O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI FANLAR AKADEMIYASI
V.I.ROMANOVSKIY NOMIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI

# O‘ZBEKISTON MATEMATIKA JURNALI

Jurnalga 1957 yilda asos solingan (1991 yilgacha "O‘zbekiston fanlar akademiyasining axboroti. Fizika-matematika fanlari seriyasi"deb nomlangan). Yilda 4 marta chiqadi

**4. 2005**

# УЗБЕКСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

# УзМЖ

Основан в 1957 г. (до 1991 г. под названием "Известия Академии наук Узбекистана. Серия физико-математических наук"). Выходит 4 раза в год

ТАШКЕНТ. ИЗДАТЕЛЬСТВО "ФАН"АКАДЕМИИ НАУК РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН. 2005

Адрес редколлегии: 700125. Ташкент, 125, Ф.Ходжаева, 29,
Институт математики АН РУз,
телефон: 162-75-44

Адрес редакции: 700047, Ташкент, 47, ул. акад. Я.Гулямова, 70,
телефон: 133-41-88

Uzbek Mathematical
Journal, 2005,№4, pp.3-12

УДК 517.96

# Краевая задача для уравнения эллиптико-гиперболического типа третьего порядка с двумя перпендикулярными линиями вырождения в двусвязной области

**О.Х.Абдуллаев**

Maqolada ikkita buzilish chizig'iga ega bo'lgan uchinchi tartibli elliptiko-giperbolik tipdagi tenglama uchun ikki bog'lamli sohada qo'yilgan chegaraviy masalaning mavjudligi va yagonaligi isbotlangan.

In this paper existence and uniqueness of the solution are proved for the boundary value problem for the mixed elliptic-hyperbolic equation of the third order with two perpendicular lines of degeneration in two-connected domain

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x}(Lu) = \frac{\partial}{\partial x}\left(u_{xx} + sign(xy)u_{yy}\right) = 0. \tag{1}$$

Пусть $\Omega$ – конечная двусвязная область, ограниченная при $xy \geq 0$ линиями:

$$\sigma_1 : x^2 + y^2 = 1;\ \ x > 0, y > 0; \quad \sigma_2 : x^2 + y^2 = q^2; \quad x > 0, y > 0;$$

$$\sigma_1^* : x^2+y^2 = 1;\ \ x < 0, y < 0; \quad \sigma_2^* : x^2+y^2 = q^2;\ \ x < 0, y < 0\ \ (0 < q < 1);$$

и при $xy \leq 0$ – характеристиками:

$$A_jA_j^* : x - y = (-1)^{j-1}; \quad B_jB_j^* : x - y = (-1)^{j-1} \cdot q$$

уравнения (1), где $A_1(1;0)$, $B_1(q;0)$, $A_2^*(0;1)$, $B_2^*(0,q)$, $A_1^*(0;-1)$, $B_1^*(0,-q)$, $A_2(-1;0)$, $B_2(-q;0)$.

Введем обозначения:

$$\Omega_0 = \Omega \cap (x > 0) \cap (y > 0);\ \ \Omega_0^* = \Omega \cap (x < 0) \cap (y < 0);\ \ \Omega_1 = \Omega_0 \cup \Omega_0^*;$$

$$\Delta_1 = \Omega \cap (x + y > q) \cap (y < 0);\ \ \Delta_1^* = \Omega \cap (x + y < -q) \cap (x > 0);$$

$$\Delta_2 = \Omega \cap (x + y < -q) \cap (x < 0); \quad \Delta_2^* = \Omega \cap (x + y > q) \cap (y > 0);$$

$$D_1=\Omega\cap(0<x+y<q)\cap(y<0);\;\; D_1^*=\Omega\cap(-q<x+y<0)\cap(x>0);$$

$$D_2=\Omega\cap(0<x+y<q)\cap(y>0);\;\; D_2^*=\Omega\cap(-q<x+y<0)\cap(x<0);$$

$$D_3=D_1\cup D_1^*;\;\; D_4=D_2\cup D_2^*;$$

$$D_0=\Omega_0\cup\Delta_1\cup\Delta_2^*;\quad D_0^*=\Omega_0^*\cup\Delta_1^*\cup\Delta_2;$$

$$I_j=\left\{t:(j-2)\frac{q}{2}<t<\frac{q(j-1)}{2}\right\};\;\; I_j^*=\left\{t:\frac{q}{2}<(-1)^j t<q\right\};$$

$$I_{2+j}=\left\{t:\frac{q-1}{2}<(-1)^{j-1}t<0\right\};I_{4+j}=\left\{t:0<(-1)^j t<1\right\}\quad(j=1,2).$$

**Определение.** *Функцию $u(x,y)$ будем называть регулярным решением уравнения (1), если она имеет непрерывные производные, входящие в оператор $Lu$, и оператор $Lu$ имеет непрерывную производную по $x$.*

**Задача A.** Найти функцию $u(x,y)$ со следующими свойствами:

1) $u(x,y)\in C\left(\overline{\Omega}\right)$;

2) $u(x,y)$ является регулярным решением уравнения (1) в области $\Omega\setminus(xy=0)\setminus(x+y=0)\setminus(x+y=\pm q)$;

3) $u_x,u_y\in C\left(A_1A_1^*\cup A_2A_2^*\right), u_y\in C\left(A_1B_1\cup A_2B_2\right), u_x\in C\left(A_1^*B_1^*\cup A_2^*B_2^*\right)$, причем $u_x(0,t)$, $u_y(t,0)$ могут обращаться в бесконечность порядка меньше единицы при $t\to\pm q$ и при $t\to\pm1$ ограничено;

4) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям:

$$u(x,y)=\varphi_j(x,y)\quad(x,y)\in\sigma_j,\qquad(2_j)$$

$$u(x,y)=\varphi_j^*(x,y),\quad(x,y)\in\overline{\sigma}_j^*,\qquad(3_j)$$

$$u(x,y)\Big|_{A_jE_j}=\psi_j(y),\quad y\in\overline{I}_{2+j};\qquad(4_j)$$

$$u(x,y)\Big|_{B_jC_j^*}=p_j(y),\quad y\in\overline{I}_j;\qquad(5_j)$$

$$u(x,y)\Big|_{B_j^*C_j^*}=p_j^*(y),\quad y\in I_j^*;\qquad(5_j^*)$$

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial n}\Big|_{A_jA_j^*}=\mu_j(y),\quad y\in I_{4+j};\qquad(6_j)$$

5) выполняются условия склеивания:

$$u_y(x,-0)=u_y(x,+0),\quad(x,0)\in A_1B_1,\qquad(7_1)$$

$$u_y(x,-0)=u_y(x,+0),\quad(x,0)\in A_2B_2,\qquad(7_2)$$

$$u_x(-0,y) = u_x(+0,y), \quad (0,y) \in A_1^* B_1^*, \tag{$8_1$}$$

$$u_x(-0,y) = u_x(+0,y), \quad (0,y) \in A_2^* B_2^*, \tag{$8_2$}$$

*где $n$ – внутренняя нормаль, а $\varphi_j(x,y)$, $\varphi_j^*(x,y)$, $\psi_j(y)$, $p_j(y)$, $p_j^*(y)$, $\mu_j(y)$ $(j=1,2)$ – заданные функции, причем*

$$\varphi_1(1,0) = \psi_1(0), \quad \varphi_2(q,0) = p_1(0), \quad \varphi_2(0,q) = p_2^*(q),$$

$$\varphi_2^*(0,-q) = p_1^*(-q), \quad \varphi_2^*(-q,0) = p_2(0), \quad \varphi_1(-1,0) = \psi_2(0),$$

$$\varphi_j(x,y) = (xy)^\varepsilon \overline{\varphi}_j(x,y), \quad \overline{\varphi}_j(x,y) \in C\left(\overline{\sigma}_j\right), \ \varepsilon > 2,$$

$$\varphi_j^*(x,y) = (xy)^\varepsilon \overline{\varphi}_j^*(x,y), \quad \overline{\varphi}_j^*(x,y) \in C\left(\overline{\sigma}_j^*\right), \ \varepsilon > 2,$$

$$\psi_j(y) \in C^3\left(\overline{I}_{2+j}\right), \ p_j(y) \in C^3\left(\overline{I}_j\right), \ p_j^*(y) \in C^3\left(\overline{I}_j^*\right),$$

$$\mu_j(y) \in C\left(\overline{I}_{4+j}\right) \cup C^2(I_{4+j}).$$

Отметим, что любое регулярное решение уравнения (1) при $xy \neq 0$, $x+y \neq 0$, $x+y \neq \pm q$ представимо в виде:

$$u(x,y) = z(x,y) + \omega(y), \tag{9}$$

где $z(x,y)$ – регулярное решение уравнения:

$$Lz = z_{xx} + sign(xy) z_{yy} = 0, \tag{10}$$

а $\omega(y)$ – произвольная дважды непрерывно дифференцируемая функция, причем

$$\omega(y) = \begin{cases} \omega_1(y), & -1 \leq y \leq 0, \\ \omega_2(y), & 0 \leq y \leq 1 \end{cases} \tag{11}$$

и, не ограничивая общности, можно предполагать

$$\omega_1(0) = \omega_1'(0) = \omega_2(0) = \omega_2'(0) = 0. \tag{12}$$

Согласно $(2_j)$, $(3_j)$, $(4_j)$, $(5_j)$, $(5_j^*)$, $(6_j)$, (9) и (12), решение задачи A редуцируется к задаче $A_1$ отыскания регулярного в области $\Omega$ решения $z(x,y)$ уравнения (10), удовлетворяющего краевым условиям:

$$z(x,y) = \varphi_j(x,y) - \omega_1(y), \quad (x,y) \in \overline{\sigma}_j, \tag{$13_j$}$$

$$z(x,y) = \varphi_j^*(x,y) - \omega_2(y), \quad (x,y) \in \overline{\sigma}_j^*, \tag{$14_j$}$$

$$z(x,y)\Big|_{A_j E_j} = \psi_j(y) - \omega_j(y), \quad y \in \overline{I}_j, \tag{$15_j$}$$

$$z(x,y)\Big|_{B_jC_j^*} = p_j(y) - \omega_j(y), \quad y \in \overline{I}_j, \tag{$16_j$}$$

$$z(x,y)\Big|_{B_jC_j} = p_j^*(y) - \omega_j(y), \quad y \in \overline{I}_j^*, \tag{$16_j^*$}$$

$$\frac{\partial z(x,y)}{\partial n}\Bigg|_{A_jA_j^*} = \mu_j(y) - (-1)^j \frac{\sqrt{2}}{2}\omega_j'(y), \quad y \in I_{4+j} \qquad (17_j) \quad (j=1,2).$$

Решение задачи $B_j$ для уравнения (10) в области $\Delta_j$ с краевыми условиями $(15_j)$, $(17_j)$ $(j=1,2)$ и

$$z(x,y)\Big|_{A_2^*B_2^*} = \psi_2^*(y) - \omega_2(y); \tag{$15_2^*$}$$

$$z_y(x,0) = \nu_1(x), \quad (x,0) \in A_1B_1, \tag{$18_1$}$$

$$z_x(0,y) = \nu_2^*(y), \quad (0,y) \in A_2^*B_2^* \tag{$18_2$}$$

можно представить в виде

$$z_1(x,y) = \psi_1\left(\frac{x+y-1}{2}\right) + \psi_1\left(\frac{x-y-1}{2}\right) - \omega_1\left(\frac{x+y-1}{2}\right) -$$

$$-\omega_1\left(\frac{x-y-1}{2}\right) + \int\limits_{x-y}^{1} \nu_1(t)dt - \psi_1(0), \tag{$19_1$}$$

$$z_2(x,y) = \psi_2^*\left(\frac{x+y+1}{2}\right) + \psi_2^*\left(\frac{y-x+1}{2}\right) - \omega_2\left(\frac{x+y+1}{2}\right) -$$

$$-\omega_2\left(\frac{y-x+1}{2}\right) + \int\limits_{y-x}^{1} \nu_2^*(t)dt + \sqrt{2}\int\limits_{0}^{1} \mu_2(t)dt - \sqrt{2}\mu_2(0) - \psi_2^*(1), \tag{$19_2$}$$

где $\psi_2^*(y)$ – неизвестная функция, которая определяется далее.

