,\ \ 0 \leqslant t \leqslant T; \tag{3}$$

а также условиям склеивания

$$u(-0,t) = u(+0,t),\ u_x(-0,t) = u_x(+0,t),\ \ 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{4}$$

Одним из первых работ, посвященных параболическим уравнениям с меняющимся направлением времени, были работы М. Жевре. Теория разрешимости краевых задач для подобных уравнений былы рассмотрены в работах С.А. Терсенова, А.М. Нахушева, И.Е. Егорова, Н.В. Кислова, С.Г.Пяткова, С.В. Попова и многих других авторов. Уравнениям смешанного типа посвящены работы А.В. Бицадзе, М.С. Салахитдинова, В. Врагова, А.И. Кожанова, С.Г. Пяткова и других авторов. (см. [5] и цитированную там литературу). Некорректные краевые задачи были рассмотрены в работах [1,2,4,6]. Нетрудно доказать, что решение задачи (1)-(4) неустойчиво относительно начальных данных. Это можно увидеть из представления решения, которое нами будет получено далее.

Для дальнейшего изложения наших результатов нам понадобиться свойства собственных значений и собственных функций следующей спектральный задачи (см. [5])

$$\begin{cases} sgn\, x\, X''(x) + \lambda X(x) = 0, \\ X(-1) = X(1) = 0, \\ X(-0) = X(+0),\ X'(-0) = X'(+0), \end{cases} \tag{5}$$

Пусть $\left\{X_k^+(x)\right\}_{k=1}^{\infty}$, $\left\{X_k^-(x)\right\}_{k=1}^{\infty}$-собственные функции задачи (5) отвечающие соответственно положительным λ_k^+ и отрицательным λ_k^- собственным значениям, причем числа λ_k^+, $-\lambda_k^-$ образуют неубывающие последовательности. Заметим, что

$$X_k^{\pm}(x)=\begin{cases} sh\sqrt{\lambda_k^{\pm}}sin\sqrt{\lambda_k^{\pm}}(1-x), & 0\leqslant x\leqslant 1;\\ sin\sqrt{\lambda_k^{\pm}}sh\sqrt{\lambda_k^{\pm}}(1+x), & -1\leqslant x\leqslant 0;\end{cases},$$

где $\pm\lambda_k^{\pm}=\mu_k^4$, $k=1,2,...$, μ_k положительный корень уравнения $tg\mu^2=-th\mu^2$. Причем $\mu_k<\mu_{k+1}$, $\mu_1\approx 1{,}5378622735574$, $k=1,2,...$.

Обозначим $(u,v)=\int\limits_{-1}^{1}uvdx$ скалярное произведение в $L_2(-1,1)$, $\|u\|^2=(u,u)$.

$$\left(sgnxX_k^+,X_j^-\right)=0,\forall k,j;$$

$$\left(sgnxX_k^{\pm},X_j^{\pm}\right)=\delta_{kj},\ \delta_{kj}=\begin{cases}1,\ k=j,\\ 0,\ k\neq j.\end{cases}$$

Пусть $P^{\pm}$ - спектральные проекторы, определяемые равенствами

$$P^{\pm}u=\sum_{k=1}^{\infty}\left(sgnxu,X_k^{\pm}\right)X_i^{\pm}.$$

Тогда, имеем [5]

$$\left(P^+-P^-\right)u=u,\ \left(sgnx\left(P^+-P^-\right)u,u\right)=\|u\|_0^2,$$

$$\left(sgnxP^{\pm}u,v\right)=\left(sgnxu,P^{\pm}v\right),u,v\in H_0=L_2(-1,1),$$

$$\|u(x,t)\|_0^2=\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\left|\left(sgn\,x\,u(x,t),\,X_k^+\right)\right|^2+\left|\left(sgn\,x\,u(x,t),\,X_k^-\right)\right|^2\right\}. \quad (6)$$

Согласно результатам работ [5] собственные функции задачи (5) образуют базис Рисса в H_0 и норма пространства $L_2(-1;\,1)$, определенная равенством (6), эквивалентна исходной.

Под обобщенным решением краевой задачи (1)-(4) понимаем функцию $u(x,t)$, такую, что $u(x,t) \in (C[0,\,T];\,L_2(-1,\,1))$,

$$\int\limits_0^T \int\limits_{-1}^1 u(x,t)\left(sgn\,x\,\frac{\partial^8 V}{\partial t^8} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)dxdt =$$

$$\int\limits_{-1}^1 \operatorname{sgn} x \left(\sum_{k=0}^{7}(-1)^k \varphi_{7-k}(x)\,\frac{\partial^k V}{\partial t^k}\bigg|_{t=0}\right)dx, \quad (7)$$

для любой функции $V(x,t) \in W_2^8(\Omega)$, $\frac{\partial^j V}{\partial t^j}\Big|_{t=T} = 0$, $j = 0,1,...,7.$, $V(-1,t) = V(1,t) = 0$.

Лемма 1. Для решения уравнения

$$\frac{d^8\nu}{dt^8} - \theta^4 \nu = 0,$$

удовлетворяющего условиям

$$\frac{d^j\nu(0)}{dt^j} = f_j,\ j = 0,1,...,7.,$$

справедлива оценка

$$\nu^2(t) \leqslant 8\left(\sum_{j=0}^{7}|\theta|^{-j} f_j^2\right)^{1-\frac{t}{T}} \left(\sum_{j=0}^{7}|\theta|^{-j}\left(\frac{d^j\nu(T)}{dt^j}\right)^2\right)^{\frac{t}{T}},$$

где θ - константа.

Доказательство. Доказательство данного неравенство приведем последовательно, начиная с уравнения первого порядка.

1. Пусть $p(t)$ решение уравнение $p_t - \alpha p = 0$. Тогда легко заметить, что для функции $p(t)$ справедлива оценка

$$|p(t)| \leqslant (|p(0)|)^{1-\frac{t}{T}}(|p(T)|)^{\frac{t}{T}}. \quad (8)$$

2. Рассмотрим теперь дифференциальное уравнение

$$h_{tt} = \alpha h,$$

и введем обозначения $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\frac{dh}{dt} = g$, $x = h + g$, $y = h - g$ тогда после некоторых преобразований имеем

$$\begin{array}{l} x_t - \sqrt{\alpha} x = 0 \\ x(0) = h(0) + \alpha^{-1/2} h_t(0) \end{array}$$

и

$$\begin{array}{l} y_t + \sqrt{\alpha} y = 0 \\ y(0) = h(0) - \alpha^{-1/2} h_t(0) \end{array} .$$

