O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI FANLAR AKADEMIYASI
MIRZO ULUG‘BEK NOMIDAGI O‘ZBEKISTON MILLIY
UNIVERSITETI QOSHIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI

O‘ZBEKISTON MATEMATIKA JURNALI

Jurnalga 1957 yilda asos solingan (1991 yilgacha "O‘zbekiston fanlar akademiyasining axboroti. Fizika-matematika fanlari seriyasi"deb nomlangan). Yilda 4 marta chiqadi

1. 2017

УЗБЕКСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

УзМЖ

Основан в 1957 г. (до 1991 г. под названием "Известия Академии наук Узбекистана. Серия физико-математических наук"). Выходит 4 раза в год

ТАШКЕНТ - 2017

Адрес редколлегии: 100125. Ташкент, Дурмон йули, 29,
Институт математики при Национальном Университете
Узбекистана им. М.Улугбека,
телефон: (+99871) 262-75-44

ТАШКЕНТ - 2017

Uzbek Mathematical
Journal, 2017,№1, pp.3-9

УДК 517.98

Критерий изоморфности log-интегрируемых алгебр

Абдуллаев Р.З., Мадаминов Б.А.

Ushbu maqolada funksiya logarifmi bilan integrirlanuvchi algebraning izomorflik mezoni belgilangan. Bu bilan izomorflik ikki ketma-ketlikning chegaralanganligiga keltirilgan.

In the paper the isomorphness criterion of algebras of integrabile functions with a logarithm is established. To do this the isomorphness is reduced to boundedness of two sequences.

В работе [1] были введены log-интегрируемые алгебры и изучены их свойства. В частности было показано, что такая алгебра является полным метрическим пространством, при этом алгебраические операции непрерывны по совокупности переменных. Интерес к этим пространствам вызван тем, что они близки к классу функций Неванлинна голоморфных в круге и интегрируемых с логарифмом на границе круга. Так как логарифм от голоморфной функции будет субгармонической функцией, то можно сказать, что класс Неванлинна устанавливает связь между голоморфными функциями и теорией потенциалов. В работе [2] вводятся $L_{\log}$ -пространства построенные по точному нормальному состоянию, изучаются их алгебраические и топологические свойства.

В настоящей работе устанавливается критерий изоморфности $L_{\log}$-алгебр, построенных на коммутативных алгебрах фон Неймана по различным точным нормальным конечным следам. В частности, изоморфность сводится к ограниченности соответствующих производных Радона-Никодима.Этот метод был ранее использован в работах [3],[4] для установления изоморфности алгебр Аренса. При этом существенно используется существование сохраняющего меру автоморфизма на Ω [5].

Пусть (Ω, ν) измеримое пространство с конечной мерой ν, L_0 (Ω, ν) алгебра измеримых комплекснозначных функций на Ω. Будем отождествлять функции совпадающие почти всюду. В работе [1] введено и изучено пространство

$$L_{\log}(\Omega,\nu) = \{f \in L_0(\Omega,\nu) | \int\limits_{\Omega} \log(1+|f|)d\nu < +\infty\}.$$

Из неравенства $\log|f(z)| \leq \frac{1}{p}|f(z)|^p$ следует, что $L_p(\Omega,\nu) \subset L_{\log}(\Omega,\nu)$ для $p \in (0,\infty)$. А из неравенств $k_1 \log_a c \leq \log_b c \leq k_2 \log_a c$ следует, что конечность значения $\int_\Omega \log(1+|f(z)|)d\nu$ независит от выбора основания логарифма.

В алгебре $L_{\log}(\Omega,\nu)$ вводится функционал $\|f\|_{\log} = \int_\Omega \log(1+|f(z)|)d\nu$, который является F-нормой (лемма 2.1 [1]). $L_{\log}(\Omega,\nu)$ есть полная топологическая алгебра относительно топологии порожденной метрикой $\rho(f,g) = \|f-g\|_{\log}$.

Пусть μ и ν точные нормальные конечные следы на коммутативной алгебре фон Неймана M, через $h = \frac{d\nu}{d\mu}$ обозначим производную Радона-Никодима следа ν относительно μ, т.е. такой положительный оператор из $L_1(M,\mu)$ для которого выполняется равенство $\nu(x) = \mu(hx)$, при всех $x \in M$ [6]. При этом h^{-1} существует и является измеримой функцией [7]. Через $L_{\log}(M,\mu)$ и $L_{\log}(M,\nu)$ обозначим $L_{\log}$ – алгебры ассоциированные с булевой алгеброй проекторов $P(M)$ по следам μ и ν соответственно. $P(M)$ можно отождествить с характеристическими функциями измеримых подмножеств Ω из соответствующего измеримого пространства .

Предложение 1. $L_{\log}(M,\mu) \subset L_{\log}(M,\nu)$ тогда и только тогда, когда $h \in M$.

Доказательство. Пусть $h \in M$ и $f \in L_{\log}(M,\mu)$, т.е. $\int_\Omega \log(1+|f(z)|)d\mu < \infty$. Тогда

$$\begin{gathered}\int_\Omega \log(1+|f(z)|)d\nu = \int_\Omega (h\log(1+|f|))d\mu \\ \leq \|h\|_\infty \int_\Omega \log(1+|f(z)|)d\mu < \infty.\end{gathered}$$

Отсюда $f \in L_{\log}(M,\nu)$, т.е. $L_{\log}(M,\mu) \subset L_{\log}(M,\nu)$.

Обратно, пусть $0 < h \in L_1(M,\mu) \setminus M$. Тогда можно построить бесконечную последовательность множеств $M_n = \{z \in \Omega : n \leq h(z) \leq n+1\}$.Теперь расмотрим подмножество натуральных чисел $\mathbb{N}_0 = \{n \in \mathbb{N} : \mu(M_n) > 0\}$. Переобозначим элементы множества $\mathbb{N}_0$ следующим образом $\mathbb{N}_0 = \{n_1, n_2, ...\}, \ \ n_k < n_{k+1}$.

Рассмотрим функцию

$$g(z) = \left\{ \frac{1}{k^2 \mu(M_{n_k})};\ z \in M_{n_k} \right\}$$

$g(z) = 0,\ \ z \in \Omega \setminus \cup_k M_{n_k}$. Положим $f(z) = e^g - 1$, тогда

$$\int_\Omega \ln(1 + |f(z)|) d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(M_{n_k})}{k^2 \mu(M_{n_k})} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty, \tag{1}$$

Однако

$$\int_\Omega \log(1 + |f(z)|) d\nu = \nu(\log(1 + |f(z)|)) = \mu(h(z) \log(1 + f(z))) =$$

$$\mu(hg) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n_k \cdot \mu(M_{n_k})}{k^2 \mu(M_{n_k})} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n_k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty. \tag{2}$$

Из (1) и (2) следует, что $f \in L_{\log}(M, \mu)$ и $f \notin L_{\log}(M, \nu)$, т.е.$L_{\log}(M, \mu)$ не является подмножеством $L_{\log}(M, \nu)$, для $h \in L_1(M, \mu) \setminus M$. Значит из $L_{\log}(M, \mu) \subset L_{\log}(M, \nu)$ следует $h \in M$.

Предложение доказано.

Пусть h производная Радона-Никодима точного нормального конечного следа ν относительно точного нормального конечного следа μ. Алгебра фон Неймана M коммутативна, следовательно конечна. Поэтому в силу теоремы 1 [8] h и h^{-1} будут элементами алгебры измеримых элементов. Теперь из равенства $\nu(x) = \mu(hx)$ получим $\nu(h^{-1}x) = \mu(h^{-1}hx) = \mu(x)$, т.е. h^{-1} есть производная Радона-Никодима следа μ относительно ν. Поэтому из предложения 1 получаем

Следствие 1. $L_{\log}(M, \mu) = L_{\log}(M, \nu)$ тогда и только тогда, когда $h,\ h^{-1} \in M$.

Пусть M и N коммутативные алгебры фон Неймана с точными нормальными конечными следами μ и ν соответственно.

Определение. Следы μ и ν назовем эквивалентными, если существует $*$-изоморфизм $\alpha : M \to N$ такой, что выполнено одно из следующих эквивалентных условий:

(i) $L_{\log}(N, \nu) = L_{\log}(N, \mu \circ \alpha^{-1})$;

(ii) $\frac{d\nu}{d\mu \circ \alpha^{-1}},\ \frac{d\mu \circ \alpha^{-1}}{d\nu} \in N$.

Очевидно, что функционал $\mu \circ \alpha^{-1}$ является точным нормальным конечным следом на алгебре фон Неймана N. Из следствия 1 следует, что (i) и (ii) эквивалентны.

Теорема 1. Алгебры $L_{\log}(M,\mu)$ и $L_{\log}(N,\mu)$ $*$-изоморфны тогда и только тогда, когда μ и ν эквивалентны.

Доказательство. Пусть μ и ν эквивалентны, т.е существует $*$- изоморфизм $\alpha : M \to N$, для которого выполнено условие (i).$*$- изоморфизм $\alpha : M \to N$, продолжается до $*$-изоморфизма α' на алгебру измеримых функций $L_0(\Omega)$. При этом используя непрерывность α' относительно топологии сходимости по мере получим, что

$$\alpha'(L_{\log}(M,\mu)) = L_{\log}(N,\mu\circ\alpha^{-1}). \tag{3}$$

В силу условия (i) имеем

$$L_{\log}(N,\mu\circ\alpha^{-1}) = L_{\log}(N,\nu). \tag{4}$$

Из (3) и (4) получаем, что $L_{\log}(M,\mu)$ и $L_{\log}(N,\nu)$ $*$-изоморфны.

Обратно, пусть α' есть $*$-изоморфизм из $L_{\log}(M,\mu)$ на $L_{\log}(N,\nu)$. Тогда α' переводит ограниченные элементы из $L_{\log}(M,\mu)$ в ограниченные элементы из $L_{\log}(N,\nu)$, т.е. сужение α' на M есть $*$-изоморфизм из M в N. При этом, $*$-изоморфизм из M на N удовлетворяет условию эквивалентности следов μ и ν.

Теорема доказана.

Пусть X-произвольная полная булева алгебра, $e \in X, X_e = \{g \in X : g \leq e\}$. Через $\tau(X_e)$, обозначим минимальную мощность множества, плотного в X_e в (o)-топологии. Бесконечная полная булева алгебра X называется однородной, если $\tau(X_e) = \tau(X_g)$ для любых ненулевых $e, g \in X$. Мощность $\tau(X)$ называется весом однородной булевой алгебры X.

Пусть X и Y полные булевы алгебры с вероятностными мерами μ и ν. Назовем пары (X,μ) и (Y,ν) изоморфными, если между этими алгебрами существует сохраняющий меру изоморфизм.

Напомним понятие паспорта для полной неатомической булевой алгебры X с конечной мерой μ. Пусть $\{X_{u_i}\}$ разложение X на однородные компоненты, где u_i - единица X_{u_i} [5]. Положим $\tau_{u_i} = \tau(X_{u_i})$ и $\mu_i = \mu(u_i)$, $\tau_{u_i} < \tau_{u_{i+1}}$, $i = 1, 2, ...$ Матрицу

$$\begin{pmatrix} \tau_{u_1} & \tau_{u_2} & \dots \\ \mu_1 & \mu_2 & \dots \end{pmatrix}, \tag{5}$$

называют паспортом булевой алгебры (X,μ)[5]. Известна следующая

Теорема 2. [5] Для того чтобы (X,μ) и (Y,ν) были изоморны необходимо и достаточно чтобы их паспорта совпадали.

Замечание 1. Для изоморфизма булевых алгебр X и Y необходимо и достаточно чтобы совпадали верхние строки их паспортов.

Пусть M и N неатомические коммутативные σ- конечного алгебры фон Неймана с точноми нормальными конечными следами μ и ν. Паспорта булевых алгебр проектов (M, μ) и (N, ν) имеют следующий вид

$$\begin{pmatrix} \tau_{u_1} & \tau_{u_2} & \dots \\ \mu_1 & \mu_2 & \dots \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} \tau_{v_1} & \tau_{v_2} & \dots \\ \nu_1 & \nu_2 & \dots \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 3. Следующие условия эквивалентны

(i) $L_{\log}(M, \mu)$ и $L_{\log}(N, \nu)$ $*$-изоморфны;

(ii) а) первые строки паспортов $(P(M), \mu)$ и $(P(N), \nu)$ совпадают;

б) последовательности $\mu_n \nu_n^{-1}$ и $\nu_n \mu_n^{-1}$ ограничены, где μ_n и ν_n числа из второй строки паспорта.

Доказательство. $(i) \to (ii)$. Пусть α' $*$-изоморфизм из $L_{\log}(M, \mu)$ на $L_{\log}(N, \nu)$. Как отмечалось выше в доказательстве теоремы 1 $*$-изо - морфизм α' сужается до $*$-изо- морфизма α из M на N. Обозначим через M_0 (соответственно N_0) атомическую подалгебру алгебры фон Неймана всех элементов из M (соответственно из N), у которых $xu_n = \lambda_n u_n$ (соответственно $yv_n = \lambda_n v_n$) для некоторых комплексных чисел λ_n, где $n = 1, 2, \dots$. Сужение следов μ и ν на M_0 и N_0 обозначим соответственно μ_0 и ν_0. Очевидно, что сужение α' на $L_{\log}(M, \mu) \cap L_0(M_0, \mu_0)$ является $*$-изоморфизмом из $L_{\log}(M_0, \mu_0)$ на $L_{\log}(N_0, \nu_0)$, т.е.

$$\alpha' : L_{\log}(M_0, \mu_0) = L_{\log}(N_0, \nu_0) \tag{7}$$

Ясно, что M_0 и N_0 отождествляется с алгеброй l_∞ всех ограниченных последовательностей комплексных чисел.Для атомических алгебр M_0 и N_0 , не ограничивая общности, считать $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$ равными и обозначать их одной буквой $\{e_n\}$. В этом предположение сужение α' на M_0 является тождественным отображением α на $M_0 \simeq l_\infty \simeq N_0$. При этом $\alpha'(u_n) = v_n$, где u_n и v_n первые строки паспортов $(P(M), \mu)$ и $(P(N), \nu)$ соответственно.

Если

$$z \in L_{\log}(M, \mu) \cap L_0(M_0, \mu_0) = L_{\log}(M_0, \mu_0) = L_{\log}(l_\infty, \mu_0),$$

$z \geq 0$, то $z = \sup\limits_{m \geq 1} z \sum\limits_{n=1}^{m} e_n$, причем $z \sum\limits_{n=1}^{m} e_n \in M^+$.

Поэтому

$$\alpha'(z) = \sup_{m\geq 1} \alpha(z\sum_{n=1}^{m} e_n) = \sup_{m\geq 1} z\sum_{n=1}^{m} e_n = z.$$

Таким образом, сужение α' на $L_{\log}(M_0, \mu_0)$ является тождественным отображением.Теперь из (7) получим

$$L_{\log}(l_\infty, \nu_0) = L_{\log}(N_0, \nu_0) = \alpha'(L_{\log}(M_0, \mu_0)) = L_{\log}(l_\infty, \mu_0).$$

Из этого равенства в силу следствия 1 имеем $\frac{d\mu_0}{d\nu_0}$ и $\frac{d\nu_0}{d\mu_0} \in l_\infty$. Это означает, что $\mu_n\nu_n^{-1}$ и $\nu_n\mu_n^{-1}$ ограниченные последовательности, т.к. $\frac{d\mu_0}{d\nu_0} = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \nu_i\mu_i^{-1}e_i$ и $\frac{d\nu_0}{d\mu_0} = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu_i\nu_i^{-1}e_i$

$(ii) \to (i)$. Пусть первые строки паспортов $(P(M), \mu)$ и $(P(N), \nu)$ совпадают и последовательности $\mu_n\nu_n^{-1}$ и $\nu_n\mu_n^{-1}$ ограничены. Рассмотрим на N точный нормальный след $\lambda(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu_n\nu_n^{-1}\nu(v_nx),\ x \in N$. Так как $[0, u_n]$ и $[0, v_n]$ однородные алгебры, $\tau_{u_i} = \tau_{v_i}$ и $\lambda(v_n) = \mu_n(u_n)$, то в силу теоремы 2 можно построить изоморфизм $\Phi_n : L_0(u_nM, \mu) \to L_0(v_nN, \lambda)$, для которого $\mu(y) = \lambda(\Phi_n(y))$ при всех $y \in L_1(u_nM, \mu)$. Для каждого $x \in L_0(M, \mu)$ через $\Psi(x)$ обозначим такой элемент из $L_0(N, \lambda)$, у которого $v_n\Psi(x) = \Phi_n(u_nx)$. Ясно, что Ψ- изоморфизм из $L_0(M, \mu)$ на $L_0(N, \lambda)$.

При этом, если $x \in L_1^+(M, \nu)$, то

$$\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(u_nx) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(\Phi_n(u_nx)) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(v_n(\Psi(x))) = \lambda(\Psi(x))$$

следовательно

$$\Psi(L_{\log}(M, \mu)) = L_{\log}(N, \lambda). \tag{8}$$

Покажем теперь, что $L_{\log}(N, \lambda) = L_{\log}(N, \nu)$. Легко видеть что $h = \frac{d\lambda}{d\nu} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \nu_n\mu_n^{-1}z_n$. Тогда условие (ii) в равносильно условию $\frac{d\lambda}{d\nu}, \frac{d\nu}{d\lambda} \in N$, т.е. в силу следствия 1

$$L_{\log}(N, \lambda) = L_{\log}(N, \nu). \tag{9}$$

Из равенств (8) и (9) получаем $\Psi : L_{\log}(M, \mu) = L_{\log}(N, \nu)$.
Теорема доказана.

Литература

1. Dykema K., Sukochev F., and Zanin D . Algebras of log-integrable functions and operators. arxiv 1509.03360.

2. Абдуллаев Р.З., Кутлимуротов Ш.К., Мадаминов Б.А. Пространство log-интегрируемых операторов относительно состояния.Тезисы докладов конференции: Проблемы современной топологии и их приложения. 111-112,2016.

3. Abdullaev R.Z., Chilin V.I. Arens algebras, associated with commutative von Neumann algebras Ann.Math.Blaise Pascal, Vol. 5, N 1, pp.1-12,1998.

4. Абдуллаев Р.З. Изоморфизмы Алгебр Аренса. Сибирский журнал индустриальной математики , Том 1, N 2,3-15, 1998.

5. Владимиров Д.А. Булевы алгебры, "Наука Москва, 1969.

6. Segal I. A non-commutative extension of abstract integration. Ann. Math. 57, 401-457,1953.

7. Трунов Н.В.К теории нормальных весов на алгебрах Неймана, Изв. вузов. Матем., 1982, 8,61-70.

8. Трунов Н.В. Lp-пространства, ассоциированные с весом на полуконечных алгебрах фон Неймана.Констр. Теор. Функ.Анал. 3, 88-93, 1981.

Узбекский госуниверситет мировых языков
Национальный Университет Узбекистана
им. М. Улугбека

Uzbek Mathematical
Journal, 2017,№1, pp.10-17

УДК 512.554

Локальные дифференцирования естественным образом градуированной не Лиевой алгебры Лейбница

Алауадинов А.К., Курбанбаев Т.К.

Ushbu maqolada tabiiy ravishda graduirlangan Li bo‘lmagan Leybnits algebralari lokal differentsiallashlari o‘rganilgan.

In this work we study local derivations of the naturally graded non-Lie Leibniz algebras.

1.Введение

Изучение дифференцирований на неограниченных операторных алгебрах, в частности, на различных алгебрах измеримых операторов, присоединенных к алгебрам фон Неймана, является одной из важных задач общей теории неограниченных дифференцирований на операторных алгебрах.

В то же время актуальной является задача изучения различных классов линейных операторов типа дифференцирования. Важный класс таких операторов составляют локальные дифференцирования, впервые введенные Кэйдисоном в 1990 году [9]. В работах Р.Кэйдисона, Д.Ларсона и А.Соуроура были получены некоторые условия, при которых локальное дифференцирование является дифференцированием. В своей работе Р.Кэйдисон рассматривал локальные дифференцирования на алгебрах фон Неймана и в некоторых полиномиальных алгебрах. Было доказано, что каждое непрерывное локальное дифференцирование из алгебры фон Неймана в дуальный бимодуль является дифференцированием. Этот результат был обобщен в работе М.Брешара для более широкого класса линейных операторов. В 1997 году П.Сэмрил ввел понятие 2-локального дифференцирования [8]. Он описал 2-локальные дифференцирования алгебры $B(H)$ - всех ограниченных линейных операторов на бесконечномерном сепарабельном гильбертовом пространстве H. Аналогичное описание для конечномерного случая появилось позже, в 2003 году, в работе корейских математиков С.Ким и Ж.Ким [10]. В 2012 году в работе Ш.А.Аюпова и К.К.Кудайбергенова было получено описание

2-локальных дифференцирований на алгебре $B(H)$ - всех ограниченных линейных операторов на произвольном гильбертовых пространстве H. Отметим, что многочисленние работы посвящены изучению локальных и 2-локальных дифференцировании на алгебр измеримых операторов [3], [4], [5], [6].

Исследование локальных и 2-локальных дифференцирование конечномерных алгебр Ли было рассмотрено в работах Ш.А.Аюпова, К.К.Кудайбергенова и И.С.Рахимова [1], [2]. Локальные дифференцирования конечномерных алгебр Лейбница в настоящее время не рассмотрены. Поэтому в этом работе исследованы локальные дифференцирования на естественно образом градуированных алгебрах Лейбница.

2.Предварительные сведения

Определение 2.1. Алгебра L над полем F называется *алгеброй Лейбница*, если для любых $x, y, z \in L$ выполняется тождество Лейбница:

$$[x,[y,z]] = [[x,y],z] - [[x,z],y],$$

где [,] - умножение в L.

Для произвольной алгебры Лейбница L определим последовательность:

$$L^1 = L, \;\; L^{k+1} = [L^k, L^1], k \geq 1.$$

Алгебра Лейбница L размерности n, называется:

нуль-филиформной, если $dim L^i = (n+1) - i, 1 \leq i \leq n+1$;

филиформной, если $dim L^i = n - i, 1 \leq i \leq n+1$.

Алгебра Лейбница L называется *нильпотентной*, если существует $s \in N$ такое, что $L^s = 0$. Минимальное число s, обладающее таким свойством, называется индексом нильпотентности или нильиндексом алгебры L.

Пусть L - конечномерная нильпотентная алгебра Лейбница. Положим $gr(L)_i := L^i/L^{i+1}$, $1 \leq i \leq s-1$, где s - нильиндекс алгебры L, и обозначим $grL = gr(L)_1 \oplus gr(L)_2 \oplus ... \oplus gr(L)_{s-1}$. Тогда $[gr(L)_i, gr(L)_j] \subseteq gr(L)_{i+j}$, и мы получим градуированную алгебру grL.

Определение 2.2. Градуировку, построенную таким образом, мы назовем естественной градуировкой. Если алгебра Лейбница L изоморфна алгебре grL, то L называется *естественным образом градуированной алгеброй Лейбница.*

Теорема 2.1 [11]. *Любая n-мерная комплексная естественном образом градуированная не Лиевая алгебра Лейбница изоморфна одной из следующих попарно неизоморфных алгебр*

$$F_n^1 : [e_1, e_1] = e_3, [e_i, e_1] = e_{i+1}, \, 2 \leq i \leq n-1,$$

$$F_n^2 : [e_1, e_1] = e_3, [e_i, e_1] = e_{i+1}, \, 3 \leq i \leq n-1,$$

(*отсутствующие произведения равны нулю*).

Напомним, что линейный оператор $D : L \to L$ называется *дифференцированием алгебры Лейбница* L, если $D[x, y] = [D(x), y] + [x, D(y)]$ при всех $x, y \in L$ (правило Лейбница).

Предложение 2.1 [7]. *Всякое дифференцирование алгебр F_n^1 и F_n^2, соответственно, имеет следующие матричные формы:*

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_2 & \alpha_1+\alpha_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_3 & \alpha_3 & 2\alpha_1+\alpha_2 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_4 & \alpha_4 & \alpha_3 & 3\alpha_1+\alpha_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha_{n-1} & \alpha_{n-1} & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-3} & \dots & 0 \\ \alpha_n & \beta & \alpha_{n-1} & \alpha_{n-2} & \dots & (n-1)\alpha_1+\alpha_2 \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

и

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_2 & \beta & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_3 & 0 & 2\alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_4 & 0 & \alpha_3 & 3\alpha_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha_{n-1} & 0 & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-3} & \dots & 0 \\ \alpha_n & \gamma & \alpha_{n-1} & \alpha_{n-2} & \dots & (n-1)\,\alpha_1 \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

.

3.Основной результат.

3.1. Локальные дифференцирование алгебры типа F_n^1.

Линейное отображение $\Delta : L \to L$ называется *локальным дифференцированием* алгебра Лейбница, если для каждого $x \in L$ существует дифференцирование (зависящее от x) $D_x : L \to L$ такое, что $\Delta(x) = D_x(x)$.

Лемма 3.1. *Пусть L - n-мерная алгебра Лейбница. Если всякое* *дифференцирование алгебры L при заданном базисе имеет нижне-треугольный вид, тогда всякое локальное дифференцирование также имеет нижне-треугольный вид.*

Доказательство. Пусть Δ - локальное дифференцирование алгебры L с матрицей $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \dots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$.

Для каждого $k \in \overline{1,n}$ возьмем дифференцирование D_k на L такое, что

$$\Delta(e_k) = D_k(e_k).$$

Так как матрица оператора D_2 имеет нижне-треугольный вид, то

$$b_{1i} = \Delta(e_i)_1 = D_i(e_i)_1 = 0$$

при всех $i > 1$. Далее

$$b_{2i} = \Delta(e_i)_2 = D_i(e_i)_2 = 0$$

при всех $i > 2$.

Аналогично, $b_{ki} = 0$ при всех $i > k$. Лемма доказана.

В этом разделе мы приведем общий вид локальных дифференцирований алгебра F_n^1.

Рассмотрим Δ – линейный оператор на алгебре F_n^1 с матрицей

$$\begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & b_{11}+b_{21} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_{31} & b_{31} & b_{33} & 0 & \dots & 0 \\ b_{41} & b_{41} & b_{43} & b_{44} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{n-1,1} & b_{n-1,1} & b_{n-1,3} & b_{n-1,4} & \dots & 0 \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & b_{n4} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

Лемма 3.2. *Оператор вида* (3.1) *является локальным дифференцированием алгебры F_n^1.*

Доказательство. Рассмотрим следующий оператор с матрицией

$$\Theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & c_{33} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & c_{43} & c_{44} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & c_{n-1,3} & c_{n-1,4} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & c_{n3} & c_{n4} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (3.2)$$

Пусть $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, ..., \xi_n) \in F_n^1$. Тогда координаты $\Theta(x)$ имеют вид

$$\Theta(x)_1 = \Theta(x)_2 = 0, \quad \text{и} \quad \Theta(x)_i = \sum_{s=3}^{n} c_{is}\xi_i, \quad \text{где} \quad i \geq 3.$$

Нам требуется найти такое дифференцирование D вид (2.1) алгебры F_n^1, что

$$\Theta(x)_i = D(x)_i, \quad 1 \leq i \leq n. \qquad (3.3)$$

Пусть D – дифференцирование с таким свойством и $\alpha_1 = 0$.

Тогда (2.1) влечет, что

$$D(x)_1 = 0, \quad D(x)_2 = \alpha_2(\xi_1 + \xi_2),$$

и

$$D(x)_i = \sum_{s=2}^{i-1} \alpha_s \xi_{i-s+2} + \alpha_i(\xi_1 + \xi_2), \quad i \geq 3.$$

Приравнивая соответствующие координаты, получим

$$\alpha_2(\xi_1 + \xi_2) = 0,$$

$$\sum_{s=2}^{i-1} \alpha_s \xi_{i-s+2} + \alpha_i(\xi_1 + \xi_2) = \sum_{s=3}^{n} c_{is}\xi_i, \quad i \geq 3. \qquad (3.4)$$

Рассмотрим следующие случаи.

1. $\xi_1 + \xi_2 \neq 0$. В этом случае из (3.4) видно, что параметры $\alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n$ определяются однозначным образом.

2. $\xi_1 + \xi_2 = 0, \ \xi_3 \neq 0$. В этом случае параметры $\alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n$ также определяются однозначно.

3. $\xi_1 + \xi_2 = 0,\ \xi_3 = \xi_4 = ... = \xi_r = 0,\ \xi_{r+1} \neq 0$, где $r \geq 3$. Тогда из (3.4) вытекает, что числа $\alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_{n-r+1}$ определяются однозначно, а $\alpha_{n-r+2}, ..., \alpha_n$ могут быть произвольным, $r \geq 3$.

Теперь рассмотрим общий случай. Пусть Δ оператор с матрицей (3.1). Тогда Δ представляется в виде $\Delta = D + \Theta$, где D оператор с матрицей вида (2.1), а Θ вида (3.2). Так как D дифференцирования, а по лемме 3.2 Θ локальная дифференцирования, то Δ является локальным дифференцированием. Лемма доказана.

Лемма 3.3. *Всякое локальное дифференцирование алгебры F_n^1 имеет вид* (3.1).

Доказательство. Пусть Δ – локальное дифференцирование алгебры F_n^1 с матрицей $\Delta = (b_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$. По Лемме 3.1, Δ имеет прямоугольный вид, т.е. $b_{ij} = 0,\ 1 \leq i < j \leq n$. Теперь возьмем точку $x_0 = (1, -1, 0, 0, ..., 0) \in F_n^1$ и дифференцирование D такое, что $\Delta(x_0) = D(x_0)$. Тогда

$$\Delta(x_0)_1 = b_{11},\ \Delta(x_0)_2 = b_{21} - b_{22},$$

$$\Delta(x_0)_i = b_{i1} - b_{i2},\ 3 \leq i \leq n$$

и

$$D(x_0)_1 = \alpha_1,\ \ D(x_0)_2 = -\alpha_1\, D(x_0)_i = 0,$$

$$D(x_0)_n = \alpha_n - \beta_n,\ 3 \leq i \leq n-1.$$

Приравнивая коэффициенты $\Delta(x_0)$ и $D(x_0)$ имеем

$$b_{21} - b_{22} = -\alpha_1,\ \ \ b_{i1} - b_{i2} = 0,\ \ \ 3 \leq i \leq n-1.$$

Поэтому $b_{22} = b_{11} + b_{21}$, $b_{i2} = b_{i1}$, $3 \leq i \leq n-1$. Это показывает, что матрица оператора Δ имеет вид (3.1). Лемма доказана.

Теорема 3.2. *Линейный оператор на алгебре F_n^1 является локальным дифференцированием тогда и только тогда, когда он имеет вид* (3.2).

Доказательство. Необходимость вытекает из леммы 3, а достаточность из леммы 2.

3.2. Локальные дифференцирование алгебры типа F_n^2.

Рассмотрим линейный оператор Δ алгебре F_n^2 с матрицей

$$\begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_{31} & 0 & b_{33} & 0 & \dots & 0 \\ b_{41} & 0 & b_{43} & b_{44} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{n-11} & 0 & b_{n-13} & b_{n-14} & \dots & 0 \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & b_{n4} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (3.5)$$

Теорема 3.3. *Линейный оператор на алгебре F_n^2 является локальным дифференцированием тогда и только тогда, когда он имеет вид* (3.5).

Доказательство. Доказательство теоремы 3.3 аналогично доказательству теоремы 3.2.

Литература

1. Ayupov Sh.A., Kudaybergenov K.K., Rakhimov I.S., 2-*Local derivations on finite-dimensional Lie algebras.* Linear Algebra and its Applications. 474 (2015), P. 1-11.

2. Ayupov Sh.A., Kudaybergenov K.K., *Local derivations on finite-dimensional Lie algebras.* Linear Algebra and its Applications. 493 (2016), P. 381-398.

3. Ayupov Sh.A., Kudaybergenov K.K, Alauadinov A.K., *2-local derivations on matrix algebras over commutative regular algebras.* Linear Algebra and its Applications, Vol. 395 (2013), P.1294-1311.

4. Ayupov Sh.A., Kudaybergenov K., Alauadinov A.K., *Local and 2-local derivations on Arens algebras.* arxiv.math.1109/5157 (2011).

5. Ayupov Sh.A., Kudaybergenov K.K., Alauadinov A.K., 2-*Local derivations on algebras of measurable operators*, Annnals of Functional Analysis, N 2 (4) (2013). P 111-118.

6. Ayupov Sh.A., Kudaybergenov K.K., Alauadinov A.K., Nurjanov B.O., *Local and* 2-*local derivations on Arens algebras.* Journal Math. Slovaca, 64 (2014), N2, P.423-432.

7. Casas J.M., Ladra M., Omirov B.A., Karimjanov I.A. *Classification of solvable Leibniz algebras with naturally graded filiform nilradical.* Linear Algebra and its Applications. Vol 438 (2013), N 7, P. 2973-3000.

8. Semrl P., *Local automorphisms and derivations on $B(H)$*, Proc.Amer. Math.Soc. 131 (2003), P. 1867-1874.

9. Kedison R.V., *Local derivations*, J.Algebra 130 (1990), P. 494-509.

10. Kim S.O., Kim J.S., *Local automorphisms and derivations on* M_n, Proc.Amer.Math.Soc. 132 (2004), P. 1389-1392.

11. Аюпов Ш.А., Омиров Б.А., *О некоторых классах нильпотентных алгебр Лейбница.* Сиб. Мат. Журнал. т. 42(1) (2001), С. 15–24.

Институт математики при НУУз

Uzbek Mathematical
Journal, 2017,№1, pp.18-26

УДК.517.956.6

Краевая задача для эллиптико-гиперболического уравнения с тремя условиями склеивания

Аманов Д.

Maqolada elliptik-giperbolik tenglama uchun to‘rtburchak sohada chegaraviy masala qaralgan. Masala yechimining mavjudligi va yagonaligi isbotlangan.

In this paper a boundary value problem for elliptic - hyperbolic equation was studied in rectangular domain. The existence and uniqueness of solution of this problem are proved.

1. **Введение.** В области $\Omega = \{(x,t) : 0 < x < p, -T < t < T\}$ рассмотрим уравнение

$$\left.\begin{array}{l} u_{tt} - u_{xx}, t > 0 \\ u_{tt} + u_{xx}, t < 0 \end{array}\right\} = f(x,t) \tag{1}$$

где $f(x,t)$ – заданная функция. Обозначим

$$\Omega^+ = \Omega \cap (t > 0), \Omega^- = \Omega \cap (t < 0).$$

Задача. Найти в $\Omega^+ \cup \Omega^-$ решение $u(x,t) \in C(\overline{\Omega}) \cap {C_{x,t}}^{2,2}(\Omega)$, уравнения (1) удовлетворяющее краевым условиям

$$u(0,t) = 0, u(p,t) = 0, -T \le t \le T, \tag{2}$$

$$u(x,-T) = \varphi(x), 0 \le x \le p \tag{3}$$

и условиям склеивания

$$u(x,+0) = u(x,-0), 0 \le x \le p, \tag{4}$$

$$u_t(x,+0) = u_t(x,-0), 0 \le x \le p, \tag{5}$$

$$u_{tt}(x,+0) = u_{tt}(x,-0), 0 \le x \le p, \tag{6}$$

Причем $\varphi(0) = \varphi(p) = 0$, производные $u_t(x,0), u_{tt}(x,0)$ непрерывны вплоть до точек $(0,0)$ и $(p,0)$. Краевые задачи для уравнений смешанного эллиптико-гиперболического типа в прямоугольных областях изучены К. Б. Сабитовым и его учениками [1-6]. Рассматриваемая задача отличается от ранее изученных задач тем, что при $t = T$ граничное условие не задается, оно заменяется условием (6). В этом случае для разрешимости задачи не возникает условие налагаемое на размеры границы гиперболической части области Ω^+. Если отказаться от условия (6) и задавать условие

$$u(x,T) = \psi(x), 0 \le x \le p,$$

то в области Ω^+ возникает задача типа Дирихле, разрешимость которой зависит от размеров области. В данном случае это условие имеет вид

$$sh\left(\frac{T}{p}n\pi\right)\cos\left(\frac{T}{p}n\pi\right) + ch\left(\frac{T}{p}n\pi\right)\sin\left(\frac{T}{p}n\pi\right) \neq 0$$

выполнение которого зависит от числа $\frac{T}{p}$. Подобные условия имеются в работах [1-10]. Задача с тремя условиями склеивания для параболо-гиперболического уравнения изучена в [11].

2. Единственность решения задачи (1-6). Справедлива следующая

Теорема 1. Пусть выполняются условия

$$\lim_{x\to 0} xu_x(x,t) = 0, \lim_{x\to p}(p-x)u_x(x,t) = 0, \tag{7}$$

тогда решение задачи (1)-(6) единственно, если оно существует.

Доказательство. Пусть $f(x,t) = 0$ в $\overline{\Omega}$, $\varphi(x) = 0$ в $[0,p]$. Покажем, что $u(x,t) = 0$ в $\overline{\Omega}$. Следуя [12] рассмотрим интегралы

$$\alpha_n(t) = \int\limits_0^p u(x,t)X_n(x)\,dx, 0 \le t \le T, \tag{8}$$

$$\beta_n(t) = \int\limits_0^p u(x,t)X_n(x)\,dx, -T \le t \le 0 \tag{9}$$

где $X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{p}} \sin \lambda_n x, \lambda_n = \frac{n\pi}{p}, n = 1, 2, ...$

Отметим, что функции $X_n(x)$ образуют полную ортонормированную систему в $L_2(0, p)$(см.[13], стр.317). На основании (8) и (9) введем функции

$$\alpha_{n,\varepsilon}(t) = \int\limits_{\varepsilon}^{p-\varepsilon} u(x,t) X_n(x)\, dx, t \geq 0, \tag{10}$$

$$\beta_{n,\varepsilon}(t) = \int\limits_{\varepsilon}^{p-\varepsilon} u(x,t) X_n(x)\, dx, t \leq 0, \tag{11}$$

причем $(\varepsilon, p-\varepsilon) \neq \emptyset$. Продифференцируем (10) два раза по t, имеем

$$\alpha''_{n,\varepsilon}(t) = \int\limits_{\varepsilon}^{p-\varepsilon} u_{tt}(x,t) X_n(x)\, dx.$$

Из соответствующего однородного уравнения (1) получаем $\alpha''_{n,\varepsilon}(t) = \int\limits_{\varepsilon}^{p-\varepsilon} u_{xx}(x,t) X_n(x)\, dx$. Интегрируя по частям последний интеграл, переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ и используя условия (2), (7) находим

$$\alpha''_n(t) + {\lambda_n}^2 \alpha_n(t) = 0. \tag{12}$$

Аналогично из (11) мы имеем

$$\beta''_n(t) - {\lambda_n}^2 \beta_n(t) = 0 \tag{13}$$

Из (12) и (13) находим

$$\alpha_n(t) = a_n \cos \lambda_n t + b_n \sin \lambda_n t, \quad \beta_n(t) = c_n e^{-\lambda_n t} + d_n e^{\lambda_n t}.$$

Используя условия (3), (4), (5), и (6) которые переходят в следующие

$$\alpha_n(-T) = 0, \alpha_n(0) = \beta_n(0), \alpha'_n(0) = \beta'_n(0), \alpha''_n(0) = \beta''_n(0)$$

для определения неизвестных коэффициентов a_n, b_n, c_n и d_n получаем систему уравнений

$$\begin{cases} c_n e^{\lambda_n T} + d_n e^{-\lambda_n T} = 0 \\ a_n - c_n - d_n = 0 \\ b_n + c_n - d_n = 0 \\ a_n + c_n + d_n = 0. \end{cases}$$

Из этой системы находим $a_n = b_n = c_n = d_n = 0$, тогда $\alpha_n(t) = 0, \beta_n(t) = 0$. В силу полноты функции $X_n(x)$ из (8) и (9) получаем $u(x,t) = 0$ в $\overline{\Omega}$.

Теорема 1 доказана.

3. Существование решения задачи (1)-(6).

В этом пункте мы построим формальное решение задачи (1)-(6) методом Фурье. Затем мы приведем несколько Лемм, в которых доказываются сходимость рядов содержащихся в формальном решении и его производных. Используя Леммы докажем теорему о разрешимости задачи (1)-(6). Решение задачи (1)-(6) ищем в виде

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\, X_n(x). \tag{14}$$

Разложим функции $f(x,t)$ и $\varphi(x)$ в ряд Фурье по функциям $X_n(x)$

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\, X_n(x), \tag{15}$$

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n X_n(x) \tag{16}$$

где

$$f_n(t) = \int\limits_0^p f(x,t)\, X_n(x)\, dx, \tag{17}$$

$$\varphi_n = \int\limits_0^p \varphi(x)\, X_n(x)\, dx. \tag{18}$$

Подставляя (14) и (15) в уравнение (1) имеем

$$u''_n(t) + {\lambda_n}^2 u_n(t) = f_n(t), 0 \le t \le T, \tag{19}$$

$$u''_n(t) - {\lambda_n}^2 u_n(t) = f_n(t), -T \le t \le 0. \tag{20}$$

Обозначим $u_n(t) = {u_n}^+(t)$, если $0 \le t \le T$ и $u_n(t) = {u_n}^-(t)$, если $-T \le t \le 0$. Уравнения (19) и (20) связаны между собой с помощью условий (4)-(6), которые переходят в следующие

$$u_n^+(0) = u_n^-(0), \quad {u_n^+}'(0) = {u_n^-}'(0), \quad {u_n^+}''(0) = {u_n^-}''(0) \tag{21}$$

а условие (3) переходит в

$${u_n}^-(-T) = \varphi_n. \tag{22}$$

Решая уравнения (19), (20) при условиях (21), (22) получаем

$$\begin{gathered} {u_n}^+(t) = -\tfrac{\sin\lambda_n t}{sh\lambda_n T}\varphi_n + \tfrac{\sin\lambda_n t}{\lambda_n sh\lambda_n T}\int\limits_{-T}^{0} f_n(\tau)\, sh\lambda_n(T+\tau)\, d\tau + \\ \tfrac{1}{\lambda_n}\int\limits_{0}^{t} f_n(\tau)\sin\lambda_n(t-\tau)\, d\tau, \end{gathered} \tag{23}$$

$$\begin{gathered} {u_n}^-(t) = -\tfrac{sh\lambda_n t}{sh\lambda_n T}\varphi_n + \tfrac{sh\lambda_n t}{\lambda_n sh\lambda_n T}\int\limits_{-T}^{0} f_n(\tau)\, sh\lambda_n(T+\tau)\, d\tau - \\ \tfrac{1}{\lambda_n}\int\limits_{t}^{0} f_n(\tau)\, sh\lambda_n(t-\tau)\, d\tau. \end{gathered} \tag{24}$$

Подставляя (23) и (24) в (14) находим

$$\begin{gathered} u^+(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)\left[-\tfrac{sin\lambda_n t}{sh\lambda_n T}\varphi_n + \tfrac{\sin\lambda_n t}{\lambda_n sh\lambda_n T}\int\limits_{-T}^{0} f_n(\tau)\, sh\lambda_n(T+\tau)\, d\tau + \right. \\ \left. \tfrac{1}{\lambda_n}\int\limits_{0}^{t} f_n(\tau)\sin\lambda_n(t-\tau)\, d\tau\right] \end{gathered} \tag{25}$$

$$u^-(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)\left[-\frac{sh\lambda_n t}{sh\lambda_n T}\varphi_n + \frac{1}{\lambda_n}\int\limits_{-T}^{0} f_n(\tau)\, k_n(t,\tau)\, d\tau\right], \tag{26}$$

где

$$k_n(t,\tau)=\begin{cases}\frac{sh\lambda_n t.sh\lambda_n(T+\tau)}{sh\lambda_n T}, -T\le\tau\le t,\\ \frac{sh\lambda_n \tau.sh\lambda_n(T+t)}{sh\lambda_n T}, t\le\tau\le 0\end{cases}$$

причем $k_n(t,\tau)=k_n(\tau,t)$,$|k_n(t,\tau)|\le\frac{1}{2}$ Производные от искомой функции, которые участвуют в уравнении и условиях склеивания имеют вид

$$\frac{\partial^2 u^+}{\partial x^2}=\sum_{n=1}^{\infty}X_n(x)\left[{\lambda_n}^2\frac{\sin\lambda_n t}{sh\lambda_n T}\varphi_n-\lambda_n\frac{\sin\lambda_n t}{sh\lambda_n T}\int_{-T}^{0}f_n(\tau)\,sh\lambda_n(T+\tau)\,d\tau-\right.$$
$$\left.\lambda_n\int_0^t f_n(\tau)\sin\lambda_n(t-\tau)\,d\tau\right], \tag{27}$$

$$\frac{\partial u^+}{\partial t}=\sum_{n=1}^{\infty}X_n(x)\left[-\frac{\lambda_n\cos\lambda_n t}{sh\lambda_n T}\varphi_n+\frac{\cos\lambda_n t}{sh\lambda_n T}\int_{-T}^{0}f_n(\tau)\,sh\lambda_n(T+\tau)\,d\tau+\right.$$
$$\left.\int_0^t f_n(\tau)\cos\lambda_n(t-\tau)\,d\tau\right], \tag{28}$$

$$\frac{\partial^2 u^+}{\partial t^2}=\sum_{n=1}^{\infty}X_n(x)\left[{\lambda_n}^2\frac{\sin\lambda_n t}{sh\lambda_n T}-\lambda_n\frac{\sin\lambda_n t}{sh\lambda_n T}\int_{-T}^{0}f_n(\tau)\,sh\lambda_n(T+\tau)\,d\tau+\right.$$
$$\left.f_n(t)-\lambda_n\int_0^t f_n(\tau)\sin\lambda_n(t-\tau)\,d\tau\right], \tag{29}$$

$$\frac{\partial^2 u^-}{\partial x^2}=\sum_{n=1}^{\infty}X_n(x)\left[\lambda_n\frac{sh\lambda_n t}{sh\lambda_n T}\varphi_n-\lambda_n\int_{-T}f_n(\tau)\,k_n(t,\tau)\,d\tau\right], \tag{30}$$

$$\frac{\partial u^-}{\partial t}=\sum_{n=1}^{\infty}X_n(x)\left[-\lambda_n\frac{ch\lambda_n t}{sh\lambda_n T}\varphi_n+\int_{-T}^{t}f_n(\tau)\,\frac{ch\lambda_n t.sh\lambda_n(T+\tau)}{sh\lambda_n T}d\tau+\right.$$
$$\left.\int_t^0 f_n(\tau)\,\frac{ch\lambda_n(T+t).sh\lambda_n\tau}{sh\lambda_n T}d\tau\right], \tag{31}$$

$$\frac{\partial^2 u^-}{\partial t^2}=\sum_{n=1}^{\infty}X_n(x)\left[-{\lambda_n}^2\frac{sh\lambda_n t}{sh\lambda_n T}\varphi_n+\lambda_n\int_{-T}^{0}k_n(t,\tau)\,f_n(\tau)\,d\tau+\right.$$
$$\left.f_n(t)\right]. \tag{32}$$

Нам необходимо доказать абсолютную и равномерную сходимость рядов (25)-(32). Ниже мы докажем ряд лемм которые используется при доказательстве теорему о существовании решения задачи (1)-(6).

Лемма 1. Пусть $f(x,t) \in C_{x,t}^{1,0}\left(\overline{\Omega}\right), f(0,t) = f(p,t) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x} \in Lip_\alpha[0,p]$ равномерно по t, $0 < \alpha < 1$, тогда ряд (15) сходится абсолютно и равномерно в $\overline{\Omega}$.

Доказательство. Интегрируя по частям (17) получаем

$$f_n(t) = \frac{1}{\lambda_n} f_n^{(1,0)}(t) \tag{33}$$

где $f_n^{(1,0)}(t) = \int\limits_0^p \frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\sqrt{\frac{2}{p}}\cos\lambda_n x dx$ причем [14] $\left|f_n^{(1,0)}(t)\right| \le \frac{c}{n^\alpha}, c = const > 0$. Тогда$|f_n(t)| \le \frac{cp}{\pi n^{1+\alpha}}$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\alpha}}$ сходится по интегральному признаку Коши. Поэтому ряд (15) сходится абсолютно и равномерно в $\overline{\Omega}$.

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Пусть $\varphi(x) \in W_2^1(0,p), \varphi(0) = \varphi(p) = 0$.Тогда ряд (16) сходится абсолютно и равномерно в $[0,p]$.

Доказательство. Интегрируя по частям (18) имеем $\varphi_n = \frac{1}{\lambda_n}\varphi_n^{(1)}$, где $\varphi_n^{(1)} = \int\limits_0^p \varphi'(x)\sqrt{\frac{2}{p}}\cos\lambda_n x dx$, причем по неравенству Бесселя [15] $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\varphi_n^{(1)}\right|^2 \le \|\varphi'\|_{L_2(0,p)}^2$. Далее $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\varphi_n| = \frac{p}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left|\varphi_n^{(1)}\right|$. Применяя неравенство Буняковского для сумм [15] к последнему неравенству находим

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left|\varphi_n^{(1)}\right| \le \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|\varphi_n^{(1)}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \frac{\pi}{\sqrt{6}}\|\varphi'\|_{L_2(0,p)}.$$

Лемма 2 доказана.

Легко доказываются следующие Леммы.

Лемма 3. Если $f(x,t) \in L_2(\Omega)$, то ряд (25) сходится абсолютно и равномерно в $\overline{\Omega^+}$.

Лемма 4. Ряд (26) сходится абсолютно и равномерно в $\overline{\Omega^-}$.

Лемма 5. Пусть $f(x,t) \in C_{x,t}^{1,0}\left(\overline{\Omega^+}\right), \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \in L_2(\Omega)$, тогда ряд (27) сходится абсолютно и равномерно в $\overline{\Omega^+}$.

Лемма 6. Ряд (28) сходится абсолютно и равномерно в $\overline{\Omega^+}$.

Следствие 1. Ряд (29) отличается от ряда (27) слагаемым

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n\left(t\right) X_n\left(x\right) \tag{34}$$

который сходится абсолютно и равномерно в силу Леммы 1. Следовательно, ряд (29) сходится абсолютно и равномерно в $\overline{\Omega^+}$.

Лемма 7. Пусть $\varphi\left(x\right) \in W_2^3\left(0,p\right), \varphi\left(0\right) = \varphi\left(p\right) = 0, \varphi''\left(0\right) = \varphi''\left(p\right) = 0$, тогда ряд (30) сходится абсолютно и равномерно в $\overline{\Omega^-}$.

Следствие 2. Ряд (32) отличается от ряда (30) слагаемым вида (34) который сходится абсолютно и равномерно в силу Леммы 1. Поэтому ряд (32) сходится абсолютно и равномерно в $\overline{\Omega^-}$.

Лемма 8. Пусть $\varphi\left(x\right) \in W_2^2\left(0,p\right), \varphi\left(0\right) = \varphi\left(p\right) = 0$, тогда ряд (31) сходится абсолютно и равномерно в $\overline{\Omega^-}$.

Теорема 2. Если выполнены условия;

1) $f\left(x,t\right) \in C\left(\overline{\Omega}\right), f\left(0,t\right) = f\left(p,t\right) = 0, \frac{\partial f}{\partial x} \in Lip_{\alpha}\left[0,p\right]$ равномерно по $t, 0 < \alpha < 1, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \in L_2\left(\Omega\right)$;

2) $\varphi\left(x\right) \in W_2^3\left(0,p\right), \varphi\left(0\right) = \varphi\left(p\right) = 0, \varphi''\left(0\right) = \varphi''\left(p\right) = 0$, то существует решение задачи (1)-(6), оно удовлетворяет уравнению (1) в $\Omega^+ \cup \Omega^-$ и условиям (2)-(6).

Доказательство. Абсолютная и равномерная сходимость рядов (25)-(32) следует из Лемм. Условие (2) выполняется в силу свойства функции $X_n\left(x\right)$. Так как ряды (25)-(32) сходятся абсолютно и равномерно, то в них можно переходить к пределу под знаком суммы. В (26) переходя к пределу при $t \to -T$ убеждаемся, что условие (3) выполняется. Переходя к пределу при $t \to +0$ в (25) и при $t \to -0$ в (26) и сравнивая полученные выражения заключаем, что условие (4) выполняется. Аналогично показывается, что условия (5) и (6) также выполняются.

Теорема 2 доказана.

Литература

1. Сабитов К. Б. Задача Дирихле для уравнений смешанного типа в прямоугольной области//Докл.РАН, 2007.т.413,№1,с.23-26.

2. Сабитов К. Б. Задача Дирихле для уравнений смешанного типа в полуполосе // Дифференц. Уравнения. 2008, т.44,№9,с.1417-1422.

3. Сабитов К. Б. , Рахманова Л. Х. Начально-граничная задача для

уравнений смешанного параболо-гиперболического типа в прямоугольной области // Дифференц. Уравнения. 2008, т.44, №9, с.1175

4. Сабитов К. Б. Задача Трикоми для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа в прямоугольной области // Мат.заметки, 2009, т.86,вып.2,с.273-279.

5. Сабитов К. Б., Сулейманова А.Х. Задача Дирихле для уравнения смешанного типа с характеристическим вырождением в прямоугольной области // Изв. Вузов. Математика, 2009, №11,с.43-52.

6. Сабитов К. Б., Сафин Э. М. Обратная задача для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа в прямоугольной области // Изв. вузов. Математика, 2010, №4,с.55-62.

7. Аманов Д., Отарова Ж. А. Краевая задача для уравнения смешанного типа четвертого порядка // УзМЖ, 2008,№3,с.13-22.

8. Amanov D., Yuldasheva A. V. Solvability and spectral properties of boundary value problems for equation of even order // Malaysian Journal of Mathematical sciences. 3(2),227-248(2009).

9. Amanov D. About correctness of boundary value problems for equation of even order // Uzbek Mfth.Journal. 2011, №4,p.20-35.