Полагая $y=0$ в $(19_1)$ ($x=0$ в $(19_2)$) получим функциональное соотношение между $\tau_1(x)$ и $\nu_1(x)$ ($\tau_2^*(y)$ и $\nu_2^*(y)$) на $A_1B_1$ ($A_2^*B_2^*$), принесенное из $\Delta_1$ ($\Delta_2^*$), в виде:

$$\tau_1(x) = \int\limits_{x}^{1} \nu_1(t)dt + F_1(x), \quad (x,0) \in A_1B_1; \tag{$20_1$}$$

$$\tau_2(y) = \int\limits_{y}^{1} \nu_2^*(t)dt + F_1(y), \quad (0,y) \in A_2B_2, \tag{$20_2$}$$

где

$$F_1(x) = 2\psi_1\left(\frac{x-1}{2}\right) - 2\omega_1\left(\frac{x-1}{2}\right) - \psi_1(0), \qquad (21_1)$$

$$F_2(y) = 2\psi_2^*\left(\frac{y+1}{2}\right) - 2\omega_2\left(\frac{y+1}{2}\right) + \sqrt{2}\int\limits_0^1 \mu(t)dt - \sqrt{2}\mu_2(0) - \psi_1^*(1), \qquad (21_2)$$

$$\omega_1(y) = -\sqrt{2}\int\limits_y^0 \mu_1(t)dt - \sqrt{2}\mu_1(0)\cdot y, \qquad (22_1)$$

$$\omega_2(y) = -\sqrt{2}\int\limits_0^y \mu_2(t)dt + \sqrt{2}\mu_2(0)c\cdot y, \qquad (22_2)$$

а функции $\nu_1(x) \in C^2(A_1B_1)$, $\nu_2^*(y) \in C^2(A_2^*B_2^*)$, они могут обращаться в бесконечность порядка меньше единицы при $x \to q$ и $y \to q$, а при $x \to 1$ и $y \to 1$ соответственно ограничены, причем

$$\nu_1(1) = \frac{1}{2}\psi_1'(0) + \frac{\sqrt{2}}{2}\mu_1(0), \qquad (23_1)$$

$$\nu_2^*(-1) = \frac{1}{2}\psi_2'(0) - \frac{\sqrt{1}}{2}\mu_2(0). \qquad (23_2)$$

**Единственность решения задачи А**

**Лемма.** *Решение $z(x,y)$ задачи $A_1$ при*

$$\psi_j(y) \equiv \mu_j(y) \equiv 0 \quad (j = 1,2) \qquad (24)$$

*свой положительный максимум и отрицательный минимум в области $\overline{\Omega}_1$ принимает лишь на $\overline{\sigma}_1 \cup \overline{\sigma}_2 \cup \overline{\sigma}_1^* \cup \overline{\sigma}_2^*$.*

Доказательство. В силу (24), из $(22_j)$ получим

$$\omega_j(y) \equiv 0, \quad y \in \overline{I}_{4+j} \quad (j = 1,2). \qquad (25_j)$$

На основании $(25_j)$ и принципа экстремума для эллиптических уравнений, решение $z(x,y)$ уравнения (10) своего положительного максимума и отрицательного минимума в замкнутой области $\overline{\Omega}_1$ достигает лишь на $\overline{\sigma}_1 \cup \overline{\sigma}_2 \cup \overline{A_1B_1} \cup \overline{A_2^*B_2^*}$ и $\overline{\sigma}_1^* \cup \overline{\sigma}_2^* \cup \overline{A_1^*B_1^*} \cup \overline{A_2B_2}$.

Покажем, что решение $z(x,y)$ уравнения (10) не достигает своего положительного максимума и отрицательного минимума на отрезках $A_jB_j \cup A_j^*B_j^*$. Предположим обратное, т.е. пусть $z(x,y)$ в некоторой точке $(0,y_0) \in A_2^*B_2^*$ достигает своего положительного макисмума, тогда на основании принципа экстремума для гиперболических уравнений имеет место $z_x(-0,x) \geq 0$. Отсюда, с учетом непрерывности $z_x(x,y)$ на линии $y=0$, имеем $z_y(+0,x) \geq 0$. Это неравенство противоречит принципу Зарембо-Жиро, согласно которому $z_y(x_0,+0) < 0$.

Таким образом, $z(x,y)$ не достигает своего положительного максимума на отрезках $A_2^*B_2^*$.

Пусть теперь $z(x,y)$ в некоторой точке $(x_0,0) \in A_1B_1$ достигает своего положительного максимума. Тогда, в силу $(22_1)$, с учетом (12), (24) и непрерывности $z_y(x,y)$, на линии $x=0$ имеем $z_y(-x,0) \geq 0$, следовательно, это неравенство противоречит принципу Зарембо-Жиро, по которому $z_y(x,+0) < 0$. Тем самым $z(x,y)$ не достигает свой положительный максимум в точке $(x_0,0) \in A_1B_1$.

В силу симметричности, аналогично доказывается, что $z(x,y)$ не достигает своего положительного максимума и отрицательного минимума на отрезках $A_1^*B_1^*$ и $A_2B_2$.

Следовательно, решение однородной задачи $A_1$ свой положительный максимум и отрицательный минимум в области $\overline{\Omega}_1$ достигает лишь на $\sigma_1 \cup \sigma_2 \cup \sigma_1^* \cup \sigma_2^*$. Лемма доказана.

На основании леммы, с учетом $(25_j)$, $(13_j)$ и $(14_j)$, при $\varphi_j^*(x,y) \equiv \varphi_j(x,y) \equiv 0$ и в силу непрерывности $z(x,y)$, имеем $z(x,y) \equiv 0$ в $\overline{\Omega}_1$. В силу единственности решения задачи Коши-Гурса в областях $\Delta_j$ и $\Delta_j^*$ для уравнения (10), имеем $z(x,y) \equiv 0$ в $\overline{\Delta}_j \cup \overline{\Delta}_j^*$. Далее, принимая во внимание $(16_j)$ и $(16_j^*)$ при $p_j(y) \equiv p_j^*(y) \equiv 0$, с учетом $(25_j)$ и решения задачи Гурса в областях $D_3$, $D_4$ для уравнения (10), получим, что $z(x,y) \equiv 0$, следовательно, $z(x,y) \equiv 0$ в $\overline{\Omega}$.

Отсюда, с учетом $(25_j)$, из (9) имеем $u(x,y) \equiv 0$ в $\overline{\Omega}$. Тем самым доказана единственность решения задачи $A$.

## Существование решения задачи А

Для доказательства существования решения задачи $A_1$ важную роль играет вспомогательная задача $A_1(D_0)$, которая отличается от задачи $A_1$ тем, что в ней рассматриваются краевые условия $(13_j)$, $(15_1)$, $(17_j)$ и $(15_2^*)$.

Заметим, что единственность решения задачи $A_1(D_0)$ доказывается с помощью аналога принципа экстремума А.В. Бицадзе [1].

Переходим к доказательству существования решения задачи $A_1(D_0)$.

Решая задачу $N$ [2] для уравнения (10) в области $\Omega_0$ с краевыми условиями $(13_j)$ и

$$u_y(x,+0) = \nu_1(x), \ \ (x,0) \in A_1B_1, \quad u_x(+0,y) = \nu_2^*(y), \ \ (0,y) \in A_2^*B_2^*$$

и полагая $y=0$ $(x=0)$, получим соотношения между $\tau_1(x)$ и $\nu_1(x)$ ($\tau_2(y)$ и $\nu_2^*(y)$) на $A_1B_1$ ($A_2^*B_2^*$), принесенное из области $\Omega_0$ :

$$\tau_1(x)=\sum_{k=1}^{2} l\int\limits_{\sigma_k}\Phi_k(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial n}G(\xi,\eta;x,0)dS+\int\limits_{q}^{1}\nu_1(t)G(t,0;x,0)dt+$$

$$+\int\limits_{q}^{1}\nu_2^*(t)G(0,t;x,0)dt \tag{$26_1$}$$

$$\left(\tau_2^*(y)=\sum_{k=1}^{2} l\int\limits_{\sigma_k}\Phi_k(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial n}G(\xi,\eta;0,y)dS+\int\limits_{q}^{1}\nu_1(t)G(t,0;0,y)dt+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{q}^{1}\nu_2^*(t)G(0,t;0,y)dt\right), \tag{$26_2$}$$

где $l=(-1)^{k+1}$, а $G(\xi,\eta;x,y)$ – функция Грина задачи $N$ для уравнения (10) в области $\Omega_0$, которая имеет следующий вид:

$$G(\xi,\eta;x,y)=\frac{1}{2\pi}ln\left|\frac{\theta_1\left(\frac{lnv+ln\overline{\delta}}{2\pi ir}\right)\theta_1\left(\frac{ln\overline{v}+ln\overline{\delta}}{2\pi ir}\right)\theta_1\left(\frac{ln(-v)+ln\overline{\delta}}{2\pi ir}\right)\theta_1\left(\frac{ln(-\overline{v})+ln\overline{\delta}}{2\pi ir}\right)}{\theta_1\left(\frac{lnv-ln\delta}{2\pi ir}\right)\theta_1\left(\frac{ln\overline{v}-ln\delta}{2\pi ir}\right)\theta_1\left(\frac{ln(-v)-ln\delta}{2\pi ir}\right)\theta_1\left(\frac{ln(-\overline{v})-ln\delta}{2\pi ir}\right)}\right|,$$

$v=\xi+i\eta$, $\delta=x+iy$, $\overline{v}=\xi-i\eta$, $\overline{\delta}=x-iy$, $i^2=-1$, $r=\frac{1}{\pi i}lnq$, $\theta_1(\xi)=\theta_1\left(\xi|-\frac{1}{r}\right)$ – тэта-функция, $\Phi_j(x,y)=\varphi_j(x,y)-\omega_1(x)$, а $\omega_1(x)$ определяется из ($22_1$). Исключив $\tau_1(x)$ ($\tau_2^*(y)$) из соотношений ($20_1$) и ($26_1$) (($20_2$) и ($26_2$)), с учетом ($7_1$), ($8_2$), (9) и (12), получим

$$\int\limits_{x}^{1}\nu_1(t)dt-\int\limits_{q}^{1}\nu_1(t)G(t,0;x,0)dt=\overline{F}_1(x),\quad q<x<1; \tag{$27_1$}$$

$$\int\limits_{y}^{1}\nu_2^*(t)dt-\int\limits_{q}^{1}\nu_2^*(t)G(t,0;0,y)dt=\overline{F}_2(y),\quad q<y<1, \tag{$27_2$}$$

где

$$\overline{F}_1(x)=\sum_{k=1}^{2} l\int\limits_{\sigma_k}\Phi_k(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial n}G(\xi,\eta;x,0)dS+\int\limits_{q}^{1}\nu_2^*(t)G(0,t;x,0)dt-F_1(x), \tag{$28_1$}$$

$$\overline{F}_2(y)=\sum_{k=1}^{2} l\int\limits_{\sigma_k}\Phi_k(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial n}G(\xi,\eta;0,y)dS+\int\limits_{q}^{1}\nu_1(t)G(0,t;0,y)dt-F_2(y). \tag{$28_2$}$$