Применяя неравенств (8) получим, что для функция $h(t)$ верно неравенство

$$|h(t)|^2 \leqslant \frac{1}{2}\left(\left|h(0) + \alpha^{-\frac{1}{2}} h_t(0)\right|^{2\frac{T-t}{T}} \left|h(T) + \alpha^{-\frac{1}{2}} h_t(T)\right|^{2\frac{t}{T}} + \right.$$
$$\left. \left|h(0) - \alpha^{-\frac{1}{2}} h_t(0)\right|^{2\frac{T-t}{T}} \left|h(T) - \alpha^{-\frac{1}{2}} h_t(T)\right|^{2\frac{t}{T}} \right). \quad (9)$$

Используя неравенство $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$, для решение уравнения $h_{tt} = \alpha h$ получаем

$$|h(t)|^2 \leqslant 2\Big(|h(0)|^2 + |\alpha|^{-1} |h_t(0)|^2\Big)^{\frac{T-t}{T}} \Big(|h(T)|^2 + |\alpha|^{-1} |h_t(T)|^2\Big)^{\frac{t}{T}}. \quad (10)$$

3. Теперь рассмотрим уравнение $\frac{d^4\phi}{dt^4} - \alpha^2 \phi = 0$. Введем обозначения $\frac{1}{\alpha}\frac{d^2\phi}{dt^2} = \vartheta$, $w = \phi + \vartheta$, $v = \phi - \vartheta$, тогда имеем

$$\begin{array}{l} w_{tt} - \alpha w = 0 \\ w(0) = \phi(0) + \alpha^{-1} \phi_{tt}(0), \ w_t(0) = \phi_t(0) + \alpha^{-1} \phi_{ttt}(0), \end{array} \quad (11)$$

и

$$\begin{array}{l} v_{tt} + \alpha v = 0 \\ v(0) = \phi(0) - \alpha^{-1} \phi_{tt}(0), \ v_t(0) = \phi_t(0) - \alpha^{-1} \phi_{ttt}(0). \end{array} \quad (12)$$

Очевидно, что для решение задачи (11) согласно (10) верно оценка

$$|w(t)|^2 \leqslant 2\left(\Big(|w(0)|^2 + |\alpha|^{-1} |w_t(0)|^2\Big)^{1-\frac{t}{T}} \Big(|w(T)|^2 + |\alpha|^{-1} |w_t(T)|^2\Big)^{\frac{t}{T}}\right).$$

Уравнение (12) перепишем в виде $v_{tt} - i^2 \alpha v = 0$. Согласно (9) для решение данной задачи верно оценка

$$|v(t)|^2 \leqslant \tfrac{1}{2}\left(\left|v(0)+i\alpha^{-\frac{1}{2}}v_t(0)\right|^{2\frac{T-t}{T}}\left|v(T)+i\alpha^{-\frac{1}{2}}v_t(T)\right|^{2\frac{t}{T}}\right.$$
$$\left.+\left|v(0)-i\alpha^{-\frac{1}{2}}v_t(0)\right|^{2\frac{T-t}{T}}\left|v(T)-i\alpha^{-\frac{1}{2}}v_t(T)\right|^{2\frac{t}{T}}\right),$$

или

$$|v(t)|^2 \leqslant 2\left(\left(|v(0)|^2+|\alpha|^{-1}|v_t(0)|^2\right)^{1-\frac{t}{T}}\left(|v(T)|^2+|\alpha|^{-1}|v_t(T)|^2\right)^{\frac{t}{T}}\right).$$

Замечая, что $|\phi(t)|^2 \leqslant \frac{1}{2}\left(|w(t)|^2+|v(t)|^2\right)$ и учитывая начальные условия задачи (11), (12) можно получить следующую оценку для решения уравнения четвертого порядка

$$|\phi(t)|^2 \leqslant 4\left(\left(\sum_{j=0}^{3}|\alpha|^{-j}\left|\frac{d^j}{dt^j}\phi(0)\right|^2\right)^{1-\frac{t}{T}}\left(\sum_{i=0}^{3}|\alpha|^{-j}\left|\frac{d^j}{dt^j}\phi(T)\right|^2\right)^{\frac{t}{T}}\right).$$

Применяя данной метод для уравнения $\frac{d^8\nu}{dt^8}-\theta^4\nu=0$, имеем оценку

$$|\nu(t)|^2 \leqslant 8\left(\left(\sum_{j=0}^{7}|\theta|^{-j}\left|\frac{d^j}{dt^j}\nu(0)\right|^2\right)^{1-\frac{t}{T}}\left(\sum_{i=0}^{7}|\theta|^{-j}\left|\frac{d^j}{dt^j}\nu(T)\right|^2\right)^{\frac{t}{T}}\right).$$

2. Априорная оценка

Пусть решение задачи (1)-(4) существует и имеет вид

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k^+(t)X_k^+ + \sum_{k=1}^{\infty}u_k^-(t)X_k^-,$$

здесь $u_k^{\pm}(t) = \int\limits_{-1}^{1} sgn\, x\, u(x,t)X_k^{\pm}(x)dx,\ k = 1,2,3,....$ Из определения решение, получим, что $u_k^{\pm}(t)$ удовлетворяет следующим задачам, соответственно:

$$\begin{cases} \frac{d^8}{dt^8}\left\{u_k^+(t)\right\}-\mu_k^4 u_k^+(t)=0, \\ \frac{d^j}{dt^j}u_k^+(0)=\varphi_{j_k}^+,\ j=0,1,...7., \end{cases}, \qquad (13)$$

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{d^8}{dt^8}\left\{u_k^-(t)\right\}+\mu_k^4 u_k^-(t)=0, \\ \frac{d^j}{dt^j}u_k^-(0)=\varphi_{j_k}^-,\ j=0,1,...7., \end{array}\right. , \tag{14}$$

где $\varphi_{j_k}^{\pm}=\int\limits_{-1}^{1} sgn\,x\,\varphi_j(x)X_k^{\pm}(x)dx,\ j=0,1,...,7.,\ k=1,2,....$

Применяя лемму 1 для решения задач (13), (14) имеем соответствующие оценки

$$\left|u_k^+(t)\right|^2\leqslant 8\left(\sum_{j=0}^{7}|\mu_k|^{-j}\left|\varphi_{j_k}^+\right|^2\right)^{1-\frac{t}{T}}\left(\sum_{j=0}^{7}|\mu_k|^{-j}\left|\frac{d^j}{dt^j}u_k^+(T)\right|^2\right)^{\frac{t}{T}}, \tag{15}$$

$$\left|u_k^-(t)\right|^2\leqslant 8\left(\sum_{j=0}^{7}|\mu_k|^{-j}\left|\varphi_{j_k}^-\right|^2\right)^{1-\frac{t}{T}}\left(\sum_{i=0}^{7}|\mu_k|^{-j}\left|\frac{d^j}{dt^j}u_k^-(T)\right|^2\right)^{\frac{t}{T}}. \tag{16}$$