10. Amanov D. , Ashyralyev A.Well-posedness of boundary value problems for equation of even order // EJDE, vol.2014(2014),№108, p. 1-18.

11. Amanov D. Boundary value problems for parabolic-hyperbolic equation // arxiv.org/pdf/1505.01930.

12. Моисеев Е. И. О решении спектральным методом одной нелокальной задачи // Дифференц. Уравнения. 1999, т.35, №8, с. 1094-1100.

13. Ильин В. А. , Позняк Э. Г. Основы математического анализа. 1973, Ч.2.,448 с.

14. Бари Н. К. Тригонометрические ряды. М. 1961, 936с.

15. Люстерник Л. А. , Соболев В. И. Элементы функционального анализа. М. : Наука. 1965, 520 с.

Институт математики при НУУз

Uzbek Mathematical
Journal, 2017, №1, pp.27-35

УДК 517.955.8, 517.955.4, 517.957

Эффект конечной скорости распространения возмущения для одной модели кросс-диффузионной системы недивергентного вида с источником

Арипов М., Матякубов А.С.

Parabolik tipdagi nodivergent chiziqsiz tenglamalar sistemasi uchun Koshi masalasi qaraladi. Nodivergent kross-diffuziya sistemasi uchun Zeldovich-Barenblatt tipidagi yechim quriladi, yechimlarni solishtirish usuli yordamida Koshi masalasi uchun chekli tezlikda tarqalish xususiyati o'rnatiladi, sekin diffuziya holi o'rganiladi.

Considers the Cauchy problem for a nonlinear system of parabolic equations not in divergence form. Zeldovich-Barenblatt type solutions for a cross-diffusion systems in non-divergence form is constructed, using the method of comparing the solutions, the properties of a finite speed of propagation of perturbations to the Cauchy problem is established, studied the case of slow diffusion.

1. Введение

Рассмотрим в области $Q = \{(t, x) : t \in (0, T), x \in R^N\}$ параболическую систему двух квазилинейных уравнений недивергентного вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v^{\alpha_1} \nabla \left(u^{m_1 - 1} \nabla u \right) + u^{\beta_1} , \ \frac{\partial v}{\partial t} = u^{\alpha_2} \nabla \left(v^{m_2 - 1} \nabla v \right) + v^{\beta_2} , \qquad (1)$$

$$u|_{t=0} = u_0(x) \geq 0, \quad v|_{t=0} = v_0(x) \geq 0, \ \ \forall x \in R^N \qquad (2)$$

где m_1, m_2, α_1, α_2, β_1, β_2 - положительные вещественные числа, $T \leq +\infty$, $u = u(t, x) \geq 0$, $v = v(t, x) \geq 0$ - искомые решения.

Нелинейные уравнения и системы уравнений в недивергентной форме часто используются для описания различных физических явлений, таких, как процесс диффузии для биологических видов, резистивный диффузионных явлений в бессиловых магнитных полей, кривая потока укорочения, распространение инфекционных заболеваний и так далее, см. [1] - [6].

В работе [1] изучена свойство нелинейной вырождающиеся параболической системы $u_t = v^{\gamma_1}\left(u_{xx} + au\right),\ v_t = u^{\gamma_2}\left(v_{xx} + bv\right)$ с граничными условиями Дирихле. Используются метод регуляризации и методика верхнего-нижнего решения, для доказательство локальной существования решения для этой системы. Обсуждается существование глобального решения, установлены blow-up свойство решения.

Исследовано в работе [2] положительные решения вырожденных квазилинейных параболических систем недивергентной форме

$$u_{it} = f_i\left(u_{i+1}\right)\left(\Delta u_i + a_i u_i\right),\ x \in \Omega,\ t > 0,\ i = 1, 2, ..., n-1,$$
$$u_{nt} = f_n\left(u_1\right)\left(\Delta u_n + a_n u_n\right),\ x \in \Omega,\ t > 0$$

с однородным граничным условием Дирихле и положительным начальным условием и доказаны локальное существование и единственность классического решения. Показано, что когда $\min\{a_1, ..., a_n\} \leq \lambda_1$ (где λ_1 является первое собственное значение$-\Delta$ в Ω с однородным граничным условием Дирихле), то существует глобальное положительное классическое решение и все положительные классические решения не имеет свойство blow-up.

В работе [3] исследовано асимптотическое поведение автомодельных решений параболической системы не дивергентного вида $\frac{\partial u_i}{\partial t} = u_i^{\gamma_i}\nabla\left(|\nabla u_i|^{p-2}\nabla u_i\right) - u_{3-i}^{q_i}\quad (i = 1, 2)$. Построены асимптотические представления автомодельных решений нелинейных параболических систем уравнений не дивергентного вида, в зависимости от значения входящих в систему числовых параметров, найдены необходимые и достаточные признаки их существования.

Исследованию асимптотики решений параболического уравнения недивергентного вида $u_t^{'} = u^m div\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right) + \lambda u^q,\ \ m \geq 1,\ p > 1,\ q > 0,\ \lambda > 0$ с граничными условиями Дирихле посвящена работа [4], где изучается три случая в зависмости от значениями числовых параметров и доказана устойчивость стационарных состояний, обсуждена асимптотическая устойчивость решения с периодическом источником.

В работе [5] установлено существование и единственность решения с компактным носителем автомодельного решения вида $u\left(t, x\right) = \left(t+1\right)^{-\alpha} f\left(\left(t+1\right)^{\beta}|x|^2\right)$ для вырождающегося параболического уравнения в не дивергентной форме $\frac{\partial u}{\partial t} = u^m div\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right),\ \ m \geq 1, p > 1.$

В [6] исследованы некоторые свойства решений задачи Коши для нелинейного вырождающегося параболического уравнения в недивергентной формы с переменной плотностью

$|x|^n \frac{\partial u}{\partial t} = u^m div\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right)$, $p > 1$, $0 \le m < \frac{(p-2)(N+n)+p+n}{p-N}$ и найдено автомодельное решение типа Баренблатта-Зельдович-Компанеец, доказана асимптотика автомодельных решений в случае быстрой и медленной диффузии, а также приводятся результаты численных расчетов со свойством конечной скорости распространения тепла и пространственной локализации решения задачи Коши.

Свойства конечной скорости распространения возмущения (КСРВ) и асимптотика автомодельных решений для дивергентных систем рассмотрены в работах [9-10].

Настоящая работа посвящена построению решения типа Зельдович-Баренблатта для кросс-диффузионной системы недивергентного вида, устанавлению с помощью метода сравнения решений свойство КСРВ к задаче Коши (1)-(2), изучению случая медленной диффузии. Обсуждается глобальная разрешимость слабого обобщенного решения для нелинейной системы, в зависимости от значения численных параметров.

2. Автомодельная система уравнения

Для построения автомодельной системы для (1) предлагается алгоритм нелинейного расщепления [7], для чего решения системы (1) ищется в виде

$$u\left(t,x\right) = \left(T+t\right)^{-n_1} w\left(\tau,x\right),\ v\left(t,x\right) = \left(T+t\right)^{-n_2} \varphi\left(\tau,x\right), \tag{3}$$

где $n_i = -\frac{1}{\beta_i - 1}$,

$$\tau\left(t\right) = \begin{cases} \frac{(T+t)^{1+\alpha_1 n_2 + n_1(m_1-1)}}{1+\alpha_1 n_2 + n_1(m_1-1)}, & 1+\alpha_1 n_2 + n_1\left(m_1-1\right) > 0, \\ ln\left(T+t\right), & 1+\alpha_1 n_2 + n_1\left(m_1-1\right) = 0, \\ -\frac{(T+t)^{1+\alpha_1 n_2 + n_1(m_1-1)}}{1+\alpha_1 n_2 + n_1(m_1-1)}, & 1+\alpha_1 n_2 + n_1\left(m_1-1\right) < 0. \end{cases}$$

В дальнейшем система (1) исследуется при выполнении условий $n_1\left(m_1-1\right) + n_2\alpha_1 = n_2\left(m_2-1\right) + n_1\alpha_2$, $\quad 1+\alpha_1 n_2 + n_1\left(m_1-1\right) > 0$,

Тогда относительно $(w,\ \varphi)$ получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial \tau} &= \varphi^{\alpha_1}\nabla\left(w^{m_1-1}\nabla w\right) + \frac{n_1}{1+\alpha_1 n_2 + n_1(m_1-1)}\tau^{-1}\left(w^{\beta_1} - w\right), \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} &= w^{\alpha_2}\nabla\left(\varphi^{m_2-1}\nabla \varphi\right) + \frac{n_2}{1+\alpha_2 n_1 + n_2(m_2-1)}\tau^{-1}\left(\varphi^{\beta_2} - \varphi\right). \end{aligned} \tag{4}$$

Введя в (4) преобразование

$$w(\tau,x) = f(\xi),\ \ \varphi(\tau,x) = \phi(\xi),\ \ \xi = |x|\,\tau^{-\frac{1}{2}}, \tag{5}$$

где $\xi-$ автомодельная переменная, получим автомодельную систему уравнений

$$\begin{array}{l} \phi^{\alpha_1}\xi^{1-N}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^{N-1}f^{m_1-1}\frac{df}{d\xi}\right)+\frac{\xi}{2}\frac{df}{d\xi}+d_1\left(f^{\beta_1}-f\right)=0,\\ f^{\alpha_2}\xi^{1-N}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^{N-1}\phi^{m_2-1}\frac{d\phi}{d\xi}\right)+\frac{\xi}{2}\frac{d\phi}{d\xi}+d_2\left(\phi^{\beta_2}-\phi\right)=0\,. \end{array} \tag{6}$$

Здесь $d_i=\frac{n_i}{1+\alpha_i n_{3-i}+n_i(m_i-1)},\ i=1,2.$

Мы будем рассматривать неотрицательные решения системы уравнений (6), удовлетворяющих следующим условиям:

$$\begin{array}{l} f(0)=M_1>0,\ \phi(0)=M_2>0,\\ f(s_1)=\phi(s_2)=0,\ 0<s_1<\infty,\ \ 0<s_2<\infty\,, \end{array} \tag{7}$$

$$f'(0)=0,\ \phi'(0)=0,\ f(\infty)=\phi(\infty)=0. \tag{8}$$

3. Асимптотика решений автомодельных систем уравнений (6).

Решение задачи (6)-(8) определяет конкретный вид автомодельного решения (5) и в конечном итоге дает представление о характере решения в рассматриваемой нелинейной среде.

Отметим, что функция

$$\bar{f}(\xi)=\left(a-\xi^2\right)_+^{p_1},\ \overline{\varphi}(\xi)=\left(a-\xi^2\right)_+^{p_2}, \tag{9}$$

где $y_+=\max\,(y,\ 0)$, $a>0$, $p_i=\frac{m_{3-i}-1-\alpha_i}{(m_1-1)(m_2-1)-\alpha_1\alpha_2}$, $m_{3-i}>1+\alpha_i,\ i=1,2$ при $\xi<\sqrt{a}$ удовлетворяет условию (7). Покажем, что она будет асимптотикой решений задачи (6)-(7).

Введем обозначения:

$$c_{i1}=\frac{d_i}{4a},\ c_{i2}=p_i\left(m_i p_i-1\right),\ c_{i3}=-\frac{p_i}{4b_i},\quad i=1,2.$$

Пусть выполняется равенство

$n_1(m_1-1)+n_2\alpha_1=n_2(m_2-1)+n_1\alpha_2.$

Тогда справедлива:

Теорема 1. *Пусть* $1+\alpha_1 n_2+n_1(m_1-1)>0,\ \beta_i<1,\ \ i=1,2.$ *Тогда решение с компактном носителем задачи (6)-(7) при* $\xi\to\sqrt{a}$ *имела асимптотику следующего вида*

$$f(\xi)=z_1\left(a-\xi^2\right)^{p_1}(1+o(1)),\ \ \phi(\xi)=z_2\left(a-\xi^2\right)^{p_2}(1+o(1)), \tag{10}$$

необходимо чтобы соблюдалось одно из следующих условий:
1. $p_1=\frac{1}{1-\beta_1}$, $p_2=\frac{1}{1-\beta_2}$ *и* $z_1,\ z_2$ *- являются соответственно корнями системы нелинейных алгебраических уравнений*
$c_{i1}z_i^{\beta_i-1}+c_{i2}z_i^{m_i-1}z_{3-i}^{\alpha_i}+c_{i3}=0\,,\ \ i=1,2.$
2. $p_i<\frac{1}{1-\beta_i}$, $m_ip_i<1,\ \ i=1,2$ *и* $z_1,\ z_2$ *- являются соответственно корнями системы нелинейных алгебраических уравнений*
$c_{i1}z_i^{\beta_i-m_i}+c_{i2}z_{3-i}^{\alpha_i}=0,\ \ i=1,2.$
3. $p_1=\frac{1}{1-\beta_1}$, $p_2<\frac{1}{1-\beta_2}$, $m_2p_2<1$ *и* $z_1,\ z_2$ *- являются соответственно корнями системы нелинейных алгебраических уравнений*
$$\begin{cases} c_{11}z_1^{\beta_1-1}+c_{12}z_1^{m_1-1}z_2^{\alpha_1}+c_{13}=0,\\ c_{21}z_2^{\beta_2-m_2}+c_{22}z_1^{\alpha_2}=0.\end{cases}$$
4. $p_1<\frac{1}{1-\beta_1}$, $p_2=\frac{1}{1-\beta_2}$, $m_1p_1<1$ *и* $z_1,\ z_2$ *- являются соответственно корнями системы нелинейных алгебраических уравнений*
$$\begin{cases} c_{11}z_1^{\beta_1-m_1}+c_{12}z_2^{\alpha_1}=0,\\ c_{21}z_2^{\beta_2-1}+c_{22}z_2^{m_2-1}z_1^{\alpha_2}+c_{23}=0.\end{cases}$$

Доказательство. Преобразуем систему (6) к относительно легко изучаемому виду. Для этого применим следующее преобразования

$$f(\xi)=\overline{f}(\xi)y_1(\eta),\ \ \phi(\xi)=\overline{\phi}(\xi)y_2(\eta),\ \ \eta=-\ln\left(a-\xi^2\right), \tag{11}$$

где $\overline{f}(\xi)=\left(a-\xi^2\right)^{p_1}$, $\overline{\phi}\left(\xi\right)=\left(a-\xi^2\right)^{p_2}$, $a>0$, $y_1\left(\eta\right), y_2\left(\eta\right)$ - искомые функции.

После преобразования (11) система (6) принимает вид

$$\begin{aligned} &y_{3-i}^{\alpha_i}\tfrac{d}{d\eta}\left(Ly_i\right)+a_{i1}\left(\eta\right)y_{3-i}^{\alpha_i}\left(Ly_i\right)+a_{i2}\left(\eta\right)\left(\tfrac{dy_i}{d\eta}+a_{i0}\left(\eta\right)y_i\right)+\\ &+a_{i3}\left(\eta\right)y_i^{\beta_i}+a_{i4}\left(\eta\right)y_i=0.\end{aligned} \tag{12}$$

В которой $a_{i0}(\eta)=-p_i$, $a_{i1}(\eta)=\frac{N}{2}\frac{e^{-\eta}}{a-e^{-\eta}}+1-p_im_i$, $a_{i2}(\eta)=\frac{1}{4}$, $a_{i3}(\eta)=\frac{d_ie^{-(p_i(\beta_i-1)+1)\eta}}{4(a-e^{-\eta})}$, $a_{i4}(\eta)=-\frac{d_ie^{-\eta}}{4(a-e^{-\eta})}$, $Ly_i=y_i^{m_i-1}\left(\frac{dy_i}{d\eta}+a_{i0}\left(\eta\right)y_i\right)$, $i=1,2.$

Здесь предполагалось $\xi\in[\xi_0,\xi_1), 0<\xi_0<\xi_1, \xi_1=\sqrt{a}.$

Поэтому функция $\eta(\xi)$ обладает свойствами: $\eta'(\xi)>0$при $\xi\in[\xi_0,\xi_1)$, $\eta_0=\eta(\xi_0)>0,\ \lim\limits_{\xi\to\xi_1}\eta(\xi)=+\infty.$

Полагая в системе (12)

$$v_i(\eta)=y_i^{m_i-1}\left(\frac{dy_i}{d\eta}+a_{i0}\left(\eta\right)y_i\right)\quad(i=1,2) \tag{13}$$

получим тождество

$$v_i'(\eta) \equiv -a_{i1}(\eta)v_i(\eta)-a_{i2}(\eta)y_{3-i}^{-\alpha_i}y_i^{1-m_i}v_i(\eta)-a_{i3}(\eta)y_i^{\beta_i}y_{3-i}^{-\alpha_i}-a_{i4}(\eta)y_iy_{3-i}^{-\alpha_i}\,. \tag{14}$$

Рассмотрим теперь функцию

$$g_i(\lambda_i,\eta) \equiv -a_{i1}(\eta)\lambda_i - a_{i2}(\eta)y_{3-i}^{-\alpha_i}y_i^{1-m_i}\lambda_i - a_{i3}(\eta)y_i^{\beta_i}y_{3-i}^{-\alpha_i} - a_{i4}(\eta)y_iy_{3-i}^{-\alpha_i}\,, \tag{15}$$

где $\lambda_i \in R$, (i=1,2).

Пусть сначала $1+\alpha_1 n_2 + n_1(m_1-1) > 0$, $\beta_i < 1$, $i=1,2$. Тогда функция $g_i(\lambda_i,\eta), /(i=1,2)$ сохраняет знак на некотором промежутке $[\eta_1,\,+\infty) \subset [\eta_0,\,+\infty)$ при каждом фиксированном значении λ_i (i=1,2), отличном от значений удовлетворяющих системе

$-a_{i1}^0\lambda_i - a_{i2}^0\left(y_i^0\right)^{1-m_i}\left(y_{3-i}^0\right)^{-\alpha_i}\lambda_i - a_{i3}^0\left(y_i^0\right)^{\beta_i}\left(y_{3-i}^0\right)^{-\alpha_i} - a_{i4}^0y_i^0\left(y_{3-i}^0\right)^{-\alpha_i} = 0 \quad (\mathrm{i}=1,2)$.

Отсюда ввиду $\lim\limits_{\eta\to+\infty} a_{i1}(\eta) = 1-m_ip_i$, $\lim\limits_{\eta\to+\infty} a_{i2}(\eta) = \frac{1}{4}$, $\lim\limits_{\eta\to+\infty} a_{i4}(\eta) = 0$, $\lim\limits_{\eta\to+\infty} a_{i3}(\eta) = -\frac{p_i}{4}$, при $p_i = \frac{1}{1-\beta_i}$, $i=1,2$. $\lim\limits_{\eta\to+\infty} a_{i3}(\eta) = 0$, при $p_i < \frac{1}{1-\beta_i}$, $i=1,2$ следует, что функция $g_i(\lambda_i,\eta)$ $(i=1,2)$ сохраняет знак на промежутке $[\eta_1,\,+\infty) \subset [\eta_0,\,+\infty)$, где $\lambda_i \neq 0 \quad (i=1,2)$.

А при $p_i > \frac{1}{1-\beta_i}$, $i=1,2$ перепишем функцию $g_i(\lambda_i,\eta)$ (i=1,2) следующим образом

$$g_i(\lambda_i,\eta) \equiv -a_{i1}(\eta)\lambda_i - a_{i2}(\eta)y_{3-i}^{-\alpha_i}y_i^{1-m_i}\lambda_i - \\ - a_{i3}(\eta)y_{3-i}^{-\alpha_i}y_i\left(y_i^{\beta_i-1} + a_{i3}^{-1}(\eta)a_{i4}(\eta)\right).$$

Отсюда следует, что функция $g_i(\lambda_i,\eta)$ (i=1,2) сохраняет знак на промежутке $[\eta_2,\,+\infty) \subset [\eta_0,\,+\infty)$, где $\lambda_i \neq 0$ (i=1,2).

Значит, функция $g_i(\lambda_i,\eta)$ (i=1,2) для всех $\eta \in [\eta_0,\,+\infty)$ удовлетворяет одному из неравенств

$$g_i(\lambda_i,\eta) > 0 \quad \text{или} \quad g_i(\lambda_i,\eta) < 0 \quad (i=1,2). \tag{16}$$

Допустим теперь, что для функции $v_i(\eta)$ (i=1,2) предел при $\eta \to +\infty$ не существует. Рассмотрим случай, когда выполнено одно из неравенств (16). В силу колеблемости функции $v_i(\eta)$ (i=1,2) прямую $\bar{v}_i = \lambda_i$ (i=1,2) ее график бесконечное число раз пересекает на интервале $[\eta_0,\,+\infty)$. Но это невозможно, так как на интервале $[\eta_0,\,+\infty)$ справедливо одно из неравенств (16) и поэтому из тождества (15) следует, что график функции $v_i(\eta)$ (i=1,2) пересекает прямую $\bar{v}_i = \lambda_i$ (i=1,2) только один раз на интервале $[\eta_0,\,+\infty)$. Следовательно, для функции $v_i(\eta)$ (i=1,2) существует предел при $\eta\to+\infty$.

По предположению функция $v_i(\eta)$ (i=1,2) определена согласно (13) и имеет предел при $\eta\to+\infty$. Тогда $y_i'(\eta)$ (i=1,2) имеет предел при $\eta\to+\infty$, причем равный нулю. Тогда $v_i(\eta)=y_i^{m_i-1}\left(\frac{dy_i}{d\eta}+a_{i0}\left(\eta\right)y_i\right)=a_{i0}^0\left(y_i^0\right)^{m_i}+o\left(1\right),\quad(i=1,2)$ при $\eta\to+\infty$ и в силу (14) производная функции $v_i(\eta)$ (i=1,2) имеет предел, при $\eta\to+\infty$, который очевидно равен нулю.

Следовательно, необходимо, чтобы $\lim\limits_{\eta\to+\infty}a_{i1}(\eta)v_i(\eta)+$

$+\lim\limits_{\eta\to+\infty}\left(a_{i2}(\eta)y_{3-i}^{-\alpha_i}y_i^{1-m_i}v_i(\eta)+a_{i3}(\eta)y_i^{\beta_i}y_{3-i}^{-\alpha_i}+a_{i4}(\eta)y_iy_{3-i}^{-\alpha_i}\right)=0$ (i $=1,2$).

Отсюда легко убедиться, чтобы система (12) имела решения $(y_1(\eta),\,y_2(\eta))$ с конечным не равным нулю пределом при $\eta\to+\infty$ необходимо, чтобы соблюдалось условия теоремы 1. Тогда решение с компактном носителем задачи (8), (11) при $\xi\to\sqrt{a}$ имеет асимптотику вида (10).

Теорема доказана.

Следствие 1. *Обобщенное решение задачи (1)-(2) имеет асимптотику при* $|x|\to a^{\frac12}\tau^{\frac12}$, $1+\alpha_1n_2+n_1\left(m_1-1\right)>0$, $\beta_i<1$, $p_i>0$ $i=1,2$ *и имеет следующий вид*

$u_A\left(t,x\right)=z_1(T+t)^{n_1}\left(a-\left(\left|x\right|\tau^{-1/2}\right)^2\right)^{p_1}\left(1+o\left(1\right)\right),$

$v_A\left(t,x\right)=z_2(T+t)^{n_2}\left(a-\left(\left|x\right|\tau^{-1/2}\right)^2\right)^{p_2}\left(1+o\left(1\right)\right),$

где z_1,z_2,n_1,n_2,p_1,p_2- *определенные выше константы.*

4. Оценки решений. Медленная диффузия (случай $m_{3-i}>1+\alpha_i,\ \ i=1,2$).

Применяя метод сравнения решений [8] и метод стандартных уравнений [7] для решения задачи (6)-(8), получаем оценку решения задачи (1) - (2).

Заметим, что функции

$$\overline{f}\left(\xi\right)=A\left(a-\xi^2\right)_+^{p_1}\ ,\ \overline{\phi}\left(\xi\right)=B\left(a-\xi^2\right)_+^{p_2}\ ,\tag{17}$$

где $p_i=\frac{m_{3-i}-1-\alpha_i}{(m_1-1)(m_2-1)-\alpha_1\alpha_2}$, i=1,2, $(b)_+=\max(0,b)$ удовлетворяют условию (7), (8).

Теорема 2. *Пусть* $m_{3-i}>1+\alpha_i$, $m_ip_i>1$, $1+\alpha_in_{3-i}+n_i\left(m_i-1\right)>0$, $A^{m_1-1}B^{\alpha_1}=\frac{1}{4(p_1m_1-1)}$, $B^{m_2-1}A^{\alpha_2}=\frac{1}{4(p_2m_2-1)}$, $-\frac{N}{2}\frac{p_1}{p_1m_1-1}+A^{\beta_1-1}a^{p_1(\beta_1-1)}\le1$, $-\frac{N}{2}\frac{p_2}{p_2m_2-1}+B^{\beta_2-1}a^{p_2(\beta_2-1)}\le1$, $u_+\left(0,x\right)\ge u_0\left(x\right),$

$v_+(0,x) \ge v_0(x)$, $x \in R$.
Тогда существует глобальное решение задачи (1) - (2) в Q и для него справедливо следующая оценка $u(t,x) \le u_+(t,x)$, $v(t,x) \le v_+(t,x)$, *где* $u_+(t,x) = (T+t)^{-n_1}\overline{f}(\xi)$, $v_+(t,x) = (T+t)^{-n_2}\overline{\phi}(\xi)$

Доказательство. Теорема 2 доказывается методом сравнения решений [8]. В качестве сравнение возьмем функции $u_+(t,x)$, $v_+(t,x)$, определенную формулой (17). Тогда в силу (3), (5), (6) имеем

$$\begin{aligned} Lu_+(t,x) &= \left(-\tfrac{N}{2}\tfrac{p_1}{p_1 m_1 - 1} - 1 + \left(\overline{f}(\xi)\right)^{\beta_1-1}\right)\overline{f}(\xi), \\ Lv_+(t,x) &= \left(-\tfrac{N}{2}\tfrac{p_2}{p_2 m_2 - 1} - 1 + \left(\overline{\phi}(\xi)\right)^{\beta_1-1}\right)\overline{\phi}(\xi). \end{aligned} \tag{18}$$

Имея ввиду в (18) $\left(\overline{f}(\xi)\right)^{\beta_1-1} = A^{\beta_1-1}\left(a-\xi^2\right)^{p_1(\beta_1-1)} \le A^{\beta_1-1}a^{p_1(\beta_1-1)}$, $\left(\overline{\phi}(\xi)\right)^{\beta_2-1} = B^{\beta_2-1}\left(a-\xi^2\right)^{p_2(\beta_2-1)} \le B^{\beta_2-1}a^{p_2(\beta_2-1)}$, получим

$$\begin{aligned} Lu_+(t,x) &\le \left(-\tfrac{N}{2}\tfrac{p_1}{p_1 m_1 - 1} - 1 + A^{\beta_1-1}a^{p_1(\beta_1-1)}\right)\overline{f}(\xi), \\ Lv_+(t,x) &\le \left(-\tfrac{N}{2}\tfrac{p_2}{p_2 m_2 - 1} - 1 + B^{\beta_2-1}a^{p_2(\beta_2-1)}\right)\overline{\phi}(\xi). \end{aligned}$$

Из этого выражения следует, что для выполнение условия $Lu_+ \le 0$, $Lv_+ \le 0$, достаточно выполнение условий

$$-\frac{N}{2}\frac{p_1}{p_1 m_1 - 1} + A^{\beta_1-1}a^{p_1(\beta_1-1)} \le 1,$$

$$-\frac{N}{2}\frac{p_2}{p_2 m_2 - 1} + B^{\beta_2-1}a^{p_2(\beta_2-1)} \le 1.$$

Оно в силу условия теоремы выполнено. Тогда, по теореме сравнения решений задачи (1) - (2) существует глобальное решение в Q и для него справедливы следующие оценки

$u_+(t,x) \ge u(t,x)$, $v_+(t,x) \ge v(t,x)$, $x \in R$.

Теорема доказана.

Литература

1. Zhi-wen Duan, Li Zhou. Global and Blow-Up Solutions for Nonlinear Degenerate Parabolic Systems with Crosswise-Diffusion // Journal of Mathematical Analysis and Applications. - 244(2000). - P. 263–278.

2. Haihua Lu. Global existence and blow-up analysis for some degenerate and quasilinear parabolic systems // Electronic Journal of Qualitative

Theory of Differential Equations. - 2009. - No. 49. - P. 1–14.

3. Арипов М., Матякубов А.С. К асимптотическому поведению решений нелинейных параболических систем уравнений недивергентного вида. Вестник КазНУ, №3(86), 2015, с. 275-282.
4. Jin, Yin. Asymptotic behavior of solutions for a doubly degenerate parabolic equation not in divergence form. Rocky Mountain J. Math., 2016, Volume 46, Number 1. http://projecteuclid.org/euclid.rmjm/1453817311
5. Chunhua J., Jingxue Y. Self-similar solutions for a class of non-divergence form equations // Nonlinear Differ. Equ. Appl. Nodea. - 2013. - Vol. 20, Issue 3. - P. 873–893.
6. Raimbekov J.R. The Properties of the Solutions for Cauchy Problem of Nonlinear Parabolic Equations in Non-Divergent Form with Density // Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics 2015, 8(2), 192–200.
7. Aripov M. Method of the Standard Equation for the Solution of the Nonlinear Value Problem. Fan, Tashkent, 1988, 137 p.
8. Samarskii A.A., Galaktionov V.A., Kurdyumov S.P. and Mikhailov A.P. Blow-Up in Quasilinear Parabolic Equations. Berlin, 4(1995), Walter de Grueter, 535. http://dx.doi.org/10.1515/9783110889864
9. Aripov M., Sadullaeva Sh.A. Qualitative Properties of Solutions of a Doubly Nonlinear Reaction-Diffusion System with a Source. Journal of Applied Mathematics and Physics, 2015, 3, 1090-1099. http://dx.doi.org/10.4236/jamp.2015.39135
10. Aripov M., Sadullaeva Sh.A. An asymptotic analysis of a self-similar solution for the double nonlinear reaction-diffusion system. J. Nanosystems: physics, chemistry, mathematics, 2015, 6 (6), p. 1-10. (ISSN 1997-139)

Национальный университет Узбекистана
им. М.Улугбека

Uzbek Mathematical
Journal, 2017,№1, pp.36-43

УДК 519.652

Построение дискретного аналога оператора $\frac{d^4}{dx^4}-2\frac{d^2}{dx^2}+1$ и его свойсва

Ахмадалиев Г.Н., Бахромова Х.С., Давлатова Ф.

Maqolada $\frac{d^4}{dx^4}-2\frac{d^2}{dx^2}+1$ differensial operatorning diskret analogi qurilgan va uning ba'zi xossalari isbotlangan.

In this paper the discrete analogue of the differential operator $\frac{d^4}{dx^4}-2\frac{d^2}{dx^2}+1$ is constructed and some of its properties are proved.

1. Введение

Построение оптимальных квадратурных и интерполяционных формул в различных гильбертовых пространствах тесно связано с дискретными аналогами дифференциальных операторов. В работах [1,2] приведено описание аналитического алгоритма для нахождения коэффициентов оптимальных кубатурных формул в пространстве $L_2^{(m)}$. Для этого С.Л.Соболев определил и исследовал дискретный аналог $D_{hH}^{(m)}[\beta]$ полигармонического оператора Δ^m. Построение дискретного оператора $D_{hH}^{(m)}[\beta]$ для $n-$ мерного случая оказалось очень трудным. В одномерном случае дискретный аналог $D_h^{(m)}(h\beta)$ дифференциального оператора $\frac{\mathrm{d}^{2m}}{\mathrm{d}x^{2m}}$ построен З.Ж.Жамаловым [3] и Х.М.Шадиметовым [4].

Построению дискретных аналогов дифференциальных операторов посвящены, например, работы [5-8].

В настоящей работе мы занимаемся построением дискретного аналога оператора $\frac{\mathrm{d}^4}{\mathrm{d}x^4}-2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+1$.

Рассмотрим следующее равенство

$$D(h\beta)*G(h\beta)=\delta_{\mathrm{d}}(h\beta), \tag{1}$$

где $G(h\beta)$ - функция дискретного аргумента соответствующая функцию

$$G(x)=\frac{\mathrm{sgn}x}{4}\left(x\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}-\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}\right), \tag{2}$$

$\delta_{\mathrm{d}}(h\beta)$ - дискретная дельта функция, т.е. $\delta_{\mathrm{d}}(h\beta)$ равно 1 при $\beta = 0$ и равно 0 при $\beta \neq 0$.

Требуется найти функцию $D(h\beta)$ дискретного аргумента удовлетворяющее равенство (1).

Дискретная функция $D(h\beta)$ имеет важную роль при вычислении коэффициентов оптимальных квадратурных и интерполяционных формул в гильбертовом пространстве $K_2(P_2)$, снабженное нормой $\|\varphi\| = \left\{\int\limits_0^1 (\varphi''(x) - \varphi(x))^2\,\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{2}}$.

2. Определения и известные формулы

Здесь мы в основном используем понятие функций дискретного аргумента и соответствующие действия над ними [1,2]. Для полноты приведем некоторые определения.

Пусть φ и ψ вещественнозначные функции определенные на действительной оси $\mathbb{R}$.

Определение 1. Функцию $\varphi(h\beta)$ называют *функцией дискретного аргумента*, если она задана на некотором множестве целых значений аргумента β.

Определение 2. *Скалярным произведением* двух дискретных функций $\varphi(h\beta)$ и $\psi(h\beta)$ называют число $[\varphi, \psi] = \sum\limits_{\beta=-\infty}^{\infty} \varphi(h\beta) \cdot \psi(h\beta)$, если ряд в правой части последнего равенства абсолютно сходится.

Определение 3. *Сверткой* $\varphi(h\beta) * \psi(h\beta)$ двух функций $\varphi(h\beta)$ и $\psi(h\beta)$ называется скалярное произведение

$$\varphi(h\beta) * \psi(h\beta) = [\varphi(h\gamma), \psi(h\beta - h\gamma)] = \sum_{\gamma=-\infty}^{\infty} \varphi(h\gamma)\psi(h\beta - h\gamma).$$

Определение 4. Функции $\overset{\smile}{\varphi}(x) = \sum\limits_{\beta=-\infty}^{\infty} \varphi(h\beta)\delta(x - h\beta)$ называют *боронообразными функциями.*

Теперь приведем некоторые известные формулы, которые используем при построении дискретного аналога дифференциального оператора (см., например, [1]).

Прямое и обратное преобразования Фурье для непрерывных функций

$$F[\varphi]=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)e^{2\pi\mathrm{i}px}\,\mathrm{d}x,\quad F^{-1}[\varphi]=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(p)e^{-2\pi\mathrm{i}px}\,\mathrm{d}p. \tag{3}$$

Некоторые свойства преобразования Фурье

$$F[\varphi*\psi]=F[\varphi]\cdot F[\psi], \tag{4}$$

$$F[\varphi\cdot\psi]=F[\varphi]*F[\psi], \tag{5}$$

$$F[\delta^{(\alpha)}(x)]=(-2\pi\mathrm{i}p)^{\alpha},\quad F[\delta(x)]=1. \tag{6}$$

Свойства δ функции

$$\delta(hx)=h^{-1}\delta(x), \tag{7}$$

$$\delta(x-a)\cdot f(x)=\delta(x-a)\cdot f(a), \tag{8}$$

$$\delta^{(\alpha)}(x)*f(x)=f^{(\alpha)}(x), \tag{9}$$

$$\phi_0(x)=\sum_{\beta=-\infty}^{\infty}\delta(x-\beta)=\sum_{\beta=-\infty}^{\infty}e^{2\pi\mathrm{i}x\beta}. \tag{10}$$

3. Построение дискретного аналога оператора

В настоящем параграфе мы построем дискретный аналог $D(h\beta)$ дифференциального оператора $\frac{d^4}{dx^4}-2\frac{d^2}{dx^2}+1$.

Справедливы следующие

Теорема 1. *Дискретный аналог $D(h\beta)$ дифференциального оператора $\frac{d^4}{dx^4}-2\frac{d^2}{dx^2}+1$, удовлетворяющий равенству (1), имеет вид*

$$D(h\beta)=p_2\begin{cases} A_1\lambda_1^{|\beta|-1}, & |\beta|\geq 2,\\ 1+A_1, & |\beta|=1,\\ C+\frac{A_1}{\lambda_1}, & \beta=0,\end{cases} \tag{11}$$

где

$$p_2=-\frac{2}{\mathrm{sh}(h)-h\mathrm{ch}(h)},\quad C=\frac{2h\mathrm{ch}(2h)-\mathrm{sh}(2h)}{\mathrm{sh}(h)-h\mathrm{ch}(h)},$$
$$A_1=\frac{4h^2\mathrm{sh}^4h\ \lambda_1^2}{(\lambda_1^2-1)(\mathrm{sh}h-h\mathrm{ch}h)^2},\quad \lambda_1=\frac{2h-\mathrm{sh}(2h)+2\mathrm{sh}h\sqrt{\mathrm{sh}^2h-h^2}}{h\mathrm{ch}h-\mathrm{sh}h},\ |\lambda_1|<1,$$

h - малый положительный параметр.

Теорема 2. Дискретный аналог $D(h\beta)$ дифференциального опера-

тора $d^4/dx^4 - 2d^2/dx^2 + 1$ удовлетворяет следующим равенствам:
1) $D(h\beta) * \mathrm{e}^{h\beta} = 0$, 2) $D(h\beta) * \mathrm{e}^{-h\beta} = 0$,
3) $D(h\beta) * (h\beta\,\mathrm{e}^{h\beta}) = 0$, 4) $D(h\beta) * (h\beta\,\mathrm{e}^{-h\beta}) = 0$,
5) $D(h\beta) * G(h\beta) = \delta_{\mathrm{d}}(h\beta)$,
где $G(x)$ - определяется равенством (2) и $\delta_{\mathrm{d}}(h\beta)$ - дискретная дельта-функция.

Доказательство теоремы 1. Согласно теории периодических обобщенных функций и преобразования Фурье, вместо функции $D(h\beta)$ удобнее искать боронообразную функцию $\overset{\frown}{D}(x) = \sum\limits_{\beta=-\infty}^{\infty} D(h\beta)\delta(x-h\beta)$ (см. [1,2]). Уравнение (1) в классе боронообразных функций переходит в уравнение

$$\overset{\frown}{D}(x) * \overset{\frown}{G}(x) = \delta(x), \tag{12}$$

где $\overset{\frown}{G}(x) = \sum\limits_{\beta=-\infty}^{\infty} G(h\beta)\delta(x-h\beta)$.

Известно [1], что класс боронообразных функций и класс функций дискретного аргумента являются изоморфными. Поэтому вместо функции дискретного аргумента $D(h\beta)$ достаточно исследовать функцию $\overset{\frown}{D}(x)$, определяемую равенством (2). Применяя к обоим сторонам равенства (2) преобразование Фурье, используя (4) и (6), получаем

$$F\left[\overset{\frown}{D}(x)\right] = \frac{1}{F\left[\overset{\frown}{G}(x)\right]}. \tag{13}$$

Непосредственным вычислением и использованием равенств (4)-(10) получаем следующее

$$\begin{aligned} F[\overset{\frown}{G}](p) &= \tfrac{1}{(2\pi \mathrm{i}p)^4 - 2(2\pi \mathrm{i}p)^2 + 1} * \phi_0(hp) = \\ &= \frac{1}{h}\sum_{\beta=-\infty}^{\infty}\left[\tfrac{1}{(2\pi\mathrm{i}(p-h^{-1}\beta)-\mathrm{i})^2(2\pi\mathrm{i}(p-h^{-1}\beta)+\mathrm{i})^2}\right]. \end{aligned}$$

Из (13), учитывая последнее равенство, имеем

$$F[\overset{\frown}{D}](p) = h\left[\sum_{\beta=-\infty}^{\infty}\tfrac{1}{(2\pi\mathrm{i}(p-h^{-1}\beta)-\mathrm{i})^2(2\pi\mathrm{i}(p-h^{-1}\beta)+\mathrm{i})^2}\right]^{-1}. \tag{14}$$

Функцию $F[\overset{\frown}{D}](p)$ можно представить в виде ряда Фурье

$$F[\overset{\frown}{D}](p) = \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} \hat{D}(h\beta) e^{2\pi \mathrm{i} p h \beta}, \tag{15}$$

где $\hat{D}(h\beta)$ - коэффициенты Фурье функции $F[\overset{\frown}{D}](p)$ и

$$\hat{D}(h\beta) = \int\limits_{0}^{h^{-1}} F[\overset{\frown}{D}](p) e^{-2\pi \mathrm{i} p h \beta}\, \mathrm{d}p. \tag{16}$$

Применив формулу обратного преобразования Фурье к обоим сторонам равенства (15), получим боронообразную функцию

$$\overset{\frown}{D}(x) = \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} \hat{D}(h\beta)\delta(x - h\beta).$$

Таким образом, по определению боронообразных функций $\hat{D}(h\beta)$ и есть искомая функция дискретного аргумента $D(h\beta)$ или дискретный аналог дифференциального оператора $\frac{\mathrm{d}^4}{\mathrm{d}x^4} - 2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + 1$.

Для нахождения функции $\hat{D}(h\beta)$ вычисление интегралов (16) нецелесообразно. Мы найдем ее следующим путем. Сначала вычислим сумму бесконечного ряда в равенстве (14). Вычислим сумму

$$S = \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2\pi \mathrm{i}(p - h^{-1}\beta) - \mathrm{i})^2 (2\pi \mathrm{i}(p - h^{-1}\beta) + \mathrm{i})^2} =$$

$$= \frac{h^3}{(2\pi)^4} \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(\beta - h\left(p + \frac{\mathrm{i}}{2\pi}\right)\right)^2 \left(\beta - h\left(p - \frac{\mathrm{i}}{2\pi}\right)\right)^2},$$

используя теорию вычетов. Для этого используем следующую известную формулу: если функция $f(z)$ имеет полюсы $z_1, z_2, ..., z_n$, то

$$\sum_{\beta=-\infty}^{\infty} f(\beta) = -\sum_{z_1, z_2, \ldots, z_n} \left(\pi \mathrm{ctg} \pi z \cdot f(z)\right).$$

Обозначим $f(z) = \frac{1}{\left(z - h\left(p + \frac{\mathrm{i}}{2\pi}\right)\right)^2 \left(z - h\left(p - \frac{\mathrm{i}}{2\pi}\right)\right)^2}$. Здесь $z_1 = h\left(p + \frac{\mathrm{i}}{2\pi}\right)$ и $z_2 =$

$h\left(p-\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\right)$ - полюсы первого порядка, поэтому, учитывая последнюю формулу, имеем

$$S=-\frac{h^3}{(2\pi)^4}\sum_{z_1,z_2}\left(\pi\mathrm{ctg}\pi z\cdot f(z)\right).$$

Вычисляя вычеты по z_1, z_2 и введя обозначение $\lambda=\mathrm{e}^{2\pi iph}$, для S получаем

$$S=-\frac{8\pi^4}{h^3}\left[\frac{\lambda(\lambda^2+1)(\mathrm{sh}(h)-h\mathrm{ch}(h))+\lambda^2(2h-\mathrm{sh}(2h))}{\lambda^4-4\lambda^3\mathrm{ch}(h)+\lambda^2(4+2\mathrm{ch}(2h))-4\lambda\mathrm{ch}(h)+1}\right]. \tag{17}$$

Подставляя (17) в (14), имеем

$$F[\overset{\frown}{D}](p)=p_2\left[\frac{\lambda^4-4\lambda^3\mathrm{ch}(h)+\lambda^2(4+2\mathrm{ch}(2h))-4\lambda\mathrm{ch}(h)+1}{\lambda\left(\lambda^2+\frac{2h-\mathrm{sh}(2h)}{\mathrm{sh}(h)-h\mathrm{ch}(h)}\lambda+1\right)}\right]. \tag{18}$$

Для того чтобы найти явный вид дискретного оператора $D(h\beta)$ равенство (18) разлагаем на элементарные дроби. Многочлен $\mathcal{P}_2(\lambda)=\lambda^2+\frac{2h-\mathrm{sh}(2h)}{\mathrm{sh}(h)-h\mathrm{ch}(h)}\lambda+1$ имеет два действительных корня

$$\begin{aligned}\lambda_1&=\tfrac{2h-\mathrm{sh}(2h)+2\mathrm{sh}(h)\sqrt{\mathrm{sh}^2(h)-h^2}}{h\mathrm{ch}(h)-\mathrm{sh}(h)},\\ \lambda_2&=\tfrac{2h-\mathrm{sh}(2h)-2\mathrm{sh}(h)\sqrt{\mathrm{sh}^2(h)-h^2}}{h\mathrm{ch}(h)-\mathrm{sh}(h)}\end{aligned}$$

и $\lambda_1\lambda_2=1,\ \ |\lambda_1|<1$. Тогда из (18)

$$p_2\left[\frac{\lambda^4-4\lambda^3\mathrm{ch}(h)+\lambda^2(4+2\mathrm{ch}(2h))-4\lambda\mathrm{ch}(h)+1}{\lambda\left(\lambda^2+\frac{2h-\mathrm{sh}(2h)}{\mathrm{sh}(h)-h\mathrm{ch}(h)}\lambda+1\right)}\right]=$$

$$=p_2\left(\lambda+\frac{2h\mathrm{ch}(2h)-\mathrm{sh}(2h)}{\mathrm{sh}(h)-h\mathrm{ch}(h)}+\frac{A}{\lambda}+\frac{A_1}{\lambda-\lambda_1}+\frac{B_1}{\lambda-\lambda_2}\right). \tag{19}$$

Для того чтобы найти неизвестные коэффициенты A, A_1, B_1 в уравнение (19) непосредственно подставляем вместо λ последовательно 0, λ_1 и λ_2 соответственно получаем

$$\lambda = 0: \quad A = 1,$$
$$\lambda = \lambda_1: \quad A_1 = \frac{\lambda_1^4 - 4\mathrm{ch}(h)\lambda_1^3 + (4 + 2\mathrm{ch}(2h))\lambda_1^2 - 4\mathrm{ch}(h)\lambda_1 + 1}{\lambda_1^2 - 1}, \tag{20}$$
$$\lambda = \lambda_2: \quad B_1 = \frac{\lambda_2^4 - 4\mathrm{ch}(h)\lambda_2^3 + (4 + 2\mathrm{ch}(2h))\lambda_2^2 - 4\mathrm{ch}(h)\lambda_2 + 1}{\lambda_2^2 - 1}.$$

Отсюда, учитывая что $\lambda_1\lambda_2 = 1$, имеем

$$B_1 = -\frac{1}{\lambda_1^2}A_1. \tag{21}$$

Наконец, учитывая равенства (20), (21) и $|\lambda| = 1$, $|\lambda_1| < 1$, и пользуясь формулой для суммы бесконечно убивающейся геометрической прогрессии, из (18) получаем

$$F[\overline{\overline{D}}] = p_2\left(\lambda + \frac{2h\mathrm{ch}(2h) - \mathrm{sh}(2h)}{\mathrm{sh}(h) - h\mathrm{ch}(h)} + \frac{A}{\lambda} + \frac{A_1}{\lambda}\cdot\frac{1}{1 - \frac{\lambda_1}{\lambda}} - \frac{B_1}{\lambda_2}\cdot\frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_2}}\right) =$$
$$= p_2\Bigg(\lambda(1 + A_1) + \frac{2h\mathrm{ch}(2h) - \mathrm{sh}(2h)}{\mathrm{sh}(h) - h\mathrm{ch}(h)} + \frac{A_1}{\lambda_1} + (1 + A_1)\frac{1}{\lambda} +$$
$$+ A_1\sum_{\gamma=-2}^{\infty}\lambda_1^{-\gamma-1}\lambda^{\gamma} + A_1\sum_{\gamma=2}^{\infty}\lambda_1^{\gamma-1}\lambda^{\gamma}\Bigg) = \sum_{\gamma=-\infty}^{\infty} D(h\gamma)\lambda^{\gamma}.$$

Отсюда, имея в виду, что $\lambda = e^{2\pi i p h}$ получим явный вид (12) дискретной функции $D(h\beta)$. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2 получается непосредственным вычислением свертки 1)-5) в утверждении теоремы.

Таким образом, мы построили дискретный аналог оператора $\frac{d^4}{dx^4} - 2\frac{d^2}{dx^2} + 1$.

Литература

1. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. -Москва: Наука, 1974, 808 с.

2. Соболев С.Л., В.Л.Васкевич. Кубатурные формулы. -Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1996, -484 с.

3. Джамалов З.Дж. Разностный аналог оператора $\frac{\mathrm{d}^{2m}}{\mathrm{d}x^{2m}}$// Прямые и об-

ратные задачи для частных дифференциальных уравнений и их приложения, Фан, Ташкент, 1978, 186, -pp.97-108.

4. Шадиметов Х.М. Дискретный аналог дифференциального оператора $\frac{\mathrm{d}^{2m}}{\mathrm{d}x^{2m}}$ и его построение// Вопросы вычисл. и прикл. математики. - Ташкент, 1985, -С. 22-35.
5. Шадиметов Х.М., Хаётов А.Р. Построение дискретного аналога дифференциального оператора $\mathrm{d}^{2m}/\,\mathrm{d}x^{2m} - \mathrm{d}^{2m-2}/\,\mathrm{d}x^{2m-2}$// Узбекский математический журнал. - Ташкент, 2004. -№2. -С. 85-95.
6. Хаётов А.Р. Построение дискретного аналога дифференциального оператора $\mathrm{d}^4/\,\mathrm{d}x^4 + 2\,\mathrm{d}^2/\,\mathrm{d}x^2 + 1$ и его свойства// Узбекский математический журнал. - Ташкент, 2009. -№3. -С. 81-88.
7. Hayotov A.R. Дискретные аналоги некоторых дифференциальных операторов// Узбекский математический журнал. - Ташкент, 2012, - №1, -С.151-155.
8. Hayotov A.R. The discrete analogue of a differential operator and its applications// Lithuanian Mathematical Journal, 2014, -vol.54, -№3, -pp.290-307.

Узбекский госуниверситет мировых языков
Национальный Университет Узбекистана
им. М. Улугбека

Uzbek Mathematical
Journal, 2017,№1, pp.44-54

УДК 512.554

Локальные и 2-локальные дифференцирования некоторых филиформных алгебр Лейбница

Аюпов Ш.А., Кудайбергенов К.К., Юсупов Б.Б.

Ushbu maqolada ba'zi filiform Leibniz algebralarining lokal va 2-lokal differensiallashlari o'rganilgan.

In this paper we study local and 2-local derivations on some filiform Leibniz algebras.

Локальные дифференцирования были впервые рассмотрены в работе Р. Кэйдисона в 1990 году [1] и, независимо в работе Д.Ларсона и А.Сурура [2]. В этих работах были получены некоторые условия, при которых локальное дифференцирование является дифференцированием. В своей работе Р.Кэйдисон рассматривал локальные дифференцирования на алгебрах фон Неймана и в некоторых полиномиальных алгебрах. Было доказано, что каждое непрерывное локальное дифференцирование из алгебры фон Неймана в дуальный бимодуль является дифференцированием.

В 1997 году П. Шемрл ввел понятие 2-локального дифференцирования [3]. Он описал 2-локальные дифференцирования алгебры $B(H)$ – всех ограниченных линейных операторов на бесконечномерном сепарабельном гильбертовом пространстве H. Аналогичное описание для конечномерного случая появилось позже в 2003 году в работе корейских математиков С.Ким и Ж.Ким [4].

Пусть L – алгебра Ли. Линейный оператор d на L называется дифференцированием, если $d([x,y]) = [d(x),y] + [x,d(y)]$ для всех $x, y \in L$. Исследование локальных и 2-локальных дифференцирований конечномерных алгебр Ли было рассмотрено в работах Ш.А.Аюпова, К.К.Кудайбергенова и И.С.Рахимова [5], [6], [7]. В работе [8], З. Чен и Д. Ванг изучили 2-локальные автоморфизмы конечномерных алгебр Ли и доказали, что если L простая алгебра Ли одной из типов $A_l\,(l \geq 1), D_l\,(l \geq 4)$, или $E_k\,(k = 6,7,8)$ над алгебраически замкнутым полем, то всякий 2-локальный автоморфизм на L, является автоморфизмом. В [7] этот результат был расширен для произвольных конечномерных полупростых алгебр Ли над алгебраически замкнутым полем. Локальные и 2-локальные дифференцирования конечномерных алгебр Лейбница до сих пор не исследованы.

В этой работе мы рассмотрим локальные и 2-локальные дифференцирования конечномерных филиформных алгебр Лейбница.

Алгебра L над полем F называется алгеброй Лейбница, если для любых $x, y, z \in L$ выполняется тождество:

$$[x,[y,z]] = [[x,y],z] - [[x,z],y]$$

где $[-,-]$ умножение на L.

Рассмотрим ряд следующего вида:

$$L^1 = L, \dots, L^{n+1} = [L^n, L],\ n \geqslant 1.$$

Напомним, что n-мерная алгебра Лейбница L называется нуль-филиформной, если

$$\dim L^i = n + 1 - i,\ 1 \leq i \leq n+1.$$

Алгебра Лейбница L называется филиформной, если

$$\dim L^i = n - i, \quad 2 \leq i \leq n.$$

Линейный оператор $d : L \to L$ называется дифференцированием, если

$$d([x,y]) = [d(x), y] + [x, d(y)], \quad \forall\ x, y \in L.$$

Пусть $\Delta : L \to L$ – некоторое отображение (не обязательно линейное). Если для произвольных элементов $x, y \in L$ найдется дифференцирование $\Delta_{x,y} : L \to L$ такое, что $\Delta(x) = \Delta_{x,y}(x)$ и $\Delta(y) = \Delta_{x,y}(y)$, то Δ называется 2-локальным дифференцированием.

В произвольной n-мерной нуль-филиформной алгебре Лейбница L существует базис $e_1, e_2, ..., e_n$ такой, что умножение в алгебре L имеет вид:

$$NF_n : [e_i, e_1] = e_{i+1} \qquad 1 \leq i \leq n-1,$$

где отсутствующие произведения равны нулю (см. [9, Лемма 1]).