Дифференцируя ($27_1$) по $x$ и ($27_2$) по $y$, после некоторых вычислений получим систему сингулярных интегральных уравнений:

$$\begin{cases} \nu_1(x)+\int\limits_q^1 K_1(x,t)\nu_1(t)dt+\int\limits_q^1 \nu_2^*(t)K_2^*(x,t)dt=M_1(x), \\ \nu_2^*(y)+\int\limits_q^1 K_2(t,y)\nu_2^*(t)dt+\int\limits_q^1 \nu_1(t)K_1^*(t,y)dt=M_2(x), \end{cases} \tag{29}$$

где

$$K_1(x,t)=\frac{\partial}{\partial x}G(t,0;x,0);\quad K_2^*(x,t)=\frac{\partial}{\partial x}G(0,t;x,0);$$

$$K_2(t,y)=\frac{\partial}{\partial y}G(0,t;0,y);\quad K_1^*(t,y)=\frac{\partial}{\partial y}G(t,0;0,y).$$

$$M_1(x)=\sum_{k=1}^{2} l\int\limits_{\sigma_k}\Phi_k(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial n}G(\xi,\eta;x,0)\right)dS+\int\limits_q^1\nu_2^*(t)K_2^*(x,t)dt-$$
$$-F_1'(x), \tag{$30_1$}$$

$$M_2(x)=\sum_{k=1}^{2} l\int\limits_{\sigma_k}\Phi_k(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial n}G(\xi,\eta;0,y)\right)dS+\int\limits_q^1\nu_1(t)K_1(t,y)dt-$$
$$-F_2'(y). \tag{$30_2$}$$

Так как $G(t,0;x,0)=G(0,t;0,x)$ и $G(0,t;x,0)=G(t,0;0,x)$, то отсюда следует, что

$$K_1(x,t)=K_2(t,0);\quad K_1^*(t,x)=K_2^*(x,t);\quad K_1(x,t)=K_1^*(x,it);$$

$$K_1(x,t)=K_{01}(x,t)-\frac{1}{\pi}\left[\frac{t}{1+xt}-\frac{1}{x+t}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{q^{-2n}t}{1+q^{-2n}tx}+\frac{q^{2n}t}{1+q^{2n}tx}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{q^{2n}}{t+q^{2n}x}-\frac{q^{-2n}}{t+q^{-2n}x}\right)\right];$$

$$K_{01}(x,t)=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{t-x}-\frac{t}{1-xt}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{q^{2n}}{t-q^{-2n}x}-\frac{q^{-2n}t}{1-q^{-2n}tx}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{q^{2n}t}{1-q^{2n}tx}+\frac{q^{-2n}}{t-q^{-2n}x}\right)\right];$$

На основании $(30_1)$ и $(30_2)$, с учетом свойства $G(x, y; \xi, \eta)$, из класса заданных функций $\varphi_i(x, y)$, $\psi_j(x, y)$, $p_j(y)$, $\mu_j(y)$, $p_j^*(y)$ заключаем, что $M_j(\xi) \in C^2(q, 1)$, $M_j(\xi)$ может иметь особенность порядка меньше единицы при $|\xi| \to q$, а при $|\xi| \to 1$ – ограничена, где $\xi = \begin{cases} x, & j = 1, \\ y, & j = 2. \end{cases}$

Система сингулярных интегральных уравнений (29) точно как и в [2], [3] известным методом Карлемана-Векуа [4] сводится к системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода, разрешимость которой следует из единственности задачи $A_1(D_0)$.

В силу симметричности областей $D_0$ и $D_0^*$, аналогично доказывается однозначная разрешимость задачи $A_1(D_0^*)$ с краевыми условиями $(14_j)$, $(17_j)$, $(15_2)$ и

$$z\Big|_{A_1^* B_1^*} = \psi_1^*(y) - \omega_j(y), \quad -1 \le y \le \frac{-1+q}{2},$$

где $\psi_1^*(y)$ – неизвестная функция, которая определяется далее, а $\omega_1(y)$ определяется из $(22_1)$.

После определения функций $\nu_1(x)$ и $\nu_2^*(y)$ решение задачи $A_1(D_0)$ $(A_1(D_0^*))$ можно восстановить в области $\Omega_0$ $(\Omega_0^*)$ как решение задачи $N$ $(N^*)$, а в $\Delta_1$ $(\Delta_1^*)$ и $\Delta_2$ $(\Delta_2^*)$ – как решение задачи Коши-Гурса, соответственно.

Пусть $z(x, y)$ – решение задачи $A_1$, тогда с помощью решения задачи Гурса в области $D_j$ $(D_j^*)$ с краевыми условями $(16_j)$ $((16_j^*)$ ) и

$$z\Big|_{B_j E_j} = X_j(y) - \omega_j(y)$$

$$\left( z\Big|_{B_j^* E_j^*} = X_j^*(y) - \omega_j(y) \right),$$

где функции $X_j(y)$ и $X_j^*(y)$ являются следами на $x + y = q$ и $x + y = -q$ решения задач $A_1(D_0)$ и $A_1(D_0^*)$, соответственно, заключаем, что однозначную разрешимость задачи $A_1$ можно эквивалентно свести к вопросу об однозначной разрешимости задач $A_1(D_0)$ и $A_1(D_0^*)$. Для этого достаточно определить неизвестные функции $\psi_1^*(y)$ и $\psi_2^*(y)$. Неизвестные функции $\psi_j^*(y)$ $(j = 1, 2)$ определяются, склеивая на линии $x + y = 0$ решение задачи Гурса в областях $D_j$ и $D_j^*$ $(j = 1.2)$.

Тем самым задача $A_1$ однозначно разрешима. Следовательно, из (9), (11), $(22_1)$, $(22_2)$ следует однозначная разрешимость задачи A.

**Литература**


1. Бицадзе А.В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М.:Наука. 1966. 204 с.

2. Салахитдинов М.С., Уринов А.К. Нелокальная краевая задача в двусвязной области для уравнения смешанного тип с негладкими линиями вырождения. // Доклады АН СССР. 1988. т.299. №1. с.63-66.

3. Бицадзе А.В. К проблеме уравнений смешанного типа. // Труды матем. ин-та АН СССР. 1953. т.41.

4. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука. 1968. 512 с.



Институт математики
им. В.И.Романовского АН РУз



Дата поступления
20.10.05

Uzbek Mathematical
Journal, 2005,№4, pp.13-21

УДК 517.9

# О задаче быстродействия в управлении процессом теплообмена

**Ш.А.Алимов**

Issiqlik almashuvini boshqarishda parametr bilan berilgan issiqlik tarqalish tenglamasi uchun chegaralangan sohada boshlang'ich chegaraviy aralash masala qaralgan. Berilgan o'rtacha haroratga erishish uchun zarur bo'lgan eng qisqa vaqtga baho olingan.

The initial-boundary problem for heat conduction equation inside a bounded domain is considered. The control parametr is defined on a part of boundary. The estimate of a minimal time for achieving the given average temperature is found.

В данной работе рассматривается проблема управления теплообменом с целью установления заданной средней температуры в заданном объеме $\Omega$. С этой целью мы рассматриваем в ограниченной области $\Omega \subset R^n$ с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$ уравнение теплопроводности

$$u_t(x,t) = \Delta u(x,t), \quad x \in \Omega, \ t > 0, \tag{1}$$

с граничным условием

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial n} + h(x)u(x,t) = a(x)\mu(t), \ x \in \partial\Omega, \ t > 0, \tag{2}$$

и начальным условием

$$u(x,0) = 0. \tag{3}$$

Пусть $\Gamma$ - некоторое открытое подмножество границы $\partial\Omega$ с площадью поверхности $mes_{n-1}\Gamma > 0$ и с гладкой в $\Omega$ границей $\partial\Gamma$.

Мы предполагаем, что коэффициент теплообмена $h(x)$ и плотность потока тепла $a(x)$ являются заданными кусочно-гладкими функциями, причем

$(i)$ $h(x) \ > \ 0, \quad x \in \partial\Omega,$

$(ii)$ $a(x) > 0$ для всех $x \in \Gamma$, и $a(x) = 0$, если $x \in \partial\Omega \setminus \Gamma$.

В рассматриваемой модели множество $\Gamma$ играет роль конвектора, нагревающего объем $\Omega$. Условие (2) означает, что теплообмен на поверхности $\partial\Omega$ происходит по закону Ньютона (см. [1], гл.III, §1, п.4). При этом мы полагаем, что интенсивность потока $\mu(t)$ играет роль управления (см. [2]).

Отметим, что впервые подробное изложение вопросов управления системами с распределенными параметрами, описываемыми уравнениями с частными производными, было дано в книге [3]. В последнее время интерес к таким задачам заметно возрос, особенно в связи с изучением эволюционных уравнений с частными производными (см. [4], [5]).

В настоящей работе рассматривается следующая задача.

**Задача СН.** Пусть задана постоянная $b > 0$. Найти минимальное значение $T \geq 0$, для которого существует величина потока $\mu(t)$ такая, что при $t \geq T$ решение $u(x,t)$ задачи (1)-(3) удовлетворяет равенству

$$\int_{\Omega} u(x,t)dx = b, \qquad t \geq T. \tag{4}$$

При этом предполагается, что величина потока ограничена некоторой заданной постоянной $M$:

$$|\mu(t)| \leq M. \tag{5}$$

Для решения задачи СН нам понадобятся спектральные свойства соответствующего эллиптического оператора.

Рассмотрим следующую задачу на собственные значения:

$$-\Delta u(x) = \lambda u(x), \quad x \in \Omega, \tag{6}$$

с граничным условием

$$\frac{\partial u(x)}{\partial n} + h(x)u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \tag{7}$$

Ввиду самосопряженности граничных условий (7) существует возрастающая последовательность собственных чисел $\{\lambda_k\}$ и соответствующая полная ортонормированная система собственных функций $\{u_k(x)\}$. Каждая из собственных функций является ограниченной в $\Omega$ функцией.

Введем следующее обозначение:

$$\Lambda_k \ = \ ||u_k(x)||_{C(\overline{\Omega})}. \tag{8}$$

Далее, обозначим

$$B_k \ = \ \frac{1}{\Lambda_k} \int_{\partial\Omega} u_k(x)a(x)d\sigma(x). \tag{9}$$

Ниже (см. предложение 4) устанавливается, что $u_1(x) \geq 0$, и поэтому в случае $a(x) \equiv a_0 = const$ выполняется равенство

$$B_1 \;=\; a_0 \, \frac{||u_1||_{L(\Omega)}}{||u_1||_{C(\overline{\Omega})}},$$

т.е. коэффициент $B_1$ пропорционален мощности $a_0$ потока тепла, производимого конвектором.

Как известно, главный член асимптотики решения уравнения теплопроводности определяется первым (наименьшим) собственным значением соответствующего самосопряженного расширения оператора Лапласа. Нашей целью является получение оценки минимального времени нагрева через характеристики первой собственной функции.

Справедливо следующее утверждение.

**Теорема 1.** *Пусть*

$$0 \;<\; b \;<\; \frac{B_1 M}{\lambda_1}, \tag{10}$$

*и пусть*

$$T_0 = -\frac{1}{\lambda_1} \ln\left(1 - \frac{b\lambda_1}{B_1 M}\right). \tag{11}$$

*Тогда решение $T$ задачи CH существует и удовлетворяет неравенству $T \leq T_0$.*

Доказательство теоремы 1 опирается на ряд утверждений, в которых устанавливаются необходимые свойства собственных функций, функции Грина и решения краевой задачи (1)-(3).

**Предложение 1.** *Справедливо неравенство*

$$\lambda_1 \;>\; 0. \tag{12}$$

Доказательство.