На основе (6) $\|u(x,t)\|_0^2=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\left|u_k^+(t)\right|^2+\left|u_k^-(t)\right|^2\right)$. Суммируя неравенства (15) и (16) по k и используя неравенство Гельдера, получим

$$\begin{gathered}\|u(x,t)\|_0^2\leqslant 16\left(\sum_{j=0}^{7}\sum_{k=1}^{\infty}|\mu_k|^{-j}\left(\left|\varphi_{j_k}^+\right|^2+\left|\varphi_{j_k}^-\right|^2\right)\right)^{1-\frac{t}{T}}\times \\ \left(\sum_{j=0}^{7}\sum_{k=1}^{\infty}|\mu_k|^{-j}\left(\left|\frac{d^j}{dt^j}u_k^+(T)\right|^2+\left|\frac{d^j}{dt^j}u_k^-(T)\right|^2\right)\right)^{\frac{t}{T}}\end{gathered} \tag{17}$$

3. Условная корректность задачи

Пусть

$$M=\left\{u:\sum_{j=0}^{7}\sum_{k=1}^{\infty}|\mu_k|^{-j}\left(\left|\frac{d^j}{dt^j}u_k^+(T)\right|^2+\left|\frac{d^j}{dt^j}u_k^-(T)\right|^2\right)\leqslant m^2\right\}.$$

Теорема 1. Пусть решение задачи (1) - (4) существуют и $u(x,t)\in M$. Тогда решение задачи (1)-(4) единственно.

Доказательство. Пусть $u_1(x,t),\ u_2(x,t)$ являются решениями задачи (1) - (4) с одинаковыми данными, соответственно. Тогда $u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ удовлетворяет задачу (1) - (4) с нулевыми данными. Из (17) следует $\|u(x,t)\|_0 \leqslant 0 \Rightarrow u(x,t) = 0$ или $u_1(x,t) = u_2(x,t)$ для $\forall\,(x,t) \in \Omega$.

Теорема 2. Пусть решение задачи (1) - (4) существует и $u(x,t) \in M$. Пусть $\|\varphi_j(x) - \varphi_{j_\varepsilon}(x)\|_0 \leqslant \varepsilon$, $j = 0,1,...,7.$. Тогда для любого решение задачи (1) - (4) при $(x,\ t) \in \Omega$ имеет место неравенства

$$\|u(x,t)\|_0 \leqslant \varpi(\varepsilon,m),$$

где $\varpi(\varepsilon,m) = 4(\sqrt{c}\varepsilon)^{\frac{T-t}{T}}(2m)^{\frac{t}{T}}$, $c = \frac{\mu_1^8-1}{\mu_1^7(\mu_1-1)}$.

Доказательство. Пусть решение задачи (1)-(4) существует. Рассмотрим разность $U(x,t) = u(x,t) - u_\varepsilon(x,t)$, где $u(x,t)$ решение задачи (1)-(4) с точными данными, $u_\varepsilon(x,t)$ решение задачи (1)-(4) приближенными данными, заметим, что $u(x,t)$, $u_\varepsilon(x,t) \in M$. Функция $U(x,t)$ является решением уравнения в области Ω

$$sign\,x\,\frac{\partial^8 U(x,t)}{\partial t^8} + \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} = 0,$$

с начальными данными

$$\frac{d^j}{dt^j}U(x,0) = \varphi_j(x) - \varphi_{j_\varepsilon}(x),\ \ j = 0,1,...,7.,\ \ -1 \leqslant x \leqslant 1,$$

граничными данными $U(-1,t) = U(1,t) = 0,\ 0 \leqslant t \leqslant T,$ а также условиями склеивания

$$U(-0,t) = U(+0,t),\ U_x(-0,t) = U_x(+0,t),\ 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Из неравенство (17) следует

$$\|U(x,t)\|_0^2 \leqslant 16\left(\sum_{j=0}^{7}\sum_{k=1}^{\infty}|\mu_k|^{-j}\left(\left|\varphi_{j_k}^+ - \varphi_{j_{k\varepsilon}}^+\right|^2 + \left|\varphi_{j_k}^- - \varphi_{j_{k\varepsilon}}^-\right|^2\right)\right)^{1-\frac{t}{T}} \times$$
$$\left(\sum_{j=0}^{7}\sum_{k=1}^{\infty}|\mu_k|^{-j}\left(\left|\frac{d^j}{dt^j}U_k^+(T)\right|^2 + \left|\frac{d^j}{dt^j}U_k^-(T)\right|^2\right)\right)^{\frac{t}{T}}.$$

Оценим множителей правой частей раздельно:

$$1. \sum_{j=0}^{7}\sum_{k=1}^{\infty}|\mu_k|^{-j}\left(\left|\varphi_{j_k}^{+}-\varphi_{j_{k\varepsilon}}^{+}\right|^2+\left|\varphi_{j_k}^{-}-\varphi_{j_{k\varepsilon}}^{-}\right|^2\right)\leqslant$$

$$\sum_{j=0}^{7}\sum_{k=1}^{\infty}|\mu_1|^{-j}\left(\left|\varphi_{j_k}^{+}-\varphi_{j_{k\varepsilon}}^{+}\right|^2+\left|\varphi_{j_k}^{-}-\varphi_{j_{k\varepsilon}}^{-}\right|^2\right)\leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon^2\sum_{j=0}^{7}\mu_1^{-j}=\frac{\mu_1^8-1}{\mu_1^7(\mu_1-1)}\varepsilon^2.$$

$$2. \sum_{j=0}^{7}\sum_{k=1}^{\infty}|\mu_k|^{-j}\left(\left|\frac{d^j}{dt^j}U_k^{+}(T)\right|^2+\left|\frac{d^j}{dt^j}U_k^{-}(T)\right|^2\right)\leqslant$$

$$2\sum_{j=0}^{7}\sum_{k=1}^{\infty}|\mu_k|^{-j}\left(\left|\frac{d^j}{dt^j}u_k^{+}(T)\right|^2+\left|\frac{d^j}{dt^j}u_k^{-}(T)\right|^2+\right.$$

$$\left.\left|\frac{d^j}{dt^j}u_{k\varepsilon}^{+}(T)\right|^2+\left|\frac{d^j}{dt^j}u_{k\varepsilon}^{-}(T)\right|^2\right)\leqslant 4m^2.$$

После несложных преобразований получим неравенства

$$\|U(x,t)\|_0^2\leqslant 16\left(c\varepsilon^2\right)^{\frac{T-t}{T}}\left(4m^2\right)^{\frac{t}{T}},$$

где $c=\frac{\mu_1^8-1}{\mu_1^7(\mu_1-1)}$. Что и требовалось доказать.

Замечание. Нетрудно заметить, что аналогичным образом можно рассматривать и уравнения более общего вида.