Матрицы дифференцирований алгебры NF_n имеют следующий вид (см. [10, предложение 3.2])

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \alpha_2 & 2\alpha_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \alpha_3 & \alpha_2 & 3\alpha_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \alpha_4 & \alpha_3 & \alpha_2 & 4\alpha_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n-1} & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-3} & \alpha_{n-4} & \cdots & (n-1)\alpha_1 & 0 \\ \alpha_n & \alpha_{n-1} & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-3} & \cdots & \alpha_2 & n\alpha_1 \end{pmatrix}.$$

Теорема 1. *Всякое 2-локальное дифференцирование алгебры NF_n является дифференцированием.*

Доказательство. Сначала рассмотрим 2-локальное дифференцирование Δ на NF_n такое, что $\Delta(e_1) = 0$.

Предположим, что Δ такое 2-локальное дифференцирование, что $\Delta(e_1) = 0$. Возьмем произвольный элемент $x = t_1e_1 + t_2e_2 + ... + t_ne_n \in NF_n$. Существует дифференцирование $d_{e_1,x}$ такое, что

$$\Delta(e_1) = d_{e_1,x}(e_1), \quad \Delta(x) = d_{e_1,x}(x).$$

Имеем

$$0 = \Delta(e_1) = d_{e_1,x}(e_1) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i.$$

Отсюда $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$, и поэтому $d_{e_1,x} = 0$. Следовательно $\Delta = 0$.

Пусть теперь Δ произвольное 2-локальное дифференцирование алгебры NF_n. Существует дифференцирование d такое, что $\Delta(e_1) = d(e_1)$. Тогда $\Delta - d$ является 2-локальным дифференцированием и $(\Delta - d)(e_1) = 0$. Из рассмотренного выше случая имеем $\Delta \equiv d$. Это означает, что Δ является дифференцированием. Теорема доказана.

Известно [9, Теорема 2], что всякая n-мерная комплексная естественным образом градуированная не Лиева алгебра Лейбница изоморфна одной из следующих попарно неизоморфных алгебр:

- $F_n^1 : [e_1, e_1] = e_3, \quad [e_i, e_1] = e_{i+1}, \quad 2 \le i \le n-1$
- $F_n^2 : [e_1, e_1] = e_3, \quad [e_i, e_1] = e_{i+1}, \quad 3 \le i \le n-1.$

Далее приведем общий вид дифференцирований алгебр F_n^1, F_n^2 (см.

[11, предложение 4.1 и 4.4]):

$$F_n^1 : \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \alpha_2 & \alpha_1+\alpha_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \alpha_3 & \alpha_3 & 2\alpha_1+\alpha_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n-1} & \alpha_{n-1} & \alpha_{n-2} & \cdots & (n-2)\alpha_1+\alpha_2 & 0 \\ \alpha_n & \beta & \alpha_{n-1} & \cdots & \alpha_3 & (n-1)\alpha_1+\alpha_2 \end{pmatrix},$$

$$F_n^2 : \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \alpha_2 & \beta & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \alpha_3 & 0 & 2\alpha_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \alpha_4 & 0 & \alpha_3 & 3\alpha_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n-1} & 0 & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-3} & \cdots & (n-2)\alpha_1 & 0 \\ \alpha_n & \gamma & \alpha_{n-1} & \alpha_{n-2} & \cdots & \alpha_3 & (n-1)\alpha_1 \end{pmatrix}.$$

Теорема 2. *Алгебры F_n^1 и F_n^2 допускают 2-локальные дифференцирования, не являющиеся дифференцированиями.*

Доказательство приведем для алгебры $L = F_n^1$; для алгебры F_n^2 доказательство аналогично. Возьмем на $\mathbb{C}^2$ однородную, но не аддитивную функцию, например

$$f(z_1, z_2) = \begin{cases} \frac{z_1^2}{z_2}, & \text{если } z_2 \neq 0, \\ 0, & \text{если } z_2 = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим отображение $\Delta : L \to L$, определенное по правилу

$$\Delta(x) = f(x_1, x_2)e_n, \text{ где } x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in L. \tag{1}$$

Так как F не является аддитивным, то Δ не является дифференцированием.

Покажем, что Δ является 2-локальным дифференцированием. Возьмем

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \quad y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i.$$

Дифференцирование D будем искать в виде:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \alpha_n & \beta & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Предлоложим, что $\Delta(x) = D(x)$ и $\Delta(y) = D(y)$. Тогда получим следующую систему уравнений относительно α_n и β :

$$\begin{cases} x_1\alpha_n + x_2\beta = f(x_1, x_2), \\ y_1\alpha_n + y_2\beta = f(y_1, y_2). \end{cases} \tag{2}$$

Случай 1. $x_1y_2 - x_2y_1 = 0$. В этом случае, так как правая часть системы (2) однородна, то она имеет бесконечно много решений.

Случай 2. $x_1y_2 - x_2y_1 \neq 0$. В этом случае, система (2) имеет единственное решение. Теорема доказана.

Пусть L – нильпотентная алгебра. Для элемента $x \in L \setminus [L, L]$ рассмотрим оператор правого умножения $R_x : L \to L$, определенный по правилу

$$R_x(y) = [y, x],\ y \in L.$$

Известно, что каждый линейный оператор на конечномерном пространстве имеет жорданову нормальную форму. Используя порядок жордановых ячеек жордановой нормальной формы данного линейного оператора запишем последовательность размерностей жордановых клеток $C(x) = \{n_1, n_2, ..., n_k\}$ в убывающем порядке. Установим лексикографический порядок на множестве всех таких последовательностей. Характеристической последовательностью алгебры L називается последовательность

$$C(L) = \max_{x \in L\setminus[L,L]} C(x).$$

Если характеристическая последавательность n-мерной алгебры Лейбница L равна $C(L) = (n-2, 1, 1)$, то она называется 2-филиформной алгеброй Лейбница.

Известно [12], что n-мерная 2-филиформная алгебра Лейбница изоморфна одной из следующих взаимно не изоморфных алгебр:

$\mu_1 : [e_1, f_1] = f_2, \quad [e_i, e_1] = e_{i+1}, \quad 1 \le i \le n-3,$

$\mu_2 : [e_1, f_1] = e_2 + f_2, \quad [e_i, e_1] = e_{i+1}, \quad 1 \le i \le n-3, \quad [e_i, f_1] = e_{i+1}, \quad 2 \le i \le n-3.$

Дифференцирования алгебр μ_1 и μ_2 имеют соответственно следующие виды (см. [13 предложение 2 и 3]):

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & 2a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & 3a_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & \cdots & . & . & . \\ a_{n-2} & a_{n-3} & a_{n-4} & \cdots & (n-2)a_1 & c_1 & 0 \\ b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_1 & 0 \\ b_2 & b_1 & 0 & \cdots & 0 & d_2 & a_1 + d_1 \end{pmatrix}$$

и

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & 2a_1 + b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & 3a_1 + 2b_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & \cdots & . & . & . \\ a_{n-2} & a_{n-3} & a_{n-4} & \cdots & (n-2)a_1 + (n-3)b_1 & c & 0 \\ b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 + b_1 & 0 \\ b_2 & b_1 & 0 & \cdots & 0 & d_2 & 2a_1 \end{pmatrix}.$$

Пусть $L = \mu_1$ или μ_2. Рассмотрим отображение $\Delta : L \to L$, определенное по правилу

$$\Delta(x) = f(x_1, x_{n-1}) f_2, \qquad x = \sum_{i=1}^{n-2} x_i e_i + x_{n-1} f_1 + x_n f_2 \in L,$$

где f – однородная не аддитивная функция. Как и доказательстве Теоремы 2 мы можем проверить, что Δ является 2-локальным дифференцированием, не являющимся дифференцированием.

Таким образом, мы иммем

Теорема 3. *Алгебры μ_1 и μ_2 допускают 2-локальные дифференцирования, не являющиеся дифференцированиями.*

Теперь изучим локальные дифференцирования некоторых филиформных алгебр Лейбница.

Пусть $\Delta : L \to L$ – линейный оператор. Если для произвольного элемента $x \in L$ найдется дифференцирование $\Delta_x : L \to L$ такое, что

$\Delta(x) = \delta_x(x)$, то Δ называется локальным дифференцированием.

Теорема 4. *Пусть Δ – линейный оператор на μ_1, соответственно на μ_2. Тогда Δ является локальным дифференцированием, тогда и только в тогда, когда его матрица имеет вид:*

$$\begin{pmatrix} \gamma_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \gamma_{n-2,1} & \gamma_{n-2,2} & \gamma_{n-2,3} & \cdots & \gamma_{n-2,n-1} & 0 \\ \gamma_{n-1,1} & 0 & 0 & \cdots & \gamma_{n-1,n-1} & 0 \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & 0 & \cdots & \gamma_{n,n-1} & \gamma_{nn} \end{pmatrix} \tag{3}$$

и

$$\begin{pmatrix} \gamma_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & 0 & \cdots & & 0 & 0 \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdots & \cdot & \cdot \\ \gamma_{n-2,1} & \gamma_{n-2,2} & \gamma_{n-2,3} & \cdots & \gamma_{n-2,n-2} & \gamma_{n-2,n-1} & 0 \\ \gamma_{n-1,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \gamma_{n-1,n-1} & 0 \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & 0 & \cdots & 0 & \gamma_{n,n-1} & \gamma_{nn} \end{pmatrix}, \tag{4}$$

соответственно.

Доказательство. Необходимость Рассмотрим случай алгебры μ_1. Пусть Δ – локальное дифференцирование алгебры μ_1 и

$$\Delta = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} & \cdots & \gamma_{1,n-1} & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} & \cdots & \gamma_{2,n-1} & \gamma_{2n} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} & \cdots & \gamma_{3,n-1} & \gamma_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_{n-2,1} & \gamma_{n-2,2} & \gamma_{n-2,3} & \cdots & \gamma_{n-2,n-1} & \gamma_{n-2,n} \\ \gamma_{n-1,1} & \gamma_{n-1,2} & \gamma_{n-1,3} & \cdots & \gamma_{n-1,n-1} & \gamma_{n-1,n} \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \gamma_{n3} & \cdots & \gamma_{n,n-1} & \gamma_{nn} \end{pmatrix}.$$

Шаг 1. Возьмем дифференцирование D_{e_2} такое, что $\Delta(e_2) = D_{e_2}(e_2)$.

Тогда

$$\begin{aligned}\Delta(e_2) = & \sum_{j=1}^{n-2}\gamma_{j,2}e_2 + \gamma_{n-1,2}f_1 + \gamma_{n2}f_2,\\ D_{e_2}(e_2) = & \ 2a_1e_2 + \sum_{j=2}^{n-3}a_je_{j+1} + b_1f_2.\end{aligned}$$

Сравнив правые части мы, получим $\gamma_{1,2} = \gamma_{n-1,2} = 0$.

Шаг 2. Пусть i такой индекс, что $3 \leq i \leq n-2$. Возьмем дифференцирование D_{e_i} такое, что $\Delta(e_i) = D_{e_i}(e_i)$. Тогда

$$\begin{aligned}\Delta(e_i) = & \sum_{j=1}^{n-2}\gamma_{j,i}e_j + \gamma_{n-1,i}f_1 + \gamma_{ni}f_2,\\ D_{e_i}(e_i) = & \ ia_1e_i + \sum_{j=i}^{n-3}a_je_{j+1}.\end{aligned}$$

Сравнив коэффициенты при базисых элементах для $\Delta(e_i)$ и $D_{e_i}(e_i)$, получим, что $\gamma_{1i} = \gamma_{2i} = ... = \gamma_{i-1,i} = 0$.

Шаг 3. Возьмем дифференцирование D_{f_1} такое, что $\Delta(f_1) = D_{f_1}(f_1)$. Тогда

$$\begin{aligned}\Delta(f_1) = & \sum_{j=1}^{n-2}\gamma_{j,n-1}e_j + \gamma_{n-1,n-1}f_1 + \gamma_{n,n-1}f_2,\\ D_{f_1}(f_1) = & \ c_1e_{n-2} + d_1f_1 + d_2f_2.\end{aligned}$$

Сравнив коэффициенты правых частей, получим $\gamma_{1,n-1} = \gamma_{2,n-1} = ... = \gamma_{n-3,n-1} = 0$.

Шаг 4. Возьмем дифференцирование D_{f_2} такое, что $\Delta(f_2) = D_{f_2}(f_2)$. Тогда

$$\begin{aligned}\Delta(f_2) = & \sum_{j=1}^{n-2}\gamma_{j,n}e_j + \gamma_{n-1,n}f_1 + \gamma_{n,n}f_2,\\ D_{f_2}(f_2) = & \ (a_1 + d_1)f_2.\end{aligned}$$

Приравнивая коэффициенты при базисых элементах, получим,что $\gamma_{1,n} =$

$\gamma_{2,n} = ... = \gamma_{n-1,n} = 0$. Таким образом, оператор Δ имеет (3).

Достаточность. Пусть оператор Δ имеет (3). Возьмем произвольный элемент x :

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_{n-2}e_{n-2} + x_{n-1}f_1 + x_nf_2.$$

Координаты $\Delta(x)$ равны соответственно

$$\begin{aligned}
\Delta(x)_i &= \sum_{j=1}^{i} \gamma_{ij}x_j, \ 1 \le i \le n-3,\\
\Delta(x)_{n-2} &= \sum_{j=1}^{n-2} \gamma_{n-2,j}x_j + \gamma_{n-2,n-1}x_{n-1},\\
\Delta(x)_{n-1} &= \gamma_{n-1,1}x_1 + \gamma_{n-1,n-1}x_{n-1},\\
\Delta(x)_n &= \gamma_{n1}x_1 + \gamma_{n2}x_2 + \gamma_{n,n-1}x_{n-1} + \gamma_{nn}x_n.
\end{aligned}$$

Координаты $D(x)$ равны соответственно

$$\begin{aligned}
D(x)_i &= \sum_{j=1}^{i-1} a_{i+1-j}x_j + ia_1x_i \quad 1 \le i \le n-3,\\
D(x)_{n-2} &= \sum_{j=1}^{n-3} a_{n-j}x_j + (n-2)a_1x_{n-2} + c_1x_{n-1},\\
D(x)_{n-1} &= b_1x_1 + d_1x_{n-1},\\
D(x)_n &= b_2x_1 + b_1x_2 + d_2x_{n-1} + (a_1 + d_1x_n).
\end{aligned}$$

Так как $\Delta(x) = D(x)$, то

$$\begin{cases}
\sum\limits_{j=1}^{i-1} a_{i+1-j}x_j + ia_1x_i = \sum\limits_{j=1}^{i} \gamma_{ij}x_j, \qquad 1 \le i \le n-3,\\
\sum\limits_{j=1}^{n-3} a_{n-j-1}x_j + (n-2)a_1x_{n-2} + c_1x_{n-1} = \sum\limits_{j=1}^{n-2} \gamma_{n-2,j}x_j + \gamma_{n-2,n-1}x_{n-1},\\
b_1x_1 + d_1x_{n-1} = \gamma_{n-1,1}x_1 + \gamma_{n-1,n-1}x_{n-1},\\
b_2x_1 + b_1x_2 + d_2x_{n-1} + (a_1 + d_1x_n) = \gamma_{n1}x_1 + \gamma_{n2}x_2 + \gamma_{n,n-1}x_{n-1} + \gamma_{nn}x_n.
\end{cases} \tag{5}$$

Рассмотрим возможные пять случаев.

Случай 1. Пусть $x_1 \neq 0$. В этом случае положим $c_1 = d_1 = d_2 = 0$.

Остальные $a_1, a_2, \ldots, a_{n-3}, b_1, b_2$ определяются однозначно из (5).

Случай 2. Пусть $x_1 = 0,\ x_2 \neq 0$. Тогда положим $c_1 = d_1 = d_2 = b_2 = 0$. Остальные $a_1, a_2, \ldots, a_{n-3}, b_1$ определяются однозначно из (5).

Случай 3. Пусть $x_1 = x_2 = ... = x_{k-1} = 0,\ x_k \neq 0, \quad 3 \leq k \leq n-2$. Положим $c_1 = d_1 = d_2 = 0$. Остальные $a_k,\ 1 \leq k \leq n-3$ определяются однозначно из (5).

Случай 4. Пусть $x_1 = x_2 = ... = x_{n-2} = 0,\ x_{n-1} \neq 0$. Положим $a_1 = 0$. Числа c_1, d_1, d_2 определяются однозначно из (5).

Случай 5. Пусть $x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1} = 0, x_n \neq 0$. В этом случае достаточно определить a_1, d_1 из (5). Теорема доказана.

Аналогично доказывается следующая

Теорема 5. *Пусть Δ линейный оператор на NF_n. Тогда Δ является локальным дифференцированием, тогда и только в тогда, когда он имеет вид:*

$$\begin{pmatrix} \gamma_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \gamma_{n-1,1} & \gamma_{n-1,2} & \gamma_{n-1,3} & \cdots & \gamma_{n-1,n-1} & 0 \\ \gamma_{n,1} & \gamma_{n,2} & \gamma_{n,3} & \cdots & \gamma_{n,n-1} & \gamma_{nn} \end{pmatrix}.$$

Описание локальных дифференцирований алгебр F_n^1 и F_n^2 было получено в [14].

Литература

1. R.V. Kadison, Local derivations, *J. Algebra*, **130** (1990) 494–509.

2. D. R. Larson, A. R. Sourour, Local derivations and local automorphisms of $B(X)$, *Proc. Sympos. Pure Math.* **51** (1990) 187–194.

3. P. Šemrl, Local automorphisms and derivations on $B(H)$, *Proc. Amer. Math. Soc.,* **125** (1997) 2677–2680.

4. S. O. Kim, J. S. Kim, Local automorphisms and derivations on M_n, Proc. Amer. Math. Soc., **132** (2004) 1389–1392.

5. Sh. A. Ayupov, K. K. Kudaybergenov, I. S. Rakhimov, 2-Local derivations on finite-dimensional Lie algebras, *Linear Algebra and its Applications,* **474** (2015), 1-11.

6. Sh. A. Ayupov, K. K. Kudaybergenov, Local derivations on finite dimensional Lie algebras, *Linear Algebra and its Applications*, **493** (2016) 381–398.

7. Sh. A. Ayupov, K. K. Kudaybergenov, 2-Local automorphisms on finite-dimensional Lie algebras, *Linear Algebra and its Applications*, **507** (2016) 121-131.

8. Z. Chen, D. Wang, 2-Local automorphisms of finite-dimensional simple Lie algebras, *Linear Algebra and its Applications*, **486** (2015) 335–344.

9. Sh. A. Ayupov, B. A. Omirov. On some classes of nilpotent Leibniz algebras, Siberian Mathematical Journal, Vol.**42(1)** (2001), pp. 15-24.

10. Casas J.M., Ladra M., Omirov B.A., Karimjanov I.A. Classification of solvable Leibniz algebras with null-filiform nilradical, Linear and Multilinear algebra, **61(6)** (2013) 758 - 774.

11. Casas J.M., Ladra M., Omirov B.A., Karimjanov I.A. Classification of solvable Leibniz algebras with naturally graded filiform nilradical, Linear Algebra and its Applications, **438** (2013) 2973-3000.

12. Camacho L.M., Gomez J.R., Gonzalez A.J., Omirov B.A., Naturally graded 2-liform Leibniz algebras, Comm. Algebra **38(10)** (2010), 3671-3685.

13. Абдурасулов К.К., Адашев Ж.К., Саттаров А.М., Разрешимые алгебры Лейбница с 2-филифорным нильрадикалом, Uzbek Mathematical Journal, 2016 (4), 16-23 .

14. Алауадинов А.К., Курбанбаев Т.К., Локальные дифференцирования естественным образом градуированной не Лиевой алгебры Лейбница, Труды конференции "Проблемы современной топологии и ее приложения" Ташкент, 5-7 мая 2016 г.

Институт математики при НУУз
Каракалпакский госуниверситет
Национальный университет Узбекистана
им. М.Улугбека

Uzbek Mathematical
Journal, 2017, №1, pp.55-66

УДК 517.9

Дополнительные законы сохранения для уравнений двухскоростной гидродинамики с равновесием фаз по давлению

Жабборов Н.М., Байшемиров Ж.Д., Жиан-Ган Тан, Холмурадов А.Э.

Teskarilanuvchi gidrodinamik yaqinlashishda bosim bo‘yicha muvozanatlashgan fazali ikki tezlikli gidrodinamika tenglamalari uchun bir qator qo‘shimcha saqlanish qonunlari topilgan.

A series of the differential identities connecting velocities, pressure and body force in the two-velocity hydrodynamics equations with equilibrium of pressure phases in reversible hydrodynamic approximation is found.

1. Введение

Жидкости и газы, насыщающие нефтегазоконденсатные пласты, представляют собой смеси углеводородных, а также неуглеводородных компонентов, некоторые из которых способны растворяться в углеводородных смесях. При определенных условиях залегания и режимах разработки нефтяных и нефтегазоконденсатных месторождений в пласте возникает многофазное течение сложной многокомпонентной смеси, при котором между движущимися с различными скоростями фазами осуществляется интенсивный тепломассообмен. Переход отдельных компонентов из одной фазы в другую влечет за собой изменение составов и физических свойств фильтрующихся фаз. Такие процессы происходят, например, при движении газированной нефти при вытеснении ее водой или газом, при разработке месторождений сложного компонентного состава, при вытеснении нефти оторочками активной примеси (полимерными и щелочными растворами; различными жидкими и газообразными растворителями, применяющимися для увеличения нефтегазоотдачи). Основой для расчета таких процессов служит теория многофазной многокомпонентной фильтрации.

Математические модели многофазных многокомпонентных сред строятся в рамках методов законов сохранения. В подходе законов сохранения предполагается, что все фазы и компоненты, в том числе и дисперсные, моделируются как сплошные среды, каждая из которых формально распределена по всей расчетной области. Таким образом, в каждой точке расчетной области формально определены все параметры каждой из фаз (континуумов), которые при этом могут быть нулевыми, что соответствует физическому отсутствию вещества фазы (континуума) в рассматриваемой точке пространства. Большим достоинством математической модели основанной на методе законов сохранения является физическая корректность полученных систем дифферен-циальных уравнений. Многофазные многокомпонентные среды с равновесием фаз по давлению возникают в нефтегазовой и химической промышленности, энергетике и других областях. Технологические процессы часто сопровождаются образованием газожидкостных смесей или непосредственно связаны с их использованием. К таким процессам относятся фильтрация многофазных сред в упругодеформируемой пористой среде, движение газожидкостных смесей в скважинах, трубопроводах сбора и транспортировки углеводородов, в теплообменных и перегонных аппаратах, в различного рода аппаратах с непосредственным контактом жидкостей и газов.

Изучение течений вязких сжимаемых (несжимаемых) жидкостей на основе решения полной системы уравнений двухскоростной гидродинамики представляют большую актуальность. В литературе известно очень ограниченное число случаев, допускающих аналитическое интегрирование уравнений Навье-Стокса [1,2]. В [3,4] получено описание течения несжимаемых вязких двухскоростных жидкостей для случая равновесия фаз по давлению при постоянстве объемных насыщенности веществ с помощью скалярных функций. Выведена система дифференциальных уравнений для этих функций. Построено фундаментальное решение для описания трехмерных стационарных течений вязких жидкостей двухскоростного континуума с равновесием фаз по давлению [5,6]. Эти решения могут быть полезными для тестирования численных методов решения уравнений двухскоростной гидродинамики.

В векторном анализе, теории поля и математической физике важную роль играют дифференциальные тождества классического вида. В работе [7] получен ряд формул векторного анализа в виде дифференциальных тождеств второго и третьего порядка, связывающих лапласиан произвольной гладкой скалярной функции $u(x, y)$ двух независимых переменных, модуль градиента этой функции, угловую величину и направление градиента. Найдено представление гауссовой кривизны поверхности в трехмерном евклидовом пространстве с графиком

$z = u(x, y)$. Даны некоторые его обобщения и аналогичные формулы для поверхности в псевдоевклидовом пространстве. Результаты работы [7] обобщены в работе [8] по двум направлениям: на трехмерный случай и для произвольного (не обязательно потенциального) гладкого векторного поля $\mathbf{v}$. Получен ряд формул векторного анализа в виде дифференциальных тождеств, которые, с одной стороны, связывают модуль $|\mathbf{v}|$ и направление $\boldsymbol{\tau}$ произвольного гладкого векторного поля $\mathbf{v} = |\mathbf{v}|\,\boldsymbol{\tau}$ в трехмерном ($\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z)$) и в двумерном ($\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y)$) случаях. С другой стороны, найденные формулы в определенном смысле разделяют модуль $|\mathbf{v}|$ и направление $\boldsymbol{\tau}$ векторного поля $\mathbf{v} = |\mathbf{v}|\,\boldsymbol{\tau}$. А именно, основное тождество любому гладкому векторному полю $\mathbf{v}$ сопоставляет в явном виде векторное поле $\mathbf{Q} = \mathbf{P} + \mathbf{S}$, где $\mathbf{P}$ определяется только модулем $|\mathbf{v}|$ поля $\mathbf{v}$ и является потенциальным как в двумерном, так и в трехмерном случаях, а поле $\mathbf{S}$ определяется только направлением $\boldsymbol{\tau}$ поля $\mathbf{v}$ и является соленоидальным в двумерном случае. Даны приложения полученных тождеств к гидродинамическому уравнению Эйлера.

В данной работе получены дополнительные законы сохранения для уравнений двухскоростной гидродинамики с одним давлением.

2. Дифференциальные тождества А.Г.Меграбова, связывающие модуль и направление векторного поля

В работе [8] А.Г. Меграбов получил следующее:

Теорема 1. Для любого векторного поля ($\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z)) = |\mathbf{v}|\,\boldsymbol{\tau}$ с компонентами $\vartheta_k(x, y, z) \in C^1(D)$, $k = 1, 2, 3$, модулем $|\mathbf{v}| \neq 0$ в D и направлением $\boldsymbol{\tau}$ справедливо тождество

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{v}) = \mathbf{P}\left(|\mathbf{v}|\right) + \mathbf{S}(\boldsymbol{\tau}), \tag{1}$$

где

$$\mathbf{Q}\left(\mathbf{v}\right) \overset{def}{=} \frac{\mathbf{v}\mathrm{div}\mathbf{v} + \mathbf{v} \times \mathrm{rot}\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}, \;\; \mathbf{P}\left(\mathbf{v}\right) \overset{def}{=} \nabla \ln|\mathbf{v}| = \frac{\nabla|\mathbf{v}|^2}{|\mathbf{v}|^2}, \tag{2}$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}\left(\boldsymbol{\tau}\right) \overset{def}{=} \boldsymbol{\tau}\mathrm{div}\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau} \times \mathrm{rot}\boldsymbol{\tau} = \mathbf{Q}\left(\mathbf{v}\right) - \mathbf{P}\left(|\mathbf{v}|\right). \tag{3}$$

Для векторного поля $\mathbf{S}$ справедливо любое из представлений

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}\left(\boldsymbol{\tau}\right) = \boldsymbol{\tau}\mathrm{div}\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}_s = -\left\{\left(\boldsymbol{\tau} \times \nabla\right) \times \boldsymbol{\tau} + \left(\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla\right)\boldsymbol{\tau}\right\} = -\frac{\left(\mathbf{v} \times \nabla\right) \times \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}, \tag{4}$$

($\boldsymbol{\tau}_s = (\boldsymbol{\tau} \times \nabla)\,\boldsymbol{\tau} = \mathrm{rot}\boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{\tau}$ – производная вектора $\boldsymbol{\tau}$ по направлению $\boldsymbol{\tau}$),

$$\mathbf{S} = \mathrm{rot}\,(\alpha\mathbf{k}) - \cos^2\theta\mathrm{rot}\,(\alpha\mathbf{k} - \mathrm{tg}\theta\boldsymbol{\lambda}) = \mathrm{rot}\,(\alpha\mathbf{k} + \cos\theta\boldsymbol{\psi}) - 2\cos\theta\mathrm{rot}\boldsymbol{\psi}, \quad (5)$$

где $\boldsymbol{\lambda} = -\sin\alpha\mathbf{i} + \cos\alpha\mathbf{j}$, $\boldsymbol{\psi} = -\sin\theta\boldsymbol{\lambda} + \alpha\cos\theta\mathbf{k}$,

$$\mathbf{S} = -\nabla\alpha \times (\cos\theta\boldsymbol{\tau} - \mathbf{k}) + \nabla\theta \times \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{S} = \boldsymbol{\tau}\mathrm{div}\boldsymbol{\tau} - k\boldsymbol{\nu}, \quad (6)$$

где k – кривизна векторной линии поля $\mathbf{v}$, $\boldsymbol{\nu}$ – ее главная нормаль. Справедлива формула $k^2 = \sin^2\theta\alpha_s^2 + \theta\alpha_s^2$, где $\alpha_s = (\nabla\alpha \cdot \boldsymbol{\tau})$, $\theta_s = (\nabla\theta \cdot \boldsymbol{\tau})$ – производные углов α, θ по направлению $\boldsymbol{\tau}$.

Основное тождество (1) может быть представлено также в любой из форм

$$\mathbf{Q} + \mathbf{H}_i = \nabla\ln|\mathbf{v}| + \mathrm{rot}\mathbf{F}_i,\ i = 1, 2.$$

где $\mathbf{H}_1 = \cos^2\theta\mathrm{rot}\,(\alpha\mathbf{k} - \mathrm{tg}\theta\boldsymbol{\lambda})$, $\mathbf{H}_2 = 2\cos\theta\mathrm{rot}\psi$, $\mathbf{F}_1 = \alpha\mathbf{k}$, $\mathbf{F}_2 = \alpha\mathbf{k} + \cos\theta\boldsymbol{\psi}$, так что векторы $\mathbf{H}_i, \mathbf{F}_i$, как и $\mathbf{S}$, определяются только углами α, θ, т.е. направлением $\boldsymbol{\tau}$ поля $\mathbf{v}$.

Если не предполагать наличие свойства $|\mathbf{v}| \neq 0$ в D, то (1) принимает вид

$$\mathbf{W} = \mathbf{v}\mathrm{div}\mathbf{v} + \mathbf{v} \times \mathrm{rot}\mathbf{v} = \nabla|\mathbf{v}|^2 - \mathbf{V},$$

где $\mathbf{V} \overset{def}{=} -|\mathbf{v}|^2\mathbf{S} = \frac{1}{2}\nabla|\mathbf{v}|^2 - \mathbf{v}\mathrm{div}\mathbf{v} - \mathbf{v}\times\mathrm{rot}\mathbf{v} = -|\mathbf{v}|^2\left\{\boldsymbol{\tau}\mathrm{div}\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau} \times \mathrm{rot}\boldsymbol{\tau}\right\} = \mathbf{v} \times \nabla \times \mathbf{v}$. Другие формулы для $\mathbf{W}, \mathbf{V}$ получаются подстановкой любого ввыражения для $\mathbf{S}$ из (4)-(6) в последние равенства.

Теорема 2. При условиях теоремы 1 и $v_k(x, y, z) \in C^2(D)$ $(k = 1, 2, 3)$ справедливы формулы

$$\mathrm{div}\mathbf{S} = -2\sin\theta\,(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{B}) = -\frac{2\sin\theta\,(\mathbf{v} \cdot \mathbf{B})}{|\mathbf{v}|}$$

где $\mathbf{B} = \nabla\alpha \times \nabla\theta = \mathrm{rot}\,(\alpha\nabla\theta) = -\mathrm{rot}\,(\theta\nabla\alpha)$. Кроме того, имеет место тождество

$$\mathrm{div}\,(\mathbf{Q} - \mathbf{P} + \mathbf{H}_i) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{div}\left\{\frac{\mathbf{v}\mathrm{div}\mathbf{v} + \mathbf{v} \times \mathrm{rot}\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} - \nabla\ln|\mathbf{v}| + \mathbf{H}_i\right\} = 0,\ (i = 1, 2)$$

которое можно рассматривать как закон сохранения (его дифференциальную форму) с интегральной формой для потока $\iint_S([\mathbf{Q} - \mathbf{P} + \mathbf{H}_i] \cdot \boldsymbol{\eta})dS = 0$, где S – кусочно-гладкая граница области D с нормалью $\boldsymbol{\eta}$.

В теоремах 1 и 2 приняты следующие обозначения: символы $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$ и $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$ обозначают скалярное и векторное произведения векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$; ∇ – оператор Гамильтона (набла); Δ – оператор Лапласа; D – некоторая область в пространстве x, y, z; $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ – орты по осям x, y, z; $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z) = \upsilon_1\mathbf{i} + \upsilon_2\mathbf{j} + \upsilon_3\mathbf{k}$ – векторное поле, определенное в D, $\upsilon_k = \upsilon_k(x, y, z)$ – скалярные функции, $k = 1, 2, 3$, $|\mathbf{v}|^2 = \upsilon_1^2 + \upsilon_2^2 + \upsilon_3^2$; $\alpha = \alpha(x, y, z)$ – угол наклона вектора $(\upsilon_1\mathbf{i} + \upsilon_2\mathbf{j})$ к оси Ox, так что $\cos\alpha = \frac{\upsilon_1}{\sqrt{g}}$, $\sin\alpha = \frac{\upsilon_2}{\sqrt{g}}$, где $g = \upsilon_1^2 + \upsilon_2^2$, т.е. $\alpha(x, y, z)$ – полярный угол точки $(\xi = \upsilon_1,\ \varsigma = \upsilon_2)$ на плоскости ξ, ς или аргумент $\mathrm{Arg}w$ комплексного числа $w = \xi + i\varsigma$ (i – мнимая единица):

$$\alpha \overset{def}{=} \arctan\frac{\upsilon_2}{\upsilon_1} + (2k+\delta)\pi,\ k \in Z \tag{7}$$

$\delta = 0$ и $\delta = 1$ соответственно в квадрантах I, IV и II, III плоскости ξ, ς; $\theta = \theta(x, y, z)$ – угол между вектором $\mathbf{v}$ и осью Oz : $\theta \overset{def}{=} \arccos\frac{\upsilon_3}{|\mathbf{v}|}$, так что $0 \le \theta \le \pi$, $\cos\theta = \frac{\upsilon_3}{|\mathbf{v}|}$, $\sin\theta = \frac{\sqrt{g}}{|\mathbf{v}|}$. То есть α, θ – сферические координаты в пространстве $\xi = \upsilon_1, \varsigma = \upsilon_2, \zeta = \upsilon_3$. При этом $\mathbf{v} = |\mathbf{v}|\boldsymbol{\tau}$, где $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(\alpha, \theta) = \cos\alpha\sin\theta\mathbf{i} + \sin\alpha\sin\theta\mathbf{j} + \cos\theta\mathbf{k}$ – направление векторного поля $\mathbf{v}$ $(|\boldsymbol{\tau}| = 1)$.

В двумерном случае $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y) = \upsilon_1\mathbf{i} + \upsilon_2\mathbf{j} = \mathbf{v}|\boldsymbol{\tau}|, \upsilon_3 \equiv 0,\ \theta \equiv \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(\alpha) = \cos\alpha\mathbf{i} + \sin\alpha\mathbf{j}$, угол α определяется формулой (7), $\nabla\theta = \mathbf{B} = 0$; $\forall\varphi(x, y) \in C^1(D)$ имеем $\mathrm{rot}(\varphi\mathbf{k}) = \varphi_y\mathbf{i} - \varphi_x\mathbf{j}$, где $\varphi_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x}$.

Из теоремы 1 следует

Теорема 3. Для любого плоского векторного поля $\mathbf{v}(x, y)$ с компонентами $\upsilon_k(x, y) \in C^1(D)$, $k = 1, 2$, модулем $|\mathbf{v}| \ne 0$ в D и направлением $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(\alpha)$ справедливо тождество

$$\mathbf{Q} \overset{def}{=} \frac{\mathbf{v}\mathrm{div}\mathbf{v} + \mathbf{v}\times\mathrm{rot}\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} = \nabla\ln|\mathbf{v}| + \mathrm{rot}(\alpha\mathbf{k}) \Rightarrow \tag{8}$$

$$\mathrm{div}\mathbf{v} = (\{\nabla\ln|\mathbf{v}| + \mathrm{rot}(\alpha\mathbf{k})\}\cdot\mathbf{v}),\ \mathrm{rot}\mathbf{v} = \{\nabla\ln|\mathbf{v}| + \mathrm{rot}(\alpha\mathbf{k})\}\times\mathbf{v},$$

при этом $\mathbf{S} = \mathrm{rot}(\alpha\mathbf{k}) \Rightarrow (\mathbf{S}\cdot\nabla\alpha) = 0$, т.е. векторные линии векторного поля $\mathbf{S}$ совпадают с линиями уровня скалярного поля углов $\alpha(x, y)$. Если $\upsilon_k(x, y) \in C^2(D), k = 1, 2$, то справедливы тождества

$$\mathrm{div}\mathbf{S} = 0,\ \mathrm{rot}\mathbf{S} = -(\Delta\alpha)\mathbf{k} \Rightarrow$$

$$\Delta \ln |\mathbf{v}| = \mathrm{div}\mathbf{Q},\ (\Delta\alpha)\,\mathbf{k} = -\mathrm{rot}\mathbf{Q} \Rightarrow$$
$$\Delta \mathrm{Ln}\left\{|\mathbf{v}|\, e^{\pm i\alpha}\right\} = \mathrm{div}\mathbf{Q} \mp i\left(\mathrm{rot}\mathbf{Q}\cdot\mathbf{k}\right).$$

В законе сохранения теоремы 2 имеем $\mathbf{H}_i = 0$.
Как известно [9], любое гладкое векторное поле можно представить в виде суммы градиента некоторого скаляра и ротора некоторого вектора. Тождество (8) дает такое представление для векторного поля $\mathbf{Q}$. При $\mathbf{v} = \nabla u\,(x, y)$ теорема 3 дает тождества работы [7].

3. Уравнения двухскоростной гидродинамики с равновесием фаз по давлению

В работах [10, 11] на основе законов сохранения, инвариантности уравнений относительно преобразований Галилея и условия термодинамической согласованности построена нелинейная двухскоростная модель движения жидкости через деформируемую пористую среду. Двухскоростная гидродинамическая теория с условием равновесия фаз по давлению, была построена в работе [12]. Уравнения движения двухскоростной среды с одним давлением в системе с изотермическом случае имеют вид [12-14]

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\left(\rho\mathbf{v}\right) = 0,\ \frac{\partial\tilde\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\left(\tilde\rho\tilde{\mathbf{v}}\right) = 0,$$
$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \left(\mathbf{v},\nabla\right)\mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\bar\rho} + \frac{\tilde\rho}{2\bar\rho}\nabla(\tilde{\mathbf{v}}-\mathbf{v})^2 + \mathbf{f}, \tag{9}$$
$$\frac{\partial\tilde{\mathbf{v}}}{\partial t} + \left(\tilde{\mathbf{v}},\nabla\right)\tilde{\mathbf{v}} = -\frac{\nabla p}{\tilde\rho} - \frac{\rho}{2\bar\rho}\nabla(\tilde{\mathbf{v}}-\mathbf{v})^2 + \mathbf{f},$$

где $\tilde{\mathbf{v}}$ и $\mathbf{v}$ – вектора скорости подсистем, составляющих двухскоростной континуум с соответствующими парциальными плотностями $\tilde\rho$ и ρ, $\bar\rho = \tilde\rho + \rho$ – общая плотность континуума; $\mathbf{f}$ – вектор массовой силы, отнесенной к единице массы. Уравнение состояния континуума замыкает систему дифференциальных уравнений (9) и дается функциональной зависимостью $p = p\left(\bar\rho, (\tilde{\mathbf{v}}-\mathbf{v})^2\right)$. Удобно ввести новое давление $\tilde p = p\left(\bar\rho, (\tilde{\mathbf{v}}-\mathbf{v})^2\right) - \frac{\tilde\rho}{2}(\tilde{\mathbf{v}}-\mathbf{v})^2$. В терминах $\tilde p, p$ последние два уравнения системы (9) перепишутся в виде

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \left(\mathbf{v},\nabla\right)\mathbf{v} = -\frac{1}{\bar\rho}\nabla\tilde p - \frac{(\tilde{\mathbf{v}}-\mathbf{v})^2}{2\bar\rho}\nabla\tilde\rho + \mathbf{f}, \tag{10}$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial t} + (\tilde{\mathbf{v}}, \nabla)\, \tilde{\mathbf{v}} = -\frac{1}{\tilde{\rho}} \nabla p + \frac{\rho}{\bar{\rho}\tilde{\rho}} \nabla \tilde{p} + \frac{\rho\,(\tilde{\mathbf{v}} - \mathbf{v})}{2\tilde{\rho}} \nabla \ln \tilde{\rho} + \mathbf{f}. \tag{11}$$

В терминах векторов $\mathbf{W}, \mathbf{V}, \mathbf{S}, \mathbf{Q}, \mathbf{P}, \mathbf{H}_i, \mathbf{F}_i, \tilde{\mathbf{W}}, \tilde{\mathbf{V}}, \tilde{\mathbf{S}}, \tilde{\mathbf{Q}}, \tilde{\mathbf{P}}, \tilde{\mathbf{H}}_i, \tilde{\mathbf{F}}_i$ определенных в теореме 1, система уравнений (10), (11) может быть записана в любой из следующих форм (символы без тильды и с тильдой относятся к соответствующим подсистемам континуума):

$$\mathbf{W} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v}\mathrm{div}\mathbf{v} + \frac{1}{2}\nabla v^2 + \frac{1}{\bar{\rho}} \nabla \tilde{p} + \frac{(\tilde{\mathbf{v}} - \mathbf{v})^2}{2\bar{\rho}} \nabla \tilde{\rho} - \mathbf{f},$$

$$-\mathbf{V} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v}\mathrm{div}\mathbf{v} + \frac{1}{\bar{\rho}} \nabla \tilde{p} + \frac{(\tilde{\mathbf{v}} - \mathbf{v})}{2\tilde{\rho}} \nabla \tilde{\rho} - \mathbf{f}, \tag{12}$$

$$\mathbf{G} \overset{def}{=} \frac{1}{v^2} \left\{ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v}\mathrm{div}\mathbf{v} + \frac{1}{\bar{\rho}} \nabla \tilde{p} + \frac{(\tilde{\mathbf{v}} - \mathbf{v})}{2\tilde{\rho}} \nabla \tilde{\rho} - \mathbf{f} \right\} = \mathbf{S}\,(= \mathbf{Q} - \mathbf{P}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{G} + \mathbf{H}_i = \mathrm{rot}\mathbf{F}_i,\ i = 1, 2. \tag{13}$$

$$\tilde{\mathbf{W}} = \frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial t} + \tilde{\mathbf{v}}\mathrm{div}\tilde{\mathbf{v}} + \frac{1}{2}\nabla \tilde{v}^2 + \frac{1}{\tilde{\rho}} \nabla p - \frac{\rho}{\bar{\rho}\tilde{\rho}} \nabla \tilde{p} - \frac{\rho(\tilde{\mathbf{v}} - \mathbf{v})^2}{2\bar{\rho}} \nabla \ln \tilde{\rho} - \mathbf{f},$$

$$-\tilde{\mathbf{V}} = \frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial t} + \tilde{\mathbf{v}}\mathrm{div}\tilde{\mathbf{v}} + \frac{1}{\tilde{\rho}} \nabla p - \frac{\rho}{\bar{\rho}\tilde{\rho}} \nabla \tilde{\rho} - \frac{\rho\,(\tilde{\mathbf{v}} - \mathbf{v})}{2\bar{\rho}} \nabla \ln \tilde{\rho} - \mathbf{f}, \tag{14}$$

$$\tilde{\mathbf{G}} \overset{def}{=} \frac{1}{\tilde{v}^2} \left\{ \frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial t} + \tilde{\mathbf{v}}\mathrm{div}\tilde{\mathbf{v}} + \frac{1}{\tilde{\rho}} \nabla p - \frac{\rho}{\bar{\rho}\tilde{\rho}} \nabla \tilde{p} - \frac{\rho(\tilde{\mathbf{v}} - \mathbf{v})^2}{2\bar{\rho}} \nabla \ln \tilde{\rho} - \mathbf{f} \right\} =$$

$$= \tilde{\mathbf{S}} \left(= \tilde{\mathbf{Q}} - \tilde{\mathbf{P}}\right) \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{G}} + \tilde{\mathbf{H}}_i = \mathrm{rot}\tilde{\mathbf{F}}_i,\ i = 1, 2. \tag{15}$$

В отсутствии массовых сил $\mathbf{f} = 0$, система (9) имеет решение $\mathbf{v} = 0$, $\tilde{\mathbf{v}} = 0$, $\rho = \rho^0$, $\tilde{\rho} = \tilde{\rho}^0$, $p = p^0$ для покоящейся смеси жидкостей с равномерным давлением $p = p^0$, парциальными плотностями $\rho^0, \tilde{\rho}^0$ и температурой T. В случае однородных несжимаемых сред, т.е. при условии $\rho^f = const$, $\tilde{\rho}^f = const$, где ρ^f, $\tilde{\rho}^f$ – физические плотности фаз при постоянстве объемных насыщенности веществ, составляющего двухфазного континуума $\Rightarrow \rho = const$, $\tilde{\rho} = const \Rightarrow$

$$\mathrm{div}\mathbf{v} = 0,\ \mathrm{div}\tilde{\mathbf{v}} = 0 \ \Leftrightarrow\ \mathbf{v} = \mathrm{rot}\mathbf{A},\ \tilde{\mathbf{v}} = \mathrm{rot}\tilde{\mathbf{A}}$$

где $\mathbf{A}$, $\tilde{\mathbf{A}}$ – соответствующие векторные потенциалы скоростей $\mathbf{v}$, $\tilde{\mathbf{v}}$, ρ^0, $\tilde{\rho}^0$ – физические плотности фаз. Другими словами, векторы $\mathbf{v}$, $\tilde{\mathbf{v}}$ являются соленоидальными. В этом случае уравнения двухскоростной гидродинамики представимы в виде

$$\mathbf{W} = \nabla\left\{\frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{\bar{\rho}}\tilde{p} + U\right\} + \mathrm{rot}\left\{\mathbf{A}_t + \mathbf{M}\right\},$$

$$-\mathbf{V} = \nabla\left\{\frac{1}{\bar{\rho}}\tilde{p} + U\right\} + \mathrm{rot}\left\{\mathbf{A}_t + \mathbf{M}\right\},$$

$$\tilde{\mathbf{W}} = \nabla\left\{\frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{\bar{\rho}}\tilde{p} - \frac{\rho}{\bar{\rho}\tilde{\rho}}\tilde{p} + U\right\} + \mathrm{rot}\left\{\tilde{\mathbf{A}}_t + \mathbf{M}\right\}$$

$$-\tilde{\mathbf{V}} = \nabla\left\{\frac{1}{\tilde{\rho}}p + \frac{\rho}{\bar{\rho}\tilde{\rho}}\tilde{p} + U\right\} + \mathrm{rot}\left\{\mathbf{A}_t + \mathbf{M}\right\},$$

где $-\mathbf{f} = \nabla U + \mathrm{rot}\mathbf{M}$; $\tilde{\mathbf{A}}_t, \mathbf{A}_t$ – временные производные векторов $\tilde{\mathbf{A}}, \mathbf{A}$. Отсюда, при совпадении скоростей и физических плотностей фаз получим $\tilde{\mathbf{W}} = \mathbf{W}$, $\tilde{\mathbf{V}} = \mathbf{V}$ и, как следствие, формулы для векторных полей $\mathbf{W}$, $\mathbf{V}$ из работы [13]. Таким образом, решение $(\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{v}}, p)$ системы уравнений двухскоростной гидродинамики для однородных несжимаемых сред дает представление векторных полей $\mathbf{W}, \mathbf{V}, \tilde{\mathbf{W}}, \tilde{\mathbf{V}}$ определенных в теореме 1 (где $\mathbf{v} = \mathrm{rot}\mathbf{A}, \tilde{\mathbf{v}} = \mathrm{rot}\tilde{\mathbf{A}}$) в виде суммы $\nabla\Phi + \mathrm{rot}\Psi$.

Из (13), (15) и теоремы 2 вытекает

Теорема 4. Для любого движения идеальной двухскоростной системы с равновесием фаз по давлению $(\mathbf{v} \neq 0, \tilde{\mathbf{v}} \neq 0)$ справедливы тождества

$$\mathrm{div}\left[\frac{1}{v^2}\left\{\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v}\mathrm{div}\mathbf{v} + \frac{1}{\bar{\rho}}\nabla\tilde{p} + \frac{(\tilde{\mathbf{v}} - \mathbf{v})^2}{2\bar{\rho}}\nabla\tilde{\rho} - \mathbf{f}\right\}\right] =$$

$$= -2\frac{\sin\theta}{v}\left(\mathbf{v}\cdot(\nabla\alpha\times\nabla\theta)\right) = \mathrm{div}\mathbf{S},$$

$$\mathrm{div}\left[\frac{1}{v^2}\left\{\frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial t} + \tilde{\mathbf{v}}\mathrm{div}\tilde{\mathbf{v}} + \frac{1}{\tilde{\rho}}\nabla p - \frac{\rho}{\bar{\rho}\tilde{\rho}}\nabla\tilde{p} - \frac{\rho(\tilde{\mathbf{v}} - \mathbf{v})^2}{2\bar{\rho}}\nabla\ln\tilde{\rho} - \mathbf{f}\right\}\right] =$$

$$= -2\frac{\sin\tilde{\theta}}{\tilde{v}}\left(\tilde{\mathbf{v}}\cdot\left(\nabla\tilde{\alpha}\times\nabla\tilde{\theta}\right)\right) = \mathrm{div}\tilde{\mathbf{S}}.$$

Кроме того, помимо общего закона сохранения теоремы 2, справедливого для любых гладких векторных полей $\mathbf{v}\,(x,y,z,t)$, $\tilde{\mathbf{v}}\,(x,y,z,t)$, также выполняются законы сохранения дифференциальных форм

$$\operatorname{div}\left(\mathbf{G}+\mathbf{H}_i\right)=0,\ \operatorname{div}\left(\tilde{\mathbf{G}}+\tilde{\mathbf{H}}_i\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\operatorname{div}\left[\frac{1}{v^2}\left\{\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+\mathbf{v}\mathrm{div}\mathbf{v}+\frac{1}{\bar{\rho}}\nabla\tilde{p}+\frac{\left(\tilde{\mathbf{v}}-\mathbf{v}\right)^2}{2\bar{\rho}}\nabla\tilde{\rho}-\mathbf{f}\right\}+\mathbf{H}_i\right]=0,$$

$$\operatorname{div}\left[\frac{1}{\tilde{v}^2}\left\{\frac{\partial\tilde{\mathbf{v}}}{\partial t}+\tilde{\mathbf{v}}\mathrm{div}\tilde{\mathbf{v}}+\frac{1}{\tilde{\rho}}\nabla p-\frac{\rho}{\bar{\rho}\tilde{\rho}}\nabla\tilde{p}-\frac{\rho\left(\tilde{\mathbf{v}}-\mathbf{v}\right)^2}{2\bar{\rho}}\nabla\ln\tilde{\rho}-\mathbf{f}\right\}+\tilde{\mathbf{H}}_i\right]=0$$

и интегральных форм для потоков

$$\iint_S\left(\left[\mathbf{G}+\mathbf{H}_i\right]\cdot\boldsymbol{\eta}\right)dS=0,\ \iint_S\left(\left[\tilde{\mathbf{G}}+\tilde{\mathbf{H}}_i\right]\cdot\boldsymbol{\eta}\right)dS=0,\ i=1,2.$$

Здесь векторы $\mathbf{H}_i\left(\tilde{\mathbf{H}}_i\right)$ определены в теореме 1 и выражаются только через углы $\alpha\left(\tilde{\alpha}\right),\theta(\tilde{\theta})$ направлений скоростей $\mathbf{v}\,(x,y,z,t)\,(\tilde{\mathbf{v}}\,(x,y,z,t))$, S – кусочно-гладкая граница области D, $\boldsymbol{\eta}$ – нормаль к S.

Для безвихревого движения (при $\mathbf{v}=\nabla u$, $\tilde{\mathbf{v}}=\nabla\tilde{u}$) имеем

$$\mathbf{G}\overset{def}{=}\frac{1}{v^2}\left\{\nabla u_t+\Delta u\nabla u+\frac{1}{\bar{\rho}}\nabla\tilde{p}+\frac{\left(\nabla\tilde{u}-\nabla u\right)^2}{2\bar{\rho}}\nabla\tilde{\rho}-\mathbf{f}\right\},$$

$$\tilde{\mathbf{G}}\overset{def}{=}\frac{1}{\tilde{v}^2}\left\{\nabla\tilde{u}_t+\Delta\tilde{u}\nabla\tilde{u}+\frac{1}{\tilde{\rho}}\nabla p-\frac{\rho}{\bar{\rho}\tilde{\rho}}\nabla\tilde{p}+\frac{\rho\left(\nabla\tilde{u}-\nabla u\right)^2}{2\bar{\rho}}\nabla\ln\tilde{\rho}-\mathbf{f}\right\},$$

и справедливы тождества

$$\mathrm{div}\mathbf{G}=\frac{2}{v}\mathrm{div}\left\{u\mathrm{rot}\left(\alpha\nabla\cos\theta\right)\right\}=-\frac{2\sin\theta}{v}\frac{\partial\left(u,\alpha,\theta\right)}{\partial\left(x,y,z\right)},$$

$$\mathrm{div}\tilde{\mathbf{G}}=\frac{2}{\tilde{v}}\mathrm{div}\left\{\tilde{u}\mathrm{rot}\left(\tilde{\alpha}\nabla\cos\tilde{\theta}\right)\right\}=-\frac{2\sin\tilde{\theta}}{\tilde{v}}\frac{\partial\left(\tilde{u},\tilde{\alpha},\tilde{\theta}\right)}{\partial\left(x,y,z\right)},$$

если выполнено одно из условий: $u=u\,(x,y)$ $(\tilde{u}=\tilde{u}\,(x,y))\Rightarrow\theta\equiv\frac{\pi}{2}$ $\left(\tilde{\theta}\equiv\frac{\pi}{2}\right)$; $u=u\,(\alpha,\theta)$ $(\tilde{u}=\tilde{u}\,(\alpha,\theta))$; $v=v\,(\alpha,\theta)$ $(\tilde{v}=\tilde{v}\,(\alpha,\theta))$; $u_z=$

$\varphi(u_x, u_y)$ $(\tilde{u}_z = \tilde{\varphi}(\tilde{u}_x, \tilde{u}_y))$, то $\mathrm{div}\mathbf{G} = 0 \left(\mathrm{div}\tilde{\mathbf{G}} = 0\right)$.