Из условия (i) с помощью формулы Грина получаем

$$\lambda_1 = -\int\limits_{\Omega} [\Delta u_1(x)] u_1(x) dx =$$

$$= \int\limits_{\Omega} |\nabla u_1(x)|^2 dx + \int\limits_{\partial\Omega} |u_1(x)|^2 h(x) d\sigma(x) \geq h_0 \int\limits_{\partial\Omega} |u_1(x)|^2 d\sigma(x),$$

где

$$h_0 \;=\; \min_{x \in \partial\Omega} h(x) \;>\; 0.$$

Отсюда и из принципа максимума следует, что $\lambda_1 > 0$.

Предложение 1 доказано.

Введем в рассмотрение функцию Грина, определив следующим образом ее ряд Фурье по указанным собственным функциям:

$$G(x,y,t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k t} u_k(x) u_k(y), \quad x \in \Omega, \quad y \in \Omega, \quad t > 0. \tag{13}$$

**Предложение 2.** *Пусть*

$$\varphi \in C_0^{\infty}(\Omega), \quad \varphi(x) \geq 0.$$

*Тогда*

$$\int_{\Omega} G(x,y,t)\varphi(y)dy \geq 0, \quad x \in \Omega, \quad t > 0.$$

Доказательство. Положим

$$u(x,t) = \int_{\Omega} G(x,y,t)\varphi(y)dy, \quad x \in \Omega, \quad t > 0. \tag{14}$$

Очевидно,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right) u(x,t) = 0, \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \tag{15}$$

и

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial n} + h(x)u(x,t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0, \quad u(x,0) = \varphi(x). \tag{16}$$

Предположим, что в некоторой точке $(x_0, t_0)$ выполняется неравенство $u(x_0,t_0) < 0$. Тогда в силу принципа максимума, справедливого для решений уравнения (15)(см. [6], гл. I, §2), существует точка $(\xi, \tau)$ такая, что $\xi \in \partial\Omega$, $0 < \tau \leq t_0$, и выполняется условие

$$\min_{x \in \Omega \cup \partial\Omega,\ 0 < t \leq t_0} u(x,t) \ = \ u(\xi,\tau) \ < \ 0.$$

Следовательно, согласно условию (i) и граничному условию (16), выполняется неравенство

$$\frac{\partial u(\xi,\tau)}{\partial n} = -h(\xi)u(\xi,\tau) > 0. \tag{17}$$

Однако, в точке минимума, очевидно, должно выполняться условие

$$\frac{\partial u(\xi,\tau)}{\partial n} \ \leq \ 0,$$

что противоречит неравенству (17).

Предложение 2 доказано.

**Предложение 3.** *Справедливо неравенство*

$$G(x,y,t) \geq 0, \quad x \in \Omega, \quad y \in \Omega, \quad t > 0. \tag{18}$$

Доказательство. Предположим, что в некоторой точке $(x_0, y_0, t_0)$ выполняется неравенство $G(x_0, y_0, t_0) < 0$. Тогда существует $\delta > 0$ такое, что

$$G(x,y,t) < 0, \quad |x - x_0| \leq \delta, \quad |y - y_0| \leq \delta, \quad |t - t_0| \leq \delta.$$

В таком случае, выбором подходящей функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ можно добиться того, что значение функции (14) в точке $(x_0, t_0)$ окажется отрицательным, что противоречит предложению 2.

Предложение 3 доказано.

**Предложение 4.** *Справедливо неравенство*

$$u_1(x) \geq 0, \quad x \in \Omega. \tag{19}$$

Доказательство. Рассмотрим интегральный оператор

$$Au(x) = \int\limits_\Omega G_1(x,y)u(y)dy,$$

где

$$G_1(x,y) \ = \ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_k(x)u_k(y)}{\lambda_k}.$$

Из предложения 1 следует, что оператор $A$ является положительно определенным. Далее, из равенства

$$G_1(x,y) = \int\limits_0^\infty G(x,y,t)dt$$

и из предложения 3 следует, что

$$G_1(x,y) \ \geq \ 0, \qquad x \in \Omega, \ y \in \Omega.$$

В таком случае, мы можем воспользоваться теоремой Ентча (см. [7], гл. IV, §20, п. 7), согласно которой ядро $G_1(x,y)$ интегрального оператора $A$ является функцией, принимающей неотрицательные значения.

Предложение 4 доказано.

Определим функцию

$$H(x,t) = \int_{\Omega} G(x,y,t)dy, \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \tag{20}$$

которая, очевидно, удовлетворяет уравнению

$$H_t(x,t) - \Delta H(x,t) = 0, \quad x \in \Omega, \quad t > 0,$$

граничному условию

$$\frac{\partial H(x,t)}{\partial n} + h(x)H(x,t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0,$$

и начальному условию

$$H(x,0) = 1, \quad x \in \Omega. \tag{21}$$

**Предложение 5.** *Пусть число $\Lambda_1$ определено равенством (8) при $k = 1$. Тогда справедливо следующее неравенство*

$$H(x,t) \ \geq \ \frac{1}{\Lambda_1} e^{-\lambda_1 t} u_1(x). \tag{22}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$F(x,t) = H(x,t) - \frac{1}{\Lambda_1} e^{-\lambda_1 t} u_1(x), \quad x \in \Omega, \quad t > 0.$$

Очевидно, функция $F(x,t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial F(x,t)}{\partial t} - \Delta F(x,t) = 0, \quad x \in \Omega, \quad t > 0,$$

и начальному условию

$$F(x,0) = 1 - \frac{1}{\Lambda_1} u_1(x) \ \geq \ 0.$$

Предположим, что $F(x_0,T) < 0$. Тогда существуют $\xi \in \partial\Omega$ и $\tau, 0 < \tau \leq T$ такие, что

$$\min_{x\in\Omega\cup\partial\Omega,\ 0\leq t\leq T} F(x,t) = F(\xi,\tau) < 0.$$

Отсюда

$$\frac{\partial F(\xi,\tau)}{\partial n} = -h(\xi)F(\xi,\tau) > 0,$$

что противоречит тому, что $(\xi,\tau)$ - точка минимума.

Предложение 5 доказано.

Введем в рассмотрение следующую функцию:

$$K(t) = \int\limits_{\partial\Omega} H(y,t)a(y)d\sigma(y). \tag{23}$$

**Предложение 6.** *Справедлива оценка*

$$K(t) \geq B_1 e^{-\lambda_1 t}, \tag{24}$$

где коэффициент $B_1$ определен равенством (9).

Доказательство следует из определения (23) и предложения 5.

**Предложение 7.** *Для решения задачи (1)-(3) справедливо следующее представление:*

$$u(x,t) = \int\limits_0^t \mu(s) \left( \int\limits_{\partial\Omega} G(x,y,t-s)a(y)d\sigma(y) \right) ds. \tag{25}$$

Доказательство проводится непосредственной проверкой выполнения уравнения (1), граничного условия (2) и начального условия (3) (необходимые выкладки более подробно приведены в [2]).

Заметим теперь, что равенство (25) позволяет записать условие (4) задачи НС следующим образом:

$$b = \int\limits_{\Omega} u(x,t)dx = \int\limits_0^t \mu(s)ds \int\limits_{\partial\Omega} a(y)d\sigma(y) \int\limits_{\Omega} G(x,y,t-s)dx =$$

$$= \int\limits_0^t \mu(s)ds \int\limits_{\partial\Omega} H(y,t-s)a(y)d\sigma(y) = \int\limits_0^t K(t-s)\mu(s)ds.$$

В результате мы получаем для определения управления $\mu(t)$ следующее основное интегральное уравнение:

$$\int\limits_0^t K(t-s)\mu(s)ds = b. \tag{26}$$

С целью исследования данного уравнения введем интегральный оператор

$$\widehat{K}\mu(t) \ = \ \int\limits_0^t K(t-s)\mu(s)ds, \tag{27}$$

и выясним, каким образом он действует на функцию $\mu(t)$ в случае, когда она принимает максимально возможное значение, т.е. когда $\mu(t) = M = const$. В этом случае очевидным образом получаем

$$\widehat{K}\mu(t) \;=\; M\int\limits_0^t K(s)ds, \tag{28}$$

Согласно предложению 6,

$$\int\limits_0^t K(s)ds \geq B_1 \int\limits_0^t e^{-\lambda_1 s}ds.$$

Предположим, что в некоторый момент времени $t = T_0$ выполняется равенство

$$\int\limits_0^{T_0} e^{-\lambda_1 s}ds = \frac{b}{B_1 M}.$$

В этом случае

$$\frac{1 - e^{-\lambda_1 T_0}}{\lambda_1} = \frac{b}{B_1 M}.$$

Следовательно,

$$e^{-\lambda_1 T_0} = 1 - \frac{b\lambda_1}{B_1 M},$$

и

$$T_0 \;=\; -\,\frac{1}{\lambda_1}\ln\left(1 - \frac{b\lambda_1}{B_1 M}\right).$$

В таком случае, мы можем утверждать, что существуют число $T$, $0 < T \leq T_0$, и функция $\mu(t)$, $|\mu(t)| \leq M$, такие, что

$$\int\limits_0^T K(T-s)\mu(s)ds = b.$$

**Замечание.** Если первое собственное значение $\lambda_1$ достаточно мало, то приближенно мы можем считать, что выполняется следующее соотношение

$$T_0 \simeq \frac{1}{\lambda_1}\frac{b\lambda_1}{B_1 M},$$

а если к тому же $a(x) \equiv a_0 = \mathrm{const}$, то

$$T_0 \simeq \gamma\frac{b}{a_0 M},$$

где
$$\gamma = \frac{||u_1||_{C(\Omega\cup\partial\Omega)}}{||u_1||_{L(\partial\Omega)}}.$$

**Литература**


1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики, М., "Наука", 1966.

2. Алимов Ш.А. Об одной задаче управления теплообменом, Доклады АН РУз (в печати).

3. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными, «Мир», Москва, 1972.

4. Il'in V.A. Two-endpoint boundary control of vibrations described by a finite-energy generalized solution of the wave equation, Differential Equations, vol. 36, No. 11, 2000, pp. 1659-1675.

5. Il'in V.A. and Moiseev E.I. Optimization of a boundary control of an elastic force at two ends of a string, Doklady Mathematics, vol. 71, 2005, p. 357.

6. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа, «Наука», М. 1967.

7. Владимиров В.С. Уравнения математической физики, «Наука», М., 1971.


Институт математики
им. В.И.Романовского АН РУз

Дата поступления
10.10.05

Uzbek Mathematical
Journal, 2005,№4, pp.22-36

УДК: 517.956

# Нелокальные задачи для уравнений парaболо-гиперболического типа со спектральным параметром

**А.С.Бердышев, Э.Т.Каримов**

Bu maqolada spektral parametrli parabolo-giperbolik tipdagi tenglamalar uchun uzluksiz va maxsus ulash shartli bir qancha nolokal masalalar ko'rilgan. Spektral parametrning ma'lum qiymatlari uchun bu masalalarning bir qiymatliligi isbotlanib, ba'zilarining xos qiymat va xos funksiyalari topilgan.

In the offered work some non-local problems for the parabolic-hyperbolic type equation with spectral parameter with continuous and special contraction condition are considered. Unique solvability of these problems is proved for some values of spectral parameters and eigenvalues, eigenfunctions of some problems are found.