Литература

1. Levine H. A. Logarithmic Convexity and the Cauchy Problem for some Abstract Second order Differential Inequalities.// J.of Dif. Equations 1970, v.8, pp. 34-55.

2. Крейн С.Г., Хазан М.И. Дифференциальные уравнения в банаховом пространстве, Итоги науки и техн. Сер. Мат. анал., 1983, том 21, 130-264.

3. Костин В.А., Костин А.В., Бадран С. О корректной разрешимости задачи Коши для обобщенного телеграфного уравнения, Вестн.ЮУрГУ.Сер.Матем. моделирование и программирование, 2014, том 7, выпуск 3, 50-59

4. Лаврентьев М. М., Романов В.Г., Шишатский С.П.. Некорректные задачи математической физики и анализа. //М.: Наука, 1980.

5. Пятков С.Г. Неклассические дифференциальные уравнения в частных производных. // Новосибирск. 1988.

6. Фаязов К.С. Некорректная задача Коши для дифференциального уравнения первого и второго порядка с операторными коэффициентами. Сибирский Математический Журнал, 1994, т.35, №3, с. 702-706.

Национальный Университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека.
Ташкентский государственный технический университет имени Абу Райхана Беруни

Uzbek Mathematical
Journal, 2016,№4, pp.158-168

УДК 517.51

On estimates of the best approximations of functions with derivative of generalized finite variation by rational ones

Khatamov A. , Norqulov E.A.

Maqola hosilalari umumlashgan chekli variatsiyali funksiyalarni to‘g‘ri chiziqning chekli oralig‘ida tekis va integral metrikalarda kichiklik tartibi ma’nosida aniq eng yaxshi ratsional yaqinlashtirishlari baholariga bag‘ishlangan.

Статья посвящена точным в смысле порядка малости оценкам наилучших рационально приближенных функций с обобщенной конечной вариацией на конечном отрезке прямой в равномерной и интегральных метриках.

1. Introduction

The article devoted to introduce the full proves of results of the article [1] in which the exact in the sense of the order of smallness estimates (ESOSE) of the best rational approximations of functions with derivative of generalized finite variation (FDGFV) given on a finite segment of the straight line in uniform and integral metrics was announced.They are analogs of the results of the article [2] of the first author, where the ESOSE for the best spline approximations of functions with derivative of generalized finite variation in uniform and integral metrics are established. Besides, these results are distribution of the results of the article [3] of N.Sh.Zagirov to functions with derivative of generalized finite variation.

2. Some definitions and notations.

Let $\mathbb{N}$ be the set of all natural numbers , $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$, let $\Delta = [a, b]$ be a finite segment of the straight line, $|\Delta| = b - a$, $f(x)$ is a measurable by Lebesque real-valued on the segment Δ function, let $L_p(\Delta)$ be the space of all measurable by Lebesque real-valued on the segment Δ functions f whose pth power is integrable. The space is equipped with the quasi-norm

$$||f||_{p,\Delta} := \Big\{ \int\limits_{\Delta} \big|f(x)\big|^p dx \Big\}^{1/p} \qquad (0 < p < \infty),$$

$$||f||_{\infty,\Delta} := esssup\big\{|f(x)| : x \in \Delta\big\} \qquad\qquad (p = \infty).$$

Let $\Phi(u)$ be a continuous, increasing, convex to down function, defined on the interval $[0, \infty)$ and such that $\Phi(0) = 0$. For the function $f(x)$, defined and finite on the segment Δ, the value

$$V_\Phi(f, \Delta) := sup\Big\{\sum_{k=0}^{n-1} \Phi[|f(x_{k+1}) - f(x_k)|]\Big\},$$

where the upper band is taken over all possible partitions $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b, n = 1, 2, ...,$ of the segment Δ, is called its Φ-variation ([4]).

Let be $M = const > 0$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $V_\Phi^{(r)}(M, \Delta)$ is the set of all functions f whose rth order derivative with bounded by number M Φ-variation on the segment Δ, i.e.

$$V_\Phi^{(r)}(M, \Delta) = \big\{f : V_\Phi(f^{(r)}, \Delta) \le M\big\} \qquad (f^{(0)}(x) \equiv f(x)).$$

We denote by $V(f^{(r)}, \Delta)$ the value of $V_\Phi(f^{(r)}, \Delta)$ at $\Phi(u) = u$, i.e. $V(f^{(r)}, \Delta)$ is the full variation of the function $f^{(r)}$ on the segment Δ,and $V^{(r)}(M, \Delta) = \big\{f : V(f^{(r)}, \Delta) \le M\big\}$.

The value

$$\chi(f, n) := sup\Big\{\sum_{k=0}^{n-1} | f(x_{k+1}) - f(x_k |: a \le x_0 \le x_1 \le \cdots \le x_n \le b\Big\}$$

is called a modulus of variation of the function f on a segment Δ ([5],[6]) .

A function s is called a polynomial spline (or shorter spline) of degree m of minimal defect(or of defect 1) with arbitrary free $n + 1$ knots $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ on a segment Δ if

1) s is polynomial of the degree non-exceeding m on each segment $[x_k, x_{k+1}], k = 0, 1, ...n - 1;$

2) the $(m - 1)$th order derivative of the function s is continuous on the segment Δ.

We denote by $S(m, n, \Delta)$ the set of all splines of degree m of minimal defect with arbitrary free $n + 1$ knots on a segment Δ and for $0 < p \le \infty$ by $S_n^m(f, \Delta)_p-$ the least deviation of a function f from the splines $s \in$

$S(m,n,\Delta)$ with respect to the quasi-norm of the space $L_p(\Delta)$, i.e.

$$S_n^m(f,\Delta)_p := inf\,\{\| f - s \|_{p,\Delta} \colon s \in S(m,n,\Delta)\}\,.$$

By $R_n(f,\Delta)_p$ we denote the least deviation of a function f with finite Φ-variation from the set $\mathbb{R}_n$ of all rational functions of the order non-exceeding n,i.e.

$$R_n(f,\Delta)_p := inf\,\{\| f - g \|_{p,\Delta} \colon g \in \mathbb{R}_n\}\,.$$

By analogy we can define the same value with respect to the uniform norm which we denote by $R_n(f,\Delta)$. Generally in the all values like $R_n(f,\Delta)_p$ the subscript p is omitted if instead of $L_p(\Delta)$ quasi-norm we use uniform norm.

Let

$$R_n(V_\Phi^{(r)}(M,\Delta))_p := sup\left\{R_n(f,\Delta)_p : f \in V_\Phi^{(r)}(M,\Delta)\right\}.$$

If in the last two definitions the rational functions $g \in \mathbb{R}_n$to change by the polynomials of the degree $\le n$, then we have values $E_n(f,\Delta)_p$, $E_n(V_\Phi^{(r)}(M,\Delta))_p$. In case of $r=0$ in last notation the superscript (r) will be omitted.