В плоском случае $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, t) = \upsilon\boldsymbol{\tau}$, $\tilde{\mathbf{v}} = \tilde{\mathbf{v}}(x, y, t) = \tilde{\upsilon}\tilde{\boldsymbol{\tau}}$, $\boldsymbol{\tau} = \cos\alpha\mathbf{i} + \sin\alpha\mathbf{j}$, $\tilde{\boldsymbol{\tau}} = \cos\tilde{\alpha}\mathbf{i} + \sin\tilde{\alpha}\mathbf{j}$, $\alpha = \alpha(x, y, t)$, $\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}(x, y, t)$ – угол наклона линии тока (векторной линии поля $\mathbf{v}(\tilde{\mathbf{v}})$ при $t = const$). Для несжимаемых сред имеем $\mathrm{div}\mathbf{v} = 0$, $\mathrm{div}\tilde{\mathbf{v}} = 0$, $\mathbf{v} = u_y\mathbf{i} - u_x\mathbf{j} = \mathrm{rot}(u\mathbf{k})$, $\tilde{\mathbf{v}} = \tilde{u}_y\mathbf{i} - \tilde{u}_x\mathbf{j} = \mathrm{rot}(\tilde{u}\mathbf{k})$, $\upsilon^2 = u_x^2 + u_y^2, \tilde{\upsilon}^2 = \tilde{u}_x^2 + \tilde{u}_y^2$, где $u = u(x, y, t)$ и $\tilde{u} = \tilde{u}(x, y, t)$ – функция тока.

Из уравнения (13), (15) и теоремы 3 следует

Теорема 5. Система уравнений двухскоростной гидродинамики с равновесием фаз по давлению (10), (11) для плоского движения ($\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z, t)$, $\tilde{\mathbf{v}} = \tilde{\mathbf{v}}(x, y, z, t)$, $\upsilon \neq 0$, $\tilde{\upsilon} \neq 0$) представима в виде тождества $\mathbf{G} = \mathrm{rot}(\alpha(x, y, t)\mathbf{k})$, $\tilde{\mathbf{G}} = \mathrm{rot}(\tilde{\alpha}(x, y, t)\mathbf{k}) \Rightarrow \mathrm{div}\mathbf{G} = 0$, $\mathrm{div}\tilde{\mathbf{G}} = 0$

$$\mathrm{rot}\mathbf{G} = -(\Delta\alpha)\mathbf{k},\ \mathrm{rot}\tilde{\mathbf{G}} = -(\Delta\tilde{\alpha})\mathbf{k} \Rightarrow \ln\upsilon = \mathrm{div}\mathbf{Q},\ \Delta\ln\tilde{\upsilon} = \mathrm{div}\tilde{\mathbf{Q}}, \quad (16)$$

$$(\Delta\alpha)\mathbf{k} = -\mathrm{rot}\mathbf{Q},\ (\Delta\tilde{\alpha})\mathbf{k} = -\mathrm{rot}\tilde{\mathbf{Q}},$$

где поля $\mathbf{G}, \mathbf{Q}, \tilde{\mathbf{G}}, \tilde{\mathbf{Q}}$ определены в (8), (13), (15).

Из теоремы 3 вытекает

Следствие 1. Как в случае плоского безвихревого движения ($\mathbf{v} = \nabla u(x, y, t)$, $\tilde{\mathbf{v}} = \nabla\tilde{u}(x, y, t)$) с потенциалами $u(x, y, t)$, $\tilde{u}(x, y, t) \in C^3(D)$, так и в случае плоского движения несжимаемого двухскоростного континуума ($\mathbf{v} = \mathrm{rot}(u(x, y, t)\mathbf{k}) = u_y\mathbf{i} - u_x\mathbf{j}$, $\tilde{\mathbf{v}} = \mathrm{rot}(\tilde{u}(x, y, t)\mathbf{k}) = \tilde{u}_y\mathbf{i} - \tilde{u}_x\mathbf{j}$) с функцией тока $u(x, y, t)$, $\tilde{u}(x, y, t) \in C^3(D)$ для величин α_x, α_y, $\upsilon = |\mathbf{v}|$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{S}$, $\mathbf{V} = -\upsilon^2\mathbf{S}$, $\mathrm{div}\mathbf{V}$, $\mathrm{rot}\mathbf{V}$ $\left(\tilde{\alpha}_x, \tilde{\alpha}_y, \tilde{\upsilon} = |\tilde{\mathbf{v}}|, \tilde{\mathbf{Q}}, \tilde{\mathbf{S}}, \tilde{\mathbf{V}} = -\tilde{\upsilon}^2\tilde{S}, \mathrm{div}\tilde{\mathbf{V}}, \mathrm{rot}\tilde{\mathbf{V}}\right)$ получаем одни и те же выражения через производные функции $u(\tilde{u})$, при этом $\upsilon = \sqrt{g}$, $g = u_x^2 + u_y^2$, $\tilde{\upsilon} = \sqrt{g}$, $\tilde{g} = \tilde{u}_x^2 + \tilde{u}_y^2$, $\mathbf{Q} = \frac{\Delta u\nabla u}{g}$, $\mathbf{S} = \mathrm{rot}(\alpha\mathbf{k})$, $\tilde{\mathbf{Q}} = \frac{\Delta\tilde{u}\nabla\tilde{u}}{\tilde{g}}$, $\tilde{\mathbf{S}} = \mathrm{rot}(\tilde{\alpha}\mathbf{k})$,

$$\mathbf{V} = \frac{1}{2}\nabla\left(u_x^2 + u_y^2\right) - \Delta u\nabla u = -\left(u_x^2 + u_y^2\right)\mathrm{rot}(\alpha\mathbf{k}) =$$

$$= (u_y u_{xy} - u_x u_{yy})\mathbf{i} + (u_x u_{xy} - u_y u_{xx})\mathbf{j} = (\nabla u \times \nabla)\nabla u, \quad (17)$$

$$\mathrm{div}\mathbf{V} = 2\left(u_{xy}^2 - u_{xx}u_{yy}\right),\ \mathrm{rot}\mathbf{V} = -\left\{u_y(\Delta u)_x - u_x(\Delta u)_y\right\}\mathbf{k}, \quad (18)$$

$$\tilde{\mathbf{V}} = \frac{1}{2}\nabla\left(\tilde{u}_x^2 + \tilde{u}_y^2\right) - \Delta\tilde{u}\nabla\tilde{u} = -\left(\tilde{u}_x^2 + \tilde{u}_y^2\right)\mathrm{rot}\left(\tilde{\alpha}\mathbf{k}\right) =$$

$$= \left(\tilde{u}_y\tilde{u}_{xy} - \tilde{u}_x\tilde{u}_{yy}\right)\mathbf{i} + \left(\tilde{u}_x\tilde{u}_{xy} - \tilde{u}_y\tilde{u}_{xx}\right)\mathbf{j} = \left(\nabla\tilde{u}\times\nabla\right)\nabla\tilde{u}, \qquad (19)$$

$$\mathrm{div}\tilde{\mathbf{V}} = 2\left(\tilde{u}_{xy}^2 - \tilde{u}_{xx}\tilde{u}_{yy}\right),\ \mathrm{rot}\tilde{\mathbf{V}} = -\left\{\tilde{u}_y(\Delta\tilde{u})_x - \tilde{u}_x(\Delta\tilde{u})_y\right\}\mathbf{k}, \qquad (20)$$

и справедливы тождества ($\upsilon \neq 0, \tilde{\upsilon} \neq 0$)

$$\mathbf{Q} = \frac{\Delta u \nabla u}{\upsilon^2} = \nabla\ln\upsilon + \mathrm{rot}\left(\alpha\mathbf{k}\right),$$

$$\tilde{\mathbf{Q}} = \frac{\Delta\tilde{u}\nabla\tilde{u}}{\tilde{\upsilon}^2} = \nabla\ln\tilde{\upsilon} + \mathrm{rot}\left(\tilde{\alpha}\mathbf{k}\right) \Leftrightarrow \mathbf{R} \overset{def}{=} \frac{\Delta u}{\upsilon^2}\mathrm{rot}\left(u\mathbf{k}\right) = -\nabla\alpha + \mathrm{rot}\left(\ln\upsilon\mathbf{k}\right),$$

$$\tilde{\mathbf{R}} \overset{def}{=} \frac{\Delta}{\tilde{\upsilon}^2}\mathrm{rot}\left(\tilde{u}\mathbf{k}\right) = -\nabla\alpha + \mathrm{rot}\left(\ln\tilde{\upsilon}\mathbf{k}\right) \Rightarrow \Delta\ln\upsilon = \mathrm{div}\mathbf{Q}, \Delta\ln\tilde{\upsilon} = \mathrm{div}\tilde{\mathbf{Q}},$$

$$\left(\Delta\alpha\right)\mathbf{k} = -\mathrm{rot}\mathbf{Q}, \left(\Delta\tilde{\alpha}\right)\mathbf{k} = -\mathrm{rot}\tilde{\mathbf{Q}}.$$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке грантом Комитета по координации развития науки и технологий при Кабинете Министров Республики Узбекистан (номер гранта А-13-18).

Литература

1. Лойцянский Л.Г., Механика жидкости и газа. - М.: Наука. 1978. 736 с.

2. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука. 1974. 712 с.

3. Имомназаров Х.Х., Имомназаров Ш.Х., Маматкулов М.М. Черных Г.Г. Фундаментальное решение для стационарного уравнения двухскоростной гидродинамики с одним давлением // СибЖИМ, 2014, т. 17, №4(60), с. 60-66.

4. Imomnazarov Kh.Kh., Imomnazarov Sh.Kh., Mamatqulov M.M., Chernykh E.G., The fundamental solution of the stationary two-velocity hydrodunamics equation with one pressure // Bull. Of the Novosibirsk Computing Center, series: Mathematical Modeling in Geophysics, Novosibirsk, 2014, №17, pp.5-12.

5. Жабборов Н.М., Имомназаров Х.Х., Коробов П.В. Трехмерные вихревые течения несжимаемых двухскоростных сред в случае по-

стоянства объемной насыщенности веществ // Вестник НГУ, Серия: математика, механика, информатика, 2014, №2, С. 15-23.

6. Imomnazarov Kh.Kh., Korobov P.V., Zhabborov N.M. Three-dimensional vortex flows of two-velocity incompressible media in the case of constant volume saturation // Journal of Mathematical Sciences, New York, 2015, v. 211, №6, pp. 760-766.

7. Меграбов А.Г. Дифференциальные тождества, связывающие лапласиан скалярной функции, модуль ее градиента и угол его направления / / Доклады РАН. 2009. Т.424, №5, С.599-603.

8. Меграбов А.Г. Дифференциальные тождества, связывающие модуль и направления векторного поля, гидродинамические уравнения Эйлера // Доклады РАН. 2010. Т.433, №3, С.309-313.

9. Кочин Н.Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. Л.; М.: ГОНТИ, 1938. 456с.

10. Доровский В.Н. Континуальная теория фильтрации // Геология и геофизика. 1989. №7, С.39-45.

11. Доровский В.Н., Перепечко Ю.В. Феноменологическое описание двухскоростных сред с релаксирующими касательными напряжениями // ПМТФ. 1992. №3, С.94-105.

12. Доровский В.Н., Перепечко Ю.В. Теория частичного плавления // Геология и геофизика. 1989. №9, С.56-64.

13. Жабборов Н.М., Коробов П.В., Имомназаров Х.Х. Применение дифференциальных тождеств А.Г. Меграбова к уравнениям двухскоростной гидродинамики с одним давлением // Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ., 2012, т. 5, No.2, с. 156-163.

14. Жабборов Н.М., Имомназаров Х.Х. Некоторые начально-краевые задачи механики двухскоростных сред, Изд-во НУУз им. Мирзо Улугбека, 2012, 212с.

[1]Национальный университет Узбекистана им. М.Улугбека,
[2]Казахский национальный университет им. Абая,
[3]Илийский университет. Китай,
[4]Каршинский госуниверситет.

Uzbek Mathematical
Journal, 2017,№1, pp.67-76

УУДК 515.12

О свойствах некоторых компактов вида $F\left(X\right)$

Жураев Т.Ф.

Maqolada η_F chidamli yarim normal funktor tushunchasi kiritilib uning turli topologik xossalari isbotlangan. Hamda $F(X)$ ko‘rinishdagi fazolarning ko‘pgina xossalari aniq P ehtimol o‘lchov funktorining funktor ostilari uchun o‘rganilgan.

In this paper, the concept of retract η_F stable seminormal functors is introduced and its different topological properties are proved. Furthermore of subfunctors of the functor P of probability measures are studied.

1.Введение

Интерес к функторальной трактовке классических результатов общей топологии о метризуемости компактов возник после того как В.В. Федорчук [1] обобщил классическую теорему Катетова о метризуемости компакта, куб которого наследственно нормален, для всех нормальных функторов F степени ≥ 3, действующих в категории $Comp$ компактов и непрерывных отображений в себя. Как отмечено в работе [2], требование наследственной нормальности $F_3\left(X\right)$ в теореме Федорчука можно ослабить до требования наследственной нормальности $F_3\left(X\right) \backslash X$ (в теореме Катетова для метризуемости X достаточно наследственной нормальности$X^3 \backslash \Delta$). Задача распространения теоремы Федорчука –Жураева на более широкие классы ковариантных функторов $F : Comp \rightarrow Comp$ привело А.В. Иванова[3,4] к необходимости рассмотрения степенного спектра $sp\left(F\right)$ функтора, который определяется как множество степеней точек пространства вида $F\left(X\right)$. В этом направлении в [5] получен следующий частный результат для функтора суперрасширения λ: если для компакта X пространство $\lambda_4\left(X\right) \backslash X$ наследственно нормально, то X метризуем. Замена индекса 3 на 4 в теореме не случайна: дело в том, что 4 есть третий по счету элемент степенного спектра $sp\left(\lambda\right) = \{1, 3, 4, ...\}$.

Исследованиям в этой области для полунормальных функторов посвящены работы А.В. Иванова [3,6], в которых, в частности, доказано, что для любого полунормального функтора конечной степени $n > 3$

наследственная нормальность $F(X)$ влечет метризуемость X. В работах [9,5] в теореме Федорчука наследственная нормальность компакта $F(X)$ заменена на наследственную счетную компактность и счетную паракомпактность $F(X)$. Комбаровым [7,8] ослаблено требование наследственной нормальности пространства $F(X)$ до требования наследственной $K-$ нормальности пространства $F(X)\backslash X$. Добрынина М.А. [9] обобщила теоремы Катетова о кубе для паракомпактных $p-$ пространств.

В настоящей работе введено понятие ретрактно η_F устойчивого полунормального функтора и доказаны его различные топологические свойства. Кроме того, исследованы пространства вида $F(X)$ для конкретных подфункторов F функтора P вероятностных мер.

Недостающие понятия и факты, относящиеся к свойствам функторов, можно найти в [10-14].

2. Основная часть.

Непрерывный мономорфный сохраняющий пересечения функтор называется полунормальным [13], если он сохраняет точку и пустое множество. Следуя [13,15], для каждого $n \geq 2$ введем следующие обозначения: $F_{nn}(X) = F_n(X)\backslash F_{n-1}(X)$; $\Pi_n(X) = (\pi_{F,X,n})^{-1}(F_{nn}(X))$; $F_0(X) = \emptyset$

Степенным спектром F называется [3] множество

$$sp(F) = \{k : k \in N, F_{kk}(k) \neq \emptyset\}$$

Очевидно, что степенной спектр любого полунормального функтора содержит 1, а степенной спектр нормального функтора либо равен N, либо совпадает с начальным отрезком натурального ряда. Запись $sp(F) = \{1, n, m, ...\}$ означает, что элементы степенного спектра F записаны в порядке возрастания; т.е. $n-$ наименьщей элемент степенного спектра отличный от 1.

Натуральное число k принадлежит степенному спектру F тогда и только тогда, когда существует бикомпакт X и элемент $\xi \in F(X)$ такие, что $\deg(\xi) = k$ [13].

Легко видеть, что степенные спектры функторов $\exp, P, N^k\,(k \geq 2)$ равны N, а $sp(\lambda) = N\backslash\{2\}$, так как не существует максимальной степенной системы с носителем из двух точек, где $N-$ множество натуральных чисел. Определение упомянутых функторов экспоненты exp, вероятностных мер P, суперрасщирения λ и полных $k-$ сцепленных систем N^k можно найти в [12] и [14]. Пример функтора континуальной экспоненты $\exp c$ показывает, что числом 1 не прерывается весь степенной спектр функтора $\exp c$[12]. Очевидно, что для всякого F и n имеет место $sp\,(F_n) = \{k : k \in sp\,(F)\,, k \leq n\}$.

Пусть $F : Comp \to Comp$ полунормальный функтор. Для любого $n \in N$ и компакта $X \in Comp$ положим :

$$F_n\,(X) = \{a \in F\,(X) : |supp\,(a)| \leq n\}.$$

Подпространство $F_n\,(X)$ замкнуто в $F\,(X)$ для любого компакта X [13,15]. Более того, соответствие $X \to F_n\,(X)$ однозначно определяет подфунктор $F_n\,(X)$ функтора F, который также является полунормальным и нормальным , если функтор F соответственно полунормальный или нормальный.

Будем говорить, что степенной спектр функтора F непрерывен, если $sp\,(F)$ равен начальному отрезку натурального ряда N или $sp\,(F) = N$.

Пусть $F-$ нормальный и полунормальный функтор, $n \in sp\,(F)$. Фиксируем элемент $a \in F\,(n)$ с $\mathrm{supp}_F(a) = n$, т.е. a имеет ровно n различных носителей. Пусть $X-$ компакт и $\pi_{X,F,n} : X^n \times F\,(n) \to F\,(X)$ отображения Басманова [10] . Для элемента a положим

$$F^a\,(X) = \pi_{X,F,n}\,(X_n \times \{a\}) \subset F\,(X)$$

Для непрерывного $f : X \to Y$ между компактами X и Y определим отображение $F^a\,(f) : F^a\,(X) \to F^a\,(Y)$ как ограничение отображения $F\,(f)$ на подмножестве $F^a\,(X)$. В силу непрерывности отображения $\pi_{X,F,n}$ для каждого $a \in F_{nn}\,(n)$ подпространство $F^a\,(X)$ замкнуто в $F\,(X)$.

Тем самым определен функтор $F^a : Comp \to Comp$, который полунормальный или нормальный (это зависит от функтора F) и имеет степень n. Очевидно , что для любого $a \in F\,(n) \backslash F\,(n-1)$ функтор F^a является подфунктором функтора $F : Comp \to Comp$. При этом, всегда $a \in F^a\,(n)$ и $F^a\,(X) \subset F_n\,(X)$ для любого компакта X, т.е. $F^a : Comp \to Comp$, если $F-$ полунормальный или нормальный.

Заметим, что пространство $F\,(X) \backslash \eta_{_F}\,(X)$ содержит подпространство $F^a\,(X) \backslash \eta_{_F}\,(X) = \pi_{F,X,n}\,(X^n \times \{a\}) \backslash \eta_{_F}\,(X)$ отображения $\pi_n : X^n \times \{a\} \to \exp_n\,(X)$, определенного равенством $\pi_n\,(\xi, a) = \xi\,(a)$, где $\pi_n = \mathrm{supp} \circ \pi_{F,X,n}$ [1].

Известно, что supp_F-носитель осуществляет естественное преобразование функтора в экспоненту [11,12]. Отображение $\mathrm{supp}_F : F^a\,(X) \to \exp_n\,(X)$ непрерывно и является эпиморфизмом. Легко поверяется, что

$$(\mathrm{supp}_F)^{-1}(\exp_n X \backslash X) = F^a(X)\backslash \eta(X).$$

Поэтому ограничение отображения supp_F на подпространстве $F^a(X)\backslash\eta(X)$ является совершенным отображением. Но пространство $F_a(X)\backslash\eta(X)$ является подпространством наследственного $k-$ нормального пространства $F^a(X)\backslash X$. Поэтому оно наследственно нормально. Совершенный образ пространства $F^a(X)\backslash\eta(X)$ также является наследственно $k-$ нормальным пространством . Следовательно, пространство $\exp_n X\backslash X$ наследственно $k-$ нормально. В этом случае верно следующая.

Лемма 1 [7]. Если $X-$ бикомпакт и пространство $\exp_3 X\backslash X$ наследственно $k-$ нормально, то $X-$ метризуемый компакт.

Таким образом, установлена справедливость следующей теоремы.

Теорема 1. Если для какого нибудь нормального функтора F степени ≥ 3 бикомпакт $F^a(X)$ наследственно k нормален, то $X-$ метризуемый компакт.

Пусть U- некоторый класс топологических пространств. Будем говорить, что пространство X является U-нормальным, если в нем любые два непересекающихся замкнутых множества, одно из которых принадлежит классу U, содержатся в непресекаюшихся окрестностях. Пусть $K-$ класс пространств представимых в виде объединения счетного числа бикомпактных пространств. Заметим, что регулярное счетно паракомпактное пространство является $K-$ нормальным.

Пусть n и m натуральные числа. Определим [16] отображение φ_{nm} : $n \to m$ по следующемо правилу: $\varphi_{nm}(i) = i$, при $i < m$;

$$\varphi_{nm}(i) = m - 1, \text{ при } i \geq m$$

Будем говорить, что функтор F удовлетворяет условию (*), если

$$F(\varphi_{nm})(F_{nn}(n)) \bigcap F_{mm}(m) \neq \emptyset.$$

Для компакта X через $\Delta_n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in X^n : \exists i, \exists j, (i \neq j, x_i = x_j)\}$ обозначается обобщенная диагональ пространства X, т.е. Δ_n подмножество X^n, состоящее из точек, для которых хотя бы две координаты совпадают или же не все координаты различны.

Очевидно, что $sp(P_{f,n}) = \{1, 2, ..., n\}$ и $sp(P_f) = \{1, 2, ...\}$. С другой стороны функтор $P_{f,n}$ удовлетворяет условию (*). С функторами можно ознакомиться в работе [19]. В данном случае из предложения 2 и теоремы 1 работы [6] вытекает следующая (соответственно, пространство $P_{f,n}(X)\backslash\delta(X)$ $(n \geq 3)$ наследственно нормально).

Теорема 2. Если для компакта X пространство $P_{f,n}(X)$ $(n \geq 2)$ совершенно нормально, тогда X метризуемо.

Определение [16] Полунормальный функтор F обладает свойством Катетова (К-свойством), если для любого компакта X наследственная нормальность $F(X)$ влечет метризуемость X.

Из теоремы 2 вытекает, что функторы $P_f, P_f^c, P_{f,n}$ и $P_{f,n}^c$ обладают $K-$ свойством.

Определение. Полунормальный функтор $F : Comp \to Comp$ называется ретрактно η_F устойчивым, если для любого компакта $X \in Comp$ подпространство $\eta_F(X)$ является ретрактом компакта $F(X)$, т.е. существует непрерывная ретракция $r_\eta^F : F(X) \to \eta_F(X)$.

Очевидно, что для выпуклых компактов функтор P вероятностных мер является ретрактно устойчивым . Следовательно, для абсолютных ретрактов (коротко, $AR-$ компактов) любой полунормальный функтор F ретрактно η_F устойчив. В работе [19] показано, что подфункторы $P_f, P_{f,n}, P_{f,n}^c$ и P_f^c функтора P вероятностных мер ретрактно устойчивы. В этом случае ретракция (отображение) $r_{\eta_F}^X : F(X) \to \eta_F(X)$ замкнута и совершенна.

Если X метризуемый компакт, тогда $X^n \times F(n)$ тоже метризуемый компакт, а отображение $\pi_{X,F,n} : X^n \times F(n) \to F(X)$ совершенно. Отсюда $F(X)$ метризуемо, где $F = P_f, P_{f,n}, P_f^c, P_{f,n}^c$. Значит имеет место.

Теорема 3. Для бикомпакта X и функторов $F = P_n, P_f, P_{f,n}, P_{f,n}^c$ и P_f^c следующие условия эквивалентны :

а) X метризуемо;

б) $F(X)$ метризуемо ;

Пусть $Y-$ компакт , X замкнуто в Y, $C(X)$ и $C(Y)$-банаховы пространства непрерывных вещественных функции на X и Y. Линейный оператор [17] u: $C(X) \to C(Y)$ называется регулярным оператором продолжения, если выполняются следующие условия:

1) для всякого $f \in C(X)$ сужение функции uf на X совпадает c f;

2) из $f \geq 0$ следует $uf \geq 0$;

3) если $f-$ константа , то и $uf-$ константа.

Компакт X называется компактом Дугунджи [17], если для всякого компакта Y, содержащего X, существует регулярный оператор продолжения $u : C(X) \to C(Y)$.

Пусть X компакт и $C(X)$ его пространство непрерывных функций. Для каждого $f \in C(X)$ положим $uf = f \circ r_{\eta_F}^X \in C(F(X))$.

Очевидно , что оператор $u(f) : C(X) \to C(F(X))$ удовлетворяет всем условиям оператора продолжения, где F ретрактно η_F устойчивый функтор. Значит имеет место следующая

Теорема 4. Для ретрактно η_F устойчивых функторов F следующие условия эквивалентны :
а) X компакт Дугунджи ;
б) $F(X)$ компакт Дугунджи

Следствие 1. Для функторов $F = P_f, P_{f,n}, P_f^c, P_{f,n}^c$ следующие условия эквивалентны :
а) X компакт Дугунджи ;
б) $F(X)$ компакт Дугунджи ;

Напомним , что $Y \subset X$ является $C-$ вложеным в X, если всякая непрерывная вещественная функция, определенная на Y , продолжается до непрерывной функции на X[18].

Ясно, что любой компакт $\eta_F(X)$ $C-$ вложен в $F(X)$, где F ретрактно η_F устойчивый функтор.

Через $\tau(X)$ обозначается топология пространства X. Пусть X подпространство в Y. Предположим, что каждому $U \in \tau(X)$ поставлено в соответствие множество $e(U) \in \tau(Y)$ так, что выполняются три условия:
1) $e(U) \bigcap X = U$ для всех $U \in \tau(X)$;
2) $e(U \bigcap V) = e(U) \bigcap e(V)$ для всех $U, V \in \tau(X)$;
3) $e(\emptyset) = \emptyset$

Тогда функция $e : \tau(X) \to \tau(Y)$ называется $d-$ регулярным оператором продолжения [18].

Пусть X компакт и F ретрактно η_F устойчивый функтор. Для $U \in X$ положим $e(U) = \left(r_{\eta_F}^X\right)^{-1}(U)$.

Легко проверить, что $e(U) : \tau(X) \to \tau(F(X))$ является $d-$ регулярным оператором продолжения, т.е. верна следующая

Теорема 5. Для любого компакта X и ретрактно η_F устойчивого функтора F существует $d-$ регулярный оператор продолжения $e : \tau(X) \to \tau(F(X))$

В частности, для функторов $F = P_f, P_{f,n}, P_f^c$ и $P_{f,n}^c$ существует d регулярный оператор продолжения $e : \tau(X) \to \tau(F(X))$.

Рассмотрим отображение $\pi_{F,X,n} : X^n \times F(n) \to F(X)$ $F_{nn}(X) = F_n(X) \backslash F_{n-1}(X)$. По определению имеем $\pi_{F,X,n}^{-1}(F_{nn}(X)) = \Pi_n(X)$.

С другой стороны, $\Pi_n(X) = \pi_{F,X,n}^{-1}(F_n(X) \backslash F_{n-1}(X)) =$
$= \pi_{F,X,n}^{-1}(F_n(X)) \backslash \pi_{F,X,n}^{-1}(F_{n-1}(X))$;
$\pi_{F,X,n}^{-1}(F_{n-1}(X)) = X_{n-1}^n \times F(n) \bigcup X^n \times F(n-1)$,
где $X_{n-1}^n = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in X^n$: не все координаты различны

$\} = \Delta n$.

Отсюда $\Pi_n(X) = X^n \times F(n) \setminus \left(X^n_{n-1} \times F(n)\right) \bigcup (X^n \times F(n-1)) = = \left(X^n \times F(n) \setminus X^n_{n-1} F(n)\right) \bigcap (X^n \times F(n) \setminus X^n \times F(n-1)) = \left(X^n \setminus X^n_{n-1}\right) \times F(n) \bigcap X^n \times F_{nn}(n) = \left(X^n \setminus X^n_{n-1}\right) \times F_{nn}(n)$

Значит $\left(\pi_{F,X,n}\right)^{-1}(F_{nn}(X)) = \Pi_n(X) = \left(X^n \setminus X^n_{n-1}\right) \times F_{nn}(n)$, где F-нормальный или полунормальный функтор. Отсюда можно заключить, что отображение $\pi_n = \pi_{F,X,n} : \Pi_n(X) \to F_{nn}(X)$ есть совершенное отображение для любого компакта X и нормального функтора F степени $\leq n$.

Функтор F будем называть вариативным [16], если существует биекция $f : n := \{1, 2, ..., n\} \to n$ и $\xi \in F_{nn}(n)$ такие, что $F(f)(\xi) \neq \xi$.

Всякая биекция $f : n \to n$ (подстановка из элементов) разлагается в произведение транспозиции. Таким образом, функтор F вариативен тогда и только тогда, когда существуют транспозиция $f : n \to n$ и $\xi \in F_{nn}(n)$ такие, что $F(f)(\xi) \neq \xi$.

Функторы возведения в степень n и функтор P вероятностных мер являются вариативными, а экспонента exp и суперрасширение $\lambda-$ не вариативные функторы.

Легко показать , что функторы P_n, P_f,P_n, $P_{f,n}$ и F локально выпуклые подфункторы функтора P_n тоже будет вариативными функторами.

Будем говорить, что полунормальный функтор F обладает $AK-$ свойством, если для любого компакта X несчетного характера пространство $F(X) \setminus X$ не нормально [16].

Согласно [4,20] функторы $P_{f,n}$,P_f,P_n, F обладают AK- свойством , где $F-$ локально выпуклый подфунктор функтора P_n.

Пара (X, A) называется чистым разрезом (коротко c c-пара), если X метризуемо, A замкнуто в X, A является сильным деформационным ретрактом для X и $X \setminus A$ является абсолютным окрестностным ретрактом (коротко ANR пространством) [21].

Известно (теорема 2.3[21]), что если (X, A) есть сс- пара, то $X \in ANR$ тогда и только тогда, когда $A \in ANR$.

В работе [19] показано, что для функторов P_f,$P_{f,n}$,$P^c_{f,n}$ и P^c_f компакта X пространства $P_f(X)$,$P_{f,n}(X)$, $P^c_f(X)$ и $P^c_{f,n}(X)$ является сильными деформационными ретрактами. Поэтому имеет место следующая

Теорема 6. Для компакта X и функторов $F = P_f, P_{f,n}, P^c_{f,n}, P^c_f$ пара $(F(X), X)$ являются c c парой тогда и только тогда, когда $X \in ANR$.

Пусть Δ диагональ пространства X^n, т.е. $\Delta =$

$\{y = (x, x, ..., x) : x \in X\}$, $\Delta_n -$ обобщенная диагональ пространства X^n,

$X^n_{n-1} = \{y = (x_1, x_2, ..., x_n) \in X^n$ не все координаты различны $\}$. Из определения множеств $\Delta, \Delta_n, X^n_{n-1}$ вытекает , что

$$X^n_{n-1} \supset \Delta_n \supset \Delta, \tag{1}$$

и поэтому

$$X^n \backslash X^n_{n-1} \subset X^n \backslash \Delta_n \subset X^n \backslash \Delta \tag{2}$$

Предложение 1. Если X^n_{n-1} есть G_δ- множество в X^n, тогда X-метризуемый компакт.

Доказательство. Пусть $x_1, x_2, ..., x_r$- попарно различные точки и $x_{r+1} = x_{r+2} = ... = x_n$ взаимно равные точки X. Пусть U окрестность точки x_{r+1}, замыкание которой $[U]$ не содержит точек $x_1, x_2, ..., x_r$. Тогда имеет место равенство $\left(\{x_1\} \times \{x_2\} \times ... \times \{x_r\} \times [U]^{n-r}\right) \bigcap X^n_{n-1} = \{x_1\} \times \{x_2\} \times ... \times \{x_r\} \times \Delta_n$.

Следовательно, диагональ Δ_U в $[U]^{n-2}$ является G_δ- множеством в $[U]^{n-2}$ и, значит, $[U]$ метризуемо, т.е. точки пространства X имеют метризуемую окрестность. Из локальной метризуемости X следует его метризуемость.

Предложение 2. Пусть F полунормальный функтор и $sp\,(F) = \{1, m, ...\}$. Если для компакта X пространство $F_{nn}\,(X)$ совершенно нормально, то X метризуемый компакт.

Доказательство. Пусть $\delta -$ некоторая точка из $F_{mm}\,(m)$. Положим $f = \pi_{f,x,n}|\, X^m \times \{\delta\} : X^m \times \{\delta\} = X^m \to F_m\,(X)$ тогда $f^{-1}\left(f\left(X^m_{m-1}\right)\right) = X^m_{m-1}$ и $f\left(X^m_{m-1}\right) \subset F_{mm}\,(X)$. Из совершенной нормальности $F_{mm}\,(X)$ следует, что X^n_{m-1}- G_δ- множество в X^m. По этому, согласно предложению 1 компакт X метризуем.

Теорема 7. Пусть F полунормальный функтор, удовлетворяющий условию (*), и $sp\,(F) = \{1, m, n, ...\}$. Если для компакта X пространство $F_{mm}\,(X)$ наследственно нормально, то X метризуем.

Доказательство теоремы 7 повторяет рассуждения теоремы 1 [6] с использованием предложений 1-2.

Следствие 4. Для любого компакта X нормального функтора F степени ≥ 3 наследственная нормальность $F\,(X)$ влечет, метризуемость компакта X.

Следствие 5. Для любого компакта X наследственная нормальность $X^n \backslash X^n_{n-1}$ влечет метризуемость пространства X.

Литература

1. Федорчук В.В. К теореме Катетова о кубе Вестник МГУ. Сер. мех.-мат. Москва, 1989. №4. с. 93-96.
2. Жураев Т.Ф. Нормальные функторы и метризуемость бикомпактов Вестник МГУ. Сер. мех-мат. Москва, 2000. №4. С 8-11.
3. А.В. Иванов . О степенных спектрах и композициях финитно строго эпиморфных функторов. Труды Петрозаводского университета, сер. "Математика 2000 вып.7, с.15-28 .
4. Иванов А.В., Кашуба Е.В. О наследственной нормальности пространств вида $F(X)$. Сибир. Мат. Журнал, 2008, Т.49. №4 с. 813-824.
5. Жураев Т.Ф. Функтор и метризуемость бикомпактов Вестник МГУ. Сер. мех.-мат. Москва, 1999. №4. С 54-56.
6. Иванов А.В. Теорема Катетова о кубе и полунормальные функторы. Ученые записки Петрозаводского Гос. Универ. Физико-матем. науки , 2012, №2, с. 104-108.
7. Комбаров А.П. О Нормальных функторах степени ≥ 3 Матем. Заметки, 2004 ,76, с. 147-149.
8. Комбаров А.П. свойства типа нормальности и ковариантные функторы Фунд. и прикладная математика , 2003, т. 9 , №2 , с. 57-98.
9. Добрынина М.А. Некоторые свойство нормальных и полунормальных функторов в категориях P и $Comp$. Канд. Дис. 2014, М. МГУ. 70 с.
10. В.Н. Басманов Ковариантные функторы, ретракты и размерность. ДАН СССР, 1983, Т 271, №5, с. 1033-1036.
11. Е.В.Щепин Функторы и несчетные степени компактов. Успех. Мат. Наук , 1981, Т.36, вып. 3, с. 3-62.
12. Федорчук В.В., Филиппов В.В. Общая топология. Основные конструкции. Москва: Изд-во МГУ, 1988. с. 252
13. Fedorchuc V. Todarcevic S. Celluarity of covariant functors Topology and is Applications, 1997, vo. 76, p. 125-150.
14. А.В. Иванов . О пространстве полных сцепленных систем Сиб. мат. журнал,1986, Т .27, Т.6, с .95-110.
15. T.F.Zhuraev On projectively quotient functors. Comment. Math. Univ. Carolinae, 2001, V-42, №3. pp. 561-573.
16. Иванов А.В. Обобщение теоремы Аргангельского –Комбарова для полунормальных функторов . Сиб. Мат.журнал 2015, т.56, №2, с. 368-376.
17. Pelczynski A. Linear extensions, linear averagings and their applications Diss.math. V. 58, Warszawa, PWH. 1968.

18. Успенский В.В. Топологические группы и компакты Дугунджи. Матем. сб. 1980, №8, с.1092-1118.
19. Т.Ф.Жураев Некоторые геометрические свойства подфункторов функтора P вероятностных мер . М.МГУ, 1989, 60 с. Рукопись депонировано в ВИНИТИ АН СССР, 5 толя 1989 г., № 4471-В89.
20. Кашуба Е.В. Обобщение теорема Катетова для полунормальных функторов. Труды Петрозоводского Государственного Университета сер. Математика вып. 13, 2006, с. 82-89.
21. Kruse A.N., Liebnitz P.W. An application of family homotopy extension theorem to ANR spaces Pacif. J. Math., 1966. V.16. №2. p.p. 331-336.

Ташкентский государственный педагогический университет им. Низами

Uzbek Mathematical
Journal, 2017,№1, pp.77-85

УДК 517.55

Продолжение функций из класса Гончара на все пространство $\mathbb{C}^n$.

Ибрагимов З.

Ushbu maqolada Gonchar sinfidan bo'lgan funksiyalarni nozik - analitik davom etishi isbotlangan. Bundan tashqari, Gonchar sinfi va nozik - analitik funksiyalar o'rtasidagi bog'lanish o'rganilgan.

In this paper was proved fine - analitic continuation of functions from Gonchar class. Moreover, we set a connection between Gonchar class and fine - analitic functions of several complex variable.

1.Введение

Росток функции $\bar{f}$ в точке $0 \in \mathbb{C}^n$ принадлежит классу R^0, если в некотором шаре $\overline{B} = \overline{B}(0, r), r > 0$ функция $f(z)$ допускает быструю рациональную аппроксимацию:

$$\lim_{m\to\infty} \rho_m^{1/m}\left(f,\ \overline{B}\right) = 0,$$

где ρ_m- отклонение f от класса рациональных функций $\{r_m:\ \deg r_m \leq m\}$. Верхний индекс ^{0} здесь указывает, в какой точке рассматривается росток. Аналогично можно определить класс R относительно любой точки $z^0 \in \mathbb{C}^n$ или же относительно любого неплюриполярного компакта $K \in \mathbb{C}^n$ потребуя быструю сходимость на K.

Класс R был введен А. А. Гончаром в работах [10]-[3]. Им же был доказан ряд фундаментальных свойств функций f из этого класса. Одним из замечательных свойств f является его однозначность в $\mathbb{C}^n$: естественная область существования W_f функции f принадлежит пространству $\mathbb{C}^n$.

Класс R имеет важное прикладное значение в многомерном комплексном анализе: в вопросах аналитического продолжения, в теории рациональной аппроксимации и др. (см. [4] -[6]). Этот класс является непосредственным аналогом, продолжением класса полиномов и целых функций.

Целью данной статьи является изучение свойства класса R во всем пространстве $\mathbb{C}^n$. Мы докажем, что функция $f \in R^0$, конечного порядка, определенная первоначально в окрестности точки $0 \in \mathbb{C}^n$, "псевдоаналитически" продолжается на все пространство $\mathbb{C}^n$.

Определение 1. *Мы будем говорить, что функция $f \in R^0$ имеет конечный порядок $t < \infty$, если $\rho_m^{1/m}\left(f,\ \bar{B}\,(0,r)\right)$ убывает как $\frac{1}{m^{1/t}}$. Порядок t легче всего вычислить по формуле*

$$t = \overline{\lim_{m\to\infty}}\, \frac{m\ln m}{-\ln\rho_m\left(f,\ \bar{B}\,(0,r)\right)}. \qquad (1)$$

Основным результатом работы является следующая

Теорема 1. *Если $f \in R^0$ имеет конечный порядок $t < \infty$, то она тонко - аналитически продолжается на всю плоскость $\mathbb{C}^n$, в том смысле, что существует возрастающая последовательность замкнутых множеств $F_j \subset F_{j+1} \subset \mathbb{C}^n$, $j = 1, 2, \ldots$, такая, что*

1. *множество $\mathbb{C}^n \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j$ является плюриполярным подмножеством $\mathbb{C}^n$;*

2. *сужение $f|_{F_j}$ допускает (быструю) рациональную аппроксимацию, т.е. $f \in R\,(F_j)$*

2. Доказательство основного результата

Доказательство Теоремы 1 проведем в нескольких пунктах.

1) Без нарушения общности мы предполагаем, что $f-$ голоморфна в круге $B\,(0,r) \subset \mathbb{C}^n$, где $r > 1$. По условию теоремы $f \in R^0$ имеет конечный порядок и (см. (1)) $t = \overline{\lim\limits_{m\to\infty}}\, \frac{m\ln m}{-\ln\rho_m} < \infty$, где $\rho_m = \rho_m\left(f,\ \bar{B}\right)$, $\bar{B} = \bar{B}\,(0,1)$. По определению ρ_m для любого числа $s > t$ существует последовательность рациональных функций $r_m\,(z) = \frac{p_m(z)}{q_m(z)}$, $m = 1, 2, \ldots$, такая, что $\|f - r_m\|_{\bar{B}}^{1/m} = \rho_m^{1/m} \le \frac{1}{m^{1/s}}$, $m \ge m'$. Берем подпоследовательность $m_k = k^l$, где $l > s$ достаточно большое целое число, которого мы определим позже. Представим функцию

$$f(z) = r_{m_1}(z) + \sum_{k=1}^{\infty}\left[r_{m_{k+1}}(z) - r_{m_k}(z)\right]. \qquad (2)$$

Ряд (2) равномерно быстро сходится в замкнутом круге $\bar{B}(0,1)$. Мы покажем, что ряд (2) по емкости сходится во всем пространстве $\mathbb{C}^n$.

2). Оценим разность $r_{m_{k+1}}(z) - r_{m_k}(z)$ для $m_k \geq m'$.

$$\begin{aligned}
&\left\|r_{m_{k+1}}(z) - r_{m_k}(z)\right\|_{\bar{B}} \leq \left\|r_{m_{k+1}}(z) - r_{m_{k+1}-1}(z)\right\|_{\bar{B}} + \\
&+ \left\|r_{m_{k+1}-1}(z) - r_{m_{k+1}-2}(z)\right\|_{\bar{B}} + ... + \|r_{m_k+1}(z) - r_{m_k}(z)\|_{\bar{B}} \leq \\
&\leq \left\|r_{m_{k+1}}(z) - f(z)\right\|_{\bar{B}} + 2\left\|r_{m_{k+1}-1}(z) - f(z)\right\|_{\bar{B}} + ... \\
&+2\|r_{m_k+1}(z) - f(z)\|_{\bar{B}} + \\
&+ \|r_{m_k}(z) - f(z)\|_{\bar{B}} \leq 2\left\{\frac{1}{[m_{k+1}]^{m_{k+1}/s}} + ... + \frac{1}{[m_k]^{m_k/s}}\right\}.
\end{aligned}$$

Для $m_k = k^l$ имеем

$$\frac{1}{[m_{k+1}]^{m_{k+1}/s}} + ... + \frac{1}{[m_k]^{m_k/s}} \leq A_0 \left[\frac{1}{k^l}\right]^{\frac{k^l}{s}}$$

где A_0- константа зависящая только от l. Следовательно,

$$\left\|r_{m_{k+1}}(z) - r_{m_k}(z)\right\|_{\bar{B}} \leq 2A_0 \left[\frac{1}{k^l}\right]^{\frac{k^l}{s}}, \ \ m_k \geq m'. \tag{3}$$

3). Оценим теперь разность $r_{m_{k+1}}(z) - r_{m_k}(z)$ на всем пространстве $\mathbb{C}^n$. Умножим числитель и знаменатель выражения $r_m(z) = \frac{p_m(z)}{q_m(z)}$ на константу так, чтобы максимальный по модулю коэффициент $q_m(z)$ был равен 1. Тогда

$$r_{m_{k+1}}(z) - r_{m_k}(z) = \frac{p_{m_{k+1}}(z)\, q_{m_k}(z) - p_{m_k}(z)\, q_{m_{k+1}}(z)}{q_{m_k}(z)\, q_{m_{k+1}}(z)}$$

и

$$\begin{gathered}
\left\|p_{m_{k+1}}(z)\, q_{m_k}(z) - p_{m_k}(z)\, q_{m_{k+1}}(z)\right\|_{\bar{B}} \leq \\
\leq \left\|r_{m_{k+1}}(z) - r_{m_k}(z)\right\|_{\bar{B}} \cdot \left\|q_{m_k}(z)\, q_{m_{k+1}}(z)\right\|_{\bar{B}} \leq \\
\leq 4(2k)^l \left\|r_{m_{k+1}}(z) - r_{m_k}(z)\right\|_{\bar{B}}. \qquad (4)
\end{gathered}$$

Отсюда

$$\left\|p_{m_{k+1}}(z)\,q_{m_k}(z)-p_{m_k}(z)\,q_{m_{k+1}}(z)\right\|_{\bar{B}}\le A_1\left[\frac{1}{k^l}\right]^{\frac{k^l}{s}},\ m_k\ge m', \qquad (5)$$

где $A_1=8(2k)^l A_0$. Теперь воспользуемся неравенством Бернштейна - Уолша, что для любого полинома $p(z)$ имеет место неравенство

$$|p(z)|\le\|p(z)\|_{\bar{B}}\cdot|z|^{\deg p},\ \ z\in\mathbb{C}^n.$$

Из него следует, что

$$\left|p_{m_{k+1}}(z)\,q_{m_k}(z)-p_{m_k}(z)\,q_{m_{k+1}}(z)\right|\le A_1\left[\frac{1}{k^l}\right]^{\frac{k^l}{s}}\cdot|z|^{d_k},\ \ z\in\mathbb{C}^n,$$

где $d_k=m_k+m_{k+1}=k^l+(k+1)^l$. Отсюда

$$\left|r_{m_{k+1}}(z)-r_{m_k}(z)\right|\le$$

$$\le A_1\left[\frac{1}{k^l}\right]^{\frac{k^l}{s}}\cdot|z|^{d_k}\,\frac{1}{\left|q_{m_k}(z)\,q_{m_{k+1}}(z)\right|},\ \ z\in\mathbb{C}^n,\ \ m_k\ge m'. \qquad (6)$$

4). Положим

$$Q_k=\left\{z\in\mathbb{C}^n:\ \ \left|q_{m_k}(z)\,q_{m_{k+1}}(z)\right|^{1/d_k}<\frac{1}{k^2}\right\}.$$

Для шара $B=B(0,R)$, $R>1$, если обозначим $Q_{k,B}=Q_k\bigcap B$, то емкость конденсатора (см. например, [7]) $C(Q_{k,B})=C(Q_{k,B},\ B)\le\frac{A_2}{k^2}$, где A_2- константа зависящая только от R. Из счетной субаддитивности $C-$ емкости последовательность $C\left(\bigcup\limits_{k\ge N}Q_{k,D}\right)\to 0$, при $N\to\infty$. Следовательно, множества $\bigcap\limits_{N=1}^{\infty}\bigcup\limits_{j\ge N}Q_{k,D}$ и $E=\bigcap\limits_{N=1}^{\infty}\bigcup\limits_{j\ge N}Q_k$ являются плюриполярными множествами.

Если точка $z^0 \notin \bigcup\limits_{j\geq N} Q_k$, то в этой точке

$$\left|q_{m_k}\left(z^0\right) q_{m_{k+1}}\left(z^0\right)\right|^{1/d_k} \geq \frac{1}{k^2}, \;\; k \geq N,$$

и согласно (6)

$$\left|r_{m_{k+1}}\left(z^0\right) - r_{m_k}\left(z^0\right)\right| \leq A_1 \left[\frac{1}{k^l}\right]^{\frac{k^l}{s}} \cdot \left|z^0\right|^{d_k} k^{2d_k} =$$

$$= A_1 k^{\left[2d_k - \frac{l}{s}k^l\right]} \cdot \left|z^0\right|^{d_k}, \;\; k \geq N. \tag{7}$$

Так как $d_k = k^l + (k+1)^l$, то

$$2d_k - \frac{l}{s}k^l = \left\{2\left[1 + \left(1 + \frac{1}{k}\right)^l\right] - \frac{l}{s}\right\} k^l.$$

Если берем $\frac{l}{s} \geq 7$, то $2d_k - \frac{l}{s}k^l \leq -3k^l$ для достаточно больших $k \geq k_0$. Отсюда,

$$\left|r_{m_{k+1}}\left(z^0\right) - r_{m_k}\left(z^0\right)\right| \leq A_1 k^{-3k^l} \left|z^0\right|^{d_k}, \quad k \geq \max\left\{k_0, N\right\}, \;\; m_k \geq m'. \tag{8}$$

Заметим, что

$$\left|r_{m_{k+1}}\left(z^0\right) - r_{m_k}\left(z^0\right)\right|^{1/d_k} \leq A_1^{1/d_k} k^{-3\frac{k^l}{d_k}} \left|z^0\right|, \quad k \geq \max\left\{k_0, N\right\}, \;\; m_k \geq m'.$$

Так как при $k \to \infty$

$$A_1^{1/d_k} = \left[8(2k)^l A_0\right]^{\frac{1}{k^l + (k+1)^l}} \to 1, \frac{k^l}{d_k} = \frac{k^l}{k^l + (k+1)^l} \to \frac{1}{2},$$

то

$$\left|r_{m_{k+1}}\left(z^0\right) - r_{m_k}\left(z^0\right)\right|^{1/d_k} < \frac{\left|z^0\right|}{k}, \quad k \geq k\left(z^0\right).$$

Отметим, что на множестве $\bar{B} \setminus \bigcup\limits_{j\geq N} Q_j$ это неравенство выполняется равномерно, т.е. существует целое число $k_0 \in \mathrm{N}$ такое, что

$$\left|r_{m_{k+1}}(z) - r_{m_k}(z)\right|^{1/d_k} < \frac{R}{k}, \quad k \geq k_0,\ z \in \bar{B}\setminus \bigcup_{j\geq N} Q_j\,. \tag{9}$$

5). Согласно (9) при фиксированном $N \in \mathrm{N}$ существует $k_0 > N$ такое, что на компакте $F_N = \bar{B}(0,N)\setminus \bigcup\limits_{j\geq N} Q_j$ имеет место равномерная оценка

$$\left|r_{m_k}(z) - \tilde{f}(z)\right| = \left|\sum_{t\geq k}\left(r_{m_{t+1}}(z) - r_{m_t}(z)\right)\right| \leq$$
$$\leq \sum_{t\geq k}\left|r_{m_{t+1}}(z) - r_{m_t}(z)\right| \leq \sum_{t\geq k}\left(\tfrac{N}{t}\right)^{d_t} \approx \left(\tfrac{N}{k}\right)^{d_k},\ z \in F_N,\ k \geq k_0. \tag{10}$$

Отметим, что дополнение $\mathbb{C}^n\setminus F$, где $F = \bigcup\limits_{N=1}^{\infty} F_N$ является плюриполярным множеством. Кроме того, согласно (10) $\lim\limits_{k\to\infty}\left\|r_{m_k}(z) - \tilde{f}(z)\right\|_{F_N} = 0$. Это означает, что $\tilde{f}|_{F_N} \in R(F_N)$ и $\tilde{f}(z)$ −тонко аналитична. Теорема доказана.