**1. Введения**

К изучению локальных и нелокальных краевых задач для параболо-гиперболических уравнений посвящено много работ. Из них отметим наиболее близко примыкающим к нашей работе, работы [1-3]. Нелокальные условия, использованные в этой работе впервые появились в работах М.С.Салахитдинова и А.К.Уринова [4]. Свойства интегральных операторов, участвующих в нелокальных условиях подробно изложены в их монографии [5]. В работах [6-7], было доказана единственность, а в работе [8] существование решения нелокальных задач, изучаемые в этой работе, без специального условия склеивания, т.е. с непрерывным условием склеивания. Отметим, что специальное условие склеивания типа (9), впервые использовано в работе Н.Ю.Капустина и Е.И.Моисеева [9]. В этой работе, кроме доказательства однозначной разрешимости поставленных задач, найдены собственные значения и соответствующие им собственные функции этих задач. При ходе исследования выяснилось, что спектральный параметр не имеет никакого влияния к нахождению собственных значений этих задач при использовании специального условия склеивания.

**2. Постановка задач**

Рассмотрим уравнения

$$0 = \begin{cases} u_x - u_{yy} - \lambda u, & y > 0 \\ u_{xx} - u_{yy} + \mu u, & y < 0, \end{cases} \tag{1}$$

$$0 = \begin{cases} u_{xx} - u_y - \lambda u, & y > 0 \\ u_{xx} - u_{yy} + \mu u, & y < 0, \end{cases} \tag{2}$$

в области $\Omega$. Здесь $\lambda$, $\mu$ – заданные комплексные числа.

Пусть $\Omega$ – односвязная область, расположенная в плоскости независимых переменных $(x, y)$ , ограниченная при $y > 0$ отрезками $AA_0$, $BB_0$ и $A_0B_0$ $(A(0,0), B(1,0), A_0(0,1),\ B_0(1,1))$, а при $y < 0$ - характеристиками $AC:\ x + y = 0,\ \ BC:\ x - y = 1$ уравнения (1) или (2).

Введем следующие обозначения:

$$\Omega_1 = \Omega \cap (y > 0),\ \Omega_2 = \Omega \cap (y < 0),\ AB = \{(x,y):\ y = 0,\ 0 < x < 1\},$$

$\theta_0$ и $\theta_1$ – точки пересечения характеристик, выходящих из точки $(x, 0) \in AB$ с характеристиками $AC$ и $BC$ соответственно, т.е.

$$\theta_0 = \left(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2}\right), \quad \theta_1 = \left(\frac{x+1}{2}, \frac{x-1}{2}\right).$$

Исследуем следующие задачи:

**Задача** $NS_1$. Найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую следующим условиям:

1) $u(x,y) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega) \cap C^{1,2}_{x,y}(\Omega_1) \cap C^2(\Omega_2)$;

2) $u(x, y)$ удовлетворяет уравнению (1) в $\Omega_1 \cup \Omega_2$ и

$$u(x,y)\big|_{AA_0} = \varphi(y), \tag{3}$$

$$u(x,y)\big|_{A_0B_0} = \psi(x), \tag{4}$$

$$A^{0,\mu}_{0x}\left[u\left(\theta_0\right)\right] + a_1(x)u(x,0) = b_1(x), \tag{5}$$

**Задача** $NS_2$. Найти функцию $u(x, y)$ со следующими условиями:

1) $u(x,y) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega \cup BC) \cap C^{1,2}_{x,y}(\Omega_1) \cap C^2(\Omega_2)$;

2) $u(x, y)$ удовлетворяет уравнению (1) в $\Omega_1 \cup \Omega_2$;

3) $u(x, y)$ удовлетворяет условиям (3), (4) и

$$A^{1,\mu}_{x1}\left[\frac{d}{dx}u\left(\theta_1\right)\right] + a_2(x)u_y(x,0) = b_2(x). \tag{6}$$

**Задача** $NS_3$. Найти функцию $u(x, y)$ со следующими свойствами:

1) $u(x,y)\in C(\overline{\Omega})\cap C^{1;2}_{x,y}(\Omega_1)\cap C^1(\Omega_2\cup AB\cup BC)\cap C^2(\Omega_2)$;
2) $u(x,y)$ удовлетворяет уравнению (1) в $\Omega_1\cup\Omega_2$;
3) $u(x,y)$ удовлетворяет условию (4), и

$$u(x,y)\big|_{AA_0}=u(x,y)\big|_{BB_0}, \tag{7}$$

$$A^{1,\mu}_{x1}\left[\frac{d}{dx}u\left(\theta_1\right)\right]+a_3(x)u_y(x,0)=b_3(x), \tag{8}$$

$$\lim_{y\to+0}u_y(x,y)=\beta\int\limits_x^1\lim_{y\to-0}u_y(t,y)\left(1+2a_3(t)\right)J_0\left[\sqrt{\mu}(x-t)\right]dt+$$
$$+\beta\, u(1,0)J_0\left[\sqrt{\mu}(x-1)\right]. \tag{9}$$

**Задача** $S_{01}$. Найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую следующим условиям:
1) $u(x,y)\in C(\overline{\Omega})\cap C^{2,1}_{x,y}(\Omega_1\cup AB)\cap C^1(\Omega_2\cup AB)\cap C^2(\Omega_2)$;
2) $u(x,y)$ удовлетворяет уравнению (2) в $\Omega\backslash AB$ ;

$$u(x,y)\left.\right|_{AA_0}=\varphi_1(y),\quad u(x,y)\left.\right|_{BB_0}=\varphi_2(y),\ \ 0\le y\le 1\ , \tag{10}$$

$$A^{0,\mu}_{0x}\left[u\left(\theta_0\right)\right]+a_4(x)u(x,0)=b_4(x),\ x\in\overline{AB} \tag{11}$$

и условия склеивания

$$\lim_{y\to+0}u_y(x,y)=\frac{\alpha}{1+2a_4(x)}\int\limits_0^x\lim_{y\to-0}u_y(t,y)J_0\left[\sqrt{\mu}(x-t)\right]dt. \tag{12}$$

Здесь $\alpha$ – заданное комплексное, $\beta$ – заданное действительное число,$\varphi(y)$, $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$, $a_j(x)$ , $b_j(x)$, $j=\overline{1,4}$ и $\psi(x)$ – заданные вещественные функции.

**3. Задачи с непрерывными условиями склеивания**

Рассмотрим задачи $NS_1$ и $NS_2$.

Справедлива следующая

**Теорема 1.** *Пусть* $a_1(x)\neq 1/2$ . *Если*

$$\varphi(0)=0,\,\varphi(x),\,\psi(x)\in C^1[0,1],a_1(x),\,b_1(x)\in C[0,1]\cap C^1(0,1),$$

*то существует единственное регулярное решение задачи* $NS_1$.

Доказательство: Решение первой краевой задачи для уравнения (1) при $y>0$ , представляется в виде [12]

$$u(x,y)=\int\limits_0^1\varphi(y_1)G(x,y,0,y_1)dy_1+\int\limits_0^x\psi(x_1)G_{y_1}(x,y,x_1,1)dx_1+$$

$$+\int_0^x \tau(x_1)G_{y_1}(x,y,x_1,0)dx_1, \qquad (13)$$

где

$$G(x,y,x_1,y_1)=\frac{1}{2\sqrt{\pi(x-x_1)}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[e^{\lambda(x-x_1)-\frac{(2n+y-y_1)^2}{4(x-x_1)}}-e^{\lambda(x-x_1)-\frac{(2n+y+y_1)^2}{4(x-x_1)}}\right]$$

– функция Грина первой краевой задачи для уравнения (1) при $y>0$ .

Дифференцируем (13) по $y$ один раз и переходя к пределу при $y\to +0$ получим основное функциональное соотношение между функциями $u_y(x,+0)=\nu_+(x)$ и $u_x(x,+0)=\tau'(x)$ :

$$\nu_+(x)=-\int_0^x \tau'(z)K_1(x,z,\lambda)dz+\int_0^1 \varphi(y_1)G_y(x,0,0,y_1)dy_1+$$

$$+\int_0^x \psi(x_1)G_{yy_1}(x,0,x_1,1)dx_1, \qquad (14)$$

где

$$K_1(x,z,\lambda)=K(x-z,\lambda)-\lambda\int_t^x K(t-z,\lambda)dt,$$

$$K(x,\lambda)=\frac{1}{\sqrt{\pi x}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{\lambda x\,-\,\frac{n^2}{x}},$$

Справедливо следующая

**Лемма 2.** *Если $u(x,y)$ – решение задачи Коши для уравнения (1) в $\Omega_2$, удовлетворяющее условию (5), то в $\Omega_2$ имеет места следующее равенство*

$$\left[1+2a_1(x)\right]\tau(x)=2b_1(x)+\int_0^x \nu(t)J_0\left[\sqrt{\mu}(x-t)\right]dt-\tau(0)J_0\left[\sqrt{\mu}x\right]. \qquad (15)$$

Учитывая $\tau(0)=\varphi(0)=0$ из (15), получим

$$\nu_-(x)=b_1^*(x)+\left(1+2a_1(x)\right)\tau'(x)+\int_0^x \tau'(z)K_2(x,z,\mu)dz, \qquad (16)$$

где

$$b_1^*(x) = -2b_1'(x) - 2\mu \int\limits_0^x b_1(t) \frac{J_1\left[\sqrt{\mu}(x-t)\right]}{\sqrt{\mu}(x-t)} dt,$$

$$K_2(x,z,\mu) = 1 + 2a_1(x) + \int\limits_t^x (1+2a_1(t)) \frac{J_1\left[\sqrt{\mu}(t-z)\right]}{\sqrt{\mu}(t-z)} dz.$$

Учитывая $u(x,y) \in C^1(\Omega)$ из (14) и (16), после несложных преобразований получим интегральное уравнение относительно функции $\tau'(x)$ :

$$\tau'(x) + \int\limits_0^x \tau'(z) K_3(x,z,\lambda,\mu) dz = \Phi(x,\lambda,\mu), \tag{17}$$

где

$$K_3(x,z,\lambda,\mu) = \frac{K_1(x,z,\lambda) + K_2(x,z,\mu)}{1+2a_1(x)},$$

$$\Phi(x,\lambda,\mu) = -\frac{1}{1+2a_1(x)} \left\{ b_1^*(x) - \int\limits_0^1 \varphi(y_1) G_y(x,0,0,y_1) dy_1 - \right.$$

$$\left. - \int\limits_0^x \psi(x_1) G_{yy_1}(x,0,x_1,1) dx_1 \right\}.$$

В силу свойств функций $K_3(x,z,\lambda,\mu)$ и $\Phi(x,\lambda,\mu)$ , заключаем, что интегральное уравнение (17) допускает единственное непрерывно дифференцируемое решение.

И так, задача $NS_1$ эквивалентно редуцировано к интегральному уравнению Вольтерра второго рода. Откуда следует однозначная разрешимость задачи $NS_1$.

Теорема 1 доказана.

**Замечание.** Аналогично можно доказать однозначную разрешимость другой задачи для всех значений спектрального параметра, когда условие (5) заменяется следующим условием

$$A_{0x}^{1,\mu}\left[\frac{d}{dx} u(\theta_0)\right] + a(x) u_y(x,0) = b(x).$$

Теперь рассмотрим задачу $NS_2$. Пусть $\lambda,\ \mu$ – действительные числа. Нетрудно убедится в справедливости следующей теоремы.

**Теорема 3.** *Пусть* $a_2(x) \neq -1/2$ . *Если*

$$\varphi(0) = 0,\ \varphi(x),\ \psi(x) \in C^1[0,1], a_2(x),\ b_2(x) \in C^1[0,1] \cap C^2(0,1),$$

$$\lambda \leq 0, \mu \leq 0, \ \frac{1}{1+2a_2(0)} < 0, \frac{1}{1+2a_2(1)} < 0, \ \left(\frac{1}{1+2a_2(x)}\right)' < 0,$$

*то существует единственное регулярное решение задачи $NS_2$.*

**4. Задачи со специальными условиями склеивания**

Сначала рассмотрим задачу $S_{01}$.