Throghout this article, $C(\beta_1,\beta_2,\cdots), C_1(\beta_1,\beta_2,\cdots),\cdots$ denotes positive constants which depend only on the parameters indicated in parenthesis and on the subscripts, and $C, C_1, \cdots -$ positive absolute constants.

3.Main results. From the Jeckson type theorems (see.[7]) for $p \ge 1, n \in \mathbb{N}$ follows that $E_n(V^{(r)}(M,\Delta))_p \asymp n^{-r-(1/p)}$. In the article [3] by Zagirov N.Sh. was established the following theorems:

Theorem 1. *For any bounded and measurable by Lebesque on the segment $I=[0,1]$ function f for $0<p<\infty$ we have*

$$R_n(f,I)_p \le C_2(p)\chi(f,n)/n. \tag{1}$$

In [3] it is also shown that the estimate (1) is the exact in the sense of the order of smallness.

Theorem 2. *For each positive number p as $n \to \infty$ we have*

$$R_n(V_\Phi(M,\Delta))_p \asymp \Phi^{-1}(M/n).$$

More exactly,

$$R_n\Big(V_\Phi(M,\Delta)\Big)_p \le C_2(p) \mid \Delta \mid^{1/p} \Phi^{-1}(M/n),$$

$$R_n\Big(V_\Phi(M,\Delta)\Big)_p \ge C_3(p) \mid \Delta \mid^{1/p} \Phi^{-1}(M/n).$$

$n = 1, 2, \ldots, C_3(p) = 0,01 \cdot 6^{-1/p}$.

The following theorems are analogs of Theorem 1 and Theorem 2 for functions f with bounded rth derivative and $f \in V_\Phi^{(r)}(M,\Delta)$ respectively. Also these theorems are the main results of this article.

Theorem 3. *If for $r \in \mathbb{N}$ $f^{(r)}$ is bounded on a segment Δ, then for any p, $0 < p \le \infty$, $n \in \mathbb{N}$, $n \ge r+2$*

$$R_n(f,\Delta)_p \le C_4(r) \mid \Delta \mid^{r+(1/p)} \chi(f^{(r)}, n)/n^{r+1},$$

In the other hand, for each $n \in \mathbb{N}$ and $r \in \mathbb{N}$ there exist a function $f = f_{n,r} \in V_\Phi^{(r)}(M,\Delta)$ with continuous on a segment Δ derivative $f^{(r)}$ and such that

$$R_n(f,\Delta)_p \ge C_1(r,p) \mid \Delta \mid^{r+(1/p)} \chi(f^{(r)}, n)/n^{r+1},$$

where $C_1(r,p) = \left\{24r(12\pi r)^r[6(p+1)]^{1/p}\right\}^{-1}$ at $0 < p < \infty$ and $C_1(r,\infty) = \left\{24r(12\pi r)^r\right\}^{-1}$.

Theorem 4. *For all $p, 0 < p \le \infty$, $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{N}$ the estimates*

$$C_1(r,p) \mid \Delta \mid^{r+(1/p)} n^{-r}\Phi^{-1}(M/n) \le R_n(V_\Phi^{(r)}(M,\Delta))_p \le$$

$$C_4(r) \mid \Delta \mid^{r+(1/p)} n^{-r}\Phi^{-1}(M/n)$$

hold , where $C_4(r)$ and $C_1(r,p)$ are the values from Theorem 3.

4. Proofs of Theorems 3 and 4. 4.1. The first we prove the upper estimates of Theorems 3 and 4. By this aim we introduce the Sobolev class $W_q^r[a,b]$ of the all functions f such that $f^{(r-1)}$ is absolutly continuous on a segment $\Delta = [a,b]$ and $f^{(r)} \in L_q[a,b]$. Further, we use the following theorem of P.P.Petrushev ([8], [9], [10]).

Theorem 5. *If $f \in W_q^r[a,b], \alpha > 0, m \in \mathbb{N}$, then the estimates*

$$R_n(f,\Delta)_p \le C_1(p,q,r,\alpha)|\Delta|^{r+(1/p)-(1/q)}n^{-r-\alpha}\sum_{\nu=0}^{n}(\nu+1)^{\alpha-1}R_\nu(f^{(r)},\Delta)_q,$$

$n \geq r$ and

$$R_n(f,\Delta)_p \leq C_2(p,q,r,\alpha,m)$$

$$|\Delta|^{r+(1/p)-(1/q)}n^{-r-\alpha}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{\alpha-1}S_\nu^{m-1}(f^{(r)},\Delta)_q, n \geq r+m-1 \qquad (2)$$

hold in the following cituations :

$$1) r=1, 1 \leq p < \infty, q=1;$$

$$2) r=1, p=\infty, 1 < q \leq \infty;$$

$$3) r \geq 2, p=\infty, q=1.$$

If f is any function with rth order derivative $f^{(r)}(r \geq 1)$ on the finite segment Δ, then from Theorem 1 of the article [2] of the author, where the ESOSE for the best spline approximations are established, it follows that for any $0 < q < \infty, n \in \mathbb{N}$ estimate

$$S_n^1(f^{(r)},\Delta)_q \leq 5 \mid \Delta \mid^{1/q} \chi(f^{(r)},n)/n \qquad (3)$$

holds. Taking into account the inequalities (3) and (2) of the situation 2) of Theorem 5 at $r=1, n \geq 2, \alpha=3, q=2$ we obtain

$$R_n(f,\Delta) \leq C_3|\Delta|^{1/2}n^{-4}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^2 S_\nu^1(f',\Delta)_2 \leq 5C_3|\Delta|n^{-4}\sum_{\nu=1}^{n}\nu\chi(f',\nu) \leq$$

$$10C_3|\Delta|n^{-2}\chi(f',n). \qquad (4)$$

Let now $r \geq 2$ any natural number, $q=1$ and f any function having bounded rth order derivative on the segment Δ. Then from (3) at all $n \in \mathbb{N}$ we have

$$S_n^1(f^{(r)},\Delta)_1 \leq 5 \mid \Delta \mid \chi(f^{(r)},n)/n. \qquad (5)$$

Taking into account of (5) from inequality (2), accomplishing in situation 3) of Theorem 5, for $\alpha=3$, $n \geq r+1$, we have

$$R_n(f,\Delta) \leq C_5(r)|\Delta|^{r-1}n^{-r-3}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^2 S_\nu^1(f^{(r)},\Delta)_1 \leq$$

$$5C_5(r)|\Delta|^r n^{-r-3}\sum_{\nu=1}^{n}\nu\chi(f^{(r)},\nu)\le 10C_5(r)|\Delta|^r n^{-r-1}\chi(f^{(r)},n). \qquad (6)$$