Теорема 2. *Последовательность рациональных функций* $\{r_m(z)\}$ *из Теоремы 1 всюду на пространстве* $\mathbb{C}^n$ *по емкости быстро сходится к тонко - аналитической функции* $\tilde{f}$:

$$\lim_{m\to\infty} C\left\{z \in B(0,R):\ \ |r_m(z) - f(z)|^{1/m} > \varepsilon\right\} = 0,\ \forall\varepsilon > 0,\ R > 0.$$

Доказательство. Фиксируем целое число $l \geq 7s$ и рассмотрим подпоследовательность $m_k = k^l$. Тогда как показано в доказательстве Теоремы 2 сумма ряда (2) $\tilde{f}(z) = r_{m_1}(z) + \sum_{k=1}^{\infty}\left[r_{m_{k+1}}(z) - r_{m_k}(z)\right]$ представляет собой тонко - аналитическую функцию на пространстве $\mathbb{C}^n$, причем существует типа F_σ множество $F = \bigcup\limits_{N=1}^{\infty} F_N$ такое, что $F_N \subset F_{N+1}$, $\mathbb{C}^n\setminus F-$ плюриполярное и, согласно (10) при фиксированном $N \in \mathrm{N}$ существует $k_0 > N$ такое, что на множестве F_R имеет место равномерная оценка

$$\left|r_{m_k}(z) - \tilde{f}(z)\right| \leq A_3 \cdot \left(\frac{N}{k}\right)^{d_k},\ \ z \in F_N,\ k \geq k_0,\ A_3 - const.$$

Оценим разность $\left|r_m(z)-\tilde{f}(z)\right|$ для $m_k\le m<m_{k+1},\ \ z\in F_N,\ k\ge k_0$. Имеем

$$\begin{aligned}&\left|r_m(z)-\tilde{f}(z)\right|\le\left|r_{m_k}(z)-\tilde{f}(z)\right|+\left|r_m(z)-r_{m_k}(z)\right|\le\\&\le\ A_3\cdot\left(\tfrac{R}{k}\right)^{d_k}+\left|r_m(z)-r_{m_k}(z)\right|,\end{aligned}\tag{11}$$

где

$$r_m(z)-r_{m_k}(z)=\frac{p_m(z)\,q_{m_k}(z)-p_{m_k}(z)\,q_m(z)}{q_m(z)\,q_{m_k}(z)}$$

В единичном шаре $B=B(0,1)$ норма полинома степени $d_k=m_k+m<2m_{k+1}$ допускает оценку

$$\left\|p_m(z)\,q_{m_k}(z)-p_{m_k}(z)\,q_m(z)\right\|_{\bar B}\le\left\|r_m(z)-r_{m_k}(z)\right\|_{\bar B}\cdot\left\|q_m(z)\,q_{m_k}(z)\right\|_{\bar B}.$$

Так как $\left\|q_m(z)\right\|_{\bar B}\le m+1$, то

$$\left\|p_m(z)\,q_{m_k}(z)-p_{m_k}(z)\,q_m(z)\right\|_{\bar B}\le A_1\left[\frac{1}{k^l}\right]^{\frac{k^l}{s}},\ m_k\ge m',\ \ A_1=2\left(k^l+1\right)(m+1).$$

Опять из неравенства Бернштейна-Уолша

$$\left|p_m(z)\,q_{m_k}(z)-p_{m_k}(z)\,q_m(z)\right|\le A_1\left[\frac{1}{k^l}\right]^{\frac{k^l}{s}}\cdot|z|^{d_k},\ \ z\in\mathbb{C}^n,$$

$$\left|r_m(z)-r_{m_k}(z)\right|\le A_1\left[\frac{1}{k^l}\right]^{\frac{k^l}{s}}\cdot|z|^{d_k}\,\frac{1}{\left|q_m(z)\,q_{m_k}(z)\right|},\ \ z\in\mathbb{C}^n,\ \ m_k\ge m'.\tag{12}$$

Как в Теореме 1 берем открытое множество

$$Q_{k,m}=\left\{z\in\mathbb{C}^n:\ \ \left|q_m(z)\,q_{m_k}(z)\right|^{1/d_k}<\frac{1}{k}\right\},$$

емкость пересечения $Q_{k,m}\bigcap B(0,N)$ с фиксированным шаром $B(0,N)$ которого оценивается как

$$C\left(Q_{k,m}\bigcap B(0,N)\right)=C\left(Q_{k,m}\bigcap B(0,N),\ B(0,N)\right)\le\frac{A_2}{k}\tag{13}$$

где константа A_2- зависит только от N. Таким образом, согласно (12)

$$|r_m(z) - r_{m_k}(z)| \le A_2 \left[\frac{1}{k^l}\right]^{\frac{k^l}{s}} \cdot N^{d_k} k^{d_k}, \ \ z \in B(0,N)/Q_{k,m}, \ \ m_k \ge m'.$$

Объединяя это с (11) получим оценку

$$\left|r_m(z) - \tilde{f}(z)\right| \le \ A_3 \cdot \left(\frac{N}{k}\right)^{d_k} + A_2 \left[\frac{1}{k^l}\right]^{\frac{k^l}{s}} \cdot N^{d_k} k^{d_k}, \ \ z \in F_N/Q_{k,m}, \ \ m_k \ge m',$$

правая часть которой для больших $k \ge k_0, \ m_k \le m < m_{k+1}$ допускает оценку

$$A_3 \cdot \left(\frac{N}{k}\right)^{d_k} + A_2 \left[\frac{1}{k^l}\right]^{\frac{k^l}{s}} \cdot N^{d_k} k^{d_k} \le A_4 \cdot N^{d_k} \cdot k^{-d_k}, \ \ z \in F_N/Q_{k,m}, \ \ A_4 - const.$$

Следовательно, $\left|r_m(z) - \tilde{f}(z)\right| \le \ A_4 \cdot N^{d_k} \cdot k^{-d_k}, \ \ z \in F_N/Q_{k,m}$. Так как $d_k = m + (k+1)^l$ и $k^l \le m < (k+1)^l$, и емкость множества

$$B(0,N) \setminus [F_N \backslash Q_{k,m}] = [B(0,N) \backslash F_N] \bigcup \left[B(0,N) \bigcap Q_{k,m}\right]$$

не превосходит величины

$$C(B(0,N) \backslash F_N) + C\left(B(0,N) \bigcap Q_{k,m}\right) \le \delta(N) + \frac{A_2}{k},$$

где $\delta(N) \to 0$ при $N \to \infty$. Отсюда мы получаем, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{m \to \infty} C\left\{z \in B(0,N) : \ \ |r_m(z) - f(z)|^{1/m} > \varepsilon\right\} \le \delta(N)$$

и так как величину $\delta(N)$ можно сделать сколь угодно маленькой, то это означает сходимость $\{r_m(z)\}$ по емкости к $f(z)$. Теорема доказана.

Следствие. Если функция $f(z) \in R^0$ и имеет конечный порядок, то она определяет на $\mathbb{C}^n$ единственную тонко аналитическую функцию $\tilde{f}(z)$. Другими словами, если последовательности рациональных функций $\left\{r_m^1(z)\right\}$ и $\left\{r_m^2(z)\right\}$ быстро сходятся в окрестности нуля к функции $f(z)$, со скоростью конечного порядка, то определяемые ими тонко-аналитические функции $\tilde{f}_1(z), \ \tilde{f}_2(z)$ совпадают почти всюду по емкости на $\mathbb{C}^n$.

Замечание Как видно из доказательства Теорем 1 и 2 от функции f можно потребовать, что она определена лишь на некотором неплюриполярном компакте $K \subset \mathbb{C}^n$ и порядок функции $\rho_m^{1/m}(f,\ K)$ – конечный, т.е.

$$t = \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{m\ln m}{-\ln\rho_m(f,\ K)} < \infty.$$

Тогда f единственным образом тонко-аналитически продолжается на все пространство $\mathbb{C}^n$: существует тонко-аналитическая на $\mathbb{C}^n$ функция $\tilde{f}$, такая что $\tilde{f}|_K \equiv f$. Более того, существует последовательность рациональных функций $\{r_m(z)\}$, сходящийся быстро по емкости всюду на $\mathbb{C}^n$ к функции $\tilde{f}$, причем эта сходимость будет такого же порядка t, что и порядок первоначально заданной функции.

Литература.

1. Левин Б.Я., Распределение корней целых функций. М., ГИТТЛ,1956.

2. Брело М., Основы классической теории потенциала. М., ИЛ, 1964.

3. Гончар А.А. Локальное условие однозначности аналитических функций. Мат. сб., Т.89(131), (1972), 148-164.

4. Гончар А.А., О сходимости аппроксимаций Паде, Мат. сб., Т. 92 (134), (1973), 152-164.

5. Гончар А.А., Локальное условие однозначности аналитических функций нескольких переменных. Мат. сб., Т. 93 (135), (1974), 296-313.

6. Имомкулов С.А., О голоморфном продолжении функций, заданных на граничном пучке комплексных прямых. Известие РАН, Сер.мат., Т.69:2, (2005), 125-144.

7. Садуллаев А., Теория плюрипотенциала. Применения. Palmarium Akademic Publishing, 2012.

Ургенчский госуниверситет им.Ал-Хорезмий

Uzbek Mathematical
Journal, 2017,№1, pp.86-95

УДК 517. 946

Краевая задача для нагруженного уравнения гиперболического типа в специальной области

Исломов Б.И., Юнусов О.М.

Maqolada maxsus sohada yuklangan qismida izlayotgan funksiyaning izi qatnashgan giperbolik tipdagi tenglama uchun bitta chegaraviy masalaning bir qiymatli yechilishi isbotlangan.

In this paper unique solvability for the boundary value problem for a loading hyperbolic equation in special domain are proved.

1. Введение

Краевые задачи для нагруженных уравнений второго порядка гиперболического, параболического, гиперболо-параболичсского и эллиптико-параболического типов в односвязных областях исследованы в работах А.М.Нахушева[1], В.А.Елеева[2], В.М.Казиева[3], М.Х.Шханкова[4], А.Х.Аттаева[5], М.Т.Дженалиева[6], К.У.Хубиева[7], Б.Исломова и Д.М.Курьязова[8], М.И.Рамазанова [9], Б.Исломова и У.И.Болтаевой[10], К.Б. Сабитова и Е.П. Мелишевой[11],

Известно, что многие задачи математической биологии[12], биологии[13], медицины, а также генетики, иммунологии сводятся к краевым задачам для нагруженных дифференциальных уравнений с частными производными второго и третьего порядков.

Заметим, что краевые задачи для нагруженных уравнений гиперболического и эллиптического типа второго порядка, когда нагруженная часть содержит след или производную от искомой функции изучены сравнительно мало. Отметим работы А.В.Бородина[14], Б.Исломова и Д.М.Курьязова [15]. Это связано, прежде всего, с отсутствием представления общего решения для таких уравнений; с другой стороны, такие задачи сводятся к малоизученным интегральным уравнениям со сдвигом.

Настоящая работа посвящена исследованию краевой задаче для нагруженного уравнения гиперболического типа второго порядка в специальной области.

2. Постановка задачи A_1

Рассмотрим уравнение

$$u_{xx} - u_{yy} + \mu\, u(x,0) = 0, \tag{1}$$

в области Ω , ограниченной отрезками A_jB_j $(j = 1,2)$ оси Ox и при $y < 0$ характеристиками уравнения (1), выходящими из точек $A_j\left((-1)^{j-1};\ 0\right)$ и $B_j\left((-1)^{j-1}q;0\right)$, пересекающимися в точках $C_1\,(0\,;-1)$ и $C_2\,(0\,;-q)$, $0 < q < 1$. Здесь μ – произвольное действительное число.

Введем следующие обозначения: $I = \{(x,y):\ \ x = 0,\ \ \ -q < y < -1\}$,

$$J_1 = \{(x,y) : q < x < 1,\ y = 0\}\,, \quad J_2 = \{(x,y) : -1 < x < -q,\ y = 0\}\,,$$

$$A_jD_j:\ \ x + (-1)^{j-1}y = (-1)^{j-1}, \qquad A_jE_j\ \ :\ \ x + (-1)^{j-1}y = (-1)^{j-1},$$

$$B_jD_j:\ \ x + (-1)^{j-1}y = (-1)^{j-1}q, \quad C_2E_j\ \ :\ \ x + (-1)^{j-1}y = (-1)^{j}q,$$

где $D_j,\ E_j \in A_jC_1,\ (j = 1,2)$. Через Ω_j и Ω_{j+2}, Ω_5 обозначим характеристические треугольник $A_jB_jD_j$, и четырехугольники $B_jC_2E_jD_j$, $C_2E_1C_1E_2$ соответственно. $\Omega_{5j} = \Omega_5 \cap \left\{(-1)^j x < 0,\ y < 0\right\}$.

Задача A_1**.** Требуется найти функцию $u\,(x,y)$, обладающую следующими свойствами:

1) $u\,(x,y) \in C\left(\overline{\Omega}\right) \cap C^2\left(\Omega_j \cup \Omega_{j+2} \cup \Omega_{5j}\right);$

2) $u(x,y)$ является регулярным решением уравнения (1) на множествах $\Omega_j \cup \Omega_{j+2} \cup \Omega_{5j}$ $(j = 1,2)$;

3) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям:

$$u_y(x,y)|_{A_jB_j} = \nu_j\,(x)\,, \qquad (x,0) \in J_j, \tag{2_j}$$

$$u(x,y)|_{A_jD_j} = \varphi_j(x), \qquad (1+q)/2 \leqslant |x| \leqslant 1, \tag{3_j}$$

$$u(x,y)|_{B_jC_2} = \psi_j(x), \qquad 0 \leqslant |x| \leqslant q, \tag{4_j}$$

где $\nu_j\,(x)\,, \varphi_j(x), \psi_j(x)$– заданные функции, причем $\psi_1(0) = \psi_2(0)$,

$$\varphi_j(x) \in C\left((1+q)/2 \leqslant |x| \leqslant 1\right) \cap C^2\left((1+q)/2 < |x| < 1\right), \tag{5_j}$$

$$\psi_j(x) \in C\left(0 \leqslant |x| \leqslant q\right) \cap C^2\left(0 < |x| < q\right), \tag{6_j}$$

$$\nu_j(x) \in C^1(J_j), \tag{7_j}$$

и функции $\nu_j(x)$ могут иметь особенность порядка меньше единицы на концах интервала $J_j,\ \ (j=1,2)$, здесь $x \geqslant 0$ при $j=1$, $x \leqslant 0$ при $j=2$.

3. Исследование аналог задачи Коши - Гурса для уравнения (1)

Определение 1. Регулярным решением уравнения (1) в области Ω_j называется функция, $u_j(x,y) \in C(\overline{\Omega}_j) \cap C^1(\Omega \cup J_j) \cap C^2(\Omega_j)$, удовлетворяющая уравнению (1) и такая, что функция $u_{j\,y}(x,0)$ может обращаться в бесконечность порядка меньше единицы на концах интервала $J_j,\ \ (j=1,2)$.

Аналог задачи Коши-Гурса $(AK\Gamma_j)$. Найти регулярное решение уравнения (1) в области $\Omega_j,$ удовлетворяющее краевым условиям (2_j) и (3_j).

Исследуем задачу Коши–Гурса. Любое регулярное решение уравнения (1) может быть представимо в виде [15], [16]:

$$u_j\left(x,y\right)=\upsilon_j\left(x,y\right)+\omega_j\left(x\right) \tag{9_j}$$

где $\upsilon_j\left(x,y\right)$ регулярные решения уравнения

$$L\upsilon_j \equiv \upsilon_{jxx}-\upsilon_{jyy}=0, \quad (x,y)\in\Omega_j, \quad (j=1,2), \tag{10_j}$$

а $\omega_j\left(x\right)\ \ (j=1,2)$ произвольные дважды непрерывно дифференцируемые решения уравнения

$$\omega_j''\left(x\right)+\mu\,\omega_j\left(x\right)=-\mu\,\upsilon_j\left(x,0\right), \quad (x,0)\in\overline{J}_j. \tag{11_j}$$

Учитывая, что функция $ax+b$ является решением уравнения (10_j), произвольные функции $\omega_j\left(x\right)\ \ (j=1,2)$ можно починить условиям

$$\omega_j\left((-1)^{j+1}\right)=\omega_j'\left((-1)^{j+1}\right)=0, \tag{12_j}$$

Решение задачи Коши (11_j), (12_j) имеет вид:

$$\omega_j\left(x\right)=\int\limits_{x_j}^{x}K\left(x,t;\mu\right)\tau_j\left(t\right)dt, \quad (x,0)\in\overline{J}_j, \tag{13_j}$$

$$\text{где } x_j=(-1)^{j+1}, \ \ \tau_j(x)=\upsilon_j\left(x,0\right), \quad (x,0)\in\overline{J}_j, \quad (j=1,2), \tag{14_j}$$

$$K\left(x,\ t,\ \mu\right)=\begin{cases}\sqrt{\mu}\ sh\sqrt{\mu}\left(t-x\right), & \mu>0,\\ \sqrt{-\mu}\ sin\sqrt{-\mu}\left(t-x\right), & \mu<0.\end{cases} \tag{15}$$

Если $\tau_j(x) \in C(\overline{J}_j) \cap C^2(J_j)$, то из (13_j) заключаем, что $\omega_j(x) \in C(\overline{J}_j) \cap C^2(J_j)$.

Пусть $j = 1$. Тогда в силу (1), (2_1), (3_1), (9_1) задача $AK\Gamma_1$ сведется к задача $AK\Gamma_1^*$ для уравнения (10_1) с краевыми условиями

$$\upsilon_1 y(x,y)|_{A_1B_1} = \nu_1 (x)\,, \qquad (x,0) \in J_1, \tag{16_1}$$

$$\upsilon_1(x,y)|_{A_1D_1} = \varphi_1(x) - \omega_1(x), \qquad \frac{1+q}{2} \leqslant x \leqslant 1, \tag{17_1}$$

здесь $\omega_1 (x)$ - определяются из (13_1).

В силу решения задачи Коши [17] с начальными данными (14_1) и (16_1) для уравнения (10_1) в области Ω_1 с учетом (17_1) и $\tau_1 (1) = 0$ имеем

$$\upsilon_1 (x,y) = \frac{1}{2} \left[\tau_1 (x+y) + \tau_1 (x-y)\right] + \frac{1}{2} \int\limits_{x-y}^{x+y} \nu_1 (t)\, dt, \tag{18_1}$$

где
$$\tau_1 (x) = \int\limits_x^1 \nu_1 (t)\, dt + 2 \left[\varphi_1 \left(\frac{x+1}{2}\right) - \omega_1 \left(\frac{x+1}{2}\right)\right]. \tag{19_1}$$

В силу (5_1), (7_1) с учетом класс функции $\omega_1(x)$ из (19_1) следует, что $\tau_1(x) \in C(\overline{J}_1) \cap C^2(J_1)$.

Формула (18_1) является решением задачи $AK\Gamma_1^*$ для уравнения (10_1) в области Ω_1. Следовательно, в силу (9_1) решение задачи $AK\Gamma_1$ для уравнения (1) в области Ω_1 существует, единственно и представимо в виде

$$u_1 (x,y) = \frac{1}{2} \left[\tau_1 (x+y) + \tau_1 (x-y)\right] + \frac{1}{2} \int\limits_{x-y}^{x+y} \nu_1 (t)\, dt + \omega_1(x), \tag{20_1}$$

здесь $\omega_1(x)$ и $\tau_1(x)$ - определяется соответственно из (13_1) и (19_1).

Аналогично решая задачи $AK\Gamma_2$ для уравнения (1) в области Ω_2 ее решение можно представить в виде:

$$u_2 (x,y) = \frac{1}{2} \left[\tau_2 (x+y) + \tau_2 (x-y)\right] + \frac{1}{2} \int\limits_{x-y}^{x+y} \nu_2 (t)\, dt + \omega_2(x), \tag{20_2}$$

где
$$\tau_2 (x) = \int\limits_{-1}^x \nu_1 (t)\, dt + 2 \left[\varphi_2 \left(\frac{x-1}{2}\right) - \omega_2 \left(\frac{x-1}{2}\right)\right], \tag{19_2}$$

и принадлежит классу $\tau_2(x) \in C(\overline{J}_2) \cap \cap C^2(J_2)$, а $\omega_2(x)$ определяется из (13_2).

4. Исследование аналог задачи Гурса для уравнения (1)

Определение 2. Регулярным решением уравнения (1) в области Ω_{j+2} $(j=1,2)$ называется функция, $u_j(x,y)\in C(\overline{\Omega}_{j+2})\cap C^2(\Omega_{j+2})$, удовлетворяющая уравнению (1).

Задача Γ_j $(j=1,2)$. Найти регулярное решение уравнения (1) в области Ω_{j+2}, удовлетворяющее краевым условиям (4_j) и

$$u_j(x,y)|_{B_jD_j}=g_j(x),\qquad q\leqslant(-1)^{j-1}x\leqslant\frac{1+q}{2},\tag{21_j}$$

где $g_j(x)$ $(j=1,2)-$ определяются из (20_j) и принадлежит классу

$$g_j(x)\in C\left(q\leqslant|x|\leqslant\frac{1+q}{2}\right)\cap C^2\left(q<|x|<\frac{1+q}{2}\right),$$

причем

$$g_j(q)=\psi_j(q).\tag{22_j}$$

Она имеет вид:

$$g_j(x)\ =\frac{1}{2}\left[\tau_j\left(x-(-1)^{j-1}x+q\right)+\tau_j\left(x+(-1)^{j-1}x-q\right)\right]+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{x+(-1)^{j-1}x-q}^{x-(-1)^{j-1}x+q}\nu_j\left(t\right)dt+\omega_j(x),\tag{23_j}$$

здесь $\omega_j(x)$, $\tau_j(x)$, $\nu_j(x)$ $-$ известные функции и они определяются соответственно из (13_j), (19_j), (2_j).

Исследуем задачу Γ_j $(j=1,2)$**.** Согласно (9_j) общие решение уравнения (1) в области Ω_{j+2} имеет вид [15], [17]:

$$u_j\left(x,y\right)=F_j\left(x+y\right)+G_j\left(x-y\right)+\omega_j\left(x\right),\tag{24_j}$$

где F_j, G_j $-$ произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции, а известная функция $\omega_j(x)$ определяется из $(13_j$.

Подставляя (24_j) в условия (4_j) и (21_j), находим

$$G_j\left(x\right)=g_j\left(\frac{x-(-1)^jq}{2}\right)-\omega_j\left(\frac{x-(-1)^jq}{2}\right)-F_j\left((-1)^{j+1}q\right),\tag{25_j}$$

$$F_j\left(x\right)=\psi_j\left(\frac{x-(-1)^j q}{2}\right)-\omega_j\left(\frac{x-(-1)^j q}{2}\right)-G_j\left((-1)^{j+1}q\right). \quad (26_j)$$

В силу (25_j), (26_j) с учетом (22_j) из (24_j) получим решение задачи Γ_j $(j=1,2)$ в виде

$$u_j\left(x,y\right)=\omega_j\left(x\right)+g_j\left(\frac{x-y-(-1)^j q}{2}\right)-\omega_j\left(\frac{x-y-(-1)^j q}{2}\right)+$$

$$+\psi_2\left(\frac{x+y-(-1)^j q}{2}\right)-\omega_2\left(\frac{x+y-(-1)^j q}{2}\right)-$$

$$-\psi_j\left(q\right)+\omega_j\left((-1)^{j+1}q\right). \quad (27_j)$$

Учитывая свойства функций $\omega_j(x)$, $g_j(x)$, $\psi_j(x)$, $\tau_j(x)$, $\nu_j(x)$ из (27_j) следует, что решение задачи Γ_j $(j=1,2)$ существует, единственно и принадлежит классу $u_j(x,y)\in C(\overline{\Omega}_{j+2})\cap C^2(\Omega_{j+2})$.

Задача Γ_3. Найти функцию $u(x,y)$ со следующими свойствами:

1) $u(x,y)\in C(\overline{\Omega}_5)\cap C^1(\Omega_5)$, причем функция $u_x(0,y)$ может обращаться в бесконечность порядка меньше единицы на концах интервала I;

2) $u(x,y)$ - дважды непрерывно дифференцируемое решение уравнения (1) в области Ω_{5j} $(j=1,2)$;

3) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u(x,y)|_{C_2E_1}=h_1(y),\qquad -q\leqslant y\leqslant -\frac{1+q}{2}, \quad (28_1)$$

$$u(x,y)|_{C_2E_2}=h_2(y),\qquad -q\leqslant y\leqslant -\frac{1+q}{2}, \quad (28_2)$$

где $h_j(y)$ $(j=1,2)-$ определяются из

$$h_1(y)=\omega_1\left(-y-q\right)+g_1\left(-y\right)-\omega_1\left(-y\right)-\psi_1\left(q\right)+\omega_1\left(q\right)+\psi_1\left(0\right)-\omega_1\left(0\right),$$

$$h_2(y)=\omega_2\left(y+q\right)+g_2\left(0\right)-\omega_2\left(0\right)-\psi_2\left(q\right)+\omega_2\left(-q\right)+\psi_2(y)-\omega_2(y)$$

и принадлежит классу

$$h_j(y)\in C\left(-q\leqslant x\leqslant -\frac{1+q}{2}\right)\cap C^2\left(-q< x< -\frac{1+q}{2}\right), \quad (29_j)$$

причем

$$h_1(-q) = h_2(-q) = \psi_1(0) = \psi_2(0),$$

здесь $\omega_j(t)$, $g_j(t)$, $\psi_j(t)$ – известные функции и они определяются соответственно из (13_j), (23_j), (4_j).

Для исследование задачи Γ_3 важную роль играют следующие задачи:

Задача Γ_{3j} $(j = 1, 2)$. Найти в области Ω_{5j} решение $u_j(x,y) \in C(\overline{\Omega}_{5j}) \cap C^1(\Omega_{5j} \cup I) \cap C^2(\Omega_{5j})$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям (28_j) и

$$u_j(0,y) = \tau_3(y), \qquad (0,y) \in I, \tag{30_j}$$

где $\tau_3(y)$ - заданная функция, причем

$$\tau_3(y) \in C\left(\overline{I}\right) \cap C^2(I), \quad \tau_3(-q) = h_1(-q) = h_2(-q). \tag{31}$$

Исследуем задачу Γ_{3j} $(j = 1, 2)$**.** Пусть $j = 1$. Тогда подставляя (24_1) в (28_1) и (30_1) находим неизвестные функции:

$$G_1(-y) = h_1\left(\frac{y-q}{2}\right) - \omega_1\left(\frac{-y-q}{2}\right) - F_1(-q),$$

$$F_1(y) = \tau_3(y) - h_1\left(\frac{y-q}{2}\right) + \omega_1\left(\frac{-y-q}{2}\right) + F_1(-q) - \omega_1(0).$$

Отсюда и из (24_1) получим решение задачи Γ_{31} для уравнения (1) в области Ω_{51} в виде

$$u_1(x,y) = \tau_3(x+y) - h_1\left(\frac{x+y-q}{2}\right) + \omega_1\left(-\frac{x+y+q}{2}\right) - \omega_1(0) +$$

$$+h_1\left(\frac{y-x-q}{2}\right) - \omega_1\left(-\frac{y-x+q}{2}\right) + \omega_1(x), \tag{32_1}$$

где $\omega_1(x)$ - определяется из (13_1).

Аналогично решая задачи Γ_{32} для уравнения (1) в области Ω_{52} ее решение представим в виде:

$$u_2(x,y) = h_2\left(\frac{x+y-q}{2}\right) - \omega_2\left(\frac{x+y+q}{2}\right) +$$

$$+\tau_3(y-x)-\omega_2\,(0)-h_2\left(\frac{y-x-q}{2}\right)+\omega_2\left(\frac{y-x+q}{2}\right)+\omega_2\,(x)\,, \quad (32_2)$$

где $\omega_2(x)$ - определяется из (13_2).

В силу (29_j), (31) с учетом класс функции $\omega_j(x)$ из (32_j) заключаем, что решение задачи Γ_{3j} $(j=1,2)$ существует, единственно и принадлежит классу $u_j(x,y)\in C(\overline{\Omega}_{5j})\cap C^1(\Omega_{5j}\cup I)\cap C^2(\Omega_{5j})$.

Теперь переходим к исследованию задачу Γ_3**.** Дифференцируя (32_j) по x, затем, устремляя x к нулю, получим функциональное соотношение между $\nu_3(y)$ и $\tau_3(y)$, принесенное из области Ω_{5j} на I :

$$\nu_3(y)=(-1)^{j-1}\left[\tau'{}_3(y)-h'{}_j\left(\frac{y-q}{2}\right)\right]+\omega_j'\,(0)\,, \quad (j=1,2). \qquad (33_j)$$

Исключая из (33_1) и (33_2) функцию $\nu_3(y)$ с учетом (31) и условий склеивания (см. условия 1) задачи Γ_3) получим

$$\tau_3(y)=h_1(-q)+h_1\left(\frac{y-q}{2}\right)+h_2\left(\frac{y-q}{2}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\left[\omega'{}_2\,(0)-\omega'{}_1\,(0)\right](y+q), \qquad (34)$$

где $$\omega_j'\,(0)=-\int\limits_0^{(-1)^{j-1}}K'{}_x\,(0,t;\mu)\,\tau_j\,(t)\,dt, \qquad (35_j)$$

а $K_x'\,(0,\ t;\ \mu)$ — определяется из (15).

В силу (29_j), (35_j) с учетом классы функции $\omega_j(x)$ и $\tau_j\,(x)$ из (34) следует, что $\tau_3\,(y)\in C\left(\overline{I}\right)\cap C^2\,(I)$. Следовательно, после определения функцию $\tau_3(y)$ задача Γ_3 редуцируется к исследованию задач Γ_{31} и Γ_{32}, где $\tau_3(y)$ - определяется формулой (34).

5. Исследование задачи A_1 для уравнения (1)

Пусть $u(x,y)$ — решение задачи A_1 в области Ω с краевыми условиями (2_j), (3_j), (4_j) $(j=1,2)$, тогда пользуясь исследованием раздела 3-4 решение задачи A_1 в областях Ω_j, Ω_{j+2} и Ω_5 соответственно определим как решение задачи $AK\Gamma_j$, Γ_j, и Γ_3 для уравнения (1).

Следовательно, задача A_1 однозначно разрешима.

Литература

1. Нахушев А.М. *Нагруженные уравнения и их приложения.* // "Дифф. уравнения". -1983. -№1. -Т 19. -С. 86-94.

2. Казиев В.М. *Задача Гурса для одного нагруженного интегро-дифференциального уравнения.* // "Дифференц. уравнения". -1981. -Т. 17. - №2. - С. 313-319.

3. Елеев В.А. *О некоторых краевых задачах для смешанных нагруженных уравнений второго и третьего порядка.* // "Дифференц. уравнения". -1994. -Т. 30.- №2. -С. 230-237.

4. Шхануков М. Х. *Разностный метод решения одного нагруженного уравнения параболического типа.* // "Дифф. уравненияє. -1977. -Т. 13. - №1. -С. 163-167.

5. Аттаев А.Х.*Краевые задачи для нагруженного волнового уравнения.* // "Дифференциальные уравнения": Тез. докл. областного межвуз. семинара. 20-25 мая 1984г. -Куйбишев. -1984. -С.9-10.

6. Дженалиев Н.Т.*Об одной краевой задаче для линейного нагруженного параболического уравнения с нелокальными и граничными условиями.* // "Дифф. уравнения". -1991. -Т. 27. -№10. -С. 1925-1927.

7. Хубиев К.У. *Задача Геллерстедта для нагруженного уравнения смешанного типа с данными на непараллельных характеристиках.* // "Докл. Адыг. межд. акад. наук". -2008. - №1. -С.1-4.

8. Исломов Б., Курьязов Д.М.*Краевые задачи для смешанного нагруженного уравнения третьего порядка параболо-гиперболического типа.* // "Узбекский мат. журнал". -2000. - №2. -С. 29-35.

9. Рамазанов М.И. *О нелокальной задаче для нагруженного гиперболо-эллиптического типа в прямоугольной области.* // "Математический журнал". -2002. -Т.2. - №4. -С. 75-81.

10. Исломов Б., Балтаева У.И. *Краевые задачи для нагруженных дифференциальных уравнений гиперболического и смешанного типов третьего порядка.* // "Уфимский мат. журнал". -2011. -Т 3. -№3. -С.15-25.

11. Сабитов К.Б., Мелишева Е.П.*Задача Дирихле для нагруженного уравнения смешанного типа в прямоугольной области.* // "Известия вузов. Математика". -2013. -№7. -С. 62-76.

12. Нахушев А.М. *Уравнения математической биологии.* -М.: -Высшая школа. -1995. -301 с.

13. Нахушев А.М., Борисов В.Н. *Краевые задачи для нагруженных параболических уравнений и их приложения к прогнозу уровня грунтовых вод.* // "Дифференц. уравнения". -1977. -Т. 13. - №1. -С. 105-110.

14. Бородин А.Б. *Об одной оценке для эллиптических уравнений и ее приложении к нагруженным уравнениям.* // "Дифференц. уравнения". -1977. - Т.13. - №1. -С. 17-22.

15. Исломов Б., Курьязов Д.М. *Об одной краевой задаче для нагруженного уравнения второго порядка.* // "ДАН РУз". -1996. - №1-2. -С. 3-6.

16. Салахитдинов М.С. *Уравнения смешанного - составного типа.* -Т. -"Фан1974. -156 с.

17. Тихинов А.Н. Самарский А.А. *Уравнений математической физики.* -М.: -Наука. 1-977. -736с.

Национальный Университет Узбекистана
им. М. Улугбека,
Кокандский Педагогический Институт

Uzbek Mathematical
Journal, 2017, №1, pp.96-105

УДК 517.956.227

Задача Дирихле для трехмерного эллиптического уравнения с двумя сингулярными коэффициентами

Каримов К.Т.

Ushbu maqolada ikkita singulyar koeffitsientli uch o‘lchovli elliptik tenglama uchun silindrik sohada Dirixle masalasi spektral analiz metodi bilan tadqiq qilingan.

In this paper the Dirichlet problem for three-dimensional elliptic equation with two singular coefficients in studied in cylindrical domain by a method of spectral analysis.

Пусть $\Omega-$ трехмерная область ограниченная цилиндрической поверхностью $S_0 = \left\{(x, y, z): x^2 + y^2 = 1,\ x > 0, y > 0,\ 0 < z < \pi\right\}$, прямоугольниками

$$S_1 = \{(x, y, z):\ 0 < x < 1,\ y = 0,\ 0 < z < \pi\},$$

$$S_2 = \{(x, y, z):\ x = 0,\ 0 < y < 1,\ 0 < z < \pi\}$$

и двумя четвертями круга

$$S_3 = \left\{(x, y, z):\ z = 0,\ x^2 + y^2 < 1,\ x > 0,\ y > 0\right\},$$

$$S_4 = \left\{(x, y, z):\ z = \pi,\ x^2 + y^2 < 1,\ x > 0,\ y > 0\right\}.$$

Пусть далее $\bar{\sigma}_0 = \bar{S}_0 \cap \bar{S}_3$, $\overline{OA} = \bar{S}_1 \cap \bar{S}_3$, $\overline{OB} = \bar{S}_2 \cap \bar{S}_3$.

В области Ω рассмотрим трехмерное уравнение эллиптического типа

$$H_{\alpha,\beta}W \equiv W_{xx} + W_{yy} + W_{zz} + \frac{2\alpha}{x}W_x + \frac{2\beta}{y}W_y = 0, \tag{1}$$

где $W = W(x, y, z)$ −неизвестная функция, $0 < \alpha, \beta < 1/2$.

В работе [1], [2] для трехмерного уравнения смешанного типа (без сингулярных коэффициентов) в цилиндрической области методом спектрального анализа исследованы задачи Трикоми и Трикоми-Неймана соответственно. В работах [3], [4] и [5] для трехмерных уравнений эллиптического типа, с разными сингулярными коэффициентами, рассмотрены задачи на собственные значения в области, состоящей из различных частей шара. В работе [6], [7] для уравнения (1) исследованы задачи Дирихле и Дирихле-Неймана в четверти шара методом функции Грина. Спектральные свойства решений многих эллиптических задач для уравнения (1) в цилиндрической и шаровой области еще не исследованы. Поэтому в данной работе для уравнения (1) в четверти цилиндрической области рассмотрена задача Дирихле и исследована спектральные свойства решений поставленной задачи.

Задача D. Найти функцию $W(x,y,z) \in C\left(\bar{\Omega}\right) \cap C^2(\Omega)$, удовлетворяющую уравнению (1) и краевым условиям

$$W(x,y,z) = f(x,y,z), \quad (x,y,z) \in \bar{S}_0; \tag{2}$$

$$W(x,0,z) = 0, \quad (x,0,z) \in \bar{S}_1; \tag{3}$$

$$W(0,y,z) = 0, \quad (0,y,z) \in \bar{S}_2; \tag{4}$$

$$W(x,y,0) = 0, \quad (x,y,0) \in \bar{S}_3; \tag{5}$$

$$W(x,y,\pi) = 0, \quad (x,y,\pi) \in \bar{S}_4, \tag{6}$$

где $f-$заданная достаточно гладкая функция, причем $f|_{\partial S_0} = 0.$

Сначала решим задачу $\{(1), (3)-(6)\}$. С этой целю, разделив переменные по формуле $W(x,y,z) = u(x,y)Z(z)$ из уравнения и краевых условий (3)-(6), получим следующие задачи на собственные значения относительно функций $u(x,y)$ и $Z(z)$:

$$u(x,y) \in C\left(\bar{S}_3\right) \cap C^2(S_3), \tag{7}$$

$$u_{xx} + u_{yy} + \frac{2\alpha}{x}u_x + \frac{2\beta}{y}u_y + \lambda u = 0, \quad (x,y) \in S_3, \tag{8}$$

$$u(x,0) = 0, \quad (x,0) \in \overline{OA}, \tag{9}$$

$$u(0,y) = 0, \quad (0,y) \in \overline{OB}; \tag{10}$$

$$Z''(z) - \lambda Z(z) = 0, \quad 0 < z < \pi, \tag{11}$$

$$Z(0) = 0, \quad Z(\pi) = 0, \tag{12}$$

где $\lambda-$константа разделения.

Во-первых, построим собственные функций задачи $\{(11), (12)\}$. Если $\lambda \geq 0$, то задача $\{(11), (12)\}$ имеет только тривиальное решение. Общее решение уравнения (11) при $\lambda < 0$ имеет вид

$$Z(z) = c_1 \sin\left(\sqrt{-\lambda} z\right) + c_2 \cos\left(\sqrt{-\lambda} z\right), 0 < z < \pi,$$

где c_1 и c_2- произвольные постоянные.

Подставляя это решение к условию (12), получим

$$Z_n(z) = c_n \sin nz, \quad c_n = const \neq 0, \quad \lambda_n = -n^2, \ \ n = 1, 2, ...$$

Теперь перейдем к исследованию задачи $\{(7) - (10)\}$. Здесь тоже воспользуемся методом разделения переменных. Перейдем к полярной системе координат $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Тогда после разделения переменных $u(x, y) = R(r)\,\Phi(\varphi)$, получим две одномерные краевые задачи на собственные значения:

$$r^2 R''(r) + (1 + 2\alpha + 2\beta)\, rR'(r) - \left[(nr)^2 + \mu\right] R(r) = 0, \quad 0 < r < 1, \tag{13}$$

$$R(0) = 0, \quad |R(1)| < +\infty; \tag{14}$$

$$\Phi''(\varphi) + (2\beta ctg\varphi - 2\alpha tg\varphi)\,\Phi'(\varphi) + \mu\Phi(\varphi) = 0, \quad 0 < \varphi < \pi/2, \tag{15}$$

$$\Phi(0) = 0, \quad \Phi(\pi/2) = 0, \tag{16}$$

где $\mu-$константа разделения.

Произведя замену $R(r) = (\rho/n)^{-\alpha-\beta} M(\rho)$, где $\rho = nr$, из (13), получим уравнение Бесселя в следующем виде [8]:

$$\rho^2 M''(\rho) + \rho M'(\rho) - \left(\rho^2 + \omega^2\right) M(\rho) = 0, \tag{17}$$

где $\omega = \sqrt{(\alpha + \beta)^2 + \mu}$.

Принимая во внимание вид общего решения [8] уравнения (17) и введенные обозначения, получим общее решение уравнения (13):

$$R\left(r\right)=c_3r^{-\alpha-\beta}I_\omega\left(nr\right)+c_4r^{-\alpha-\beta}K_\omega\left(nr\right),0<r<1, \tag{18}$$

здесь c_3 и c_4- произвольные постоянные, $I_\omega(z)$ и $K_\omega(z)$ - модифицированные функции Бесселя порядка ω первого и третьего рода [8] соответственно.

Из (18) следует, что решение уравнения (13), удовлетворяющее первого из условий (14), существует при $\mathrm{Re}\,\omega>\alpha+\beta$ и оно, определяется равенством

$$R\left(r\right)=R_n\left(r\right)=c_3r^{-\alpha-\beta}I_\omega\left(nr\right). \tag{19}$$

Подставляя (19) к второму из условий (14) и пологая $c_3=c_n=\left[I_\omega\left(n\right)\right]^{-1}$, найдем решение задачи $\{(13)\,,\,(14)\}$ в виде

$$R_n\left(r\right)=r^{-\alpha-\beta}\frac{I_\omega\left(nr\right)}{I_\omega\left(n\right)},\quad n\in N.$$

Теперь будем исследовать задачу $\{(15)\,,\,(16)\}$. Произведя замену $t=\sin^2\varphi$ в уравнении (15), получим гипергеометрическое уравнение

$$t\left(1-t\right)\tilde{\Phi}''\left(t\right)+\left[\left(\beta+1/2\right)-\left(1+\alpha+\beta\right)t\right]\tilde{\Phi}'\left(t\right)+\left(\mu/4\right)\tilde{\Phi}\left(t\right)=0,$$

где $\tilde{\Phi}\left(t\right)=\Phi\left(\arcsin\sqrt{t}\right)$.

Пользуясь общим решением этого уравнения [9], находим общее решение уравнения (15) в виде

$$\Phi\left(\varphi\right)=c_5F\left(\frac{\alpha+\beta+\omega}{2},\frac{\alpha+\beta-\omega}{2};\frac{1}{2}+\beta;\sin^2\varphi\right)+$$

$$+c_6(\sin\varphi)^{1-2\beta}F\left(\frac{1+\alpha-\beta+\omega}{2},\frac{1+\alpha-\beta-\omega}{2};\frac{3}{2}-\beta;\sin^2\varphi\right), \tag{20}$$

где c_5 и c_6- произвольные постоянные, $F\left(...\right)-$гипергеометрическая функция Гаусса [9].

Удовлетворим функцию (20) условиям (16). Так как $\Phi\left(0\right)=0$, то $c_5=0$. Принимая во внимание это из условия $\Phi\left(\pi/2\right)=0$, получим

$$c_6F\left(\frac{1+\alpha-\beta+\omega}{2},\frac{1+\alpha-\beta-\omega}{2};\frac{3}{2}-\beta;1\right)=$$

$$= c_6 \frac{\Gamma\left(3/2-\beta\right)\Gamma\left(1/2-\alpha\right)}{\Gamma\left[1-\left(\alpha+\beta+\omega\right)/2\right]\Gamma\left[1-\left(\alpha+\beta-\omega\right)/2\right]} = 0$$

или в силу известного равенства $\Gamma\left(a\right)\Gamma\left(1-a\right) = \pi/\sin\left(a\pi\right)$, имеем

$$c_6 \frac{\Gamma\left(3/2-\beta\right)\Gamma\left(1/2-\alpha\right)\Gamma\left[\left(\alpha+\beta+\omega\right)/2\right]}{\pi\,\Gamma\left[1-\left(\alpha+\beta-\omega\right)/2\right]} \sin\frac{\pi\left(\alpha+\beta+\omega\right)}{2} = 0.$$

Отсюда, следует, что нетривиальные решения задачи $\{(15)\,,\,(16)\}$ существуют при $\sin\left[\pi\left(\alpha+\beta+\omega\right)/2\right] = 0$. Пользуясь формулой, дающей решение этого уравнения и $\omega > (\alpha+\beta)$, найдем

$$\omega = \omega_k = 2k - (\alpha+\beta)\,, \quad k \in N. \tag{21}$$

Следовательно, $\mu_k = \omega_k^2 - (\alpha+\beta)^2$, $k \in N$, (где ω_k- числа, определяемые равенством (21)), являются собственными значениями задачи $\{(15)\,,\,(16)\}$.

Полагая в (20) $\omega = \omega_k, \;\; c_6 = c_k, \;\; k \in N$, где $c_k \neq 0-$ произвольные постоянные, получим собственные функции задачи $\{(15)\,,\,(16)\}$, соответствующим собственным значениям μ_k :

$$\Phi_k\left(\varphi\right) = c_k (\sin\varphi)^{1-2\beta} \times$$

$$\times F\left(\frac{1+\alpha-\beta+\omega_k}{2}, \frac{1+\alpha-\beta-\omega_k}{2}; \frac{3}{2}-\beta; \sin^2\varphi\right), \quad k \in N. \tag{22}$$

Таким образом, функции

$$W_{nk}\left(x,y,z\right) = c_{nk}\sin\left(nz\right) r^{-\alpha-\beta} \frac{I_{\omega_k}\left(nr\right)}{I_{\omega_k}\left(n\right)} \times$$

$$\times(\sin\varphi)^{1-2\beta} F\left(\frac{1+\alpha-\beta+\omega_k}{2}, \frac{1+\alpha-\beta-\omega_k}{2}; \frac{3}{2}-\beta; \sin^2\varphi\right), \; n,k \in N,$$

определяют в области Ω решения уравнения (1), удовлетворяющие условиям $\{(3)-(6)\}$.

Теперь, решение задачи Дирихле в области Ω будем искать в виде суммы ряда

$$W\left(x,y,z\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} f_{nk}\sin\left(nz\right) \frac{I_{\omega_k}\left(nr\right)}{I_{\omega_k}\left(n\right)} r^{-\alpha-\beta} \times$$

$$\times(\sin\varphi)^{1-2\beta}F\left(\frac{1+\alpha-\beta+\omega_k}{2},\frac{1+\alpha-\beta-\omega_k}{2};\frac{3}{2}-\beta;\sin^2\varphi\right), \qquad (23)$$

где f_{nk}—неизвестные пока коэффициенты.

Удовлетворим функцию (23) краевому условию (2), тогда получим

$$f\left(r\cos\varphi,r\sin\varphi,z\right)\big|_{r=1}=\tilde{f}\left(\varphi,z\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}f_{nk}\sin\left(nz\right)\times$$

$$\times(\sin\varphi)^{1-2\beta}F\left(\frac{1+\alpha-\beta+\omega_k}{2},\frac{1+\alpha-\beta-\omega_k}{2};\frac{3}{2}-\beta;\sin^2\varphi\right)=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(nz\right)\Psi_n\left(\varphi\right). \qquad (24)$$

Коэффициенты f_{nk} находятся из разложения функции $\Psi_n\left(\varphi\right)$ по системе

$$\left\{(\sin\varphi)^{1-2\beta}F\left(\frac{1+\alpha-\beta+\omega_k}{2},\frac{1+\alpha-\beta-\omega_k}{2};\frac{3}{2}-\beta;\sin^2\varphi\right)\right\}_{k=1}^{\infty}.$$

Дальнейшее исследование задачи в общем случае представляет значительные трудности, поэтому рассмотрим случай $\alpha=\beta$, тогда

$$\Psi_n\left(\varphi\right)=\sum_{k=1}^{\infty}f_{nk}(\sin\varphi)^{1-2\beta}F\left(\frac{1}{2}+\frac{\omega_k}{2},\frac{1}{2}-\frac{\omega_k}{2};\frac{3}{2}-\beta;\sin^2\varphi\right), \qquad (25)$$

$\omega_k=2(k-\beta)$, $k\in N$.

Далее, преобразуем гипергеометрическую функцию на основании формул [9, с.144, 148], откуда следует

$$F\left(\frac{1}{2}+\frac{\omega_k}{2},\frac{1}{2}-\frac{\omega_k}{2};\frac{3}{2}-\beta;\sin^2\varphi\right)=$$

$$=\Gamma\left(\frac{3}{2}-\beta\right)(tg\varphi)^{\beta-1/2}\mathsf{P}^{\beta-1/2}_{(\omega_k-1)/2}\left(\cos2\varphi\right),$$

где P^{μ}_{ν}—модифицированная функция Лежандра. В силу этого равенства,

(25) перепишется в виде

$$\Psi_n(\varphi) = 2^{\beta-1/2}\Gamma\left(\frac{3}{2}-\beta\right)\sum_{k=1}^{\infty} f_{nk}(\sin 2\varphi)^{1/2-\beta} \mathrm{P}^{\beta-1/2}_{(\omega_k-1)/2}(\cos 2\varphi)$$

или

$$\Psi_n\left(\frac{\xi}{2}\right) = 2^{\beta-1/2}\Gamma\left(\frac{3}{2}-\beta\right)\sum_{k=1}^{\infty} f_{nk}(\sin\xi)^{1/2-\beta} \mathrm{P}^{\beta-1/2}_{(\omega_k-1)/2}(\cos\xi).$$

Отсюда используя формулу Мелера-Дирихле [9, с.160], которая дает интегральное представление функции Лежандра:

$$\mathrm{P}^{\tau}_{\nu}(\cos t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{(\sin t)^{\tau}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\tau\right)}\times$$

$$\times\int_0^t (\cos s-\cos t)^{-\tau-1/2}\cos\left(\left[\nu+\frac{1}{2}\right]s\right)ds, \quad 0<t<\pi, \ \ \mathrm{Re}\,\tau<\frac{1}{2},$$

имеем

$$\Psi_n\left(\frac{\xi}{2}\right) = \frac{2^{\beta}\Gamma(3/2-\beta)}{\sqrt{\pi}\Gamma(1-\beta)}\sum_{k=1}^{\infty} f_{nk}\int_0^{\xi}\frac{\cos[(k-\beta)s]\,ds}{(\cos s-\cos\xi)^{\beta}}. \tag{26}$$

Считая, что ряд сходится равномерно (это будет доказано ниже), в правой части последнего равенства переставим порядки суммирования и интегрирования:

$$\Psi_n(\xi/2) = l_1\int_0^{\xi}(\cos s-\cos\xi)^{-\beta}F_{1n}(s)\,ds, \tag{27}$$

где $l_1 = 2^{\beta}\Gamma(3/2-\beta)/[\sqrt{\pi}\Gamma(1-\beta)]$, $F_{1n}(s) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_{nk}\cos[(k-\beta)s]$.

Найдем решение полученного интегрального уравнения (27) относительно функции $F_{1n}(s)$. Вначале выполним замену $\cos\psi = y$, $\cos s = t$, тогда имеем интегральное уравнением Абеля

$$\Psi_n\left(\frac{\arccos y}{2}\right) = l_1 \int\limits_y^1 \frac{F_{1n}(\arccos t)}{\sqrt{1-t^2}(t-y)^\beta} dt, \quad -1 < y < 1.$$

На основании известной формулы обращения интегрального уравнения Абеля [10], при условии $\tilde{\Psi}_n(y) = \Psi_n[(\arccos y)/2] \in C^1[-1,1]$, $\tilde{\Psi}_n(1) = 0$ получим

$$F_{1n}(\arccos y) = \frac{\sin(\pi\beta)}{\pi l_1}\sqrt{1-y^2}\int\limits_y^1 \frac{\tilde{\Psi}'_n(t)\,dt}{(t-y)^{1-\beta}} = \tilde{F}_{1n}(y)$$

или

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_{nk}\cos[(k-\beta)\arccos y] = \tilde{F}_{1n}(y). \tag{28}$$

Тогда f_{nk} являются коэффициентами разложения функции $\tilde{F}_{1n}(y)$ в ряд по системе $\{\cos[(k-\beta)\arccos y]\}_{k=1}^{\infty}$.

В силу результатов [11] построенный ряд для функции $\tilde{F}_{1n}(y)$ сходится равномерно к порождающей функции, если она принадлежит классу $C^\delta[0,\pi]$, $\delta \in (0,1]$, а коэффициенты ряда (28) вычисляются по формулам [11]:

$$f_{nk} = \frac{\sin(\pi\beta)}{\pi^2 l_1}\int\limits_0^\pi h_k^c(\theta)\,w(\theta)\,d\theta, \tag{29}$$

где $\{h_k(\theta)\}$ –биортогонально сопряженная система к системе косинусов $\{\cos[(k-\beta)\arccos y]\}$,

$$h_k^c(\theta) = \frac{2}{\pi\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)^{2\beta-2}}\left[\frac{1}{2}C_{2\beta-2}^k - \sum_{n=0}^k C_{2\beta-2}^n\cos[(k-n)\theta]\right],$$

$$w(\theta) = \sin\theta\int\limits_0^\theta \Psi'_n(t/2)(\cos t - \cos\theta)^{\beta-1}dt,$$

$$C_l^n = \frac{1}{n!}[l(l-1)\dots(l-n+1)].$$

Так как доказано, что ряд сходится равномерно, то замена порядка интегрирования и суммирования в (26) обоснована.

Мы знаем, что функция $\Psi_n\left[(\arccos y)/2\right] \in C^1\left[-1,1\right]$ или $\Psi_n\left(\varphi\right) \in C^1\left[0,\pi/2\right]$ найдется из (24). В силу результатов [12] функция $\Psi_n\left(\varphi\right)$ определяется по формуле

$$\Psi_n\left(\varphi\right) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \tilde{f}\left(\varphi,z\right)\sin\left(nz\right)dz$$

с условиями $\tilde{f}\left(\varphi,0\right) = \tilde{f}\left(\varphi,\pi\right) = 0$.

Итак, справедливо следующее утверждение.

Теорема. Если функция $\tilde{f}\left(\varphi,z\right)$ по переменной φ принадлежит классу $C^1\left[0;\pi/2\right]$, а по переменной z принадлежит классу $C^\delta\left[0;\pi\right]$, $\delta \in (0;1]$ и выполняется условий $\tilde{f}\left(\varphi,0\right) = \tilde{f}\left(\varphi,\pi\right) = 0$, $\tilde{f}\left(0,z\right) = \tilde{f}\left(\pi/2,z\right) = 0$, то существует решение задачи Дирихле в области Ω, которое определяется формулой (23), где $\alpha = \beta$, а коэффициенты f_{nk} определены равенствами (29).

Литература

1. Сабитов К.Б., Карамова А.А. Спектральные свойства решений задачи Трикоми для уравнения смешанного типа с двумя линиями изменения типа и их применения// Известия РАН. Серия математическая. -2001.№4. -С.133-150.

2. Сабитов К.Б., Хасанова С.Л. Спектральные свойства краевой задачи с производной по нормали в граничном условии для уравнений смешанного типа и их применения// Известия ВУЗов. 2003. №6(493). -С. 64-76.

3. Уринов А.К., Каримов К.Т. Задача на собственные значения для трехмерного эллиптического уравнения с сингулярным коэффициентом// Научный вестник ФерГУ. Фергана. 2014. №1. -С. 9-12.

4. Уринов А.К., Каримов К.Т. Построение собственных функций задачи Дирихле для трехмерного эллиптического уравнения с тремя сингулярными коэффициентами// Материалы республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых "Неклассические уравнения математической физики и их приложения". Ташкент. 23-25 октября 2014 г. -С. 165-166.

5. Каримов К.Т. Задача на собственные значения для трехмерного эллиптического уравнения с двумя сингулярными коэффициентами// Материалы третьего международного Российско-Казахского симпозиума "Уравнения смешанного типа, родственные проблемы анализа и информатики". Нальчик, 3-7 декабря 2014 г. -С. 87-89.