Справедливы следующие леммы:

**Лемма 4.** *Если $u(x,y)$ – решение уравнения (2), удовлетворяющее однородным условиям (10) и $u(x,0)=\tau(x)$ , $0 \leq x \leq 1$ , то в $\Omega_1$ имеет место следующее равенство*

$$\mathrm{Re}\int\limits_0^1 \overline{\tau(x)}\nu(x)dx + \int\limits_0^1 \left\{|\tau'(x)|^2 + \mathrm{Re}\lambda|\tau(x)|^2\right\} dx = 0. \qquad (18)$$

**Лемма 5.** *Если $u(x,y)$ – решение задачи Коши для уравнения (2) в $\Omega_2$, удовлетворяющее условию (11), то следующее равенство имеет места в $\Omega_2$*

$$[1+2a_4(x)]\,\tau(x) = 2b_4(x) + \int\limits_0^x \nu(t) J_0\left[\sqrt{\mu}(x-t)\right] dt - \tau(0) J_0[\sqrt{\mu}x], \ \ 0 \leq x \leq 1. \qquad (19)$$

**Теорема 6.** *Пусть $a_4(x) \neq -1/2$. Если*

$$\mathrm{Re}\alpha \geq 0, \mathrm{Re}\lambda \geq 0,$$

$$\varphi_1(y), \varphi_2(y) \in C^1[0,1], \varphi_1(0)a_4(0) = b_4(0), a_4(x), \ b_4(x) \in C^1[0,1] \cap C^2(0,1),$$

*то существует единственное регулярное решение задач $S_{01}$.*

Доказательство: Пусть $u(x,y)$ – решение однородной задачи $S_{01}$. Тогда (19) переходит к

$$\int\limits_0^x \nu(t) J_0\left[\sqrt{\mu}(x-t)\right] dt = [1+2a_4(x)]\,\tau(x).$$

Отсюда легко получим

$$\nu(x) = \tau_*'(x) + \mu \int\limits_0^x \tau_*(t) \frac{J_1\left[\sqrt{\mu}(x-t)\right]}{\sqrt{\mu}(x-t)} dt, \qquad (20)$$

где $\tau_*(x) = [1+2a_4(x)]\,\tau(x)$ .

Подставив (20) в (12) получим

$$\lim_{y\to+0} u_y(x,y) = \frac{\alpha}{1+2a_4(x)}\left\{\int\limits_0^x \tau'_*(t)J_0\left[\sqrt{\mu}(x-t)\right]dt+\right.$$

$$\left.+\sqrt{\mu}\int\limits_0^x\left(\int\limits_0^t \tau_*(z)\frac{J_1\left[\sqrt{\mu}(t-z)\right]}{(t-z)}dz\right)J_0\left[\sqrt{\mu}(x-t)\right]dt\right\}. \qquad (21)$$

В первом интеграле после интегрирования по частям, учитывая $\tau(0)=0$ , получим

$$\int\limits_0^x \tau'_*(t)J_0\left[\sqrt{\mu}(x-t)\right]dt = \tau_*(x) - \sqrt{\mu}\int\limits_0^x \tau_*(t)J_1\left[\sqrt{\mu}(x-t)\right]dt.$$

Во втором интеграле, меняя порядок интегрирования и выполняя замену переменных во внутреннем интеграле, получим

$$\sqrt{\mu}\int\limits_0^x\left(\int\limits_0^t \tau_*(z)\frac{J_1\left[\sqrt{\mu}(t-z)\right]}{(t-z)}dz\right)J_0\left[\sqrt{\mu}(x-t)\right]dt =$$

$$= \sqrt{\mu}\int\limits_0^x \tau_*(z)J_1\left[\sqrt{\mu}(x-z)\right]dz.$$

Учитывая эти равенства из (21) получим

$$\nu_+(x) = \alpha\tau_-(x). \qquad (22)$$

Подставляя (22) в (18) и учитывая $u(x,y)\in C(\overline{\Omega})$ , $\mathrm{Re}\alpha\geq 0,\ \ \mathrm{Re}\lambda\geq 0$ получим $\tau(x)\equiv 0$ . Имея в виду однородное условие (10) и $u(x,y)\in C(\overline{\Omega})$ можем заключать, что $u(x,y)\equiv 0$ в $\Omega$ .

Теперь переходим к доказательству существования решения. В этом случае из (19) находим функцию $\nu_-(x)$. Используя условия склеивания, найдем

$$\nu_+(x) = \alpha\left(\tau(x) - \frac{2b_4(x)}{1+2a_4(x)} + \frac{\varphi_1(0)}{1+2a_4(x)}J_0\left[\sqrt{\mu}x\right]\right). \qquad (23)$$

Переходя к пределу при $y\to+0$ из уравнения (2) получим

$$\tau''(x) - \nu(x) - \lambda\tau(x) = 0. \qquad (24)$$

Подставляя (23) в (24) получим обыкновенную дифференциальную уравнению второго порядка относительно функции $\tau(x)$:

$$\tau''(x) - (\alpha+\lambda)\tau(x) = f(x), \tag{25}$$

где

$$f(x) = \frac{1}{1+2a_4(x)} \left(\varphi_1(0) J_0\left[\sqrt{\mu}x\right] - 2b_4(x)\right).$$

Решение уравнения (25) в промежутке $0 \le x \le 1$ , удовлетворяющее краевым условиям

$$\tau(0) = \varphi_1(0), \;\; \tau(1) = \varphi_2(0) \tag{26}$$

представляется в виде (см. [11])

$$\tau(x) = r(x) + \int\limits_0^1 G^*(x,t,\lambda) f(t) dt,$$

где

$$r(x) = \varphi_1(0) + x\left[\varphi_2(0) - \varphi_1(0)\right] +$$

$$+\lambda \int\limits_0^1 G^*(x,t,\lambda)\left\{\varphi_1(0) + t\left[\varphi_2(0) - \varphi_1(0)\right]\right\} dt,$$

$$G^*(x,t,\lambda) = \begin{cases} \frac{sh\sqrt{\alpha+\lambda}(1-t)sh\sqrt{\alpha+\lambda}x}{\sqrt{\alpha+\lambda}sh\sqrt{\alpha+\lambda}}, & 0 \le t \le x, \\ \frac{sh\sqrt{\alpha+\lambda}tsh\sqrt{\alpha+\lambda}(1-x)}{\sqrt{\alpha+\lambda}sh\sqrt{\alpha+\lambda}}, & x \le t \le 1 \end{cases}$$

– функция Грина краевой задачи (25), (26).

Функция $\nu_+(x)$ будет определяется формулой (23). С помощью условия склеивания найдем функцию $\nu_-(x)$. Решение задачи $S_{01}$ определяется в $\Omega_1$ как решение первой краевой задачи для уравнения (2), удовлетворяющее условиям (10) и $u(x,0) = \tau(x), \; 0 \le x \le 1$ . Решение этой задачи представимо в виде

$$u(x,y) = \int\limits_0^1 G(x,y,x_1,0)\tau(x_1)dx_1 +$$

$$+ \int\limits_0^y \frac{\partial G}{\partial x_1}\,|_{x_1=0}\; \varphi_1(y_1)dy_1 - \int\limits_0^y \frac{\partial G}{\partial x_1}\,|_{x_1=1}\; \varphi_2(y_1)dy_1,$$

где

$$G(x,y,x_1,y_1) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi(y-y_1)}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ e^{-\lambda(y-y_1) - \frac{(x-x_1-2n)^2}{4(y-y_1)}} - e^{-\lambda(y-y_1) - \frac{(x+x_1-2n)^2}{4(y-y_1)}} \right].$$

А в $\Omega_2$ оно будет определяться по формуле

$$u(x,y) = \frac{\tau(x+y)+\tau(x-y)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{x-y}^{x+y} \nu(t) J_0\left[\sqrt{\mu\left((x-t)^2-y^2\right)}\right] dt +$$

$$+\frac{\sqrt{\mu}y}{2}\int\limits_{x-y}^{x+y} \tau(t) \frac{J_1\left[\sqrt{\mu\left((x-t)^2-y^2\right)}\right]}{\sqrt{(x-t)^2-y^2}} dt. \qquad (27)$$

При выполнении условий, наложенных на данные функции, функция $u(x,y)$ будет регулярным решением задачи $S_{01}$.

Теперь рассмотрим задачу $NS_3$.

Справедливы следующие леммы:

**Лемма 7.** *Если $u(x,y)$ – решение уравнения (1), удовлетворяющее однородному условию (4) и условиям (7), $u(x,0)=\tau(x)$ , $0 \le x \le 1$ , то имеет место следующее равенство*

$$\mathrm{Re}\int\limits_0^1 \overline{u(x,0)} u_y(x,0)dx + \iint\limits_{\Omega_1} \left[|u_y(x,y)|^2 - \mathrm{Re}\lambda |u(x,y)|^2\right] dxdy = 0. \qquad (28)$$

**Лемма 8.** *Если $u(x,y)$ – решение задачи Коши для уравнения (1) в $\Omega_2$, удовлетворяющее условию (8), то следующее равенство имеет место в $\Omega_2$*

$$\left[1+2a_3(x)\right]\nu(x) = 2b_3(x) - \tau'(x) + \mu\int\limits_x^1 \tau(t)\frac{J_1\left[\sqrt{\mu}(x-t)\right]}{\sqrt{\mu}(x-t)} dt. \qquad (29)$$

**Теорема 9.** *Пусть $a_3(x) \ne -1/2$. Если*

$$\beta > 0, \mathrm{Re}\lambda \le 0, a_3(x),\, b_3(x),\, \psi(x) \in C^1[0,1],$$

*то существует единственное регулярное решение задачи $NS_3$.*

Доказательство: Сначала докажем единственность решения.

Пусть $u(x,y)$ – решение однородной задачи $NS_3$. Тогда (29) переходит к

$$\nu_-(x) = \frac{1}{1+2a_3(x)}\left\{-\tau'(x) + \mu\int\limits_x^1 \tau(t)\frac{J_1\left[\sqrt{\mu}(x-t)\right]}{\sqrt{\mu}(x-t)} dt\right\}. \qquad (30)$$

Подставив (30) в (9) получим

$$\lim_{y\to+0} u_y(x,y) = \beta\left\{-\int_x^1 \tau'(t)J_0\left[\sqrt{\mu}(x-t)\right]dt+\right.$$

$$\left.+\sqrt{\mu}\int_x^1\left(\int_t^1 \tau(z)\frac{J_1\left[\sqrt{\mu}(t-z)\right]}{(t-z)}dz\right)J_0\left[\sqrt{\mu}(x-t)\right]dt+\, u(1,0)J_0\left[\sqrt{\mu}(x-1)\right]\right\}. \tag{31}$$

В первом интеграле после интегрирования по частям, получим

$$\int_x^1 \tau'(t)J_0\left[\sqrt{\mu}(x-t)\right]dt=$$

$$=-\tau(x)+\tau(1)J_0\left[\sqrt{\mu}(x-1)\right]+\sqrt{\mu}\int_x^1 \tau(t)J_1\left[\sqrt{\mu}(x-t)\right]dt.$$

Во втором интеграле, меняя порядок интегрирования и выполняя замену переменных во внутреннем интеграле, учитывая следующую формулу [13]

$$\int_0^\eta J_p(c\xi)\,J_q(c\eta-c\xi)\frac{d\xi}{\xi}=\frac{1}{p}J_{p+q}(c\eta)\,(\eta,\,\mathrm{Re}p>0,\,\mathrm{Re}q>-1)\,,$$

получим

$$\sqrt{\mu}\int_x^1\left(\int_t^1 \tau(z)\frac{J_1\left[\sqrt{\mu}(t-z)\right]}{(t-z)}dz\right)J_0\left[\sqrt{\mu}(x-t)\right]dt=$$

$$=\sqrt{\mu}\int_x^1 \tau(z)J_1\left[\sqrt{\mu}(x-z)\right]dz.$$

Учитывая эти равенства из (31) получим

$$\nu_+(x)=\beta\tau_-(x). \tag{32}$$

Подставляя (32) в (28) и учитывая $u(x,y)\in C(\overline{\Omega})$ , $\beta>0$, $\mathrm{Re}\lambda\le 0$ получим $\tau(x)\equiv 0$ . Имея в виду однородное условие (4) и $u(x,y)\in C(\overline{\Omega})$ можем заключать, что $u(x,y)\equiv 0$ в $\Omega$.