Inequalities (4) and (6) give us the upper estimate of Theorem 3. The upper estimate of Theorem 4 easily follows from the upper estimate of Theorem 3 and inequality

$$\chi(f^{(r)},n)\le n\Phi^{-1}(M/n),$$

which valid for any $f\in V_\Phi^{(r)}(M,\Delta)$ and can be established by following way: for arbitrary partition $a\le x_0\le x_1\le\cdots\le x_n\le b$ using convexity in down property of the function Φ, we get

$$\sum_{k=0}^{n-1}|f^{(r)}(x_{k+1})-f^{(r)}(x_k)|=n\Phi^{-1}\left\{\Phi[1/n\sum_{k=0}^{n-1}|f^{(r)}(x_{k+1})-f^{(r)}(x_k)|]\right\}$$

$$\le n\Phi^{-1}\left\{1/n\sum_{k=0}^{n-1}\Phi[|f^{(r)}(x_{k+1})-f^{(r)}(x_k)|]\right\}$$

$$\le n\Phi^{-1}[V_\Phi(f^{(r)},\Delta)/n]\le n\Phi^{-1}(M/n). \qquad (7)$$

4.2.Proofs of lowerestimates of Theorems 3 and 4.

Proposition 1. *For arbitrary $r\in\mathbb{N}$, $n\in\mathbb{N}$ the function*

$$f(x)=f_{n,r,\Phi}(x)=(1/2)(12\pi rn)^{-r}\Phi^{-1}[M/(12rn)]sin(12\pi rnx),$$

where Φ and M the function and constant from Theorem 4, such that $f\in V_\Phi^{(r)}(M,I)$ and for any $p, 0<p\le\infty$

$$R_n(f,I)_p\ge\left\{24r(12\pi r)^r[6(p+1)]^{1/p}\right\}^{-1}n^{-r}\Phi^{-1}(M/n).$$

Proof of Proposition 1. Let r be an even natural number. Then

$$f^{(r)}(x)=[(-1)^{r/2}/2]\Phi^{-1}[M/(12rn)]sin(12\pi rnx).$$

We prove that $f\in V_\Phi^{(r)}(M,I)$. Indeed, in the points $x_k=k/(12rn)\in I$, $k=\overline{0,12rn}$ the function $f^{(r)}(x)$ equal to zero and in the points $y_k=[k+(1/2)]/(12rn)\in I$, $k=\overline{0,12rn-1}$, $f^{(r)}(y_k)=$

$[(-1)^{k+(r/2)}/2]\Phi^{-1}[M/(12rn)]$. Hence,

$$V_\Phi(f^{(r)}, I) = \Phi(|f^{(r)}(y_0) - f^{(r)}(0)|) +$$

$$\sum_{k=1}^{12rn-1} \Phi(|f^{(r)}(y_k) - f^{(r)}(y_{k-1})|) + \Phi(|f^{(r)}(1) - f^{(r)}(y_{12rn-1})|) =$$

$$2\Phi\left\{(1/2)\Phi^{-1}[M/(12rn)]\right\} + (12rn-1)\Phi\left\{\Phi^{-1}[M/(12rn)]\right\} \leq M,$$

i.e. $f \in V_\Phi^{(r)}(M, I)$.

If r be any odd natural number, then

$$f^{(r)}(x) = [(-1)^{(r-1)/2}/2]\Phi^{-1}[M/(12rn)]cos(12\pi rnx).$$

So in the points $x_k = k/(12rn) \in I$, $k = \overline{0, 12rn},$

$$f^{(r)}(x_k) = [(-1)^{k+(r-1)/2}/2]\Phi^{-1}[M/(12rn)]$$

and in the points $y_k = [k + (1/2)]/(12rn) \in I$, $k = \overline{0, 12rn-1}$, $f^{(r)}(y_k) = 0$. So

$$V_\Phi(f^{(r)}, I) = \sum_{k=0}^{12rn-1} \Phi(|f^{(r)}(x_{k+1}) - f^{(r)}(x_k)|) =$$

$$12rn\Phi\left\{\Phi^{-1}[M/(12rn)]\right\} = M.$$

Hence, in the case of an odd number r $f \in V_\Phi^{(r)}(M, I)$ too.

Further, we prove the lower estimate of Proposition 1 for $R_n(f, I)_p$. Obviously that the points $x_k = k/(12rn) \in I$, $k = \overline{0, 12rn}$ are all zeros of the function f on the segment I. So the function f has $12rn + 1$ sites of monotony in the segment I. Let R be any rational function of order does not exceed n. The number of zeros of the function R' does not exceed $2n-1$. Thus, the sites of monotony of the function R on the segment I does not exceed $2n$. Set

$$\Delta_j := [x_{3j-3}, x_{3j}], j = \overline{1, 4rn}; \delta_k := [x_k, x_{k+1}], k = \overline{0, 12rn-1}.$$

Denote by Δ'_j the segments Δ_j, inside of which R monotone, and the segments Δ_j, inside of which is offended the monotony of the function R we denote by Δ''_j. Obviously, the number of the segments Δ''_j does not exceed $2n-1$. So the number of segments Δ'_j is not less $2n(2r-1)+1 > 2nr$. Since inside of the each segment Δ'_j the function R is monotone, then there exists at least one segment $\delta_k \subset \Delta'_j$ such that in all points of which the inequality $f(x)R(x) \leq 0$ holds. Thus for any segment Δ'_j and $0 < p < \infty$ we have

$$\Big\{ \int\limits_{\Delta'_j} |f(x) - R(x)|^p dx \Big\}^{1/p} \geq \Big\{ \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} |f(x)|^p dx \Big\}^{1/p} =$$

$$(1/2)(12\pi rn)^{-r}\Phi^{-1}[M/(12rn)]\Big\{ \int\limits_{k/(12rn)}^{(k+1)/(12rn)} |sin(12\pi rnx)|^p dx \Big\}^{1/p} =$$

$$(1/2)(12\pi rn)^{-r-(1/p)}\Phi^{-1}[M/(12rn)]\Big\{ \int\limits_{k\pi}^{(k+1)\pi} |siny|^p dy \Big\}^{1/p} \geq$$

$$(1/2)[\pi/(p+1)]^{1/p}(12\pi rn)^{-r-(1/p)}\Phi^{-1}[M/(12rn)].$$

Thereby with account of the number of the segments Δ'_j and the convexity to up property of the function Φ^{-1} it is easy to get the following inequalities

$$\| f - R \|_{p,I} \geq \Big\{ \sum_{\Delta'_j} \int\limits_{\Delta'_j} |f(x) - R(x)|^p dx \Big\}^{1/p}$$

$$\geq \left\{24r(12\pi r)^r[6(p+1)]^{1/p}\right\}^{-1} n^{-r}\Phi^{-1}(M/n). \tag{8}$$