6. Nieto J. J., Karimov E. T. The Dirichlet problem for a 3D elliptic equation with two singular coefficients// Computers and Mathematics with Applications 62 (2011) 214-224.

7. Salakhitdinov M.S., Karimov E.T. Spatial boundary problem with the Dirichlet-Neumann condition for a singular elliptic equation// Applied Mathematics and Computation 219 (2012) 3469-3476.

8. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. - М.: Наука, 1974.-296 с.

9. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрические функции. Функции Лежандра. - М.: Наука, 1973.-296 с.

10. Михлин С.Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. -М.:Физматгиз, 1959. -232 с.

11. Моисеев Е.И. О базисности систем синусов и косинусов// Доклады АН СССР. -Москва. 1984. Т. 275. №4. -С. 794-798.

12. Моисеев Е.И. О базисности одной системы синусов// Дифференциальные уравнения. -Минск, 1987, Т. 23. №1, -С. 177-179.

Ферганский государственный университет

Uzbek Mathematical
Journal, 2017,№1, pp.106-113

УДК 517.54

Коэффициенты оптимальных интерполяционных формул с производными в пространстве Соболева

Нуралиев Ф.А.

Ushbu maqolada Sobolevning $L_2^{(2)}(0,1)$ fazosida hosilali optimal interpolyatsion formulaning koeffitsiyentlari topilgan.

In this paper, in the $L_2^{(2)}(0,1)$ Sobolev space, the coefficients of optimal interpolation formula with derivative are found.

Типичной задачей приближения является задача интерполяции. Классический метод ее решения состоит в построении интерполяционного многочлена. Однако, многочлены обладают ряд недостатков, как аппарат приближения функций с особенностями и функций с не слишком большой гладкостью. Доказано, что последовательность интерполяционных много- членов Лагранжа, построенных для конкретной непрерывной функции по равностоящим узлам, с возрастанием степени многочлена не стремятся к данной функции. Поэтому на практике для того, чтобы достаточно хорошо приблизить функцию, вместо построения интерполяционного полинома высокой степени используют сплайны. Первые сплайн функции, предложенные И.Шенбергом, были склеены из кусков кубических много- членов. В дальнейшем эта конструкция модифицировалась, повышалась степень многочленов, изменялись краевые условия, но идея осталась неизменной. Следующий существенный шаг в теории сплайнов это резуль- тат Дж.Холлидея, связывающие кубические сплайны Шенберга с решением вариационной задачи о минимуме квадрата нормы функции из пространства $L_2^{(2)}$. Далее, результат Дж.Холлидея был обобщен де Буром, т.е. им доказана, что натуральный сплайн степени $2m-1$ дает минимум к квадрату нормы функций в $L_2^{(m)}$, где $L_2^{(m)}$ пространство функий m-е обобщенное производное интегрируемые с квадратом. Эти результаты вызвалы большой интерес и далее появились большое количество работ, где в зависимости от конкретных требований модифицировался вариаци- онный функционал. С течением времени от решения задач интерполяции, когда в узлах сетки заданы значения

функций, исследователи стали переходить к решению задач, где в узлах задавались производные и сложные дифференциальные выражения. На этом этапе в каждом кон- кретном случае изучались вопросы существования, единственности, схо- димости сплайнов, алгоритмы построения, которые становились все более сложными, а формулы все более громоздкими. Теория сплайнов основан- ных на вариационные методы изучались и развивались в работах
Дж.Алберга, Э.Нильсона, Дж.Уолша, П.Ж.Лорана, C. deBoor, L.L.Schu- maker, R.Arcangeli, M.C.Lopezde Silanes, J.J.Torres,
В.А. Василенко, M.Attea, Barlinet, Tomas-Agnan, T.Lyche, B.Bojanov, С.Б.Стечкина, Ю.Н.Субботина, М.И.Игнатьева, А.Б.Певного, G.Nurnberger, А.Ю.Бежаева и др.

Настоящая работа посвящена к построению оптимальных интерполя- ционных формул. В связи с этим рассмотрим интерполяционную формулу вида

$$\varphi(z) \cong P_\varphi(z) = \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta(z)\varphi(h\beta) + A(z)\varphi'(0) + B(z)\varphi'(1) \tag{1}$$

с функционалом погрешности

$$\ell(x,z) = \delta\,(x-z) - \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta(z)\delta(x-h\beta) + A(z)\delta'(x) + B(z)\delta'(x-1). \tag{2}$$

Здесь $C_\beta(z), A(z), B(z)$ - коэффициенты, а $h = 1/N, N \in \mathbb{N}$, δ - дельта функция Дирака, $\varphi \in L_2^{(m)}(0,1)$.

Разность $\varphi(x) - P_\varphi(x)$ называется *погрешностью интерполяционной формулы* (1). Значение этой погрешности на некоторой точке z является линейным функционалом над функциями φ, т.е.

$$(\ell,\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \ell\varphi dx = \varphi(z) - P_\varphi(z).$$

В работе [1] для интерполяционной формулы (1) с функционалом погрешности (2) найдена экстремальная функция в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$, вычислен квадрат нормы функционала погрешности, минимизируя норму функционала погрешности по коэффициентам

$C_\beta(z), A(z), B(z)$ получена следующая система линейных алгебраических уравнений для нахождения оптимальных коэффициентов интерполяционных формула вида (1):

$$\sum_{\gamma=0}^{N} C_\gamma(z)\frac{|h\beta-h\gamma|^{2m-1}}{2(2m-1)!}-A(z)\frac{(h\beta)^{2m-2}}{2(2m-2)!}+$$

$$+B(z)\frac{(h\beta-1)^{2m-2}}{2(2m-2)!}+\sum_{\alpha=0}^{m-1}\lambda_\alpha(h\beta)^\alpha=\frac{|z-h\beta|^{2m-1}}{2(2m-1)!},\quad \beta=\overline{0,N}, \tag{3}$$

$$\sum_{\gamma=0}^{N} C_\gamma(z)\frac{(h\gamma)^{2m-2}}{2(2m-2)!}+\frac{B(z)}{2(2m-3)!}-\lambda_1=\frac{z^{2m-2}}{2(2m-2)!}, \tag{4}$$

$$\sum_{\gamma=0}^{N} C_\gamma(z)\frac{(h\gamma-1)^{2m-2}}{2(2m-2)!}-\frac{A(z)}{2(2m-3)!}+\sum_{\alpha=1}^{m-1}\alpha\lambda_\alpha=\frac{(1-z)^{2m-2}}{2(2m-2)!}, \tag{5}$$

$$\sum_{\gamma=0}^{N} C_\gamma(z)=1, \tag{6}$$

$$\sum_{\gamma=0}^{N} C_\gamma(z)h\gamma+A(z)+B(z)=z, \tag{7}$$

$$\sum_{\gamma=0}^{N} C_\gamma(z)(h\gamma)^\alpha+\alpha B(z)=z^\alpha,\quad \alpha=\overline{2,m-1}. \tag{8}$$

В настоящей работе в пространстве $L_2^{(2)}(0,1)$ находим оптимальные коэф- фициенты интерполяционных формул $C_\beta(z), A(z), B(z)$ для любого нату- рального N.

Справедлива следующая теорема, которая является основным резуль- татом этой работы.

Теорема. *Оптимальные коэффициенты интерполяционных формул вида (1) с функционалом погрешности (2) в пространстве* $L_2^{(2)}(0,1)$ *имеют вид:*

$$C_0(z)=\frac{1}{2h^3}\Bigg[|z-h|^3+6\sqrt{3}\sum_{\gamma=0}^{N}q^\gamma|z-h\gamma|^3+h^3-$$

$$- z^3(4+3\sqrt{3}) + 3z^2h(1-\sqrt{3}) + q^N N_1\Big].$$

$$C_\beta(z) = \frac{1}{2h^3}\Big[|z-h(\beta-1)|^3 - 8|z-h\beta|^3 + |z-h(\beta+1)|^3 +$$

$$+6\sqrt{3}\sum_{\gamma=0}^{N} q^{|\beta-\gamma|}|z-h\gamma|^3 + q^\beta M_1 + q^{N-\beta}N_1\Big].$$

$$C_N(z) = \frac{1}{2h^3}\Big[|z-h(N-1)|^3 + 6\sqrt{3}\sum_{\gamma=0}^{N} q^{N-\gamma}|z-h\gamma|^3 + h^3 -$$

$$-(1-z)^3(4+3\sqrt{3}) + 3h(1-z)^2(1-\sqrt{3}) + q^N M_1\Big].$$

$$A(z) = \frac{f_1(z)}{q(1-q^{2N})},$$

$$B(z) = \frac{f_2(z)}{q(1-q^{2N})},$$

где

$$f_1(z) = \frac{1}{2h^2}\Big[2\sqrt{3}\sum_{\gamma=0}^{N}(q^{\gamma+1} + q^{2N+1-\gamma})|z-h\gamma|^3 + h^2zq(1-q^{2N}) +$$

$$+hz^2(2q+1)(1+q^{2N}) + z^3(q+1) + z^3q^{2N}(3q+1) +$$

$$+2h(1-z)^2(2q+1)q^N + (1-z)^3q^N(4q+2)\Big]$$

$$f_2(z) = -\frac{1}{2h^2}\Big[2\sqrt{3}\sum_{\gamma=0}^{N}(q^{N-\gamma+1} + q^{N+1+\gamma})|z-h\gamma|^3 +$$

$$+h^2(1-z)q(1-q^{2N}) + h(1-z)^2(2q+1)(1+q^{2N}) + (1-z)^3(q+1) +$$

$$+(1-z)^3q^{2N}(3q+1) + 2hz^2(2q+1)q^N + z^3q^N(4q+2)\Big]$$

$$M_1 = 3z(z+h)(z-h-\sqrt{3}z) + 6h^2 \frac{f_1(z)}{q(1-q^{2N})}$$

$$N_1 = 3(1-z)(1-z+h)(1-z-h-\sqrt{3}+\sqrt{3}z) - 6h^2 \frac{f_2(z)}{q(1-q^{2N})}$$

Доказательство теоремы. Выражение (5) подставляя в (4) и (6)-(8), после некоторых упрощений, в частности, при $m = 2$ из системы (3)-(8) получаем следующую

$$\sum_{\gamma=0}^{N} C_\gamma(z) \frac{|h\beta - h\gamma|^3}{12} - A(z)\frac{(h\beta)^2}{4} +$$

$$+B(z)\frac{(h\beta-1)^2}{4} + \lambda_0(z) = \frac{|z-h\beta|^3}{12}, \quad \beta = \overline{0,N}, \tag{9}$$

$$\sum_{\gamma=0}^{N} C_\gamma(z)\frac{(h\gamma)^2}{4} + \frac{B(z)}{2} = \frac{z^2}{4}, \tag{10}$$

$$\sum_{\gamma=0}^{N} C_\gamma(z) = 1, \tag{11}$$

$$\sum_{\beta=0}^{N} C_\gamma(z)(h\beta) + A(z) + B(z) = z. \tag{12}$$

Идея решения системы (9) - (12), как и в [2], состоит в замене неизвестной функции $C_\gamma(z)$. А именно, вместо $C_\gamma(z)$ мы введем в рассмотрение функции

$$v(h\beta) = \sum_{\gamma=0}^{N} C_\gamma(z)\frac{|h\beta - h\gamma|^3}{12}, \tag{13}$$

$$u(h\beta) = v(h\beta) - A(z)\frac{(h\beta)^2}{4} + B(z)\frac{(h\beta-1)^2}{4} + \lambda_0(z). \tag{14}$$

В такой постановке нужно лишь выразить $C_\gamma(z)$ через функцию $u(h\beta)$. Для этого нам нужен дискретный аналог $D_2(h\beta)$ дифференциального оператора $\frac{d^4}{dx^4}$, который удовлетворяет равенству

$$hD_2(h\beta) * \frac{|h\beta|^3}{12} = \delta(h\beta), \tag{15}$$

где $\delta(h\beta)$ равно нулю при $\beta \neq 0$ и равно 1 при $\beta = 0$. В работе [3] построен дискретный аналог $D_m(h\beta)$ дифференциального оператора $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}$. При $m = 2$ из результатов работы [3], имеем

$$D_2(\beta) = \frac{6}{h^4} \begin{cases} 6\sqrt{3}q^{|\beta|} \text{ при } |\beta| \geq 2, \\ 19 - 12\sqrt{3} \text{ при } |\beta| = 1, \\ 6\sqrt{3} - 8 \text{ при } \beta = 0, \end{cases}$$

где $q = \sqrt{3} - 2$.

С учетом дискретного оператора $D_2(\beta)$ для коэффициентов интерпол- яционное формулы (1) получим следующее равенство

$$C_\beta(z) = hD_2(h\beta) * u(h\beta). \tag{16}$$

Отсюда мы сделаем следующий вывод: если мы найдем функцию $u(h\beta)$, то оптимальные коэффициенты найдутся из равенства(16).

Теперь найдем явный вид функции $u(h\beta)$. Так как $C_\beta(z) = 0$ при $h\beta \notin [0, 1]$, то из равенства (14) получим

$$C_\beta(z) = hD_m(h\beta) * u(h\beta) = 0 \text{ при } h\beta \notin [0, 1]. \tag{17}$$

Рассмотрим (13) при $h\beta \notin [0, 1]$.

Пусть $\beta < 0$. Тогда, учитывая равенства (10)- (12), имеем

$$v(h\beta) = -\frac{1}{12}\Bigg((h\beta)^3 - 3(h\beta)^2(z - A(z) - B(z)) + \\ +3(h\beta)(z^2 - 2B(z)) - \sum_{\gamma=0}^{N} C_\gamma(z)(h\gamma)^3\Bigg). \tag{18}$$

Пусть $\beta > N$ из (13) также, как и выше, получим

$$v(h\beta) = \frac{1}{12}\Bigg((h\beta)^3 - 3(h\beta)^2(z - A(z) - B(z)) + \\ +3(h\beta)(z^2 - 2B(z)) - \sum_{\gamma=0}^{N} C_\gamma(z)(h\gamma)^3\Bigg). \tag{19}$$

Используя (18) и (19) из равенства (14) имеем

$$u(h\beta)=\begin{cases} -\frac{(h\beta-z)^3}{12}-\frac{A(z)}{2}(h\beta)^2, & \beta<0,\\ \frac{|z-h\beta|^3}{12}, & 0\le\beta\le N,\\ \frac{(h\beta-z)^3}{12}+\frac{B(z)}{2}(h\beta-1)^2, & \beta>N. \end{cases} \qquad (20)$$

Здесь неизвестными являются $A(z)$ и $B(z)$. Теперь используя равенства (17) из (20) найдем неизвестные

$$D_2(h\beta)*u(h\beta)=$$

$$=\sum_{\gamma=1}^{\infty}D_2(h\gamma+h\beta)\left[\frac{(h\gamma+z)^3}{12}-\frac{A(z)}{2}(h\gamma)^2\right]+$$

$$+\sum_{\gamma=0}^{N}D_2(h\gamma-h\beta)\frac{|z-h\gamma|^3}{12}+$$

$$+\sum_{\gamma=1}^{\infty}D_2(h(N+\gamma)-h\beta)\left[\frac{(h\gamma+1-z)^3}{12}+\frac{B(z)}{2}(h\gamma)^2\right]=0.$$

Из последного равенства получим следующее

$$A(z)\left[-\frac{h^2}{2}\sum_{\gamma=1}^{\infty}D_2(h\gamma+h\beta)\gamma^2\right]+B(z)\left[\frac{h^2}{2}\sum_{\gamma=1}^{\infty}D_2(h(N+\gamma)-h\beta)\gamma^2\right]=$$

$$=-\sum_{\gamma=0}^{N}D_2(h\gamma-h\beta)\frac{|z-h\gamma|^3}{12}-$$

$$-\sum_{\gamma=1}^{\infty}D_2(h\gamma+h\beta)\left[\frac{(h\gamma+z)^3}{12}\right]-\sum_{\gamma=1}^{\infty}D_2(h(N+\gamma)-h\beta)\left[\frac{(h\gamma+(1-z))^3}{12}\right].$$

Отсюда при $\beta=-1$ и $\beta=N+1$ после некоторых вычислений имеем

$$A(z)q+B(z)q^{N+1}=$$

$$=\frac{1}{2h^2}\left[2\sqrt{3}\sum_{\gamma=0}^{N}q^{\gamma+1}|z-h\gamma|^3+h^2zq+3hz^2(2q+1)+z^3(q+1)-\right.$$

$$-h^2(1-z)q^{N+1}+h(1-z)^2(2q+1)q^N+(1-z)^3(3q+1)q^N\Bigg],$$

$$A(z)q^{N+1}+B(z)q=$$

$$=-\frac{1}{2h^2}\left[2\sqrt{3}\sum_{\gamma=0}^{N}q^{N+1-\gamma}|z-h\gamma|^3-3h^2zq^{N+1}+hz^2(2q+1)q^N+\right.$$

$$\left.+z^3(3q+1)q^N++h^2(1-z)q+3h(1-z)^2(2q+1)+(1-z)^3(q+1)\right].$$

Решая последную систему получим выражения для $A(z)$ и $B(z)$ приведенные в утверждение теоремы.

Далее, из (16), используя (20) и $D_2(h\beta)$, при $\beta = 0,1,2,...,N$ получаем аналитические формулы для коэффициентов $C_\beta(z),(\beta=\overline{0,N})$ данные в теорема. Теорема доказана

Литература

1. Нуралиев Ф.А. Оптимальная интерполяционная формула типа Эрмита. // Узбекский математический журнал. 2010. №4. С. 158-164.

2. Соболев С.Л.Введение в теорию кубатурных формул. - М.: Наука. 1974. - 808 с.

3. Шадиметов Х.М. Дискретный аналог оператора $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}$ и его построение. // Вопр. вычисл. и прикл. математики. - Ташкент, 1985. вып. С. 22-35.

Институт математики при НУУз

Uzbek Mathematical
Journal, 2017,№1, pp.114-123

УДК 517.54

Вероятностные модели для решения задачи Дирихле для нелинейных эллиптических уравнений

Раимова Г.М.

Ushbu maqolada polinom ko‘rinishidagi chiziqsiz elliptik tenglamalarga qo‘yilgan Dirixle masalasini yechish uchun ehtimoliy modellar tadqiq etilgan.

In this paper, probabilistic models of the solution of a Dirichlet problem for the polinomial nonlinear elliptic equations are constructed.

Рассматривается задача Дирихле для следующего нелинейного уравнения: $\Delta u - c\ u = -f(u)$ с полиномиальной нелинейностью в правой части относительно неизвестной функции $f(u) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x)u^n(x)$. Теоремы существования для нелинейных уравнений приведены в [1].

Несмещенные и смещенные оценки решения краевых задач для линейного уравнения Гельмгольца $\Delta u - cu = -g(x)$ были рассмотрены в ([2],[3]) для задачи Дирихле, Н.А. Симоновым в [4] для смешанной задачи и задачи Неймана, А.С. Сипиным в [5] для задачи Дирихле для уравнения $\Delta u + \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + au = -g$. Также были рассмотрены вероятностные модели задач для следующих нелинейных уравнений: уравнение $-\Delta v + 2cv = c^2 + v^2$ изучалось в ([6]) и уравнение $-\Delta u + u^n = 0$ в работе ([7]).

В настоящей работе при предположении существования решения строится несмещенная оценка на траекториях ветвящегося процесса блуждания по сферам. Для этого, используя формулу Грина выписывается специальное интегральное уравнение, связывающее значение функции $u(x)$ с ее интегралами по шару и сфере максимального радиуса с центром в точке x и целиком содержащимися в рассматриваемой области. Получено вероятностное представление решения задачи в виде математического ожидания некоторой случайной величины. В соответствии с вероятностным представлением построен ветвящийся процесс блуждания по сферам и на его траекториях строится несмещенная оценка решения задачи с ограниченной дисперсией. Далее стандартным образом строится строится ε-смещенная оценка, которая легко моделируется на ЭВМ. Для рассмотренных выше статистических алгоритмов проведены вычислительные эксперименты и получены результаты, подтверждающие эффективность алгоритмов.

Постановка задачи. Пусть D ограниченная область в R^3 с границей Г. Рассмотрим задачу Дирихле для следующего эллиптического уравнения:

$$-\Delta u(x)+cu(x) = f(u), \quad f(u) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)u^n(x), \quad x \in D, \quad u|_\Gamma = \varphi, \quad (1)$$

Как всегда, предполагается, что функции $\varphi(x) \in C(\bar{\Gamma})$, $a_n(x) \in C(\bar{D})$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ и коэффициент $c > 0$ таковы, что существует ([1]) единственное непрерывное решение нелинейной задачи. Относительно функций $a_n(x)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ сделаем следующие предположения: $\sup\limits_{x\in D} |a_n(x)| \le \bar{a}_n$, причем ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \bar{a}_n n < \infty \quad (2)$$

Цель работы заключается в построении при вышеуказанных предположениях, несмещенной оценки решения задачи с ограниченной дисперсией в некоторой произвольной точке $x \in D$.

Вероятностное представление решения задачи. Из теории фундаментальных решений известно, что функцию $u(x)$, удовлетворяющую уравнению $\Delta u - c\, u = -g$, можно представить в виде

$$u(x) = \frac{R\sqrt{c}}{4\pi R^2 \mathrm{sh}(R\sqrt{c})} \int\limits_{S_R)} u(y)dy + \int\limits_{K_R} \frac{\mathrm{sh}[(R - |x-y|)\sqrt{c}]}{4\pi |x-y| \mathrm{sh}(R\sqrt{c})} g(y)dy. \quad (3)$$

Применяя соотношение (3) к уравнение (1) получим следующее интегральное представление:

$$u(x) = \frac{R\sqrt{c}}{4\pi R^2 \mathrm{sh}(R\sqrt{c})} \int\limits_{S_R} u(y)dy + \int\limits_{K_R} \frac{\mathrm{sh}[(R - |x-y|)\sqrt{c}]}{4\pi |x-y| \mathrm{sh}(R\sqrt{c})} f(u(y))dy. \quad (4)$$

Здесь $R = d(x) = \min\limits_{y\in\Gamma} |x-y|$ - расстояние от точки до границы, K_R - шар радиуса R с центром в точке x, S_R - соответствующая сфера.

Первый интеграл в (4) - это интеграл по поверхности сферы S_R. Так так площадь поверхности сферы S_R равна $4\pi R^2$, то после введения этого выражения под знак первого интеграла он становится трехмерным, представляющим равномерное распределение на сфере:

$$u(x) = \frac{R\sqrt{c}}{\mathrm{sh}(R\sqrt{c})} \int\limits_{S_R} u(x+R\omega)d\omega +$$
$$+\frac{\mathrm{sh}(R\sqrt{c})-R\sqrt{c}}{\mathrm{sh}(R\sqrt{c})} \int\limits_{K_R} \frac{\mathrm{sh}[(R-|x-y|)\sqrt{c}]}{4\pi|x-y|(\mathrm{sh}(R\sqrt{c})-R\sqrt{c})} \frac{f(u(y))}{c} dy.$$

Перепишем данное выражение следующим образом

$$u(x) = q \int\limits_{S_R} u(y)d\omega + (1-q) \int\limits_{K_R} p(x,y) \frac{f(u(y))}{c} dy, \tag{5}$$

здесь были использованы следующие обозначения: $q = \frac{R\sqrt{c}}{\mathrm{sh}(R\sqrt{c})}$, ω - равномерное распределение на S_R, $p(x,y) = \frac{\mathrm{sh}[(R-|x-y|)\sqrt{c}]}{4\pi|x-y|(\mathrm{sh}(R\sqrt{c})-R\sqrt{c})}$- плотность перехода из x в y $(x, y \in K_R)$.

Прежде чем перейти к описанию случайного ветвящегося процесса, согласованного с вероятностным представлением (5) дадим общее определение процесса блуждания по сферам с ветвлением и некоторые его свойства из ([6],[8]).

Процесс блуждания по сферам с ветвлением определяется следующим образом: в ограниченной области $D \subset R^3$ с границей Γ блуждают частицы n типов $T_1, T_2, \ldots, T_n$. Частица типа T_i, находящаяся в точке x, за единицу времени с вероятностью $g_i(x)$ переходит в точку y, распределенную с плотностью $p_i(x,y)$, и порождает там α_1 частиц типа T_1, α_2 частиц типа T_2, ... , α_n - типа T_n. С вероятностью $1-g_i(x)$ превращения не происходит, а частица переходит в точку y, распределенную равномерно на сфере $S_R(x)$, $R(x) = dist(x,\Gamma)$,

$$1-g_i(x) = R(x)\sqrt{c}/\mathrm{sh}(R(x)\sqrt{c}), \quad r = |x-y|,$$

$$p_i(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi r} \cdot \frac{c_i \mathrm{sh}(\sqrt{c_i}(R-r))}{\mathrm{sh}(R\sqrt{c_i})g_i(x)}, & y \in K_R(x); \\ 0, & y \notin K_R(x). \end{cases}$$

Новые частицы движутся аналогично старой и независимо друг от друга.

Если число ветвлений N описанной ветвящейся марковской цепи конечно, то, начиная с некоторого (случайного) момента времени, цепь представляет собой N независимых процессов блуждания по сферам и, следовательно имеет предел, принадлежащий Г. Число N, естественно тоже случайно. Приведем теорему, дающую необходимые и достаточные условия для того, чтобы среднее число ветвлений процесса блуждания по сферам с ветвлением было конечно.

Пусть b^i_j - среднее число частиц типа T_j, получающихся из частицы типа T_i за одно превращение, $I = \|\delta^i_j\|$- единичная матрица порядка n.

Квадратная матрица $\|a^i_j\|$ с вещественными элементами называется *квазинеотрицательной*, если все еч недиагональные элементы неотрицательны.

Квадратная матрица $\|a^i_j\|$ называется *неразложимой*, если множество индексов $1, 2, ..., n$ нельзя разбить на два таких непустых непересекающихся множества S_1 и S_2, что $a^i_j = 0$ для всех $i \in S_1$ и $j \in S_2$.

Характеристический корень неразложимой квазинеотрицательной матрицы с максимальной действительной частью называется *перроновым корнем.*

Предположим, что матрица $\|c_i(b^i_j - \delta^i_j)\|$ - неразложимая, тогда справедлива следующая

Теорема 1 [6, стр.142]. *Среднее число ветвлений для процесса блуждания по сферам с ветвлением конечно тогда и только тогда, когда перронов корень матрицы* $\|c_i(b^i_j - \delta^i_j)\|$ *строго меньше первого собственного числа краевой задачи* $\Delta u + \lambda u = 0$, $u|_\Gamma = 0$.

Следствие 1 [2, стр.144]. *Если в процессе блуждания участвуют только однотипные частицы, то среднее число ветвлений в блуждании по сферам с ветвлением конечно тогда и только тогда, когда* $c(b-1) < \lambda_1$. *Здесь* b *среднее число частиц, получающихся при делении одной частицы, а* λ_1 *- первое собственное значение краевой задачи* $\Delta u + \lambda u = 0$, $u|_\Gamma = 0$.

В соответствии с (5) несмещенные оценки для решения задачи (1) естественно строить на траекториях процесса блуждания по сферам с ветвлением, в котором участвуют частицы одного типа.

Формулу (5) можно переписать следующим образом:

$$u(x) = q \int\limits_{S_R} u(y) d\omega + (1-q) \int\limits_{K_R} p(x, y) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n(y)}{c} u^n(y) dy, \qquad (6)$$

Определение случайного ветвящегося процесса, согласованного с вероятностным представлением (6). В соответствии с представлением (6) построим процесс блуждания с ветвлением в фазовом пространстве D, в котором участвуют частицы одного типа. Пусть $M = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n\bar{a}_n$, и α - некоторое число $0 < \alpha \leq 1$ (далее условия на α уточним). В начальный момент имеется одна частица в точке $x_0 = x$. $n > 0$ и x_n известно. За единицу времени частица с вероятностью $q = \frac{R\sqrt{c}}{\operatorname{sh}(R\sqrt{c})}$ переходит в точку x_{n+1}, равномерно распределенную на сфере $S_R(x)$ и с вероятностью $1-q$ переходит в точку x_{n+1}, распределенную в шаре $K_R(x)$ с плотностью $p(x,y)$. Во втором случае с вероятностью $\pi_n = \frac{\alpha}{M}\bar{a}_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ частица делится на n новых частиц либо с вероятностью $\pi_0 = 1 - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \pi_n$ гибнет. Новые частицы ведут себя независимо друг от друга аналогично рассмотренной частице. Процесс обрывается, если все частицы в $\bar{D}$ погибают либо, если все частицы попадают в Γ. Параметр α позволяет регулировать число ветвлений.

Пусть $T_0 = (x,1), T_1, T_2, \ldots, T_n, \ldots$ - траектория ветвящегося процесса, где $T_i = (x_i^1, n_i^1;\ x_i^2, n_i^2;\ \ldots;\ x_i^{l_i}, n_i^{l_i})$ - точечное распределение в момент времени i. Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Случайный ветвящийся процесс $\{T_n\}$ с вероятностью единица вырождается в области D, либо сходится к точечному распределению $T = (x^1, n^1;\ x^2, n^2;\ \ldots;\ x^k, n^k)$, где $x^i \in \Gamma$, $i = 1, 2, \ldots k$.*

Доказательство. Процесс можно рассматривать как ветвящийся процесс для частиц, диффундирующих в ограниченной области $\overline{D}$ с поглощающими границами. Если среднее число частиц, получающихся при делении одной частицы $K = K(x,1) \leq 1$, то построенный процесс обрывается с вероятностью 1, а условие $K < 1$ является необходимым и достаточным для ограниченности среднего числа ветвлений процесса. Покажем что, для описанного выше процесса $K < 1$. В силу наших предположений ряд $M = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \bar{a}_n n < \infty$ сходится. Фиксируем $0 < \alpha < 1$. Учитывая, что $\pi_n = \frac{\alpha}{M}\bar{a}_n$, находим:

$$K = q(x) \int\limits_{S_R} d\omega + (1 - q(x)) \int\limits_{K_R} p(x,y) \sum\nolimits_{n=0}^{\infty} (n\pi_n) dy =$$
$$= q(x) + (1 - q(x)) \frac{\alpha}{M} \sum\nolimits_{n=1}^{\infty} n\bar{a_n} < 1$$

И следовательно данный процесс вырождается и общее число частиц, участвовавших в процессе конечно (см. [9]). Если процесс не обрывается внутри области D, то начиная с некоторого момента все частицы выходят на границу Γ, т.е., существует $n = n_0$, начиная с которого T_n имеет вид $T = (x_n^1, 1; x_n^2, 1; \dots; x_n^k, 1)$, где k не зависит от n. В дальнейшем все k частиц совершают независимые блуждания по сферам. Из результатов [2,6] следует, что $x_n^i \to x^i \in \Gamma$ при $n \to \infty$ п.н. Лемма доказана. $\square$

Отметим, что для процесса блуждания по сферам с ветвлением в силу следствия 1 к теореме 1 среднее число ветвлений будет конечно и в случае, когда K - среднее число частиц, получающихся при делении одной частицы равно 1 (т.е. $b = 1$). Следовательно, значение параметра $\alpha = 1$ при котором $K = 1$ является допустимым. Далее, на траектории блуждания по по сферам в ветвлением построим несмещенную и смещенную оценки решения. **Построение несмещенной оценки решения.** Для построения оценки метода Монте-Карло для задачи (1) реализуется процесс блуждания по сферам с ветвлением из точки $x_0 = x$, т.е. в начале имеется одна частицы в точке x. За единицу времени частица с вероятностью $q = \frac{R\sqrt{c}}{\mathrm{sh}(R\sqrt{c})}$ переходит в новую точку $x_1 = y_1$, которая выбирается равномерно по сфере $S_R(x)$ и с вероятностью $1-q$ в точку $x_1 = y_2$, которая выбирается внутри шара $K_R(x)$ соответственно плотности $p(x,y)$. Далее, в этом случае с вероятность π_n $(n \neq 0)$ происходит ветвление, т.е. частица делиться на n частиц и вес умножается на величину $\frac{Ma_n(x_1)}{c\,\bar{a}_n\,\alpha}$. Из точки x_1 строятся n условно-независимых траекторий блуждания. В случае $n = 0$ происходит поглощение частицы в точке x_1 и вес домножается на $\frac{a_0(x_1)}{c\pi_0}$. Новые частицы ведут себя независимо друг от друга аналогично рассмотренной частице. Процесс обрывается, если все частицы в $\overline{D}$ погибают либо, если все частицы выходят на ε окрестность границы. Построенная оценка, очевидно, имеет следующий рекуррентных вид. Пусть $\zeta_0(x) = u(x)$, $\zeta_k(x) = \Psi(\zeta_{k-1}(x))$, где

$$\Psi(\zeta(x)) = \begin{cases} \zeta(y_1), & \text{с вероятностью } q(x); \\ W_n(y_2)\prod\limits_{i=1}^{n}\zeta^{(i)}(y_2), & \text{с вероятностью } (1-q(x))\pi_n,\ n \neq 0; \\ W_0, & \text{с вероятностью } (1-q(x))\pi_0. \end{cases} \tag{7}$$

Здесь $\zeta^{(i)}(y)$ - независимые реализации случайной величины $\zeta(y)$. Так называемые «веса», т.е. множители, на которые при каждом шаге домножается оценка, определим следующим образом:

$$W_n(y) = \frac{M\, a_n(y)}{c\, \bar{a}_n\, \alpha}, \quad W_0(y) = \frac{a_0(y)}{c\, \pi_0}. \tag{8}$$

Продолжив рекурсию до конца ветвящегося траектории, получим вероятностное представление ряда Неймана для задачи (1).

Пусть $\Re_k$ – σ - алгебра, порожденная последовательностью $T_0 = (x, 1)$, T_1, …, T_k. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Последовательность* $\{\zeta_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ *образует мартингал относительно* $\{\Re_k\}_{k=0}^{\infty}$. *Если* $M < c$, *то* $\zeta_k(x,t)$ *- равномерно интегрируемый мартингал.*

Доказательство. Из определения $\Re_k$ очевидно, что $\zeta_k(x)$ является $\Re_k$ - измеримой. Из свойств условных математических ожиданий следует что:

$$\begin{gathered}\mathbf{E}(\zeta_{n+1}(x)/\Re_n) = \mathbf{E}\,(\Psi(\zeta_n(x))/\Re_n) = q(x)\mathbf{E}\zeta_n(y_1) + \\ +(1-q(x))\sum_{i=1}^{\infty} \pi_n\ \mathbf{E}\, W_i(y_2) \prod_{j=1}^{i} \zeta_n^{(j)}(y_2) + (1-q(x))\pi_0\, \mathbf{E}\, W_0(y_2)\end{gathered}.$$

Ввиду справедливости вероятностного представления (6) получим:

$$\begin{gathered}\mathbf{E}(\zeta_{n+1}(x)/\Re_n) = \\ = q(x)\mathbf{E}\zeta_n(y_1) + (1-q(x))\left[\sum_{i=1}^{\infty} \pi_n\ \mathbf{E}\, \tfrac{M\, a_n(y)}{c\, \bar{a}_n\, \alpha} \zeta_n^i(y_2) + \pi_0\, \mathbf{E}\, \tfrac{a_0(y)}{c\, \pi_0}\right] = \zeta_n(x).\end{gathered}$$

Таким образом последовательность $\{\zeta_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ образует мартингал относительно $\{\Re_k\}_{k=0}^{\infty}$. Чтобы доказать равномерную интегрируемость $\zeta_k(x)$, достаточно показать, что $|\zeta_k(x)| \le C$, $(C = const)$. Пусть параметр α выбирается из условия $\frac{M}{c} \le \alpha \le 1$. Так как $u(x) \in C(\overline{D}) \cap C^2(\overline{D})$ и $\overline{D}$ ограниченная область, то $|u(x)| \le const$ для $(x) \in \overline{D}$. Далее, при выполнении условия теоремы $|W_n(y)| = |\frac{M\, a_n(y)}{c\, \bar{a}_n\, \alpha}| \le 1$ и следовательно $|\zeta_n(x)| \le C < \infty$, $(C = const)$. Откуда следует, что последовательность $\{\zeta_n(x,t)\}$ является равномерно интегрируемой. Теорема доказана. □

Рассмотрим теперь вопрос о реализуемости оценки $\zeta_n(x)$, т.е. возможности реализации построенного алгоритма на ЭВМ. С целью экономии времени получения одной реализации оценки решения задачи (1) рассмотрим несколько видоизмененный процесс с меньшим числом ветвлений и оценки на нем со сколь угодно малым смещением.

Возьмем ε - достаточно малым и рассмотрим внутреннюю ε - окрестность границы: Γ_ε. Пусть N_1 - момент обрыва процесса внутри области, и N_ε - момент первого попадания всех частиц в Γ_ε. $N = \min\{N_1, N_\varepsilon\}$ - момент остановки процесса. Тогда вероятность обрыва траектории в точке будет равна: $g(x_n) = \begin{cases} 1, & \text{если } x_n \in \Gamma_\varepsilon, \\ (1 - q(x_{n-1})\pi_0, & \text{если } x_n \in \overline{D}\backslash\Gamma_\varepsilon. \end{cases}$ Из леммы 1 и следствия 1 следует, что $N < \infty$.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда $\zeta_N(x)$ является несмещенной оценкой для $u(x)$ с конечной дисперсией.*

Доказательство. Так как $\zeta_n(x)$ является равномерно интегрируемым мартингалом и N -марковский момент, то согласно теореме Дуба о преобразовании свободного выбора ([10],[11]) для мартингала $\{\zeta_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$, получим $E\zeta_N(x) = E\zeta_1(x)$. Из определения $\zeta_1(x)$ по формулам (7)-(8) и вероятностного представления следует, что

$$\mathbf{E}(\zeta_1(x)) = q(x)\mathbf{E}u(y_1) + (1 - q(x))\mathbf{E}f(u(y_2))/c = u(x).$$

В силу условий теоремы 2 $\mathbf{E}(\zeta_N(x))^2 < \infty$ и следовательно дисперсия ее конечна. Теорема доказана. □

Далее, из $\zeta_N(x)$ строится стандартным способом смещенную, но практически реализуемую оценку $\zeta_N^*(x)$. Пусть (x^*) - ближайшая к точка границы Γ. $\zeta_N^*(x)$ получается заменой $u(x_N)$ в $\zeta_N(x)$ на $\varphi(x_N^*)$. Оценим смещение $\zeta_N^*(x)$. Ясно, что $|\mathbf{E}\zeta_N(x) - u(x)| \leq \mathbf{E}|\zeta_N^*(x) - \zeta_N(x)|$. Если $N = N_1$, то $T_N = \{\theta\}$ и процесс обрывается не попадая Γ_ε. В этом случае $\zeta_N^*(x) = \zeta_N(x)$ и смещение равно нулю. Если $N = N_\varepsilon$, то $T_N = (x_N^1, n_N^1;\ x_N^2, n_N^2;\ \ldots;\ x_N^k, n_N^k)$, где $x_N^i \in \Gamma$, $i = 1, 2, \ldots, k$ и число k не зависит от N. Учитывая, что $|W_n(y)| \leq 1$ для произвольных n и $y \in \overline{D}$, имеем

$$\zeta_N^*(x) - \zeta_N(x) \leq \left(\prod_{i=1}^{k} \left[\varphi(x_N^i*)\right]^{n_N^i} - \prod_{i=1}^{k} \left[u(x_N^i*)\right]^{n_N^i} \right)$$

Пусть $L(\varepsilon)$ - модуль непрерывности функции $u(x)$, тогда справедливо

$$|\mathbf{E}\zeta_N^*(x) - u(x)| \leq L(\varepsilon)\mathbf{E}(n_N^1 + n_N^2 + \cdots + n_N^k).$$

Учитывая что среднее число частиц в N - ом поколении

$$\mathbf{E}\left(n_N^1 + n_N^2 + \cdots + n_N^k\right) \leq K^N < 1,$$

находим, что смещение не превосходит $L(\varepsilon)$. Конечность дисперсии следует из $|W_n(y)| \leq 1$.

Подробно рассмотрим случаи, когда $f(u) = g_0 \exp(u)$, $f(u) = g_0 \cos(u)$, $f(u) = g_0 \mathrm{sh}(u)$, $f(u) = g_0 \mathrm{ch}(u)$ $(g_0 - const)$ и для них получим соответствующие вероятности размножения.

Литература

1. Курант Р. *Уравнения с частными производными* // «Мир», Москва, 1964г., 789с.

2. Ермаков С.М., Михайлов Г.А. *Статистическое моделирование* // Москва, Наука, 1982. - 296 с. 2-е

3. Елепов Б.С., Михайлов Г.А. *Использование фундаментальных решений эллиптических уравнений для построения алгоритмов метода Монте-Карло.*// ЖВМиМФ, 1974, том 14, №3, 728-736.

4. Симонов Н.А. *Алгоритмы случайного блуждания по сферам для решения смешанной краевой задачи и задачи Неймана*//Сиб. журн. вычисл. матем., 2007, том 10, номер 2, стр.209Ц220.

5. Сипин А.С. *Решение двух краевых задач Дирихле методом Монте-Карло*// ЖВМиМФ, 1979, том 19, №2, 388-401.

6. Ермаков С. М., Некруткин В. В., Сипин А. С. *Случайные процессы для решения классических уравнений математической физики*// Москва, изд. «Наука», 1984 г.

7. Михайлов Г.А. *Решение задачи Дирихле для нелинейных эллиптических уравнений методом Монте-Карло*// Сиб. матем. журн.,1994, том 35, №5, 1085-1093.

8. Ermakov S.M., Nekrutkin V.V., Sipin A.S. *Random Processes for Classical Equations of Mathematical Physics*// Kluwer Acad. Publ., 1989

9. Харрис Т.Е. *Теория ветвящихся процессов* // Москва., «Мир»

10. Мейер П.А. *Вероятность и потенциалы* // Москва, «Мир», 1973г., с.106.

11. Ширяев А. Н. *Вероятность* // Москва . «Наука», 1989г.

Институт математики при НУУз

Uzbek Mathematical
Journal, 2017,№, pp.124-128

УДК.517.956.6

О краевой задаче для уравнения смешанного типа с сингулярными коэффициентами в неограниченной области

Салахитдинов М.С., М.Х.Рузиев

Maqolada singulyar koeffisiyentli aralash tipdagi tenglama uchun chegaralanmagan sohada chegaraviy masala o'rganilgan. Qo‘yilgan masalani korrekt ekanligi isbotlangan.

In this paper a boundary value problem for a mixed type equation with singular coefficients in an unbounded domain is studied. Correctness of the problem is proved.

Пусть $D = D^+ \cup D^- \cup I$ - область комплексной плоскости $z = x + iy$, где D^+- полуплоскость $y > 0$, D^-- конечная область полуплоскости $y < 0$, ограниченная характеристиками AC и BC уравнения

$$(signy)|y|^m u_{xx} + u_{yy} + \frac{\alpha_0}{|y|^{1-\frac{m}{2}}} u_x + \frac{\beta_0}{y} u_y = 0, \tag{1}$$

исходящими из точек $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$, и отрезком AB прямой $y = 0$, $I = \{(x, y) : -1 < x < 1, y = 0\}$. В уравнении (1) предполагается, что m, α_0, β_0 - некоторые действительные числа, удовлетворяющие условиям $m > 0$, $1 < \beta_0 < (m + 4)/2$, $|\alpha_0| < (m + 2)/2$.

Введем обозначения: $I_1 = \{(x, y) : -\infty < x < -1, y = 0\}$, $I_2 = \{(x, y) : 1 < x < \infty, y = 0\}$.

На плоскости параметров $\alpha_0 0 \beta_0$ рассмотрим треугольник $A_0B_0D_0$, ограниченный прямыми:

$A_0D_0 : \beta_0 - \alpha_0 = \frac{m+4}{2}$,
$B_0D_0 : \beta_0 + \alpha_0 = \frac{m+4}{2}$,
$A_0B_0 : \beta_0 = 1$.

Пусть $P(\alpha_0, \beta_0) \in \triangle A_0B_0D_0$.

Задача. Требуется найти в области D регулярное решение уравнения (1), обращающееся в нуль на бесконечности и удовлетворяющее краевым условиям

$$\lim_{y\to+0} y^{\beta_0-1} u(x, y) = \varphi_i(x), \quad \forall x \in \bar{I}_i, \quad i = 1, 2, \tag{2}$$

$$D^{\bar{\alpha}}_{-1,x}u[\theta_0(x)] = a(x)\tau(x) + b(x), \qquad -1 < x < 1, \tag{3}$$

и условию сопряжения

$$\lim_{y\to+0} y^{2-\beta_0}\frac{\partial}{\partial y}(y^{\beta_0-1}u(x,y)) = \lim_{y\to-0}(-y)^{2-\beta_0}\frac{\partial}{\partial y}((-y)^{\beta_0-1}u(x,y)), \quad x\in I. \tag{4}$$

Пределы при $x = \pm 1$ могут иметь особенности порядка ниже $1-\bar{\alpha}-\bar{\beta}$, где $\bar{\alpha} = (m+2(2-\beta_0+\alpha_0)/(2(m+2))$, $\bar{\beta} = (m+2(2-\beta_0-\alpha_0)/(2(m+2))$, $\tau(x) = \lim\limits_{y\to-0}(-y)^{\beta_0-1}u(x,y))$, $a(x)$,$b(x)$, $\varphi_i(x)$, $i = 1,2$ - заданные функции, $b(x)\in C[-1,1]\cap C^3(-1,1)$, $b(-1) = 0$, $b(1) = 0$, $a(x)\in C[-1,1]\cap C^3(-1,1)$, $a(1)\le 0$, непрерывные функции $\varphi_i(x)$, $i = 1,2$ соответственно в окрестности точек $x=-1$, $x = 1$ обращаются в нуль и для достаточно больших $|x|$ удовлетворяют неравенству $|\varphi_i(x)| \le M|x|^{-\delta_1}$, где δ_1, M - положительные постоянные,

$D^{\bar{\alpha}}_{-1,x}$ - оператор дробного дифференцирования в смысле Римана-Лиувилля [1], а точкой пересечения характеристики AC с характеристикой, исходящей из точки $(x_0,0)$, $x_0\in(-1,1)$, является

$\theta_0(x_0) = \left(\frac{x_0-1}{2};\ -\left(\frac{m+2}{4}(x_0+1)\right)^{\frac{2}{m+2}}\right)$. Отметим, что некоторые задачи типа задачи Бицадзе-Самарского для уравнения (1) в случае $\alpha_0 = 0$ и $\beta_0 = 0$ в ограниченных и неограниченных областях исследованы в работах[2,3].

Теорема. Пусть выполнены условия $-\frac{m+2}{2} < \alpha_0 \le 0$, $a(x)\in C[-1,1]\cap C^3(-1,1)$, $a(1)\le 0$. Тогда задача однозначно разрешима.

Доказательство. Решение видоизмененной задачи Коши для уравнения (1) в области D^-, удовлетворяющее начальным данным $\lim\limits_{y\to-0}(-y)^{\beta_0-1}u(x,y) = \tau(x)$, $x\in\bar{I}$, $\lim\limits_{y\to-0}(-y)^{2-\beta_0}\frac{\partial}{\partial y}((-y)^{\beta_0-1}u(x,y)) = \nu(x), x\in I$, дается формулой[4]

$$u(x,y) = \bar{\gamma}_1(-y)^{1-\beta_0}\int\limits_{-1}^{1}\tau\left[x+\frac{2t}{m+2}(-y)^{(m+2)/2}\right](1+t)^{\bar{\beta}-1}(1-t)^{\bar{\alpha}-1}dt+$$

$$+\bar{\gamma}_2\int\limits_{-1}^{1}\nu\left[x+\frac{2t}{m+2}(-y)^{(m+2)/2}\right](1+t)^{-\bar{\alpha}}(1-t)^{-\bar{\beta}}dt, \tag{5}$$

где $\bar{\gamma}_1 = \Gamma(\bar{\alpha}+\bar{\beta})2^{1-\bar{\alpha}-\bar{\beta}}/(\Gamma(\bar{\beta})\Gamma(\bar{\alpha}))$, $\bar{\gamma}_2 = -\Gamma(2-\bar{\alpha}-\bar{\beta})2^{\bar{\alpha}+\bar{\beta}-1}/(\bar{\beta}_0 -$

$1)\Gamma(1-\bar{\beta})\Gamma(1-\bar{\alpha}))$.

В силу формулы (5), из краевого условия (3) после несложных вычислений получим

$$\left(\bar{\gamma}_1\left(\frac{m+2}{2}\right)^{\bar{\alpha}+\bar{\beta}-1}\Gamma(\bar{\alpha})-(1+x)^{1-\bar{\beta}}a(x)\right)\tau(x)-(1+x)^{1-\bar{\beta}}b(x)=$$

$$=-\bar{\gamma}_2 2^{1-\bar{\alpha}-\bar{\beta}}\Gamma(1-\bar{\beta})D^{\bar{\alpha}+\bar{\beta}-1}_{-1,x}\nu(x). \qquad (6)$$

Применив к обеим частям равенства (6) оператор $D^{1-\bar{\alpha}-\bar{\beta}}_{-1,x}$, имеем

$$\nu(x)=\gamma D^{1-\bar{\alpha}-\bar{\beta}}_{-1,x}a_1(x)\tau(x)+b_1(x), \qquad (7)$$

где

$\gamma=\frac{(\beta_0-1)\Gamma(1-\bar{\alpha})}{\Gamma(2-\bar{\alpha}-\bar{\beta})}$, $a_1(x)=\bar{\gamma}_1(\frac{m+2}{2})^{\bar{\alpha}+\bar{\beta}-1}\Gamma(\bar{\alpha})-(1+x)^{1-\bar{\beta}}a(x)$, $b_1(x)=-\gamma D^{1-\bar{\alpha}-\bar{\beta}}_{-1,x}(1+x)^{1-\bar{\beta}}b(x)$. Равенство (7) является первым функциональным соотношением между неизвестными функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенным на интервал $(-1,1)$ оси $y=0$ из области D^-.

Решение уравнения (1) в эллиптической полуплоскости $y>0$, удовлетворяющее (3) и условию $\lim\limits_{y\to+0} y^{\beta_0-1}u(x,y)=\tau(x)$, $x\in\bar{I}$, представимо в виде [4]

$$u(x,y)=\bar{k}_2(\beta_0-1)\int\limits_{-1}^{1}\tau(t)(r_0^2)^{\bar{a}-1}\exp\left(2b\arcsin\frac{t-x}{r_0}\right)dt+F_1(x,y), \qquad (8)$$

где

$r_0^2=(x-t)^2+\frac{4}{(m+2)^2}y^{m+2}$,

$F_1(x,y)=\bar{k}_2(\beta_0-1)\left(\int\limits_{-\infty}^{-1}\varphi_1(t)\left(r_0^2\right)^{\bar{a}-1}\exp\left(2b\arcsin\frac{t-x}{r_0}\right)dt+\right.$

$\left.+\int\limits_{1}^{\infty}\varphi_2(t)\left(r_0^2\right)^{\bar{a}-1}\exp\left(2b\arcsin\frac{t-x}{r_0}\right)dt\right)$,

$\bar{k}_2=\frac{1}{\beta_0-1}\left(\frac{2}{m+2}\right)^{1-2\bar{a}}\frac{2^{2\bar{a}}l\bar{l}\Gamma(l)\Gamma(\bar{l})}{\pi 2\bar{a}\Gamma(2\bar{a})}$, $2\bar{a}=\bar{\alpha}+\bar{\beta}$, $l=\bar{a}+bi$, $b=\frac{\alpha_0}{m+2}$.

Умножая равенство (8) на y^{β_0-1} и дифференцируя по y, учитывая равенства

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(y^{\beta_0-1}\left(r_0^2\right)^{\bar{a}-1}\exp\left(2b\arcsin\frac{t-x}{r_0}\right)\right)=$$
$$=\frac{m+2}{2}y^{\beta_0-2}\frac{\partial}{\partial t}\left((x-t)\left(r_0^2\right)^{\bar{a}-1}\exp\left(2b\arcsin\frac{t-x}{r_0}\right)\right),$$
после несложных вычислений получим

$$\frac{2}{\bar{k}_2(m+2)(1-\beta_0)}\nu(x)=e^{-b\pi}\int\limits_{-1}^{x}(x-t)^{2\bar{a}-1}\tau'(t)dt-$$
$$-e^{b\pi}\int\limits_{x}^{1}(t-x)^{2\bar{a}-1}\tau'(t)dt+\Phi(x), \qquad (9)$$

где $\Phi\left(x\right)=\lim\limits_{y\to+0}y^{2-\beta_0}\frac{\partial(y^{\beta_0-1}F_1(x,y))}{\partial y}$. Это есть второе функциональное соотношение между неизвестными функциями $\nu(x)$ и $\tau(x)$, принесенное на интервал I оси $y=0$ из верхней полуплоскости.

С учетом (4), исключая функцию $\nu(x)$ из (7) и (9), получим

$$\gamma D_{-1,x}^{1-\bar{\alpha}-\bar{\beta}}a_1(x)\tau(x)+b_1(x)=-\bar{k}_2(\beta_0-1)\frac{m+2}{2}\times$$
$$\left(e^{-b\pi}\int\limits_{-1}^{x}\frac{\tau'(t)dt}{(x-t)^{1-2\bar{a}}}-e^{b\pi}\int\limits_{x}^{1}\frac{\tau'(t)dt}{(t-x)^{1-2\bar{a}}}\right)+\Phi(x),\qquad x\in(-1,1). \quad (10)$$

Применив оператор $\Gamma(1-\bar{\alpha}-\bar{\beta})D_{-1,x}^{\bar{\alpha}+\bar{\beta}-1}$ к обеим частям равенства (10), после несложных преобразований получим сингулярное интегральное уравнение относительно $\tau(x)$:

$$A(x)\tau(x)+\frac{B(x)}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{1+x}{1+t}\right)^{1-\bar{\alpha}-\bar{\beta}}\frac{\tau(t)dt}{t-x}=\Phi_1(x),\quad x\in(-1,1),\quad (11)$$

где

$$A(x)=\gamma\Gamma(1-\bar{\alpha}-\bar{\beta})a_1(x)+\bar{k}_2(\beta_0-1)\frac{m+2}{2}\frac{\pi\left(e^{-b\pi}-e^{b\pi}cos(\bar{\alpha}+\bar{\beta})\pi\right)}{sin(\bar{\alpha}+\bar{\beta})\pi},$$

$$B(x)=-\bar{k}_2(\beta_0-1)\tfrac{m+2}{2}e^{b\pi}\pi i,$$

$\Phi_1(x) = \Gamma(1-\bar{\alpha}-\bar{\beta})D_{-1,x}^{\bar{\alpha}+\bar{\beta}-1}(\Phi(x)-b_1(x))$.