Теперь перейдем к доказательству существования решения. Решение второй краевой задачи для уравнения (1) при $y>0$ представляется в виде

$$u(x,y)=\int\limits_0^1 \varphi(y_1)G(x,y,0,y_1)dy_1+\int\limits_0^x \psi(x_1)G_{y_1}(x,y,x_1,1)dx_1+$$

$$+\int\limits_0^x \nu_+(x_1)G(x,y,x_1,0)dx_1, \tag{33}$$

где

$$G(x,y,x_1,y_1)=\frac{e^{\lambda(x-x_1)}}{2\sqrt{\pi(x-x_1)}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{(y-y_1+2n)^2}{4(x-x_1)}}+e^{-\frac{(y+y_1+2n)^2}{4(x-x_1)}}\right]$$

– функция Грина второй краевой задачи для уравнения (1) при $y>0$ [12].

Подставляя (29) в (9), после некоторых преобразований получим

$$\nu_+(x)=\beta\tau(x)+2\beta\int\limits_x^1 b_3(t)J_0\left[\sqrt{\mu}(x-t)\right]dt.$$

Подставляя это в (33), получим

$$u(x,y)=\int\limits_0^1 \varphi(y_1)G(x,y,0,y_1)dy_1+\int\limits_0^x \psi(x_1)G_{y_1}(x,y,x_1,1)dx_1+$$

$$+\beta\int\limits_0^x \tau(x_1)G(x,y,x_1,0)dx_1+2\beta\int\limits_0^x\left(\int\limits_{x_1}^1 b_3(t)J_0\left[\sqrt{\mu}(x-t)\right]dt\right)G(x,y,x_1,0)dx_1, \tag{34}$$

Условие (7) запишем в виде

$$u(0,y)=u(1,y),$$

и из (34) найдем

$$u(0,y)=\varphi(y),$$

$$u(1,y)=\int\limits_0^1 \varphi(y_1)G(1,y,0,y_1)dy_1+\int\limits_0^1 \psi(x_1)G_{y_1}(1,y,x_1,1)dx_1+$$

$$+\beta\int\limits_0^1\tau(x_1)G(1,y,x_1,0)dx_1+2\beta\int\limits_0^1\left(\int\limits_{x_1}^1 b_3(t)J_0\left[\sqrt{\mu}(1-t)\right]dt\right)G(1,y,x_1,0)dx_1.$$

После некоторых преобразований получим интегральное уравнение относительно функции $\varphi(y)$:

$$\varphi(y)-\int\limits_0^1\varphi(y_1)G(1,y,0,y_1)dy_1=\int\limits_0^1\psi(x_1)G_{y_1}(1,y,x_1,1)dx_1+$$

$$+\beta\int\limits_0^1\tau(x_1)G(1,y,x_1,0)dx_1+2\beta\int\limits_0^1\left(\int\limits_{x_1}^1 b_3(t)J_0\left[\sqrt{\mu}(1-t)\right]dt\right)G(1,y,x_1,0)dx_1.$$

Решение этого уравнения запишем в виде

$$\varphi(y)=\beta\int\limits_0^1\tau(x_1)R(y,x_1)dx_1+\int\limits_0^1\psi(x_1)P(y,x_1)dx_1+\int\limits_0^1\gamma(x_1)R(y,x_1)dx_1, \tag{35}$$

где

$$R(y,x_1)=G(1,y,x_1,0)+\int\limits_0^1 G(1,y,x_1,0)\cdot\Gamma(1,y,0,y_1)dy_1,$$

$$P(y,x_1)=G_{y_1}(1,y,x_1,1)+\int\limits_0^1 G_{y_1}(1,y,x_1,1)\cdot\Gamma(1,y,0,y_1)dy_1,$$

$$\gamma(x)=\int\limits_x^1 b_3(t)J_0\left[\sqrt{\mu}(x-t)\right]dt,$$

$\Gamma(1,y,0,y_1)$ - резольвента ядра $G(1,y,0,y_1)$ .

Далее из (34) найдем функцию $\tau(x)$:

$$u(x,0)=\tau(x)=\int\limits_0^1\varphi(y_1)G(x,0,0,y_1)dy_1+\int\limits_0^x\psi(x_1)G_{y_1}(x,0,x_1,1)dx_1+$$

$$+\beta\int\limits_0^x\tau(x_1)G(x,0,x_1,0)dx_1+2\beta\int\limits_0^x\left(\int\limits_{x_1}^1 b_3(t)J_0\left[\sqrt{\mu}(x-t)\right]dt\right)G(x,y,x_1,0)dx_1, \tag{36}$$

Подставляя в (36) выражение $\varphi(y)$ по формуле (35), после некоторых преобразований получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода относительно функции $\tau(x)$:

$$\tau(x)-\beta\int\limits_0^1 \tau(t)R_1(x,t)dt=\psi_1(x), \tag{37}$$

где

$$R_1(x,t)=\int\limits_0^1 R(t,y_1)G(x,0,0,y_1)dy_1+\begin{cases} G(x,0,t,0), & 0\le t\le x,\\ 0, & t\le x\le 1,\end{cases}$$

$$\psi_1(x)=\int\limits_0^1 \psi(x_1)\left(\int\limits_0^1 P(x_1,y_1)\cdot G(x,0,0,y_1)dy_1\right)dx_1+$$

$$+\int\limits_0^x \psi(x_1)G_{y_1}(x,0,x_1,1)dx_1+\int\limits_0^1 \gamma(x_1)\left(\int\limits_0^1 R(x_1,y_1)\,G(x,0,0,y_1)dy_1\right)dx_1.$$

Разрешимость уравнения (37) вытекает из единственности решения задачи $NS_3$. Итак, решение задачи $NS_3$ определяется в $\Omega_1$ по формуле (33), а в $\Omega_2$ по формуле (27).

Теорема 9 полностью доказана.

**Пример 1.** $\lambda_n=-\alpha-(n\pi)^2$, $n=1,2,...$ являются собственными значениями задачи $S_{01}$, а соответствующие им собственные функции имеют вид

$$u_n(x,y)=\begin{cases} u_n^+(x,y), & y>0\\ u_n^-(x,y), & y<0\end{cases},$$

где

$$u_n^+(x,y)=c_n e^{\alpha y}\sin n\pi x,\quad n=1,2,...,$$

$$u_n^-(x,y)=c_n\left\{\sin n\pi x\,\cos n\pi y+\int\limits_{x-y}^{x+y}[n\pi a_4(t)\cos n\pi t+a_4'(t)\sin n\pi t]\times\right.$$

$$\times J_0\left[\sqrt{\mu\left[(x-t)^2-y^2\right]}\right]dt+\frac{\mu}{2}\int\limits_{x-y}^{x+y}\left(\int\limits_0^t[1+2a_4(z)]\sin n\pi z\frac{J_1\left[\sqrt{\mu}(t-z)\right]}{\sqrt{\mu}(t-z)}\right)\times$$

$$\left.\times J_0\left[\sqrt{\mu\left[(x-t)^2-y^2\right]}\right]dt+\frac{\mu y}{2}\int\limits_{x-y}^{x+y}\sin n\pi t\frac{J_1\left[\sqrt{\mu\left[(x-t)^2-y^2\right]}\right]}{\sqrt{\mu\left[(x-t)^2-y^2\right]}}dt\right\}.$$

**Пример 2.** $\lambda_{nm} = \gamma_m + 2n\pi i$ являются собственными значениями задачи $NS_3$, где $\gamma_m > 0$ – корни уравнения $tg\sqrt{\gamma} = -\frac{\sqrt{\gamma}}{\beta}$.

Соответствующие им собственные функции имеют вид:

$$u_{nm}(x,y) = \begin{cases} u^+_{nm}(x,y), \ y > 0 \\ u^-_{nm}(x,y), \ y < 0, \end{cases}$$

где

$$u^+_{nm}(x,y) = e^{2n\pi ix} \sin\sqrt{\gamma_m}(1-y),$$

$$u^-_{nm}(x,y) = \frac{\tau_{nm}(x+y) + \tau_{nm}(x-y)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{x-y}^{x+y} \nu^-_{nm}(t) J_0\left[\sqrt{\mu\left((x-t)^2 - y^2\right)}\right] dt +$$

$$+\frac{\sqrt{\mu}y}{2}\int\limits_{x-y}^{x+y} \tau_{nm}(t) \frac{J_1\left[\sqrt{\mu\left((x-t)^2 - y^2\right)}\right]}{\sqrt{(x-t)^2 - y^2}} dt,$$

$$\tau_{nm}(x) = c_m \sin\sqrt{\gamma_m}\, e^{2n\pi ix},$$

$$\nu^-_{nm}(x) = \frac{c_m}{\beta\left(1 + 2a_3(x)\right)} \left\{-\sqrt{\gamma_m} 2n\pi i \cos\sqrt{\gamma_m}\, e^{2n\pi ix} + \right.$$

$$+\beta\sqrt{\mu}\sin\sqrt{\gamma_m} e^{2n\pi i} J_1\left[\sqrt{\mu}(x-1)\right] + \mu\int\limits_x^1 \left[-\sqrt{\gamma_m}\cos\sqrt{\gamma_m}\, e^{2n\pi it} - \right.$$

$$\left. \left. -\beta\sin\sqrt{\gamma_m}\, e^{2n\pi i} J_0\left[\sqrt{\mu}(t-1)\right]\right] \frac{J_1\left[\sqrt{\mu}(x-t)\right]}{\sqrt{\mu}(x-t)} dt \ \right\}.$$

**Литература**


1. Елеев В.А. Аналог задачи Трикоми для смешанных параболо-гиперболических уравнений с нехарактеристической линией изменения типа. - Дифференциальные уравнения, 1977, т.XIII, №1, с.56-63.

2. Сабитов К.Б. К теории уравнений смешанного параболо-гиперболического типа со спектральным параметром. - Дифференциальные уравнения, 1989, т.25,№1, с.117-126.

3. Бердышев А.С. Нелокальные краевые задачи для уравнения смешанного типа в области с отходом от характеристики. - Дифференциальные уравнения, 1993, т.29, №12, с.2118-2125.

4. Салахитдинов М.С., Уринов А.К. Об одной краевой задаче для уравнения смешанного типа с негладкими линиями вырождения. - Доклады АН СССР, 1982, т.262, №3, с.539-541.

5. Салахитдинов М.С., Уринов А.К. Краевые задачи для уравнений смешанного типа со спектральным параметром. Ташкент: Фан- 1997. 165 с.

6. Бердышев А.С., Каримов Э.Т. О единственности решения задачи со смещением для уравнения параболо-гиперболического типа со спектральным параметром.-Труды Международной научной конференции "Дифференциальные уравнение и их приложения". Самара, 2002. С.20-22.

7. Бердышев А.С., Каримов Э.Т. О единственности решения одной нелокальной задачи для уравнения параболо-гиперболического типа со спектральным параметром.-Труды Международной научной конференции "Современные проблемы математики". Астана, 2002. С.74-77.