Passing to limit as $p \longrightarrow \infty$ in the last inequality, we get

$$\| f - R \|_{C(I)} \geq \{24r(12\pi r)^r\}^{-1} n^{-r}\Phi^{-1}(M/n). \tag{9}$$

From (8) and (9) it follows the lower estimate of Proposition 1. Proposition 1 is proved. $\square$

Proposition 2. *For each finite segment $\Delta = [a, b]$ and any $r \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ the function*

$$f(x) = f_{n,r,a,b,\Phi}(x) = (1/2)[(12\pi rn)/|\Delta|]^{-r}\Phi^{-1}[M/(12rn)]$$

$$sin\left\{12\pi rn[(x-a)/|\Delta|]\right\},$$

where Φ and M from Theorem 4, has the following properties:

a) $f \in V_\Phi^{(r)}(M,\Delta)$;

b)*for any* $p, 0 < p \le \infty$ *the estimate*

$$R_n(f,\Delta)_p \ge \left\{24r(12\pi r)^r[6(p+1)]^{1/p}\right\}^{-1} |\Delta|^{r+(1/p)} n^{-r}\Phi^{-1}(M/n)$$

holds.

Proof of Proposition 2. Since for any even number r

$$f^{(r)}(x) = [(-1)^{r/2}/2]\Phi^{-1}[M/(12rn)]sin\left\{12\pi rn[(x-a)/|\Delta|]\right\}.$$

and in the points $x_k = a + [k/(12rn)]|\Delta|$, $k = \overline{0, 12rn}$;

$$y_k = a + \{[k+(1/2)]/(12rn)\}|\Delta|, k = \overline{0, 12rn-1},$$

we have

$$f^{(r)}(x_k) = 0, f^{(r)}(y_k) = [(-1)^{k+(r/2)}/2]\Phi^{-1}[M/(12rn)],$$

then

$$V_\Phi(f^{(r)},\Delta) = \Phi(|f^{(r)}(y_0) - f^{(r)}(a)|) + \sum_{k=1}^{12rn-1} \Phi(|f^{(r)}(y_k)$$

$$-f^{(r)}(y_{k-1})|) + \Phi(|f^{(r)}(b) - f^{(r)}(y_{12rn-1})|) =$$

$$2\Phi\left\{(1/2)\Phi^{-1}[M/(12rn)]\right\} + (12rn-1)\Phi\left\{\Phi^{-1}[M/(12rn)]\right\} \le M,$$

i.e.

$$f \in V_\Phi^{(r)}(M,\Delta).$$

Let now r be an odd number. Then

$$f^{(r)}(x) = [(-1)^{(r-1)/2}/2]\Phi^{-1}[M/(12rn)]$$

$$cos\left\{12\pi rn[(x-a)/|\Delta|]\right\}.$$

and in the points $x_k = a + [k/(12rn)]|\Delta|$, $k = \overline{0, 12rn}$;

$$y_k = a + \{[k+(1/2)]/(12rn)\}|\Delta|,$$

$k = \overline{0, 12rn-1}$, we have

$$f^{(r)}(x_k) = [(-1)^{k+(r-1)/2}/2]\Phi^{-1}[M/(12rn)],$$

$f^{(r)}(y_k) = 0$. Hence,

$$V_\Phi(f^{(r)}, \Delta) = \sum_{k=0}^{12rn-1} \Phi(|f^{(r)}(x_{k+1}) - f^{(r)}(x_k)|) = 12rn\Phi\left\{\Phi^{-1}[M/(12rn)]\right\} = M,$$

which means that property a) of Proposition 2 is proved for any natural number r. Now we prove the property b) of Proposition 2.

Using Proposition 2 we get

$$R_n(f, \Delta)_p = \inf_{R \in \mathbb{R}_n} \left\{ \int_\Delta \left| f(x) - R(x) \right|^p dx \right\}^{1/p} = \inf_{R \in \mathbb{R}_n}$$

$$\left\{ \int_{[0,1]} \left| (1/2)[(12\pi rn)/|\Delta|]^{-r} \Phi^{-1}[M/(12rn)] sin(12\pi rny) \right.\right.$$

$$\left.\left. -R(a + |\Delta| y) \right|^p |\Delta| dy \right\}^{1/p} \geq \left\{ 24r(12\pi r)^r [6(p+1)]^{1/p} \right\}^{-1} \times$$

$$|\Delta|^{r+(1/p)} n^{-r} \Phi^{-1}(M/n).$$

Proposition 2 is proved. □

From Proposition 2 immediately follows the lower estimate of Theorem 4. And the lower estimate of Theorem 3 easily follows from Proposition 2 and inequality (7). The lower estimates of Theorems 3 and 4 are proved. Thus Theorem 3 and 4 completely proved. □

References

1. Khatamov A.,Norqulov E. On estimates of the best approximations of functions with derivative of generalized finite variation by polynomial ones. // Reports of the Acad.Sci. of Uzbekistan. 2014. No 2. P.5-6.

2. Khatamov A.On estimates of the best approximations of functions of generalized finite variation by polynomial splines. // Reports of the Acad.Sci. of Uzbekistan. 2012. No 6. P.8-9.

3. Zagirov N.Sh. On approximation of functions with generalized finite variation by rational ones.// Matem.Zametki.1982. V.32. No 5. P.657-668(in Russian).

4. Musielac J., Orlich W. On generalized variation (I).// Studia Math., 18, 1959. P. 11-41.

5. Chanturia Z.A. On absolute convergence of the Fourier series. // Matem.Zametki. 1975.V.18,No 2. P.185-192(in Russian).

6. Popov.V.A. On the connection between rational and spline approximation // C. R. Acad. Bulg. Sci. 1975. V.27, No 5. P.623-626.

7. Timan. A.F., Theory of Approximation of Function of Real Variable,GIFML,Moskow. 1960 - 624 p(in Russian); English translation: Macmillan,New York,1963.

8. Petrushev P. Relations between rational and spline approximations// Acta Math. Sci. Hung., 44. P.61-83.

9. Petrushev P. Relations between rational and spline approximations in Lp metric // J.App. Theory, 50. P.141-159.

10. Petrushev P.P., Popov V.A., Rational approximation of real functions, Cambridge, Cambridge University Press, 1987. P. 244-257.

Самаркандский государственный университет им. А.Навои

Машрабжон Шахабутдинович Маматов к 60-летию со дня рождения

В этом году исполняется шестьдесят лет известному ученому в области теории дифференциальных игр и оптимального управления, доктору физико-математических наук, профессору кафедры геометрии и топологии Национального университета Узбекистана имени Мирзо Улугбека Машрабжону Шахабутдиновичу Маматову.