Полагая $(1+x)^{\bar{\alpha}+\bar{\beta}-1}\tau(x) = \rho(x)$, $(1+x)^{\bar{\alpha}+\bar{\beta}-1}\Phi_1(x) = \Phi_2(x)$, уравнение (11) запишем в виде

$$A(x)\rho(x) + \frac{B(x)}{\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{\rho(t)dt}{t-x} = \Phi_2(x). \tag{12}$$

Так как $A^2(x) - B^2(x) \neq 0$, то уравнение (12) является уравнением нормального типа. В силу условия теоремы его индекс в классе функций, обращающихся в бесконечность при $x = -1$ и ограниченных при $x = 1$, равен нулю.Регуляризируя уравнения (12) методом Карлемана -Векуа[5] и возвращаясь к прежним функциям, находим функцию $\tau(x)$. Далее, подставляя найденное $\tau(x)$ в (7), найдем функцию $\nu(x)$. Зная функции $\tau(x)$ и $\nu(x)$, по формулам (5) и (8) получаем решение $u(x,y)$ задачи соответственно в областях D^- и D^+.

Литература

1. Нахушев А. М. Элементы дробного исчисления и их применение. Нальчик, Изд-во КБНЦ РАН, 2000.

2. Абрегов М.Х. Некоторые задачи типа задачи Бицадзе- Самарского для одного уравнения смешанного типа. Дифференциальные уравнения. 1974,т.10, No.1,с.1-6.

3. Кумыкова С.К.,Шарданова М.А. Задача Бицадзе-Самарского для уравнения смешанного типа в неограниченной области. Успехи современного естествознания. 2015,No.1,с.80-83.

4. Мирсабуров М., Рузиев М.Х. Нелокальная краевая задача в неограниченной области для уравнения $(signy)|y|^m u_{xx} + u_{yy} + \frac{\alpha_0}{|y|^{1-\frac{m}{2}}}u_x + \frac{\beta_0}{y}u_y = 0$. Узбекский математический журнал. 1994, 3, с.79-84.

5. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике.Наука,М.1968.

Институт математики при НУУз.

Uzbek Mathematical
Journal, 2017,№1, pp.129-139

УДК 517.946

Регуляризация задачи Коши для линейных систем уравнений эллиптического типа первого порядка с постоянными коэффициентами в неограниченной области

Турсунов Ф.Р.

Bu ishda koeffitsiyentlari o‘zgarmas bo‘lgan birinchi tartibli elliptik tenglamalar sistemasi uchun chegaralanmagan sohada Koshi masalasining yechimi qaralgan. Masala yechimining regulyarizasiyasi oshkor ko‘rinishda keltirilgan.

In this paper we consider a regularization of the Cauchy problem for a system of the first order linear elliptic equations in an unbounded domain. The regularization of a solution to the Cauchy problem is constructed in an explicit form.

1. Введение

В работе изучается регуляризации решении линейных систем эллиптического типа первого порядка с постоянными коэффициентами в области G по ее известным значениям $f(y)$ на гладкой части S границы ∂G т.е. задача Коши для линейных систем эллиптического типа первого порядка с постоянными коэффициентами.

Рассматриваемая задача относится к некорректным задачам, т.е. решение задача не устойчива.

Если S - кусок гиперплоскости и $f(y)$ аналитична и аналитически продолжаема в G, то восстановление $u(y)$ по ее известным значениям $f(y)$ на гладкой части S границы ∂G осуществимо, единственно но неустойчиво. Поэтому когда вместе $f(y)$ задано ее приближенное значения $f_\delta(y)$ то построение приближенного решения невозможно.

В работе строится семейство вектор функций $u(x,\sigma,f_\delta) = u_{\sigma\delta}(x)$ зависящих от параметра σ, и доказывается, что при некоторых условиях и специальном выборе параметра $\sigma = \sigma\,(\delta)$ семейство $u_{\sigma\delta}(x)$ сходится в обычном смысле к решению $u(x)$ в точке $x \in G$ при $\delta \to 0$. Семейство $u(x,\sigma,f_\delta)$называется регуляризованние решении задачи Коши по М.М. Лаврентьева [2].

Пусть $G \subset R^2$ лежит внутри полосы

$$0 < y_2 < h, \quad h = \frac{\pi}{\rho}, \rho > 0$$

граница, которой состоит из прямой $y_2 = 0$, и некоторой кривой $y_2 = f(y_1)$ удовлетворяющей условиям

$$0 < f(y_1) < h, \quad |f(y_1)| \leq M < \infty$$

Через $A_{l\times n}(x)$ обозначим класс матриц $D(x^T)$, элементами состоящими из линейных форм с постоянными коэффициентами из C которые удовлетворяет условию:

$$D*(x^T)D(x^T) = E(|x|^2 u^0), \tag{1}$$

где $D*(x^T)$- сопряженная матрица к $D(x^T)$.

В области G рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида:

$$D\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x) = 0, \tag{2}$$

где $D(x^T) \in A_{l\times n}(x)$.

Пусть $x = (x_1, x_2)$ и $y = (y_1, y_2)$ точки двумерного Евклидового пространства R^2, и $x^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$-транспонированный вектор x.

Введем следующие обозначения. $r = |y - x|$, $\alpha = |y_1 - x_1|$, $\alpha^2 = s$, $W = i\sqrt{u^2 + \alpha^2} + y_2$, $u \geq 0$, $W_0 = i\alpha + y_2$, $\frac{\partial}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\right)^T$, $u(x) = (u_1(x), u_2(x), ..., u_n(x))^T$, $u^0 = (1, 1, ..., 1) \in R^n$, $y' = (y_1, 0)$.

$E(x)$ - диагональная матрица размерность $(n \times n)$, $n \geq 2$.

Обозначим:

$$K_\rho(G) = \left\{u(y) : u(y) \in K(G),\ |u(y)| \leq \exp\left[0(\exp\rho\,|y'|)\right],\ |y'| \to \infty,\ y \in G\right\}.$$

Если $u(y) \in K_\rho(G)$ удовлетворяет граничному условию роста

$$|u(y)| \leq C\exp\left[a\cos\rho_1\left(y_2 - \frac{h}{2}\right)\exp\rho_1\,|y'|\right],\ 0 < \rho_1 < \rho,\ C = const,$$

$a > 0,\ \ y \in \partial G$ то справедлива интегральная формула

$$u(x) = \int\limits_{\partial G} M(y,x)u(y)dS_y, x \in G, \tag{3}$$

где $M(y,x) = \left(E\left(\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r}u^0\right)D * \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right)D(t^T)$,

$t = (t_1, t_2)$ - единичная внешняя нормаль, проведенная в точке y на поверхности ∂G.

Теперь обозначим $\Phi(y,x)$ через $\Phi_\sigma(y,x)$, где σ-параметр и имеем:

$$u_\sigma(x) = \int\limits_S N_\sigma(y,x)u(y)dS_y, x \in G \tag{4}$$

где $N_\sigma(y,x) = \left(E\left(\Phi_\sigma\left(y,x\right)u^\circ\right)D * \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right)D\left(t^T\right).$

Функция $\Phi_\sigma(y,x)$ определим следующим образом:

$$\Phi_\sigma(y,x) = \frac{\phi_\sigma(y,x)}{2\pi K(x_2)} \tag{5}$$

где

$$\phi_\sigma(y,x) = \int\limits_0^\infty Im\frac{K(W)}{W - x_2}\frac{udu}{\sqrt{u^2+\alpha^2}} \tag{6}$$

$$K(W) = \frac{\exp\sigma W}{W - x_2 + 2h} \tag{7}$$

$$W = i\sqrt{u^2+\alpha^2} + y_2,\ \ W_0 = i\left|\alpha\right| + y_2,\ \ K(x_2) = \frac{1}{2h}\exp\sigma x_2, \quad 0 < x_2 < h$$

Используя методику работы Ш. Ярмухаммедова [3] обозначим:

$$-2\pi K(x_2)\frac{\partial\Phi_\sigma}{\partial y_1} = \frac{(y_1 - x_1)}{r^2}ReK(W_0) - sign(y_1 - x_1)\frac{(y_2 - x_2)}{r^2}ImK(W_0) \tag{8}$$

$$-2\pi K(x_2)\frac{\partial\Phi_\sigma}{\partial y_2} = \frac{(y_2 - x_2)}{r^2}ReK(W_0) + \frac{|y_1 - x_1|}{r^2}ImK(W_0) \tag{9}$$

2. Постановка задача

Пусть $u(y) \in K_\rho(G)$ и на части границы области S задано значение вектор – функции $u(y)$, т.е.

$$u(y)\,|_S = f(y), \;\; y \in S \tag{10}$$

где $f(y)$ заданная непрерывная вектор – функция.

Требуется продолжить $u(y)$в G, используя условие (10). Задача (2) и (10) называется задача Коши. Для решения этой задача верно следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $u(y) \in K_\rho(G)$ удовлетворяет условию роста*

$$|u(y)| \le \exp\left[0(\exp|y'|)\right], \quad |y'| \to \infty, \quad y \in \partial G \tag{11}$$

и на части границы области G, $T = \{y : y_2 = 0\}$

$$|u(y)| < 1, \;\; y \in T = \partial G \backslash S. \tag{12}$$

Тогда справедлива неравенство

$$|u(x) - u_\sigma(x)| \le C(x)\exp(-\sigma x_2), x \in G \tag{13}$$

Доказательство. Обозначим через I разность

$$I = u(x) - u_\sigma(x) = \int\limits_{\partial G} N_\sigma(y,x)u(y)ds_y - \int\limits_S N_\sigma(y,x)u(y)ds_y =$$

$$\int\limits_S N_\sigma(y,x)u(y)ds_y + \int\limits_{y_2=0} N_\sigma(y,x)u(y)ds_y -$$

$$-\int\limits_S N_\sigma(y,x)u(y)ds_y = \int\limits_{y_2=0} N_\sigma(y,x)u(y)ds_y$$

Теперь (13) следует из неравенства

$$|I| \le C(x)\exp(-\sigma x_2), x \in G. \tag{14}$$

Это интеграл состоит из интегралов типа $\int\limits_T \frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial y_i} u_j(y) dS_y, \quad i = \overline{1,2}.$

Оценим сначала $\Phi_\sigma(y,x)$. В (6) совершим замену переменных

$\sqrt{u^2+\alpha^2} \to u$, и отделим мнимую часть. Тогда получим:

$$\phi_\sigma(y,x) = \exp(-\sigma x_2) \int\limits_{|\alpha|}^{\infty} \frac{\beta(\beta+3h-u^2)\sin\sigma u}{(u^2+\beta^2)(u^2+(3h+\beta)^2)} du +$$

$$+\exp(-\sigma y_2) \int\limits_{|\alpha|}^{\infty} \frac{u(2\beta+3h)\cos\sigma u}{(u^2+\beta^2)(u^2+(3h+\beta)^2)} du \beta = y_2 - x_2.$$

Оценим интегралы. Из $u \geq |x_1 - y_1|\,, \quad h \leq 3h+\beta \leq 5h,$
$0 \leq y_2 \leq h, \quad 0 < x_2 < h,$ следует очевидные неравенства:

$$\left| \int\limits_{|\alpha|}^{\infty} \frac{\beta(\beta+3h)\sin\sigma u}{(u^2+\beta^2)(u^2+(3h+\beta)^2)} du \right| \leq \frac{5h}{\alpha^2+h^2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$\left| \int\limits_{|\alpha|}^{\infty} \frac{(\beta+3h)\cos\sigma u}{(u^2+\beta^2)(u^2+(3h+\beta)^2)} du \right| \leq \frac{5}{3} \ln\left(1+\frac{15h}{r^2}\right).$$

Интегрируя по частям, выводим также неравенство

$$\left| \int\limits_{|\alpha|}^{\infty} \frac{\beta u \sin\sigma u}{(u^2+\beta^2)(u^2+(3h+\beta)^2)} du \right| \leq \frac{2|\beta|}{\sigma} \left[\frac{1}{\alpha^2+h^2} + 2(3h)^{-1} \ln\left(1+\frac{15h}{r^2}\right) \right],$$
$\sigma > 0, \quad \beta = y_2 - x_2, \quad |\alpha| = |y_1 - x_1|\,.$

Следовательно

$$|\phi_\sigma(y,x)| \leq \frac{5\pi}{2} \cdot \frac{h}{\alpha^2+h^2} + \frac{5}{3} \ln\left(1+\frac{15h}{r^2}\right) +$$

$$+\frac{2\,|\beta|}{\sigma} \left[\frac{1}{\alpha^2+h^2} + 2(3h)^{-1} \ln\left(1+\frac{15h}{r^2}\right) \right].$$

Согласно (5) для $\Phi_\sigma(y,x)$ получим:

$$|\Phi_\sigma(y,x)| \leq \left[\frac{5\pi}{2} \cdot \frac{h}{\alpha^2+h^2} + \frac{5}{3} \ln\left(1+\frac{15h}{r^2}\right) + \right.$$

$$+\frac{2\,|\beta|}{\sigma}\left[\frac{1}{\alpha^2+h^2}+2(3h)^{-1}\ln\left(1+\frac{15h}{r^2}\right)\right]\right]\exp\sigma y_2 \tag{15}$$

$$\sigma>0,\quad \beta=y_2-x_2,\quad |\alpha|=|y_1-x_1|$$

Теперь из (12) и (15) получим:

$$\left|\int\limits_{y_2=0}\frac{\partial u}{\partial y_i}\Phi_\sigma(y,x)dS\right|\leq C(x)\exp(-\sigma x_2),\ \ \sigma\geq\sigma_0>0,\ \ x\in G. \tag{16}$$

Из (7) для $ReK\,(W_0)$ и $ImK\,(W_0)$ имеем:

$$\begin{aligned} ReK\,(W_0) &= \tfrac{\beta_1\cos\sigma\alpha+\alpha\sin\sigma\alpha}{\alpha^2+\beta_1^2}\exp\sigma y_2\\ ImK\,(W_0) &= \tfrac{\beta_1\sin\sigma|\alpha|+|\alpha|\cos\sigma\alpha}{\alpha^2+\beta_1^2}\exp\sigma y_2,\quad \beta_1=\beta+3h \end{aligned} \tag{17}$$

Покажем что

$$\left|\int\limits_{y_2=0}u\frac{\partial u}{\partial y_1}\Phi_\sigma(y,x)dS\right|\leq C(x)\exp(-\sigma x_2),\ \ \sigma\geq\sigma_0>0,\ \ x\in G. \tag{18}$$

Следовательно оцениваем интегралы используя (12) и (8):

$$I_1^1=\int\limits_{y_2=0}\frac{\partial\Phi_\sigma}{\partial y_1}u_j(y)dS=2h\left(I_1^1+I_2^1+I_3^1+I_4^1\right)\exp(-\sigma x_2),\quad j=1,2. \tag{19}$$

$$\left|I_1^1\right|=\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\alpha\beta_1\cos\sigma\alpha\,u_j(y_1,0)}{(\alpha^2+\beta_1^2)(\alpha^2+x_2^2)}dy_1\right|\leq$$

$$\leq|\beta_1|\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{|\alpha|\,dy_1}{(\alpha^2+\beta_1^2)(\alpha^2+x_2^2)}\leq arctg\left.\frac{\alpha}{\beta_1}\right|_{-\infty}^{\infty}=\pi,\quad \beta_1=2h-x_2$$

$$\left|I_2^1\right|=\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\alpha^2\sin\sigma\alpha\,u_j(y_1,0)}{(\alpha^2+\beta_1^2)(\alpha^2+x_2^2)}dy_1\right|\leq\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\alpha^2dy_1}{(\alpha^2+\beta_1^2)(\alpha^2+x_2^2)}\leq\frac{\pi}{\beta_1}\leq\frac{\pi}{h},$$

$$|I_3^1| = \left|\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x_2\beta_1 \cos\sigma\alpha\, u_j(y_1,0)}{(\alpha^2+\beta_1^2)(\alpha^2+x_2^2)}dy_1\right| \le \frac{|x_2|\,|\beta_1|}{\beta_1^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dy_1}{(\alpha^2+x_2^2)} \le \frac{1}{\beta_1} arctg\ \frac{\alpha}{x_2}\Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{h},$$

$$|I_3^1| = \left|\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x_2\alpha \cos\sigma\alpha\, u_j(y_1,0)}{(\alpha^2+\beta_1^2)(\alpha^2+x_2^2)}dy_1\right| \le \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dy_1}{(\alpha^2+\beta_1^2)} \le \frac{1}{\beta_1} arctg\ \frac{\alpha}{\beta_1}\Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{h}\ .$$

Полученные оценки поставляем в (19) и получим:

$$|I_1| = \left|\int\limits_{y_2=0} \frac{\partial\Phi_\sigma}{\partial y_1}u_j(y)dS\right| \le \pi\left(1+\frac{3}{h}\right)\exp(-\sigma x_2),\ \ x\in G. \tag{20}$$

Теперь покажем что

$$\left|\int\limits_{y_2=0} u\frac{\partial u}{\partial y_2}\Phi_\sigma(y,x)dS\right| \le C(x)\exp(-\sigma x_2),\ \ \sigma\ge\sigma_0>0,\ \ x\in G \tag{21}$$

Так как:

$$\int\limits_{y_2=0}\frac{y_2-x_2}{r^2}ReK(W_0)udy_1 =$$

$$= -\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x_2}{\alpha^2+x_2^2}\frac{\beta_1\cos\sigma(y_1-x_1)+(y_1-x_1)\sin\sigma(y_1-x_1)}{\beta_1^2+(y_1-x_1)^2}u(y_1,0)dy_1$$

$$I_1^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x_2\beta_1\cos\sigma\alpha\, u(y_1,0)}{(\alpha^2+x_2^2)(\beta_1^2+\alpha^2)}dy_1 I_2^2 = -\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x_2\alpha\sin\sigma\alpha\, u(y_1,0)}{(\alpha^2+x_2^2)(\beta_1^2+\alpha^2)}dy_1$$

Интегралы I_1^2 и I_2^2 являются интегралами Дирихле, которые при $x_2\neq 0$, $\sigma\to\infty$ будут равны нулю, а при $x_2=0$, $\sigma\to\infty$ равно $\frac{\pi}{\beta_1}$. Следовательно, при $x_2=0$,$\sigma\to\infty$ $I_2^2=0$. Аналогично

$$\int\limits_{y_2=0}\frac{|\alpha|}{r^2}ImK(W_0)udy_1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\beta_1\alpha\sin\sigma\alpha\ \ u(y_1,0)dy_1}{(\alpha^2+x_2^2)\big(\alpha^2+\beta_1^2\big)} + \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\alpha^2\cos\sigma\alpha\ \ u(y_1,0)dy_1}{(\alpha^2+x_2^2)\big(\alpha^2+\beta_1^2\big)}$$

$\alpha = y_1 - x_1,\quad \beta_1 = 2h - x_2.$

Согласно (12) второй интеграл по модулю

$$\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\alpha^2\cos\sigma\alpha\ u(y_1,0)dy_1}{(\alpha^2+x_2^2)\,(\alpha^2+\beta_1^2)}\right|\le\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dy_1}{\alpha^2+\beta_1^2}\le\frac{\pi}{\beta_1}\le\frac{\pi}{h}.$$

Первый интеграл равен интегралу Дирихле $\beta_1\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{t^2\ u(t+x_1,0)}{(\alpha^2+x_2^2)\left(\alpha^2+\beta_1^2\right)}\cdot\frac{\sin\sigma t}{t}dt$ которая при $\sigma\to\infty$ равен нулю, если $x_2\neq 0$, и равен $\frac{\pi}{\beta_1}u(x_1,0)=\frac{\pi}{h}$ когда $x_2=0$. Полученные результаты подставляем (21) и получим:

$$|I_2|=\left|\int\limits_{y_2=0}\frac{\partial\Phi_\sigma}{\partial y_2}u_j(y)dS\right|\le\pi\left(1+\frac{2}{h}\right)\exp(-\sigma x_2),\ \ \sigma\ge\sigma_0>0,\ \ x\in G. \tag{22}$$

Оценивая $I=u(x)-u_\sigma(x)=\int\limits_T N(y,x)u(y)dS_y$ с учетом (20) и (22) получим доказательство теоремы 1. □

Следствие. Придельное равенство

$$\lim_{\sigma\to\infty}u_\sigma(x)=u(x)$$

выполняется равномерно в любой замкнутой под области из G.

3. Оценка устойчивости

Приведем оценку устойчивости. Пусть $u(y)\in K_\rho(G)$ на прямой $y_2=0$ удовлетворяет граничному условию (12) а на S условию

$$|u(y)|\le\delta<1,\ \ y\in S. \tag{23}$$

Покажем, что при этих условиях справедливо неравенство

$$|u(x)|\le C(x)\delta^{\frac{x_2}{h}},\ x\in G \tag{24}$$

где: $C(x)=C_\rho\int\limits_S\frac{1}{(y_1-x_1)^2+h^2}\frac{dS}{r},\ \ r=|y-x|$, $C_\rho=const.$

Неравенство (24) следует из оценки

$$|u_\sigma(x)|\le C(x)\delta\ \exp(\sigma h-\sigma x_2). \tag{25}$$

Действительно, из (24) , (14) и разность $u(x)-u_\sigma(x)$ находим неравен-

ство
$$|u(x)| \le C(x)\exp(-\sigma x_2)\left[1+\delta\ \exp\sigma h\right], x \in G. \tag{26}$$
Пологая здесь $\sigma = h^{-1}\ln\delta$ получим (24).

Из (5) имеем:
$$-2\pi K(\mathrm{x}_2) = \int\limits_S \frac{\cos\theta}{r} ReK(W_0)udS +$$
$$+\int\limits_S \left[\frac{\alpha}{r^2}\cos\alpha_1 - \frac{y_2-x_2}{r^2}\cos\alpha_2 sign\alpha\right] ImK(W_0)udS$$
где $ReK(W_0)$ и $ImK(W_0)$ определяется из (17).

Так как $\cos\theta = \frac{y_1-x_1}{r}\cos\alpha_1 - \frac{y_2-x_2}{r}\cos\alpha_2$.

То из (23) получим:
$$\left|\int\limits_S \frac{\cos\theta}{r} ReK(W_0)udS\right| \le C(x)\delta\exp(\sigma h),\ \sigma > 0,\ x \in G. \tag{27}$$
Аналогично:
$$\left|\int\limits_S \left[\frac{\alpha}{r^2}\cos\alpha_1 - \frac{y_2-x_2}{r^2}\cos\alpha_2 sign\alpha\right] ImK(W_0)udS\right| \le C(x)\delta\exp(\sigma h),$$
$\sigma > 0,\ x \in G$.

Далее, интеграл в правой части (4) представим в виде разности и первый интеграл обозначим через I_1. Из (21) имеем:
$$I_1 = \int\limits_S \frac{\beta_1\cos\alpha_2\exp\sigma y_2}{\alpha^2+\beta_1^2}\cdot\frac{\alpha\sin\sigma\alpha}{\alpha^2+(y_2-x_2)^2}u(y_1,y_2)dS +$$
$$+\int\limits_S \frac{\alpha\cos\alpha_2\cos\sigma(y_2-x_2)\exp\sigma y_2}{(\alpha^2+\beta_1^2)(\alpha^2+(y_2-x_2)^2)}u(y_1,y_2)dS$$
$$\alpha = y_1 - x_1, \beta_1 = y_2 - x_2 + 3h, \quad y_2 = f(y_1),\ \ |y_1| < \infty.$$
Второй интеграл не превосходит величины $\frac{\pi}{2h}\delta\exp\sigma h$. Первый интеграл

равен:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(y_1, y_2) \frac{y_1 \sin \sigma y_1}{y_1^2 + (y_2 - x_2)^2} dy_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2 \phi\left(\frac{t}{\sigma}, y_2\right)}{t^2 + (y_2 - x_2)^2} \frac{\sin t}{t} dt =$$

$$= \int_{|t| \le 1} \frac{t^2 \phi\left(\frac{t}{\sigma}, y_2\right)}{t^2 + (y_2 - x_2)^2} \frac{\sin t}{t} dt + \int_{|t| \ge 1} \frac{t^2 \phi\left(\frac{t}{\sigma}, y_2\right)}{t^2 + (y_2 - x_2)^2} \frac{\sin t}{t} dt$$

где: $\phi(t, y_2) = \frac{\sigma^2 u(t, y_2)}{t^2 + \beta_1^2 \sigma^2} \cos \alpha_2 \exp \sigma y_2, \qquad y_2 = f\left(x_1 + \frac{t}{\sigma}\right)$

Интеграл по $|t| \ge 1$

$$\int_{|t| \ge 1} \frac{t^2 \phi\left(\frac{t}{\sigma}, y_2\right)}{t^2 + (y_2 - x_2)^2} \frac{\sin t}{t} dt \le 2\delta \exp \sigma h \int_1^{\infty} \frac{\sigma^2}{t^2 + \sigma^2 h^2} \frac{dt}{t} \le$$

$$\le 2\delta \exp \sigma h \int_{\frac{1}{\sigma}}^{\infty} \frac{1}{t^2 + h^2} \frac{dt}{t} \le 2\delta \exp \sigma h \left(\frac{\ln \sigma}{h^2} + \frac{\pi}{2h} \right), \ \ \sigma > 1.$$

А интеграл по $|t| \le 1$ не превосходит величины $\frac{2\delta}{h} \exp \sigma h$.

Следовательно, $|I_1| \le C_\rho \delta \exp \sigma h \ln(1 + \sigma), \qquad \sigma \ge \sigma_0 > 0.$

Аналогично имеем:

$$\left| \int_S \frac{y_2 - x_2}{r^2} sign\alpha Im K(W_0) u(y_1, y_2) dS \right| \le C_\rho \delta \exp \sigma h \ln(1+\sigma), \qquad \sigma \ge \sigma_0 > 0.$$

Теперь для $u_\sigma(x)$ выводим неравенство

$$u_\sigma(x) \le C_\rho \delta \exp \sigma (h - x_2) \ln(1 + \sigma), \ x \in G, \quad \sigma \ge \sigma_0 > 0.$$

Отсюда согласно (14) и разность $I = u(x) - u_\sigma(x)$ получим:

$$|u(x)| \le C_\rho (1 + \delta \exp \sigma h) \exp(-\sigma x_2) \ln(1 + \sigma), \ \ x \in G, \qquad \sigma \ge \sigma_0 > 0.$$

Пусть $u(y) \in K_\rho(G)$ и на S задано непрерывное приближение вектор функции $u(y)$ с уклонением δ, т.е.

$$\sup_S |u(y) - f_\delta(y)| < \delta, \quad 0 < \delta < 1. \tag{28}$$

Теорема 2. *Пусть* $u(y) \in K_\rho(G)$ *удовлетворяет условиям* (11), (12) *и* (28). *Если* $u_{\sigma\delta} = \int\limits_S N(y,x) f_\delta(y) dS_y, \quad x \in G$, *тогда*

$$|u(x) - u_{\sigma\delta}(x)| \le C(x)\delta^{\frac{x_2}{h}}, \qquad x \in G. \tag{29}$$

Доказательство.

$$u(x) - u_{\sigma\delta}(x) = \int\limits_{y_2=0} N(y,x)u(y)dS_y + \int\limits_S N(y,x)(u(y) - f_\delta(y))dS_y.$$

Теперь учитывая (13), (24), (12), (28) и повторяя ход доказательство неравенство (24) пологая $\sigma = \frac{1}{h} \ln \frac{1}{\delta}$ получим (29).

Следствие *Предельное равенство* $\lim\limits_{\delta \to 0} u_{\sigma\delta}(x) = u(x), \quad x \in G$ *выполняется равномерно на каждом компакте из* G.

Литература

1. Н.Н. Тарханов. Об интегральном представленном решений систем линейных дифференциальной уравнений первого порядка в частных производных и некоторые приложениях. Некоторые вопросы многомерного комплексного анализа. Красноярск –1980, стр. 147-160.

2. М.М. Лаврентьев. О некоторых некорректных задачах математического физики. Изд. СО АН СССР, Новосибирск, metric converter Product ID 1962 г.

3. Ш. Ярмухамедов. Интегральных представления гармонических функций многих переменных. ДАН СССР, Т.204, No. 4, 1972, 799-802 стр.

4. Ш. Ярмухамедов, А. Абдукаримов, З. Маликов. О задачи Коши для системы эллиптического типа первого порядка. Докл. Росс. Акад. Наук. Том 323 (1992) No.1.

Самаркандский государственный университет им. А.Навои

Uzbek Mathematical
Journal, 2017,№1, pp.140-145

УДК 517.97

Игра преследования-убегания на реберном остове правильных многогранников при наличии "медленных" преследователей

Холбоев А.Г., Азамов А.А., Кучкаров А.Ш.

Bu maqolada uch o‘lchovli muntazam ko‘pyoqliklarning qirralari bo‘ylab harakatlanadigan n ta quvuvchilar guruhi va bitta qochuvchi nuqtalar orasidagi o‘yin qaraladi.
It is considered a game between a group of n pursuers and one evader moving along 1-skeleton of a given regular polyhedron in the space $\mathbb{R}^3$.

Рассматривается игра между группой из n преследователей и одним убегающим, которые представляются точками, движущимися по графу реберного остова правильного трехмерного многогранника. Максимальные скорости одного из преследователей и убегающего равны 1, а максимальные скорости остальных преследователей равны $\rho, \rho < 1$. Цель работы состоит в определении для каждого правильного многогранника M числа $N(M)$, обладающего следующими свойствами: при $n \geq N(M)$ игра заканчивается в пользу группы преследователей, а при $n < N(M)$ – в пользу убегающего (в [1] был рассмотрен случай $\rho = 1$).

Постановка задачи. Пусть M – граф одномерного остова правильного трехмерного многогранника M которого обозначим той же буквой. Вершины M обозначаются прописными буквами латинского алфавита. Длину всех его ребер можно считать равной 1. Рассмотрим игру, в которой по графу M передвигаются точки $P_1, P_2, ..., P_n$ и Q. Группа $\mathbb{P}$ точек $P_1, P_2, ..., P_n$ представляет собой игрока-преследователя, а точка Q – убегающего игрока. Скорости точек P_1 и Q по модулю не должны превышать 1, а скорости остальных преследователей – не превышать $\rho, \rho < 1$. В начальный момент времени $t = 0$ точки занимают какие-то положения $\mathbb{P}(0) = \{P_1(0), P_2(0), ..., P_n(0)\}$ и $Q(0)$. В игре каждый из игроков выбирает для себя определенный способ управления так, что они должны порождать определенные траектории $\mathbb{P}(t), Q(t)$, удовлетворяющие фазовому ограничению $P_k(t), Q(t) \in M$ при всех $t \geq 0, k = 1, 2, ..., n$. Пара таких способов управления образуют партию в игре. Партия завершается в пользу игрока $\mathbb{P}$, если $P_k(t) = Q(t)$

для некоторых $k = 1, 2, ..., n$ и $t \geq 0$, и завершается в пользу игрока Q, если $P_k(t) \neq Q(t)$ при всех $k = 1, 2, ..., n$ и $t \geq 0$.

Понятия "способ управления"и "траектория"могут быт уточнены на основе общей теории дифференциальных игр [7-9]. Применительно к рассматриваемой игре более точная формулировка задачи описана в [1].

Задача преследования. Для каждого начального состояния $\mathbb{P}(0), Q(0)$ построить такой способ управления $\mathbb{U}^*$ группы $\mathbb{P}$, что при каждом допустимом управлении убегающего $v(t), v(t) \leq 1, t \geq 0$, для траекторий $\mathbb{P}(t), Q(t)$, порожденных данными $\mathbb{P}(0), Q(0), v(\cdot), \mathbb{U}^*$, будет иметь место равенство $P_k(t) = Q(t)$ при некоторых $k = 1, 2, ..., n$ и $t \geq 0$.

Задача убегания. Для каждого начального состояния $\mathbb{P}(0)$ найти начальное состояние $Q(0)$ и построить способ управления V^* такие, что при любом допустимом управлении $u(t) = (u_1(t), u_2(t), ..., u_n(t)), |u_1(t)| \leq 1, |u_k(t)| \leq \rho, k = 2, 3, ..., n$, для траекторий $\mathbb{P}(t), Q(t)$, порожденных данными $\mathbb{P}(0), Q(0), u(\cdot), V^*$, имеет место $P_k(t) \neq Q(t)$ при всех $k = 1, 2, ..., n$ и $t \geq 0$.

Примечание. Асимметрия в выборе начальных точек объясняется спецификой игры – ограниченностью и одномерностью пространства, т.е. графа M, по которому двигаются точки.

Отметим, в рассматриваемой игре альтернатива Н.Н.Красовского [7,8] имеет место в усиленной форме: для каждого многогранника M и числа n разрешима одна и только одна из этих задач [1]. Более точно: для каждого многогранника M существует число $N(M)$ такое, что при $n \geq N(M)$ игра заканчивается в пользу группы преследователей, независимо от начального положения точек, а при $n < N(M)$ – в пользу убегающего хотя бы из одного начального положения.

Теорема. N(тетраэдр)$=N$(октаэдр)$=N$(куб)$=2$, N(икосаэдр)$=$ $=N$(додекаэдр)$=3$.

При $n < N(M)$ доказательство разрешимости задачи убегания вытекает из результата статьи [1], так как $\rho < 1$. Поэтому будем считать, $n = N(M)$ и рассматривать только задачу преследования. Доказательство теоремы приводится раздельно для каждого многогранника.

Случай M – тетраэдр. Предпишем преследователю P_1 занять ближайшую к $P_1(0)$ вершину M, которую обозначим A. После этого преследователь P_2 начинает преследовать Q, заставляя его пройти через какуюто вершину B многогранника M. Пусть $t = \tau$ – момент времени, когда Q оказался в вершине B (рис. 1a). Можно считать $B \neq A$. Начиная с этого момента времени P_2 продолжит преследование Q, заставляя последнего уйти из вершины B, а точке P_1 предписывается двигаться симметрично к Q относительно Π_{AB} – плоскости симметрии M, проходящей через середину ребра AB. (Это допустимо потому, что максимальные скорости точек P_1 и Q равны.) Тогда, либо P_1 и Q одновременно окажутся в точке, принадлежащей на плоскости Π_{AB}, либо Q будет пойман преследователем P_2.

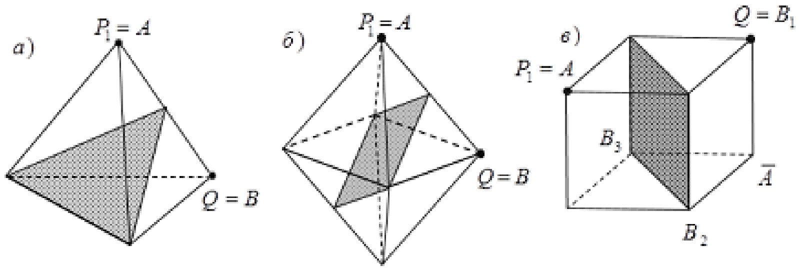

Рис. 1. Ситуация в момент времени $t = \tau$. Плоскость симметрии Π_{AB} затемнена.

Случай M – **октаэдр**. Сначала P_1 займет положение в какой-то вершине A, а P_2 – в вершине $\overline{A}$. (Здесь и в дальнейшем антиподальная точка обозначается чертой сверху.) Затем P_2 должна продолжить движение, все время направляясь в сторону Q. При этом P_1 будет ждать Q в точке A до тех пор, пока Q не окажется на одной из вершин, соседних с вершиной A.

Пусть последнее событие произойдет в момент времени τ, скажем Q окажется в точке B. Обозначим Π_{AB} плоскость симметрии M, проходящую через середину ребра AB (рис. 1б). При $t \geq \tau$ точке P_1 предпишем двигаться симметрично Q относительно Π_{AB}, а P_2 – продолжить преследование Q. Тогда, если Q попадает на Π_{AB}, то она будет поймана точкой P_1. В противном случая точка Q должна оставаться в пределах связной компоненты разности $M \setminus \Pi_{AB}$, содержащей вершину B, которая представляет собой дерево. В таком случае точка Q будет поймана точкой P_2.

Случай M – **куб**. В этом случае P_1 займет положение в какойто вершине A, а преследователь P_2, если потребуется, добравшись сначала до вершены $\overline{A}$ ставит Q, пройти через одну из вершин B_1, B_2, B_3 – концов диагоналей AB_1, AB_2, AB_3 тех граней куба, которые имеют общую вершину A (рис. 1в). Это можно осуществить потому, что при удалении точек B_1, B_2, B_3 оставшаяся часть M распадается на деревья. Итак, пусть τ – первый момент времени, когда $Q \in \{B_1, B_2, B_3\}$, например $Q(\tau) = B_1$. Обозначим Π_{AB} плоскость симметрии куба, проходящую через середину отрезка $AB_1 = P_1(\tau)Q(\tau)$ перпендикулярно к этому отрезку. Начиная с этого момента времени P_1 будет двигаться симметрично Q относительно плоскости Π_{AB}. И на этот раз $M \setminus \Pi_{AB}$ распадается на две компоненты связности, являющиеся деревьями. Поэтому P_2, преследуя Q, либо настигает ее, либо заставит попасть на плоскость Π_{AB}, где ее встретить P_1. **Случай** M – **икосаэдр**. Без потери общности можно считать, что в начале партии точки P_1 и P_2 находятся на двух противоположных вершинах икосаэдра, скажем A и $\overline{A}$ соответственно (рис. 2). Они должны оставаться на месте до тех пор, пока точка Q не попадет на одну из вершин икосаэдра. Точке P_3 предписывается преследование точки Q по кратчайшему пути. Ясно, что избегая поимки со стороны точки P_3, точка Q в некоторый момент времени τ обязательно попадает на одну из вершин икосаэдра. Пусть это будет вершине B. Можно считать, что B отлична от A и $\overline{A}$. Начиная с момента времени τ точка P_1 начнет двигаться симметрично Q относительно плоскости симметрии икосаэдра Π_{AB}, проходящей через середины ребра AB (отметим что, какова бы ни была пара вершин A и B, требуемая плоскость симметрии Π_{AB} существует, см. рис. 2*а*). Множество $M \setminus \Pi_{AB}$ распадается на две компоненты связности. Через Γ обозначим ту компоненту связности, которая содержит точку B (рис. 2*б*.), т.е. $\Gamma = \{X \in M | \rho(B, X) < \rho(A, X)\}$.

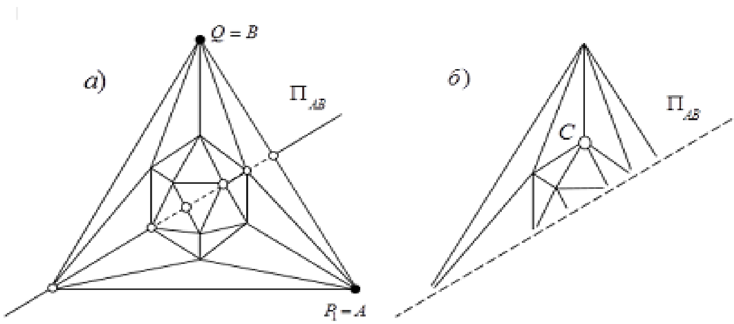

Рис.2. а) Ситуация в момент времени $t = \tau$; б) Граф $\Gamma \setminus C$.

Подграф Γ содержит два цикла с общим ребром. Пусть C – одна из вершин этого ребра. Тогда подграф $\Gamma \setminus C$ будет деревом. При $t \geq \tau$ преследователь P_2 должен сначала добраться к точке C по кратчайшему пути, а потом оставаться там.

При $t \geq \tau$ преследователь P_3 продолжит погонку за точкой Q по кратчайшему пути. Тогда, в некоторый момент времени, убегающий Q либо попадет на плоскость Π_{AB} и будет пойман преследователем P_1, либо попадет на вершину C и будет пойман преследователем P_2, либо, оставаясь на дереве $\Gamma \setminus C$ будет пойман преследователем P_3.

Случай: M **– додекаэдр**. Доказательство во многом совпадает с тем, что проведено для икосаэдра. Прежде всего пусть преследователь P_1 займет ближайшую к $P_1(0)$ вершину, скажем A. После этого преследователь P_2 начнет преследовать Q, заставляя последнего попасть на одну из вершин, расстояние (в метрике графа M) от которого до A равно 1, 2 или 4. Пусть это произойдет в момент времени τ так, что $Q(\tau) = B$ (рис. 3*а*).

При $t \geq \tau$ преследователь P_1 будет двигаться симметрично Q относительно плоскости симметрии Π_{AB} додекаэдра. (Отметим, что такая плоскость существует [2], см. рис. 3*а*). Множество $M \setminus \Pi_{AB}$ распадается на две компоненты связности. Обозначим Γ ту компоненту, которая содержит точку B (рис. 3*б*), т.е. $\Gamma = \{X \in M | \rho(B, X) < \rho(A, X)\}$.

Подграф Γ содержит два цикла с общим ребром. Пусть C – одна из вершин этого ребра. Тогда подграф $\Gamma \setminus C$ будет деревом. При $t \geq \tau$ преследователь P_2 должен сначала добраться к точке C по кратчайшему пути, а потом оставаться там же, а преследователь P_3 начинать преследовать точку Q по кратчайшему пути.

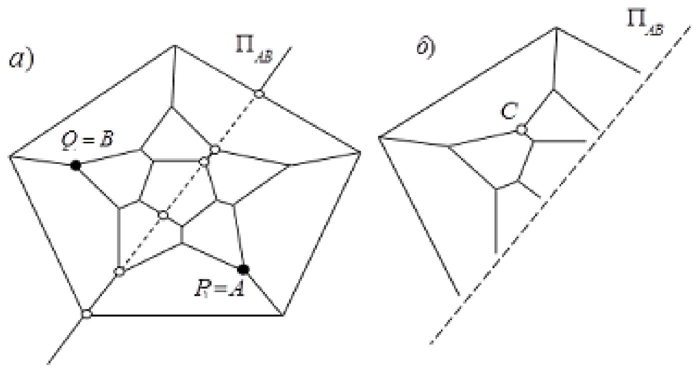

Рис.3. а) Ситуация в момент времени $t = \tau$; б) Граф $\Gamma \setminus C$.

Тогда, в некоторый момент времени убегающий Q либо попадет на плоскость Π_{AB} и будет пойман преследователем P_1, либо попадет на вершину C и будет пойман преследователем P_2, либо оставаясь на дереве $\Gamma \setminus C$, будет пойман преследователем P_3.

Теорема доказана.

Литература

1. Азамов А.А., Кучкаров А.Ш., Холбоев А.Г. Игра преследования-убегания на реберном остове правильных многогранников I.// Математическая Теория Игр и ее Приложения. Т.7, в.3, 2015. 3-15 с.
2. Берже М. Геометрия. 1 том, Москва: Мир, 1984, 560 с.
3. Bonato A., Gordinowicz P., Hahn G. Cops and robbers ordinals of cop-win trees.// arXiv: 1603.04266v1 [math.CO] 14 mar 2016, 8p.
4. Bonato A., Nowakowski R. The Game of Cops and Robbers on Graphs.// American Mathematical Society. 2011.
5. Hahn G. Cops, robbers, and graphs.// Tatra Mt. Math. Publ. 36 (2007). 163-176 pp.
6. Frieze A., Krivelevich M., Loh P. Variations on Cops and Robbers.// Graph Theory 69 (2012), 383-402 pp.
7. Красовский Н.Н. Управление динамической системой. М.: Наука, 1970.
8. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
9. Понтрягин Л.С. Избранные научные труды. Т. 2. М.: Наука, 1988.
10. Scott A. and Sudakov B. A bound for the cops and robbers problem.// SIAM J. Discrete Math.

Ташкентский архитектурно-строительный институт.
Институт математики при Национальном университете Узбекистана,

Uzbek Mathematical
Journal, 2017,№1, pp.146-154

УДК 519.21

Об асимптотике критических ветвящихся процессов с иммиграцией

Хусанбаев Я.М., Жумакулов Х.К.

Maqolada immigratsiyasi keng ma'noda statsionar bo'lgan immigratsiyali kritik tarmoqlanuvchi jarayonlar ketma-ketligi qaralgan. Mos ravishda normallangan jarayonlar taqsimotini gamma taqsimotga kuchsiz yaqinlashishi isbotlangan.

In the paper, a sequence of critical branching processes with an immigration is considered in the case when the immigration forms a stationary process in the wide sense. It is prowed that the distribution of the suitably normalized process converges weakly to the gamma distribution.

Пусть $\{\xi_{k,j},\ k,j \in \mathbb{N}\}$ и $\{\varepsilon_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ – две независимые совокупности независимых, неотрицательных, принимающих целые значения и одинаково распределенных случайных величин. Случайный процесс X_k, $k \geq 0$ определим следующими рекуррентными соотношениями:

$$X_0 = 0, \quad X_k = \sum_{j=1}^{X_{k-1}} \xi_{k,j} + \varepsilon_k,\ \ k \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Обычно величину X_k интерпретируют как общее число частиц в некоторой популяции в момент времени k, при этом величина $\xi_{k,j}$ представляет собой число потомков j-той частицы $(k-1)$-го поколения, а величина ε_k интерпретируется как число частиц, поступивших извне в популяцию в момент времени k. Причем все частицы популяции размножаются независимо друг от друга и по одинаковому закону. Поступившие в популяцию извне частицы в дальнейшем развиваются по тому же закону, что и частицы популяции. Случайный процесс $\{X_k, k \geq 0\}$ называют ветвящимся процессом с иммиграцией. Пусть $m = \mathbf{E}\xi_{1,1} < \infty$. Ветвящийся процесс (1) называют докритическим, критическим и надкритическим, если $m < 1$, $m = 1$ и $m > 1$, соответственно. При изучении процессов вида (1) одной из важных и интересных задач является нахождение скорости роста X_n при $n \to \infty$. Если $X_0 = 1$, $\varepsilon_k \equiv 0$,

$k \in \mathbb{N}$, то (1) представляет собой ветвящийся процесс Гальтона-Ватсона, и его асимптотика хорошо изучена (см., например, [1]). В работе [2] E. Seneta рассмотрел критический ветвящийся процесс с иммиграцией и установил, что $n^{-1}X_n$ слабо сходится при $n \to \infty$ к случайной величине, имеющей гамма-распределение. Функциональный вариант этого результата расмотрен в [3]. А именно в критическом случае C.Z. Wei и J. Winnicki [3] доказали, что процесс $n^{-1}X_{[nt]}$, $t \geq 0$ слабо сходится в пространстве Скорохода $D[0,\infty)$ к решению стохастического дифференциального уравнения. В работах [4-7] исследовано асимптотическое поведение последовательностей ветвящихся процессов с иммиграцией при различных условиях на числовые характеристики процессов, а также при условии, что поток иммиграции состоит из независимых случайных величин. В работе [8] С.В. Нагаев рассмотрел случай, когда поток иммиграции образует стационарный в широком смысле процесс, и доказал, что при $n \to \infty$ распределение $n^{-1}X_n$ слабо сходится к гамма-распределению. В работе [9] М.Х. Асадулин и С.В. Нагаев расмотрели случай, когда иммиграция обладает определенным свойством эргодичности и исследовали асимптотику ветвящегося процесса с иммиграцией как с дискретным временем так и непрерывным временем. Замечательно, что при этом не предполагается независимость величин потока иммиграции. В работе [13] были исследованы скорость роста и асимптотика флуктуации почти критических ветвящихся процессов с иммиграцией в случае, когда иммиграция образует стационарный процесс в широком смысле. В [14] H. Guo и M. Zhang исследовали асимптотику флуктуации ветвящихся процессов с иммиграцией в случае, когда поток иммиграции неоднороден и образует $m-$ зависимую последовательность.

Отметим, что в интересной статье [15] И.С. Бадалбаев и А.М. Зубков получили результаты, которые содержат результаты работы [8] и [12] как частный случай.

Пусть теперь при каждом $n \in \mathbb{N}$ $\left\{\xi_{k,j}^{(n)},\ k,j \in \mathbb{N}\right\}$ и $\left\{\tau_k^{(n)},\ k \in \mathbb{N}\right\}$ – две независимые совокупности неотрицательных, принимающих целые значения случайных величин, причем $\xi_{k,j}^{(n)},\ k,j \in \mathbb{N}$ независимы и одинаково распределены, а $\tau_k^{(n)}, k \in \mathbb{N}$ – стационарный в широком смысле процесс. Рассмотрим последовательность ветвящихся процессов с иммиграцией $\left\{Z_k^{(n)}, k \geq 0\right\}$, $n \in \mathbb{N}$, которые определены следующими рекуррентными соотношениями

$$Z_0^{(n)} = 0, \quad Z_k^{(n)} = \sum_{j=1}^{Z_{k-1}^{(n)}} \xi_{k,j}^{(n)} + \tau_k^{(n)}, \ \ k, n \in \mathbb{N}.$$

В дальнейшем всюду предположим, что $\mathbf{E}\xi_{1,1}^{(n)} = 1$, $\mathbf{E}\left(\xi_{1,1}^{(n)}\right)^2 < \infty$, $\mathbf{E}\left(\tau_1^{(n)}\right)^2 < \infty$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Обозначим

$$\lambda_n = \mathbf{E}\tau_1^{(n)}, \ \ \sigma_n^2 = \mathbf{var}\xi_{1,1}^{(n)}, \ \ \rho_n\left(k\right) = \mathbf{cov}\left(\tau_1^{(n)}, \tau_{k+1}^{(n)}\right).$$

Пусть $\varphi_{n,k}(s)$ – k-кратная итерация производящей функции величины $\xi_{1,1}^{(n)}$. В силу основной леммы [1] (стр.19) при $k \to \infty$

$$\frac{1}{k}\left[\frac{1}{1-\varphi_{n,k}(s)} - \frac{1}{1-s}\right] = \frac{\sigma_n^2}{2}\left(1 + \varepsilon_{n,k}\left(s\right)\right),$$

где $\varepsilon_{n,k}(s) \to 0$ при $k \to \infty$ равномерно относительно $s \in [0,1)$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Отсюда следует, что для достаточно больших k и для $s \to 1$

$$1 - \varphi_{n,k}(s) = \frac{1-s}{1 + \left(1-s\right) k\sigma_n^2/2}\left(1 + \delta_{n,k}(s)\right), \tag{2}$$

где $\delta_{n,k}(s) \to 0$ при $k \to \infty$ равномерно по $s \in [0,1)$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

Замечание 1. В важном частном случае, когда случайная величина $\xi_{1,1}^{(n)}$ имеет геометрическое распределение

$$P\left(\xi_{1,1}^{(n)} = 0\right) = p_n, \ P\left(\xi_{1,1}^{(n)} = k\right) = \left(1-p_n\right)^2 p_n^{k-1}, k = 1, 2, ...,$$

где $p_n \in (0,1)$, соотношение (2) имеет место, причем $\delta_{n,k}\left(s\right) = 0$ и $\sigma_n^2 = \frac{2p_n}{1-p_n}$.

Теорема. Пусть выполнены следующие условия:

A: существуют конечные пределы $\lambda_n \to \lambda$, $\sigma_n^2 \to \sigma^2 \geqslant 0$;

B: $n^{-1}\sum\limits_{k=0}^{n}|\rho_n(k)| \to 0$ при $n \to \infty$;

C: $n^{-1}\sum\limits_{k=0}^{n}\left|\delta_{n,k}(e^{-z/n})\right| \to 0$ при $n \to \infty$ для любого $z \geqslant 0$.

Тогда
1) если $\sigma^2 > 0$, то распределение случайной величины $n^{-1}Z_n^{(n)}$ при $n \to \infty$ слабо сходится к гамма-распределению

$$G(x) = \Gamma^{-1}(\lambda/\theta)\theta^{-\lambda/\theta}\int\limits_0^x e^{-u/\theta}u^{\lambda/\theta-1}du$$

с преобразованием Лапласа $\varphi\left(z\right) = \left(1 + z\theta\right)^{-\lambda/\theta}$, где $\theta = \sigma^2/2$,
2) если $\sigma^2 = 0$, то $n^{-1}Z_n^{(n)}$ при $n \to \infty$ сходится по вероятности к числу λ.

Замечание 2. В случае не схема серии и когда поток иммиграции образован из независимых и одинаково распределенных случайных величин полученный результат согласуется с известным результатом Е.Сенеты [2].

Замечание 3. В силу неравенства Коши-Буняковского $|\rho_n(k)| \leq \mathbf{E}\left(\tau_1^{(n)}\right)^2$. Поэтому утверждение теоремы остается в силе, если условие заменяется условием $\mathbf{B}_1$: $\mathbf{E}\left(\tau_1^{(n)}\right)^2 \to 0$ при $n \to \infty$.