М.Ш.Маматов родился 5 декабря 1956 года в Андижанском районе Андижанской области, в семье служащего. С 1964 по 1974 год учился в школе №50 Андижанского района. Окончив школу с золотой медалью, он поступил на математический факультет Ташкентского государственного университета (ныне Национальный университет Узбекистана) и окончил его в 1979 году по кафедре дифференциальных уравнений. М.Ш.Маматов еще со студенческой скамьи был вовлечен в научно-исследовательскую работу. Когда учился на третьем курсе, выступил с докладом на семинаре проф. Н.Ю.Сатимова на тему "Теорема Валле Пуссена". Начиная с этого времени он вел научную работу под руководством академика Н.Ю.Сатимова в области теории дифференциальных игр и оптимального управления.

В 1988 году успешно защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в специализированном совете Института математики имени В.И.Романовского. Диссертационная работа М.Ш.Маматова была посвящена изучению игровых задач между группами преследователей и убегающих, жестко связанных друг с другом. Надо отметить, что результаты исследования в дальнейшем были развиты ижевскими (Россия, УдГУ) математиками - профессором Н.Н. Петровым и его учениками.

М.Ш.Маматов свою научно-педагогическую деятельность начал в 1979 году в должности ассистента кафедры общей математики на факультете прикладной математики и механики Ташкентского государственного университета.

С 1990 по 1992 год работал доцентом кафедры общей математики. В 1992-95 гг. обучался в докторантуре Национального университета Узбекистана. С 1996 года по 1998 год работал доцентом кафедры оптимального управления. За этот период Маматовым М.Ш. (совместно с Сариковым Э.С.) создан учебно-методический комплекс по новому предмету "Основы экономики и бизнеса"для средних школ. В 1998-2000 гг. он работал директором средней школы №2 Кибрайского района Ташкентской области, 2000-2001 гг. - проректор Института усовершенствования и переподготовки учителей Ташкентской области, 2001-2004 гг. - главный специалист управления педагогического образования, науки и повышения квалификации при Министерстве народного образования Республики Узбекистан. За этот период административно-педагогическая деятельность Маматова М.Ш. была связана с координацией научных исследований, разрабатываемых совместно с НИИ педагогических наук имени Кари-Ниязи, а также Центральным институтом усовершенствования учителей имени Абдуллы Авлони. Маматов М.Ш. совместно с пятью педагогическими вузами являлся в этот период инициатором разработок научных тем по Государственным грантам. За время работы в Министерстве народного образования принимал активное участие в осуществлении реформы среднего образования в нашей республике.

В 2004-2006 годах он работал заместителем декана по учебной работе механико-математического факультета, в 2006-2010 гг. директором центра информационных технологий Национального Университета Узбекистана.

В 2010 году М.Ш.Маматов защитил докторскую диссертацию по теме: "К теории дифференциальных игр преследования в управляемых распределенных системах". Продолжая исследования Н.Ю.Сатимова и М.Т.Тухтасинова в этом направлении, М.Ш.Маматов исследовал новые задачи управления конфликтными ситуациями в системах с распределенными параметрами при различных ограничениях на управляющие функции. Он впервые в теории дифференциальных игр к решению задачи преследования применил метод конечных разностей. Были развиты методы Л.С.Понтрягина и Н.Ю.Сатимова применительно к управляемым процессам, описываемым уравнениями и системами уравнений в частных производных второго порядка всех трех типов. Результаты этих исследований могут быть применены для решения практических задач математической теории управляемых процессов, протекающих в условиях конфликта, в физике и технике автоматического управления для систем с распределенными параметрами.

С 2010 года по настоящее время он работает на математическом факультете, с 2014 года в качестве профессора кафедры геометрии и топологии.

В последние годы проф.М.Ш.Маматовым и его учениками Е.Б.Таш - мановым и Х.Н.Алимовым получены ряд интересных результатов прикладного характера. В частности, М.Ш.Маматовым и Е.Б.Ташмановым исследована одна игровая задача, связанная с уровнями яркости цифрового изображения. С помощью полиномов Чебышева получены достаточные условия для возможности завершения игры в пользу одного из игроков. Полученные результаты имеют значение при обработке цифровых изображений.

В работах М.Ш.Маматова, Д.Д.Дурдиева и Х.Н.Алимова исследованы дифференциальные игры, описываемые уравнениями дробного порядка. Для этих классов игр изучена задача преследования и получены достаточные условия возможности преследования типа Л.С.Понтрягина и Н.Ю.Сатимова. Теория управляемых динамических систем дробного порядка активно развивается в последнее десятилетие. Интерес к этим проблемам обусловлен возможностью применения к управлению реальными системами в электрохимии, электродинамики и теории вязкоупругих сред.

Проф.М.Ш.Маматов вместе с учениками Д.М.Махмудовой, Б.Н.Али- мовым, С.Й.Темуровым ведет активную работу по методике преподавания элементов дифференциальных игр в высших учебных заведениях.

М.Ш.Маматов является автором более 170 научных и методических работ, опубликованных в научных изданиях Узбекистана, России, Украины, Латвии, США, Китая. Он регулярно выступает с научными докладами на международных конференциях и школах-семинарах.

С 1979 года он занимается преподавательской деятельностью в Национальном Университете Узбекистана. Проводит лекционные и практические занятия по уравнениям математической физики, математическому анализу, дифференциальным уравнениям и численным методам оптимального управления. В настоящее время для студентов бакалавриата читает лекции "Методика преподавания математики и информатики а для магистрантов ведет лекционные и практические занятия по курсам "Методология научного исследования "Алгебраические и геометрические структуры".

В 2015 году М.Ш.Маматов стал победителем республиканского конкурса "Лучший педагог высшего учебного заведения". За отличные успехи в работе ему присуждено звание "Отличник народного образования Республики Узбекистан".

Желаем профессору М.Ш.Маматову крепкого здоровья, долгих лет жизни и творческих успехов.

Редколлегия журнала

Содержание

Mundarija

Компьютерная верстка: к.ф.-м.н. *Ф.А.Нуралиев*

Журнал зарегистрирован Агентством по печати и информации
Республики Узбекистан 22 декабря 2006 г. Регистр. №0044.

Сдано в набор 31.10.2016 г. Подписано к печати 16.11.2016 г.
Формат 60×84 1/16. Гарнитура литературная. Печать офсетная.
Усл.-печ.л. 11,0. Тираж 120 Заказ №

Институт математики при Национальном Университете
Узбекистана им. М.Улугбека: 100125,
Ташкент, Академгородок, ул. Дурмон йули, 29.

Отпечатано в ООО "NISO POLIGRAF".
Ташкентский вилоят, Урта Чирчикский туман,
ССГ "Ок-Ота" улица Марказ-1