Доказательство. Рассмотрим только случай $\sigma^2 > 0$. Положим $\Phi_n(s) = Es^{Z_n^{(n)}}$. Нетрудно убедиться в том, что производящую функцию $\Phi_n(s)$ можно представить в виде

$$\Phi_n(s) = E\prod_{k=0}^{n-1}\varphi_{n,k}^{\tau_{n-k}^{(n)}}(s).$$

Теорема будет доказана, если мы покажем, что для любого $z \geqslant 0$

$$\Phi_n\left(e^{-z/n}\right) \to \varphi\left(z\right) \text{ при } n \to \infty.$$

Для этого, в силу теоремы Лебега о мажорируемой сходимости, достаточно показать, что при $n \to \infty$

$$ln\prod_{k=0}^{n-1}\varphi_{n,k}^{\tau_{n-k}^{(n)}}\left(e^{-z/n}\right) \xrightarrow{P} -\frac{\lambda}{\theta}ln\left(1 + z\theta\right) \qquad (3)$$

при $n \to \infty$. Здесь и всюду ниже знак $\xrightarrow{P}$ будет обозначать сходимость по вероятности. Докажем (3). Пусть $N = N(n)-$ целые положительные числа такие, что $N \to \infty$ и $n^{-1}N \to 0$ при $n \to \infty$. Для удобства записи положим $\tau_0^{(n)} \equiv 0$ и $\theta_n = \sigma_n^2/2$. Так как $lnx = x - 1 + O\left((x-1)^2\right)$ при $x \to 1$, то, учитывая (2), для достаточно больших n имеем

$$\ln \prod_{k=0}^{n} \varphi_{n,k}^{\tau_{n-k}^{(n)}} \left(e^{-z/n}\right) =$$

$$= ln \prod_{k=0}^{N} \varphi_{n,k}^{\tau_{n-k}^{(n)}} \left(e^{-z/n}\right) + \sum_{k=N+1}^{n} \tau_{n-k}^{(n)} \left(\varphi_{n,k}\left(e^{-z/n}\right) - 1\right) +$$

$$+ O\left(\sum_{k=N+1}^{n} \tau_{n-k}^{(n)} \left(\varphi_{n,k}\left(e^{-z/n}\right) - 1\right)^2\right) = I_n + J_n + M_n \qquad (4)$$

с вероятностью 1. Последовательно применяя известные неравенства

$$\left|\prod_{j=1}^{m} a_j - \prod_{j=1}^{m} b_j\right| \leqslant \sum_{j=1}^{m} |a_j - b_j|, |a_j| \leqslant 1, |b_j| \leqslant 1,$$

$$\left|x^k - y^k\right| \leqslant k\left|x - y\right|, |x| \leqslant 1, |y| \leqslant 1, k \geqslant 1, 1 - e^{-x} \leqslant x, x \geqslant 0,$$

получаем для любого фиксированного $z \geqslant 0$

$$\left|\prod_{k=0}^{N} \varphi_{n,k}^{\tau_{n-k}^{(n)}} \left(e^{-z/n}\right) - 1\right| \leqslant \sum_{k=0}^{N} \left|\varphi_{n,k}^{\tau_{n-k}^{(n)}} \left(e^{-z/n}\right) - 1\right| \leqslant \frac{z}{n} \sum_{k=n-N}^{n} \tau_k^{(n)} \xrightarrow{P} 0$$

при $n \to \infty$ в силу того, что

$$n^{-1} \sum_{k=n-N}^{n} \mathbf{E}\tau_k^{(n)} = \lambda_n N n^{-1} \to 0 \text{ при } n \to \infty$$

и в силу неравенства Маркова. Значит

$$I_n \xrightarrow{P} 0 \qquad (5)$$

при $n \to \infty$. Далее, в силу (2) для достаточно больших n и k

$$\varphi_{n,k}\left(e^{-z/n}\right) - 1 = -\frac{z}{n + kz\theta_n}\left(1 + \delta_{n,k}(e^{-z/n})\right) + O\left(\frac{z^2}{n^2}\right). \qquad (6)$$

Тогда

$$J_n = -\sum_{k=N+1}^{n} \frac{\tau_{n-k}^{(n)} z}{n + kz\theta_n} - \sum_{k=N+1}^{n} \frac{\tau_{n-k}^{(n)} z\delta_{n,k}(e^{-z/n})}{n + kz\theta_n} +$$

$$+O\left(\frac{z^2}{n^2} \sum_{k=N+1}^{n} \tau_{n-k}^{(n)}\right) = J_n^{(1)} + J_n^{(2)} + J_n^{(3)}. \tag{7}$$

Нетрудно видеть, что

$$\mathbf{E}J_n^{(1)} = -\frac{\lambda_n}{\theta_n} ln\left(\frac{1 + z\theta_n}{1 + z\theta_n \frac{N+1}{n}}\right) + o\,(1) \to ln\,\varphi\,(z) \tag{8}$$

при $n \to \infty$. Учитывая условия теоремы, имеем
$\mathbf{var} J_n^{(1)} \leqslant z^2 \rho_n\,(0) \sum\limits_{k=N+1}^{n} \frac{1}{(n+kz\theta_n)^2} + 2z^2 \sum\limits_{k=N+1}^{n} \sum\limits_{j=k+1}^{n} \frac{|\rho_n(j-k)|}{(n+kz\theta_n)(n+jz\theta_n)} \leqslant$

$$\leqslant 2z^2 n^{-1} \sum_{k=0}^{n} |\rho_n\,(k)| \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Отсюда и из (8), в силу неравенства Чебышева, приходим к выводу, что

$$J_n^{(1)} \xrightarrow{P} ln\,\varphi\,(z) \tag{9}$$

при $n \to \infty$. Далее, согласно условиям теоремы

$$\mathbf{E}\left|J_n^{(2)}\right| \leqslant \lambda_n z n^{-1} \sum_{k=1}^{n} \left|\delta_{n,k}(e^{-z/n})\right| \to 0$$

и

$$z^2 n^{-2} \mathbf{E} \sum_{k=N+1}^{n} \tau_{n-k}^{(n)} = z^2 \lambda_n n^{-1} \left(1 - \tfrac{N}{n}\right) \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Следовательно, в силу неравенства Маркова, $J_n^{(2)} \xrightarrow{P} 0$ и $J_n^{(3)} \xrightarrow{P} 0$ при $n \to \infty$. Теперь отсюда и из (7), (9), заключаем, что

$$J_n \xrightarrow{P} ln\,\varphi\,(z) \tag{10}$$

при $n \to \infty$.

Выберем n и N настолько большим и, что $\left|\delta_{n,k}(e^{-z/n})\right| \leqslant 1$ для всех $k \geqslant N$. Тогда в силу (6), учитывая условия теоремы, нетрудно видеть, что

$$\mathbf{E}\sum_{k=N+1}^{n}\tau_{n-k}^{(n)}(\varphi_{n,k}(e^{-z/n})-1)^2 \leqslant 3z^2\lambda_n\left[n^{-1}+n^{-2}\sum_{k=N+1}^{n}\delta_{n,k}^2(e^{-z/n})\right]\leqslant$$

$$\leqslant 3z^2\lambda_n\left[n^{-1}+n^{-2}\sum_{k=1}^{n}\left|\delta_{n,k}(e^{-z/n})\right|\right]\to 0 \text{ при} n\to\infty.$$

Следовательно

$$M_n \xrightarrow{P} 0 \text{ при} n\to\infty.$$

Теперь из (4),(5), (10) и из последнего соотношения следует (3), что и завершает доказательство теоремы.

Пример. Пусть случайная величина $\xi_{1,1}^{(n)}$ принимает значения 0, 1 и 2 с вероятностями $2^{-1}(1-1/n)$, $1/n$ и $2^{-1}(1-1/n)$ соответственно. Имеем $\mathbf{E}\xi_{1,1}^{(n)}=1, \sigma_n^2=1-1/n$. Пусть $p>0$, $p<q, p+q=1$. Предположим, что последовательность $\left\{\tau_k^{(n)}, k\geqslant 0\right\}$ образует случайное блуждание с фазовым пространством $E=\{0,1,...\}$ и отражающим экраном в нуле, причем переход из i в $i+1$ имеет вероятность p, а вероятность перехода из i в $i-1$ равно q. Известно, что цепь Маркова $\left\{\tau_k^{(n)}, k\geqslant 0\right\}$ является апериодической, возвратной и положительной (см., [9], стр.620). Кроме этого, она является эргодической со стационарным распределением

$$\pi_0=\frac{q-p}{2q}, \pi_1=\frac{q-p}{2q^2}, \pi_j=\frac{q-p}{2q^2}\left(\frac{p}{q}\right)^{j-1}, j\geqslant 2.$$

При стационарном начальном распределении $\lambda=\mathbf{E}\tau_k^{(n)}=[2(q-p)]^{-1}$, $\mathbf{var}\tau_k^{(n)}=[2(q-p)]^{-2}$. Далее, учитывая результаты работы [10] и лемму 1 из [11] (стр.236) убедимся в том, что $\rho(k)\to 0$ при $k\to\infty$. Следовательно, в силу теоремы Теплица, величина $n^{-1}\sum_{k=1}^{n}\rho(k)$ стремится к нулю при $n\to\infty$. Также нетрудно убедиться в том, что в рассматриваемом случае $\left|\delta_{n,k}(e^{-z/n})\right|\leqslant(1-\frac{1}{n})\frac{z}{n}$. Следовательно, $n^{-1}\sum_{k=0}^{n}\left|\delta_{n,k}(e^{-z/n})\right|\leqslant\frac{z}{n}\to 0$ при $n\to\infty$ для любого фиксированного $z\geqslant 0$. Значит, выполнены все условия теоремы, в силу которой распределение $n^{-1}Z_n^{(n)}$ слабо сходится к гамма-распределению с преобразованием Лапласа $\varphi(z)=(1+z/2)^{\frac{1}{q-p}}$.

Литература

1. Athreya K.B., Ney P.E., *Branching Processes.* Springer-Verlag. Berlin, 1972, 286 p.

2. Seneta E., *An Explicit-limit Theorem for the Critical Galton-Watson Process with Immigration* // J. Roy. Stat. Soc., v.32, 1970, p. 149–152.

3. Wei C.Z., Winicki J., *Some asymptotic results for the branching process with immigration* // Stochastic Processes and their Applications, 1989, v.31, p.261–282.

4. Sriram T.N. *Invalidity of bootstrap for critical branching process with immigration* // Ann. Statist. v.22, 1994, p.1013-1023.

5. Ispany M., Pap G., Van Zuijlen M.C.A. *Fluctuation limit of branching processes with immigration and estimation of the mean* // Adv. Appl. Probab. v.37, 2005, p.523-538.

6. Хусанбаев Я.М., *О сходимости ветвящихся процессов Гальтона-Ватсона с иммиграцией к диффузионному* // Теория вероят. и матем. статистика. 2008, вып.79 с. 183–189. Киев.

7. Хусанбаев Я.М., *О скорости сходимости в одной предельной теореме для ветвящихся процессов с иммиграцией* // Сибирский математический журнал, 2014, том 55, №.1, с.221-227.

8. Нагаев С.В., *Предельная теорема для ветвящихся процессов с иммиграцией* // Теория вероятн. и ее применения, 1975, т.20, вып.1, с.178–180.

9. Ширяев А.Н., *Вероятность.* М.: Наука, 1989, 640 с.

10. Давыдов Ю., *Условия перемешивания для цепей Маркова* //Теория вероят. и ее применения. т.18, вып.2, 1973, с.321-338.

11. Биллингсли П., *Сходимость вероятностных мер.* М.: Наука, 1977. 352 с.

12. Асадулин М.Х., Нагаев С.В., *Предельные теоремы для критического ветвящегося процесса с иммиграцией* // Матем. заметки, 1982, т. 32, №.4, с. 537-548.

13. Хусанбаев Я.М., *Об асимптотике ветвящихся процессов с иммиграцией*// Дискретная Математика, 2016, т. 28, вып.1, с. 113-122.

14. Guo H., Zhang M., *A fluctuation limit theorem for a critical branching process with dependent immigration*// Statistics and Probab. letters. v 94, 2014, p.29-39.

15. Бадалбаев И.С., Зубков А.М., *Предельные теоремы для последовательности ветвящихся процессов с иммиграцией*// Теория вероятностей и ее приложения. 1983, т. 28, вып.2, с.382–388.

Институт математики при НУУз

Uzbek Mathematical
Journal, 2017,№1, pp.155-164

УДК 517.98

Эргодическая теорема Блума-Хансона в пространствах Лоренца

Чилин В.И., Азизов А.Н

Lorents ketma-ketliklar fazolarida Blum-Xanson ergodik teorema isbotlangan.

The Blum-Hanson ergodic theorem for linear contractions in Lorentz spaces sequences it is proved.

1. Введение. Известная статистическая эргодическая теорема для рефлексивного банахового пространства $(X, \|.\|_X)$ [7, гл. VIII §5] утверждает, что для любого линейного сжатия T в X средние Чезаро $A_n(T) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} T^k$ сходятся в сильной операторной топологии, т.е. для любого $x \in X$ существует такое $\overline{x} \in X$, что $\|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} T^k(x) - \overline{x}\|_X \to 0$ при $n \to \infty$.

Важными примерами, иллюстрирующими данную статистическую теорему, являются банаховы пространства $L_p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, $1 < p < \infty$, всех измеримых функций f, заданных на измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ с полной $\sigma-$конечной мерой μ, для которых $\|f\|_p = (\int_\Omega |f|^p d\mu)^{1/p} < \infty$ (равные почти всюду функции отождествляются). Если $\tau : \Omega \to \Omega$ сохраняющее меру μ отображение, то линейное преобразование T в $L_p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, определенное равенством $(Tf)(\omega) = f(\tau(\omega))$, есть изометрия в $L_p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, и поскольку пространства $L_p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ рефлексивны при $1 < p < \infty$, средние Чезаро $A_n(T)$ сходятся в сильной операторной топологии в $L_p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$.

В случае, когда мера μ — вероятностная и преобразование τ — перемешивающее, эргодическая теорема Блума-Хансона [4] утверждает, что для каждого $f \in L_p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, $1 \le p < \infty$, имеет место сходимость

$$\|\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} f(\tau^{k_i}\omega) - \int_\Omega f d\mu\|_p \to 0$$

для всех строго возрастающих последовательностей $k_0 < k_1 < \ldots$ натуральных чисел.

В связи с этой ситуацией возникает задача о выделение класса ограниченных линейных операторов T, для которых верна сходимость средних Чезаро $\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} T^{k_j}$ для каждой подпоследовательности $\{T^{k_j}\}_{j=0}^{\infty}$ последовательности $\{T^n\}_{n=0}^{\infty}$.

Обозначим через $\mathfrak{N}$ множество всех строго возрастающих последовательностей натуральных чисел. Будем говорить, что линейный оператор T, действующий в банаховом пространстве X, имеет свойство Блума-Хансона в точке $x \in X$ (запись: $T \in BH(X, x)$), если для любой последовательности $\{k_j\}_{j=0}^{\infty} \in \mathfrak{N}$ существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} T^{k_j}(x)$$

в нормированной топологии [13].

Для сжатий в гильбертовом пространстве H следующий критерий включения $T \in BH(H, x)$ независимо получен в работах [1], [10], [12].

Теорема 1. *Пусть T линейное сжатие в гильбертовом пространстве H. Для каждого $x \in H$ следующие условия эквивалентны:*

(i) $\|\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} T^{k_j}(x) - x_0\|_H \to 0$ для всех $\{k_j\}_{j=0}^{\infty} \in \mathfrak{N}$ и некоторого $x_0 \in H$.

(ii) Последовательность $\{T^n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ сходится слабо в H к элементу $x_0 \in H$.

Следует отметить, что для любого ограниченного линейного оператора T, действующего в банаховом пространстве X, условие $T \in BH(X, x)$ всегда влечет слабую сходимость последовательности $\{T^n x\}_{n=0}^{\infty}$ к некоторому элементу $\overline{x}$ [8, Гл. 8, Proposition 1.2]. При этом, используя аргументы доказательства импликации $(ii) \to (i)$ из теоремы 1.1 работы [1], получим, что при выполнении условия (i) указанной выше теоремы 1, слабым пределом последовательности $\{T^n x\}_{n=0}^{\infty}$ обязательно является элемент x_0.

В работе [2] вариант теоремы 1 получен для любых положительных линейных сжатий пространства $L_p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ при $1 < p < \infty$. Для произвольных линейных сжатий $L_p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, $1 < p < \infty$, аналогов теоремы 1 до сих пор не имеется. Известен только следующий результат В. Мюллера и Ю.Тамилова [13, Теорема 2.5].

Теорема 2. *Пусть T–линейное сжатие на банаховом пространстве последовательностей l_p, $1 \le p < \infty$. Тогда для любого элемента $x \in l_p$, $T^n(x) \to x_0 \in l_p$ слабо в том и только в том случае, когда $\|\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} T^{k_j}(x) - x_0\|_p \to 0$ для всех $\{k_j\}_{j=0}^{\infty} \in \mathfrak{N}$.*

Отметим также недавнюю работу [9], где с помощью свойства асимптотической гладкости выделяется широкий класс симметричных пространств последовательностей, для которых сохраняется вариант теоремы 1.

Основная цель настоящей работе состоит в получении эргодической теоремы Блума - Хансона (варианта теорем 1 и 2) для банаховых пространств последовательностей Лоренца $l_{p,q}$. Доказательство этой теоремы существенно использует свойство p-выпуклости пространств $l_{p,q}$, что отличает наш подход от методов работы [9].

2. Предварительные сведения. Пусть c_0 — банахова решетка всех сходящихся к нулю последовательностей $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ действительных чисел с нормой $\|x\|_\infty = \sup\limits_{n\geqslant 1} |x_n|$. Обозначим через $x^* = \{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ невозрастающую перестановку последовательности чисел $|x| = \{|x_n|\}_{n=1}^{\infty} \in c_0$.

Ненулевое линейное подпространство $E \subset c_0$ называется симметричным пространством последовательностей, если из $x^* \leqslant y^*, x \in c_0, y \in E$ следует, что $x \in E$. Каждое симметричное пространство последовательностей E содержит подпространство всех финитных последовательностей из c_0, т.е. таких $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in c_0$, для которых $x_n = 0$ при всех n, начиная с некоторого номера $n(x) \in \mathbb{N}$, где $\mathbb{N}$ — множество всех натуральных чисел.

Симметричное пространство последовательностей E, наделенное банаховой нормой $\|\cdot\|_E$, называется банаховым симметричным пространством последовательностей, если выполнены следующие свойства:

1). $\|x\|_E \leqslant \|y\|_E$, если $x^* \leqslant y^*, x, y \in E$;

2). $\|\{1, 0, 0, \dots\}\|_E = 1$.

В каждом банаховым симметричном пространстве последовательностей $(E, \|\cdot\|_E)$ всегда верны равенства $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_E = \|\,|x|\,\|_E = \|x^*\|_E$ для любого $x \in E$.

Говорят, что банахово симметричное пространство $(E, \|\cdot\|_E)$ имеет свойство Фату, если из условий

$$0 \leq x^{(n)} \leq x^{(n+1)} \in E, \ n \in \mathbb{N}, \quad \sup_n \|x^{(n)}\|_E < \infty,$$

следует, что существует $x = \sup\limits_n x^{(n)} \in E$ и $\|x\|_E = \sup\limits_n \|x^{(n)}\|_E$.

Говорят, что $(E, \|\cdot\|_E)$ имеет порядково непрерывную норму, если из $0 \leq x^{(n)} \downarrow 0, \ x^{(n)} \in E$ следует, что $\|x^{(n)}\|_E \to 0$. Известно (см, например, [14], гл. 10, § 4), что $(E, \|\cdot\|_E)$ имеет порядково непрерывную норму в том и только в том случае, когда $(E, \|\cdot\|_E)$—сепарабельно.

Зафиксируем $1 \leqslant p,\ q < \infty$ и рассмотрим пространство Лоренца $l_{p,q}$ всех таких последовательностей $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset c_0$, для которых

$$\|\{x_n\}\|_{p,q} = (\sum_{n=1}^{\infty} (x_n^*)^q (n^{q/p} - (n-1)^{q/p}))^{1/p} < \infty.$$

Известно, что при $1 \leqslant q \leqslant p < \infty$ пространство $(l_{p,q}, \|\cdot\|_{p,q})$ есть банахово симметричное пространство последовательностей, при этом, для $p = q$ верно равенство

$$l_{p,p} = l_p = \Big\{\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset c_0,\ \|\{x_n\}\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty\Big\}.$$

Если же $1 < p < q < \infty$, то $\|\cdot\|_{p,q}$ есть полная квазинорма на векторной решетке $l_{p,q}$, при этом, на $l_{p,q}$ существует такая норма $\|\cdot\|_{(p,q)}$, эквивалентная квазинорме $\|\cdot\|_{p,q}$, что $(l_{p,q}, \|\cdot\|_{(p,q)})$ есть банахово симметричное пространство последовательностей (см. например, [3, Гл.4, §4]).

Нам понадобятся следующие свойства пространств $l_{p,q}$.

Теорема 3. [15, гл. II, §5]). Банахово симметричное пространство последовательностей $(l_{p,q}, \|\cdot\|_{p,q})$ при $1 \leqslant q \leqslant p < \infty$ (соответственно, $(l_{p,q}, \|\cdot\|_{(p,q)})$ при $1 < p < q < \infty$) имеет порядково непрерывную норму и обладает свойством Фату.

Пусть $1 \leq p < \infty$. Банахова решетка $(E, \|\cdot\|)$ называется p-выпуклой, если существует такая константа $M > 0$, что для любого конечного набора элементов $\{a_i\}_{i=1}^{n} \subset E$ верно следующее неравенство

$$\big\|\big(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\big)^{\frac{1}{p}}\big\| \leq M\big(\sum_{i=1}^{n} \|a_i\|^p\big)^{\frac{1}{p}}.$$

Наименьшая среди таких констант M называется константой p-выпуклости пространства E и обозначается через $M^{(p)}(E)$.

Ясно, что любая банахова решетка E является 1-выпуклой, при этом, $M^{(1)}(E) = 1$. Отметим также, что все пространства l_p, $1 \leq p < \infty$, являются p-выпуклыми с $M^{(p)}(l_p) = 1$ (см., например, [11, стр.45]).

Говорят, что банахова решетка $(E, \|\cdot\|)$ удовлетворяет верхней p-оценке, если существует такая константа $M > 0$, что для любого конечного множества попарно дизъюнктных элементов $\{a_i\}_{n=1}^{n} \subset E$ верно следующее неравенство

$$\Big\|\sum_{i=1}^{n} a_i\Big\| \leq M\Big(\sum_{i=1}^{n} \|a_i\|^p\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Любая p-выпуклая банахова решетка всегда удовлетворяет верхней p-оценке. Отметим следующее свойство p-выпуклых банаховых решеток.

Утверждение 1. [5, Proposition 2.6]. *Если банахова решетка удовлетворяет верхней r-оценке для некоторого $1 < r < \infty$, то она является p-выпуклой для любого $1 < p < r$.*

Банаховы решетки $l_{p,q}$ обладают следующими свойствами p-выпуклости [5].

Теорема 4. *(i). Если $1 \leq q \leq p < \infty$, то $l_{p,q}$ — q-выпукло с константой q-выпуклости $M^{(q)}(l_{p,q}) = 1$.*

(ii). Если $1 < p < q < \infty$, то $l_{p,q}$ удовлетворяет верхней p-оценке.

Непосредственно из утверждения 1 и теоремы 4 (ii) вытекает

Следствие 1. *Если $1 < p < q < \infty$, то $l_{p,q}$ — r-выпукло для любых значений $r \in (1, p)$.*

В работе [6, Corollary 3.5] доказано, что в каждом p-выпуклом банаховом симметричном пространстве $(E, \|\cdot\|_E)$, имеющем свойство Фату, всегда существует эквивалентная норма $\|\cdot\|'_E$, относительно которой $(E, \|\cdot\|'_E)$ есть снова p-выпуклое банахово симметричное пространство, но уже имеющее константу p-выпуклости, равную 1. Согласно теореме 3, банахово симметричное пространство $l_{p,q}$ имеет свойство Фату. Поэтому из следствия 1 вытекает следующая

Теорема 5. *Если $1 < p < q < \infty$, то для любого значения $r \in (1, p)$ в $l_{p,q}$ существует норма $\|\cdot\|_{p,q,r}$, эквивалентная норме $\|\cdot\|_{(p,q)}$, такая, что $(l_{p,q}, \|\cdot\|_{p,q,r})$ есть r-выпуклое симметричное пространство с константой r-выпуклости, равной 1.*

3. Теорема Блума-Хансона в пространствах последовательностей Лоренца. Как уже отмечалось во введении, для любого линейного ограниченного оператора T, действующего в банаховом пространстве X, условие $T \in BH(X, x)$ для $x \in X$ всегда влечет слабую сходимость последовательности $\{T^n x\}$. В частности, если T ограниченный линейный оператор в $l_{p,q}$, то сходимость $\|\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} T^{k_j}x - x_0\|_X \to 0$ для всех $\{k_j\}_{j=0}^{\infty} \in \mathfrak{N}$ и некоторого $x_0 \in l_{p,q}$ влечет слабую сходимость последовательности $\{T^n(x)\}$ в $l_{p,q}$ к элементу x_0.

Следующая теорема об является вариантом эргодической теоремы

Блума-Хансона для банаховых пространств $l_{p,q}$.

Теорема 6. *Пусть* $1 < p, q < \infty$, $x \in l_{p,q}$. *Тогда*

(i). *Если* $1 < q \le p < \infty$, *то для любого линейного сжатия*

$$T : (l_{p,q}, \|\cdot\|_{p,q}) \to (l_{p,q}, \|\cdot\|_{p,q})$$

из слабой сходимости в $l_{p,q}$ *последовательности* $\{T^n(x)\}$ *к элементу* $x_0 \in l_{p,q}$ *следует сходимость*

$$\|\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} T^{k_j}(x) - x_0\|_{p,q} \to 0$$

для всех $\{k_j\}_{j=0}^{\infty} \in \mathfrak{N}$.

(ii). *Если* $1 < p < q < \infty$, *то в* $(l_{p,q}, \|\cdot\|_{(p,q)}$ *существует такая эквивалентная норма* $\|\cdot\|_{[p,q]}$, *что для любого линейного сжатия*

$$T : (l_{p,q}, \|\cdot\|_{[p,q]}) \to (l_{p,q}, \|\cdot\|_{[p,q]})$$

слабая сходимость последовательности $\{T^n(x)\}$ *к элементу* $x_0 \in l_{p,q}$ *влечет сходимость*

$$\|\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} T^{k_j}(x) - x_0\|_{[p,q]} \to 0$$

для всех $\{k_j\}_{j=0}^{\infty} \in \mathfrak{N}$.

Доказательство. (i). Пусть $T^n(x) \to x_0$ слабо в $l_{p,q}$. Так как T — ограниченный линейный оператор, то $T^{n+1}(x) = T(T^n(x)) \to T(x_0)$ слабо и поэтому $T(x_0) = x_0$. Если $x_0 \neq 0$, то заменяя элемент x_0 на $(x - x_0)$, можно считать, не ограничивая общности, что $T^n(x) \to 0$ слабо. Таким образом, для доказательства пункта (i) следует установить, что если $T^n(x) \to 0$ слабо в $l_{p,q}$, то

$$\|\tfrac{1}{n+1}\textstyle\sum_{j=0}^{n} T^{k_j}(x)\|_{p,q} \to 0$$

при $n \to \infty$ для любой последовательности $\{k_j\}_{j=0}^{\infty} \in \mathfrak{N}$.

Поскольку T — сжатие, то $\|T^{n+1}(x)\|_{p,q} \le \|T^n(x)\|_{p,q}$ и поэтому предел $\lim_{n\to\infty} \|T^n(x)\|_{p,q}$ существует. Если этот предел равен нулю, то утверждение теоремы 5 очевидно. Предположим, что этот предел равен $\alpha \neq 0$. Заменяя, если необходимо элемент x на элемент $\frac{x}{\alpha}$, можно считать, что $\lim_{n\to\infty} \|T^n(x)\|_{p,q} = 1$.

Зафиксируем $\delta > 0$ и выберем натуральное число t так, чтобы выполнялось неравенство $t^{\frac{1}{q}-1} < \frac{\delta}{2}$. Поскольку $1 + 2^q s < 2^q(s+1)$ для всех $s \in \mathbb{N}$, то существует такое $\varepsilon \in (0,1)$, что

$$((1+\varepsilon)^q + 2^q s)^{\frac{1}{q}} < 2(s+1)^{\frac{1}{q}} - (s+1)\varepsilon \tag{1}$$

для всех $s = 1, \ldots, t-1$.

Согласно равенству $\lim_{n\to\infty} \|T^n(x)\|_{p,q} = 1$, существует такое $k \in \mathbb{N}$, что верно неравенство

$$\|T^k(x)\|_{p,q} < 1 + \varepsilon. \tag{2}$$

Пусть $e_n = \{0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots\}$ стандартный базис в $l_{p,q}$, где единица стоит на "n"-ом месте. Рассмотрим оператор проектирования P_r в $l_{p,q}$ на линейную оболочку $Lin\{e_1, \ldots, e_r\}$ элементов $e_1, e_2, \ldots, e_r \in l_{p,q}$, т.е.

$$P_r(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}) = \{x_1, ..., x_r, 0, 0...\} = \sum_{n=1}^{r} x_n e_n.$$

Обозначим через I тождественный оператор в $l_{p,q}$, т.е. $I(x) = x$ для всех $x \in l_{p,q}$. Если $x = \{x_n\} \in l_{p,q}$, то

$$|(I - P_r)(x)| = \{0, ..., 0, |x_{r+1}|, |x_{r+2}|, ...\} \downarrow 0,$$

при $r \to \infty$, и поэтому, в силу теоремы 3, имеем, что

$$\|(I - P_r)(x)\|_{p,q} = \|\{0, ..., 0, |x_{r+1}|, |x_{r+2}|, ...\}\|_{p,q} \downarrow 0.$$

Следовательно, $\|(I - P_r)T^k(x)\|_{p,q} \to 0$ при $r \to \infty$, что влечет существование такого $r \in \mathbb{N}$, для которого верно неравенство

$$\|(I - P_r)T^k(x)\|_{p,q} < \varepsilon. \tag{3}$$

Так как $P_r(l_{p,q}) = Lin\{e_1, \ldots, e_r\}$ — конечномерное линейное подпространство в $l_{p,q}$ и $T^{k+j}(x) \to 0$ слабо при $j \to \infty$, то существует такое $d \in \mathbb{N}$, что

$$\|P_r T^{k+j}(x)\|_{p,q} < \varepsilon \tag{4}$$

для всех $j \geq d$.

Покажем теперь, что

$$\|T^{m_1}(x) + \ldots + T^{m_s}(x)\|_{p,q} \leq 2s^{\frac{1}{q}}, \tag{5}$$

где $k \leq m_1 < m_2 < \ldots < m_s$, $s \leq t$ и $m_{i+1} - m_i \geq d$ для всех $i = 1, \ldots, s-1$.

Докажем неравенство (5), используя индукцию по s. Для $s = 1$ неравенство (5) верно в силу выбора числа ε. Предположим, что неравенство (5) верно для $s < t$ и последовательность $m_1, m_2, \ldots, m_{s+1}$ удовлетворяет указанным выше требованиям. Тогда

$$\|T^{m_1}(x) + \ldots + T^{m_{s+1}}(x)\|_{p,q} = \|T^{m_1-k}(T^k(x) + T^{m_2-m_1+k}(x) + \ldots +$$

$$+T^{m_{s+1}-m_1+k}(x))\|_{p,q} \leq \|T^k x + T^{m_2-m_1+k}(x) + \ldots + T^{m_{s+1}-m_1+k}(x)\|_{p,q} \leq$$

$$\leq \|P_r T^k x + (I - P_r)(T^{m_2-m_1+k}(x) + \ldots + T^{m_{s+1}-m_1+k}(x))\|_{p,q} +$$

$$+\|(I - P_r)T^k(x)\|_{p,q} + \|P_r(T^{m_2-m_1+k}(x) + \ldots + T^{m_{s+1}-m_1+k}(x))\|_{p,q}.$$

В силу неравенств (3) и (4) имеем, что

$$\|(I-p_r)T^k(x)\|_{p,q} + \|P_r(T^{m_2-m_1+k}(x) + \ldots + T^{m_{s+1}-m_1+k}(x)\|_{p,q} < (s+1)\varepsilon.$$

Согласно теореме 4 (i), при $1 < q \leq p < \infty$ банахова решетка $l_{p,q}$ является q-выпуклой с константой q-выпуклости $M^q(l_{p,q}) = 1$, в частности $l_{p,q}$ удовлетворяет верхней q-оценке с той же константой, т.е

$$\| \textstyle\sum_{i=1}^n a_i\|_{p,q} \leq (\sum_{i=1}^n \|a_i\|_{p,q}^q)^{\frac{1}{q}}$$

в случае, когда элементы $\{a_i\}_{i=1}^n \subset l_{p,q}$ попарно дизъюнктны.

Поскольку элементы $(I - P_r)(T^{m_2-m_1+k}(x) + \ldots + T^{m_{s+1}-m_1+k}(x))$ и $P_r T^k(x)$ попарно дизъюнктны, то используя предположение индукции (5) и неравенство (2), получим следующую оценку:

$$\|P_r T^k(x(+(I - P_r)(T^{m_2-m_1+k}(x) + \ldots + T^{m_{s+1}-m_1+k}(x))\|_{p,q} \leq$$
$$(\|P_r T^k(x)\|_{p,q}^q + \|(I - P_r)(T^{m_2-m_1+k}(x) + \ldots + T^{m_{s+1}-m_1+k}(x))\|_{p,q}^q)^{\frac{1}{q}} \leq$$
$$((1+\varepsilon)^q + 2^q s)^{\frac{1}{q}}.$$

Следовательно, в силу неравенства (1), имеем, что

$$\|T^{m_1}(x) + \ldots + T^{m_{s+1}}(x)\|_{p,q} \leq ((1+\varepsilon)^q + 2^q s)^{\frac{1}{q}} + (s+1)\varepsilon < 2(s+1)^{\frac{1}{q}}.$$

Таким образом, неравенство (5) верно для каждого $s \leq t$.

Пусть $\{n_i\}_{i=0}^{\infty}$ — произвольная строго возрастающая последовательность натуральных чисел и пусть $N > k$ достаточно большое натуральное число. Тогда $N = k + mt + r$, где $0 \le r < t$ и m натуральное число, для которого $m \ge d$. Используя доказанное неравенство (5), получим, что

$$\|\sum_{j=0}^{N} T^{n_j}(x)\|_{p,q} \le \|\sum_{j=0}^{k+r} T^{n_j}(x)\|_{p,q} +$$
$$\sum_{s=1}^{m} \|\sum_{j=0}^{t-1} T^{n_{k+r+s+jm}}(x)\|_{p,q} \le (k+r+1)\|x\|_{p,q} + m \cdot 2 \cdot t^{\frac{1}{q}}.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{N+1}\|\sum_{j=0}^{N} T^{n_j}(x)\|_{p,q} \le \frac{(k+r+1)\|x\|_{p,q}}{N+1} + \frac{2mt^{\frac{1}{q}}}{tm} = \frac{(k+r+1)\|x\|_{p,q}}{N+1} + 2t^{\frac{1}{q}-1}$$

и согласно выбору t,

$$\overline{\lim}_{N\to\infty} \frac{1}{N+1}\|\sum_{j=0}^{N} T^{n_j}(x)\|_{p,q} \le 2t^{\frac{1}{q}-1} < \delta.$$

Так как $\delta > 0$ произвольное, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}\|\sum_{j=0}^{n} T^{k_j}(x)\|_{p,q} = 0.$$

(ii). Пусть теперь $1 < p < q < \infty$. Согласно теореме 5, для числа $1 < r_0 < p$ в $l_{p,q}$ существует такая норма $\|\cdot\|_{[p,q]}$, эквивалентная норме $\|\cdot\|_{(p,q)}$, что $(l_{p,q}, \|\cdot\|_{[p,q]})$ есть r_0-выпуклое симметричное пространство с константой r_0—выпуклости $M^{(r_0)}((l_{p,q}, \|\cdot\|_{[p,q]})) = 1$. Повторяя теперь доказательство пункта (i), заменив q на r_0, получим,

$$\|\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} T^{k_j}(x)\|_{[p,q]} \to 0$$

при $n \to \infty$ для любой последовательности $\{k_j\}_{j=0}^{\infty} \in \mathfrak{N}$.

□

Литература

1. M. Akcoglu, L. Sucheston. On operator convergence in Hilbert space and in Lebesgue space, Period. Math. Hungar. 1972. V. 2. P. 235-244.

2. A. Bellow, An L_p–inequality with application to ergodic theory. Hous. J. Math. 1975. V.1. No.1. P. 153-159.

3. C.Bennet, R.Sharpley. *Interpolation of operators.* Academic Press, INC. 1988.

4. J.R. Blum, D.L. Hanson. On the mean ergodic theorem for subsequences. Bull. Amer. Math. Soc. 1960. V. 66. P. 308-311.

5. J.Creekmore. Type and cotype in Lorentz of $L_{p,q}$ spaces. Indag. Math. 1981. V. 43. P. 145-152.

6. P. G. Dodds, T. K. Dodds and F. A. Sukochev. On p-convexity and q-concavity in non-commutative symmetric spaces. Integr. Equ. Oper. Theory. 2014. V. 78. P. 91-114.

7. N. Dunford and J.T. Schwartz. *Linear operators.* Part I:General theory. Wiley. 1988.

8. U. Krengel. *Ergodic theorems.* De Gruyter Stud. Math., V. 6. Walter de Gruyter. Berlin - New York. 1985.

9. P. Lefevre, E. Matheron and A. Primot. Smoothness, asymptotic smoothness and the Blum-Hanson property. Israel J. Math. 2016. V. 211. 271-309.

10. M. Lin. Mixing for Markov operators. Z. Wahrsch. Verw. Geb. 1971. V. 19. P. 231-242.

11. J.Lindenstrauss, L.Tzafriri. *Classical Banach spaces.* Springer-Verlag. Berlin-New York. 1996.

12. L.K. Jones, V. Kuftinec. A note on the Blum-Hanson theorem. Proc. Amer. Math. Soc. 1970. V. 30. P. 202-203.

13. V. Muller, Y. Tomilov. Quasisimilarity of power bounded operators and Blum-Hanson property. J. Funct. Anal. 2007. V. 246. P. 385-399.

14. Л.В.Канторович, Г.П.Акилов. *Функциональный анализ.* М.: «Наука». 1977.

15. Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М. *Интерполяция линейных операторов.* М.: «Наука». 1978.

Национальный университет Узбекистана
им. М.Улугбека

Uzbek Mathematical
Journal, 2017,№1, pp.165-171

УДК 519.21

Strong laws of large numbers for random fields with values in banach spaces

Sharipov O.Sh., Kushmurodov A.A.

Banax fazolarida qiymat qabul qiluvchi tasodifiy maydonlar uchun kuchaytirilgan katta sonlar qonuni isbotlangan.

Доказан усиленный закон больших чисел для случайных полей со значениями в банаховых пространствах.

I. Introduction

The strong laws of large numbers for the sequence of independent random variables with values in Banach spaces are well studied (see [1]-[4]).The case of random fields were studied in [4].

It is known that the validity of the strong laws of large numbers depends on the geometrical structure of Banach space. One of the important classes of the spaces is a class of Rademacher type p $(1 \le p \le 2)$ Banach spaces. Recall the definition of Rademacher type p Banach spaces.

Definition. We say that a separable Banach space B (with a norm $\|\cdot\|$) is of Rademacher type p if for any finite collection $\{V_1, V_2, ..., V_n\}$ of independent mean zero random variables with values in B with $E\|V_j\|^p < \infty,\ \ j = 1, 2, ...,$ there exists a constant $0 < C < \infty$ depending only on B, such that

$$E\left\|\sum_{i=1}^{n} V_i\right\|^p \le C\sum_{j=1}^{n} E\|V_j\|^p.$$

This paper was motivated by the results of the papers [5], [6] and monograph [7]. In [5] the authors prove theorems on almost surely (a.s.) convergence of double sums of independent random variables with values in Banach spaces of Rademacher type p. The following theorem is one of the main results of [5].

Theorem A. Let $1 < \ p \le 2$ and let B be a real separable Banach space. Then the following two statements are equivalent:

(i) The Banach space B is of Rademacher type p.

(ii) For every double array $\{V_{mn}, m \geq 1, n \geq 1\}$ of independent mean zero random variables with values in B, the condition

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E \|V_{mn}\|^p}{m^p n^p} < \infty,$$

implies the following strong law of large numbers

$$\lim_{m \vee n \to \infty} \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} V_{ij}}{mn} = 0 \quad a.s., \tag{1}$$

where $m \vee n = \max(m, n)$.

In [6] and [7] the authors proved the strong laws of large numbers for Hilbert and Banach space-valued dependent random variables respectively. Our main aim is to extend the results of [6] and [7] for random fields and to generalize the results of [5] in particular case of Hilbert space-valued random variables. Note that Hilbert space is Rademacher type 2 space.

II. Main results

Theorem 1. Let $\{X(i,j), (i,j) \in Z^2\}$ be a random field of independent random variables with values in a separable Banach space B of Rademacher type p with

$$EX\left(i,j\right) = 0 \;\; (i,j) \in Z^2,$$

$$\sup_{i,j} E \left\| X\left(i,j\right) \right\|^p < C.$$

Then as $m \vee n \to \infty$,

$$\frac{(mn)^{\gamma_1}}{(\log mn)^{\beta}} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{m} X(i,j)}{mn} \to 0 \quad a.s.,$$

where $\gamma_1 = 1 - \frac{1}{p}$ and $\beta > \frac{1}{p}$.

Let $\{X(i,j),\, (i,j) \in Z^2\}$ be a random field with values in separable Hilbert space H (with an inner product $(\cdot,\cdot\ )$ and a norm$\|\cdot\|$). We are interested in the strong laws of large numbers for $\{X(i,j),\, (i,j) \in Z^2\}$.

We will assume that $X(i,j)$ satisfies the following conditions:

$$EX(i,j) = 0, \quad \sup_{i,j} E \left\| X(i,j) \right\|^2 < \; M, \tag{2}$$

$$\sup_{i,j} |E\left(X(i,j), X(i+m, j+l)\right)| \leq \varphi\left(\|(m,l)\|_1\right), \tag{3}$$

for some non-increasing function $\phi(\cdot)$, $M>0$ and a norm $\|\cdot\|_1$ in Z^2.

Theorem 2. Let $X(i,j)$ be a random field with values in H satisfying the conditions (2),(3) and for some $\gamma \in [1,2)$:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \varphi\left(\|(i,j)\|_1\right) \leq C\,(nm)^{\gamma-1} \quad as \quad m \vee n \to \infty,$$

Then as $m \vee n \to \infty$, for some $\beta > \frac{1}{2}$,

$$\frac{(mn)^{\frac{2-\gamma}{4}}}{(\log mn)^{\beta}} \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} X(i,j) \to 0 \quad a.s..$$

Remark. The statement of the Theorem 2 remains valid if we replace the function $\varphi(\cdot)$ in the condition (3) (and in Theorem 2) by non-increasing function $\varphi(m,l)$.

Proofs of Theorems

In what follows we will denote by C a constant which can depend on several parameters (but not an random variables and summation index) and might be different in different places.

Proof of Theorem 1. We will prove the theorem in the case $n, m \to \infty$ and other cases can be proven analogously. We will use the standard method and prove the following relations :

$$\frac{\left(2^k 2^l\right)^{\gamma_1}}{\left(\log 2^k 2^l\right)^{\beta}} \left\| \frac{\sum\limits_{i=1}^{2^k}\sum\limits_{j=1}^{2^l} X(i,j)}{2^k 2^l} \right\| \to 0, \qquad a.s. \quad as \quad k \vee l \to \infty, \tag{4}$$

$$\max_{\substack{2^k < n \leq 2^{k+1} \\ 2^l < m \leq 2^{l+1}}} \frac{(mn)^{\gamma_1} \left\| \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} X\left(i,j\right) - \sum\limits_{i=1}^{2^k}\sum\limits_{j=1}^{2^l} X\left(i,j\right) \right\|}{\left(\log mn\right)^{\beta} mn} \to 0,\ a.s.\ as\ k \vee l \to \infty. \tag{5}$$

Using Markov inequality and the definition of Rademacher type p

Banach space we have for any $\varepsilon > 0$,

$$P\left(\frac{\left(2^k 2^l\right)^{\gamma_1}}{\left(\log 2^k 2^l\right)^{\beta}}\left\|\frac{\sum\limits_{i=1}^{2^k}\sum\limits_{j=1}^{2^l} X(i,j)}{2^k 2^l}\right\| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\left(2^k 2^l\right)^{\gamma_1 p} E\left\|\sum\limits_{i=1}^{2^k}\sum\limits_{j=1}^{2^l} X(i,j)\right\|^p}{\left((k+l)\log 2\right)^{\beta p}\varepsilon^p \left(2^k 2^l\right)^p} \leq$$

$$\leq \frac{\left(2^k 2^l\right)^{\gamma_1 p} C\, 2^k 2^l}{\left((k+l)\log 2\right)^{\beta p}\varepsilon^p \left(2^k 2^l\right)^p} = \frac{C}{(k+l)^{\beta p}}, \tag{6}$$

(6) and Borel-Cantelli lemma imply (4).In order to prove (5) we need the following lemma.

Lemma 1. Let $\{X_n, n \geq 1\}$ be a sequence of independent r.v.'s with values in Rademacher type p Banach space B with $EX_i = 0,\ i = \overline{1,n}$.

Then the following inequality holds:

$$E\max_{1\leq k\leq n}\|X_1 + X_2 + ... + X_k\|^p \leq C\sum_{i=1}^{n} E\|X_i\|^p \quad for \quad 1 \leq p \leq 2.$$

Lemma 1 was formulated in [6] as a corollary 2.7 for Hilbert space valued random variables but it remains valid for random variables with values in Rademacher type p Banach space B.

Using Markov's inequality and Lemma 1 we have

$$P\left(\max_{\substack{2^k < n \leq 2^{k+1}\\ 2^l < m \leq 2^{l+1}}} \frac{(mn)^{\gamma_1}\left\|\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} X(i,j) - \sum\limits_{i=1}^{2^k}\sum\limits_{j=1}^{2^l} X(i,j)\right\|}{(\log mn)^{\beta}\, mn} \geq \varepsilon\right) \leqslant$$

$$\leq E\max_{\substack{2^k < n \leq 2^{k+1}\\ 2^l < m \leq 2^{l+1}}} \frac{\left(2^{k+1} 2^{l+1}\right)^{\gamma_1 p}\left\|\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} X(i,j) - \sum\limits_{i=1}^{2^k}\sum\limits_{j=1}^{2^l} X(i,j)\right\|^p}{\left(\log 2^k 2^l\right)^{\beta p}\left(2^k 2^l\right)^p \varepsilon^p} \leq$$

$$\leq \frac{C\left(2^{k+l+2}\right)^{\gamma_1 p} E\left\|\sum\limits_{i=1}^{2^{k+1}}\sum\limits_{j=1}^{2^{l+1}} X\left(i,j\right)-\sum\limits_{i=1}^{2^{k}}\sum\limits_{j=1}^{2^{l}} X\left(i,j\right)\right\|^{p}}{\left(\log 2^{k+l}\right)^{\beta p}\left(2^{k+l}\right)^{p}} \leq$$

$$\leq \frac{C2^{k}2^{l}}{\left(\log 2^{k+l}\right)^{\beta p}\left(2^{k}2^{l}\right)^{p(1-\gamma_1)}} \leq \frac{C}{(k+l)^{\beta p}}. \tag{7}$$

Now (7) and Borel- Cantelli lemma imply (5).

Relations (4) and (5) imply the statement of the theorem.

Proof of Theorem 2. We will use the method of the proof of Theorem 1. Set $\nu_n = \left[n^{\frac{2}{2-\gamma}}\right]$, $\quad \nu_m = \left[m^{\frac{2}{2-\gamma}}\right]$.

Using Chebyshev's inequality we have for any $\eta > 0$,

$$P\left(\frac{\left(\nu_m\nu_n\right)^{\frac{2-\gamma}{4}}}{\left(\log \nu_m\nu_n\right)^{\beta}}\left\|\frac{\sum\limits_{i=1}^{\nu_n}\sum\limits_{j=1}^{\nu_m} X(i,j)}{\nu_m\nu_n}\right\| \geqslant \eta\right) \leqslant \frac{\left(\nu_m\nu_n\right)^{\frac{2-\gamma}{2}} E\left\|\sum\limits_{i=1}^{\nu_n}\sum\limits_{j=1}^{\nu_m} X(i,j)\right\|^{2}}{\left(\log \nu_m\nu_n\right)^{2\beta}\eta^{2}\left(\nu_m\nu_n\right)^{2}} \leq$$

$$\leqslant \frac{\left(\nu_m\nu_n\right)^{\frac{2-\gamma}{2}} C\left(\nu_m\nu_n\right)^{\gamma}}{\left(\log \nu_m\nu_n\right)^{2\beta}\eta^{2}\left(\nu_m\nu_n\right)^{2}} \leq \frac{C}{(mn)\left(\log mn\right)^{2\beta}}. \tag{8}$$

Now we have:

$$Y_{mn} = \max_{\substack{\nu_n < n \leqslant \nu_{n+1} \\ \nu_m < m \leqslant \nu_{m+1}}} \frac{\left\|\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} X\left(i,j\right)-\sum\limits_{i=1}^{\nu_n}\sum\limits_{j=1}^{\nu_m} X\left(i,j\right)\right\|^{2}}{\left(mn\right)^{\frac{2+\gamma}{2}}\left(\log mn\right)^{2\beta}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\left(\nu_n\nu_m\right)^{\frac{2+\gamma}{2}}\left(\log \nu_m\nu_n\right)^{2\beta}}\left[\sum_{i=1}^{\nu_n}\sum_{j=\nu_m+1}^{\nu_{m+1}}\left\|X\left(i,j\right)\right\|+\sum_{i=\nu_n+1}^{\nu_{n+1}}\sum_{j=1}^{\nu_m}\left\|X\left(i,j\right)\right\|+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=\nu_n+1}^{\nu_{n+1}}\sum_{j=\nu_m+1}^{\nu_{m+1}}\left\|X\left(i,j\right)\right\|\right]^{2}$$

$$EY_{mn} \leqslant \frac{1}{(\nu_n\nu_m)^{\frac{2+\gamma}{2}} (\log \nu_m\nu_n)^{2\beta}} \left[\sum_{i=\nu_n+1}^{\nu_{n+1}} \sum_{j=1}^{\nu_m} \left(E\|X(i,j)\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \right.$$

$$+ \sum_{i=\nu_n+1}^{\nu_{n+1}} \sum_{j=\nu_m+1}^{\nu_{m+1}} \left(E\|X(i,j)\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{\nu_n} \sum_{j=\nu_m+1}^{\nu_{m+1}} \left(E\|X(i,j)\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 \leqslant \frac{C\left(\nu_{n+1}\nu_{m+1} - \nu_n\nu_m\right)^2}{(\nu_n\nu_m)^{\frac{2+\gamma}{2}} (\log \nu_m\nu_n)^{2\beta}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C\,mn}{(\log \nu_n\nu_m)^{2\beta}} \left(\frac{\nu_{n+1}\nu_{m+1}}{\nu_n\nu_m} - 1 \right)^2 \leqslant$$

$$\leq \frac{C\,mn}{(\log \nu_{mn})^{2\beta}} \frac{1}{(mn)^2 (2-\gamma)^2} \leqslant \frac{C}{(mn)(\log mn)^{2\beta}} \tag{9}$$

(9) implies for any $\eta > 0$,

$$P(Y_{mn} \geq \eta) \leq \frac{C}{(mn)(\log mn)^{2\beta}}. \tag{10}$$

(8), (10) and Borel-Cantelli lemma implies the statement of the theorem.

References

1. A.Adler, Rosalsky and R.L.Taylor, Some strong laws of large numbers for sums of random elelments,Bull. Inst. Math. Acad. Sinica 20 1992, pp. 335-357.

2. A Cantrell and A.Rosalsky, Some strong laws of large numbers for Banach space valued summand irrespective of their joint distributions, Stochastic Anal. Appl. 21 2003, pp.79-95.

3. A.Rosalsky and L.V.Thahn, On the strong laws of large numbers for sequences of blockwise independent and blockwise p-orthogonal random elements in Rademacher type p Banach spese. Prob. And Math. Stat., Vol.27, Fasc.2 2007,pp.205-222.

4. T.Mikosch, R.Norvaisa, Strong laws of large numbers for fields of Banach space valued random variables. Probab.Th.Rell.Fields,1987,

V.74, Issue 2,pp.241-253.

5. A. Rosalsky, L. V. Thanh, "Strong and Week Laws of Large Numbers for Double Sums of Independent Random Elements in Rademacher Type p Banach Spaces,"Stochastic Analysis and Applications, 2006, 24, 1097-1117.

6. S. A. Utev, Sums of random varibles with φ-mixing. Siberian Adv.Math.1 (1991). 124-155.

7. T.M. Zuparov, K. B. Mamadaliev K.B. "Strong laws of large numbers for quasistationary sequences in Hilbert spaces,"Izvestiya Akademii Nauk UzSSR, Ser. Fiz.-Math., 1982, N1, 15-19.(In Russian)

8. D.Bosq. Linear Processes in Function Spaces. Theory and applications. Lecture notes in Statistics, 149, Springer, 2000.

Институт математики при НУУз

Содержание

Mundarija

Компьютерная верстка: к.ф.-м.н. *Ф.А.Нуралиев*

Журнал зарегистрирован Агентством по печати и информации
Республики Узбекистан 22 декабря 2006 г. Регистр. №0044.

Сдано в набор 30.01.2017 г. Подписано к печати 08.02.2017 г.
Формат 60×84 1/16. Гарнитура литературная. Печать офсетная.
Усл.-печ.л. 11,0. Тираж 120 Заказ №

Институт математики при Национальном Университете
Узбекистана им. М.Улугбека: 100125,
Ташкент, Академгородок, ул. Дурмон йули, 29.

Отпечатано в ООО "NISO POLIGRAF".
Ташкентский вилоят, Урта Чирчикский туман,
ССГ "Ок-Ота" улица Марказ-1