8. Каримов Э.Т. О существовании решения двух нелокальных задач для уравнения смешанного типа со спектральным параметром.- Узбекский математический журнал, 2003, №3-4, с.16-24.

9. Капустин Н.Ю., Моисеев Е.И. О спектральных задачах со спектральным параметром в граничном условии.- Дифференциальные уравнения, 1997, т.33, №1, с.115-119.

10. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнение математической физики. Москва: Наука - 1966.724 с.

11. Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамажонов М. Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа. Ташкент: Фан -1986. 220 с. 28.

12. Положий Г.Н. Уравнения математической физики. -М.: Высшая школа, 1964, 560 с.

13. Кузнецов Д.С. Специальные функции. М.: Высшая школа.- 1965.- 424 с.


Институт математики
им. В.И.Романовского АН РУз

Дата поступления
15.10.05

Uzbek Mathematical
Journal, 2005,№4, pp.37-48

УДК 517.96

# Регуляризованная асимптотика решений сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных систем с обратным временем

**А.А.Бободжанов, Б.Т.Калимбетов**

Maqolada diagonalda aynigan yadroli singulyar g'alayonlangan integro-differensial sistema to'liq regulyarizatsiyalangan va formal asimptotik qator koeffitsiyentlariga mos iteratsion sistemalarning bir qiymatli yechimga ega ekanligi o'rganilgan.

In the paper full regularization of singular perturbarted integro-differential systems with diagonal expression of kernel is established. The solidity of a iterative system for coefficients of corresponding formal asymptotic series is studied.

В настоящей работе с позиций метода регуляризации [1] исследуются интегро-дифференциальные уравнения вида

$$\varepsilon^3 \frac{dy}{dt} = \int\limits_0^t (t-s)K(t,s)y(s,\varepsilon)ds + h(t), \quad t \in [0,T], \tag{1}$$

у которых ядро $(t-s)K(t,s) \equiv 0$ при $s = t(K(t,t) \neq 0 \forall t[0,T])$. Аналогичная задача для интегрального уравнения

$$\varepsilon^2 y = \int\limits_0^t (t-s)K(t,s)y(s,\varepsilon)ds + h(t), \quad t \in [0,T] \tag{2}$$

была рассмотрена в [3]. Здесь особо подчеркивалось, что для устойчивости (при $\varepsilon \to +0$) решения $y(t,\varepsilon)$ уравнения (2) (например, в скалярном случае) необходимо потребовать, чтобы $K(t,t) < 0 (\forall t \in [0,T])$. Перенести результаты работы [2] на интегро-дифференциальные системы типа (1) с естественным начальным условием $y(0,\varepsilon) = y^0$ не удается, так как соответствующее характеристическое уравнение $\lambda^3(t) = K(t,t)$ при любом знаке диагонального ядра $K(t,t)$ имеет корни $\lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t)$ с вещественными частями $\mathrm{Re}\lambda_j(t)$ разных знаков. Поэтому априори задача (1) с начальным условием $y(0,\varepsilon) = y^0$ будет неустойчивой при $\varepsilon \to +0$.

Оказалось, что для устойчивости решения (при $\varepsilon \to +0$ ) в скалярном случае надо рассмотреть уравнение (1) с обратным временем (т.е. для (1) надо поставить начальное условие $y(T,\varepsilon) = y^0$) и с положительным диагональным ядром $K(t,t)$. Аналогичные соображения имеют место и в случае систем уравнений типа (1). При разработке приводимого ниже алгоритма широко использовались идеи работы [2].

Итак, рассмотрим систему (1), где $y = \{y_1, ..., y_n\}, h(t) = \{h_1, ..., h_n\}$, $K(t,s) - (n \times n)$ - матрица и ради простоты взято $T = 1$. Пусть $\{\lambda_j(t), j = \overline{1,n}\}$ - спектр матрицы $K(t,t)$. Задачу (1) будем исследовать при следующих предположениях:

1) $K(t,s) \in C^\infty(0 \le s \le t \le 1, R^n)$, $\quad h(t) \in C^\infty([0,1], C^n)$;

2) $\mathrm{Re}\lambda_j(t) > 0$, $\quad \lambda_i(t) \ne \lambda_j(t)$, $\quad i \ne j \ \forall t \in [0,1]$, $\quad i,j = \overline{1,n}$.

Дифференцируя дважды уравнение (1) по $t$, и вводя вектор $u = \{w,z,y\} = \{\varepsilon^2 \ddot{y}, \varepsilon \dot{y}, y\}$, получим следующую систему:

$$\begin{gathered}\varepsilon \tfrac{du}{dt} = A(t)u + \int\limits_0^t G(t,s)u(s,\varepsilon)ds + H(t), w(0,\varepsilon) = -\varepsilon^{-1}\dot{h}(0),\\ z(0,\varepsilon) = \varepsilon^{-2}h(0), y(1,\varepsilon) = y^0,\end{gathered} \tag{3}$$

где обозначено:

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & K(t,t) \\ I_n & 0 & 0 \\ 0 & I_n & 0 \end{pmatrix}, \quad H(t) = \begin{pmatrix} \ddot{h}(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$G(t,s) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2\frac{\partial K(t,s)}{\partial t} + (t-s)\frac{\partial^2 K(t,s)}{\partial t^2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, начальная задача для системы (1) с обратным временем и с диагональным вырождением ядра оказалось эквивалентной краевой задаче (3) для интегро-дифференциальной системы. Спектр матрицы $A(t)$ (в силу условия 2) имеет вид

$$\mu_{j1}(t) = (\lambda_j(t))^{\frac{1}{3}} \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad \mu_{j2}(t) = (\lambda_j(t))^{\frac{1}{3}} \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$\mu_{j3}(t) = (\lambda_j(t))^{\frac{1}{3}}, j = \overline{1,n}. \tag{4}$$

Следуя [1], введем регуляризирующие функции

$$\tau_{jk} = \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t \mu_{jk}(\theta)d\theta \equiv \frac{\psi_{jk}(t)}{\varepsilon}, \ \tau_{j3} = \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_1^t \mu_{j3}(\theta)d\theta \equiv \frac{\psi_{j3}(t)}{\varepsilon}, \ k = 1,2, \ j = \overline{1,n}. \tag{5}$$

Получим следующую задачу:

$$\varepsilon\frac{\partial\tilde{u}}{\partial t}+\sum_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{n}\mu_{jk}(t)\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\tau_{jk}}-A(t)\tilde{u}-\int\limits_0^t G(t,s)\tilde{u}(s,\varepsilon^{-1}\psi(s),\varepsilon)ds=H(t),$$

$$l\tilde{u}(t,\tau,\varepsilon)\equiv\{\tilde{w}(0,(\psi(0,\varepsilon),\varepsilon),\varepsilon),\tilde{z}(0,(\psi(0,\varepsilon),\varepsilon),\varepsilon),\tilde{y}(1,(\psi(1,\varepsilon),\varepsilon),\varepsilon)\}=$$

$$=\{\varepsilon^{-1}\dot{h}(0),\varepsilon^{-2}h(0),y^0\}\equiv u^0(\varepsilon),\qquad(6)$$

где обозначено: $\tau\equiv(\tau_{11},\cdots,\tau_{n1},\tau_{12},\cdots,\tau_{n2},\tau_{13},\ldots\tau_{n3})$, $\psi\equiv(\psi_{11},\cdots,\psi_{n3})$, $\tilde{u}=\tilde{u}(t,\tau,\varepsilon)$. Задачу (6) нельзя считать полностью регуляризованной, так как в ней не произведена регуляризация интегрального члена

$$I\tilde{u}\equiv\int\limits_0^t G(t,s)\tilde{u}(s,\varepsilon^{-1}\psi(s),\varepsilon)ds.\qquad(7)$$

Для регуляризации последнего введем класс $M_\varepsilon$, асимптотически инвариантный относительно оператора $I$ [1,с. 62 - 64].

**Определение 1.** *Будем говорить, что вектор - функция* $u(t,\tau)=\{w(t,\tau),z(t,\tau),y(t,\tau)\}$ *принадлежит классу* $U$*, если она представима в виде суммы*

$$u(t,\tau)=\sum_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{n}u_{jk}(t)e^{\tau_{jk}}+u_0(t)\qquad(8)$$

*с коэффициентами* $u_0(t)$, $u_{jk}(t)\in C^\infty([0,1],C^{3n})$, $k=1,2,3, j=\overline{1,n}$.

В качестве класса $M_\varepsilon$ возьмем сужение пространства $U$ при $\tau=\frac{\psi(t)}{\varepsilon}$. Покажем что, класс $M_\varepsilon$ инвариантен относительно оператора $I$. Для этого надо показать, что образ $Iu$ на элементах (6) класса $U$ представляется в виде ряда по степеням $\varepsilon$ (с коэффициентами из пространства $M_\varepsilon$), асимптотически сходящегося к $Iu$ при $\varepsilon\to+0$. Имеем

$$I(t,\tau)=\sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{n}\int\limits_0^t G(t,s)u_{jk}(s)E\{\mu_{jk};0,s\}ds+$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\int\limits_0^t G(t,s)u_{j3}(s)E\{\mu_{j3};1,s\}ds+\int\limits_0^t G(t,s)u_0(s)ds$$

где $E\{\mu;s,t\}\equiv e^{\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t\mu(\theta)d\theta}$.

Согласно [2] имеем

$$Iu(t,\tau)=\int\limits_0^t G(t,s)u_0(s)ds+$$

$$+\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{n}\varepsilon^{m+1}(-1)^m\left\{[(I_{jk}^m(G(t,s)u_{jk}(s))_{s=t}e^{\tau_{jk}}-(I_{jk}^m(G(t,s)u_j(s))_{s=0}+\right.$$

$$\left.+\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{n}\varepsilon^{m+1}(-1)^m[(I_{j3}^m(G(t,s)u_{j3}(s))_{s=t}e^{\tau_{j3}}-(I_{j3}^m(G(t,s)u_{j3}(s))_{s=0}\ e^{\frac{\psi_{j3}(0)}{\varepsilon}}]\right\},\tag{9}$$

где введены операторы $I_{jk}^0=\frac{1}{\mu_{jk}(s)}\cdot,\ I_{jk}^m=\frac{1}{\mu_{jk}(s)}\cdot,\ \frac{\partial}{\partial s}I_{jk}^{m-1}$, $(m\geq 1,\quad \tau_j=\psi_j(t)/\varepsilon, j=\overline{1,n}, k=1,2)$. Нетрудно показать (см. [3]), что ряд (9) сходится асимптотически $Iu$ (при $\varepsilon\to+0$) равномерно по $t\in[0,1]$. Это означает, что класс $M_\varepsilon=U|_{\tau=\frac{\psi(t)}{\varepsilon}}$ асимптотически инвариантен относительно оператора $I$. Определим теперь расширение оператора $I$ на равномерно сходящихся по $(t,\tau)\in[0,1]\times\{\mathrm{Re}\tau_j\leq 0, j=1,2,3\}$ асимптотических рядах

$$\tilde{u}(t,\tau,\varepsilon)=\sum_{i=-2}^{\infty}\varepsilon^i u_i(t,\tau), u_i(t,\tau)\in U,\tag{10}$$

следующим образом:

$$\tilde{I}\tilde{u}(t,\tau,\varepsilon)=\tilde{I}(\sum_{i=-2}^{\infty}\varepsilon^i u_i(t,\tau))=\sum_{r=-2}^{\infty}\varepsilon^r\sum_{s=-2,r-s\geq 0}^{r}R_{r-s}u_s(t,\tau),$$

где операторы $R_m:U\to U$ имеют вид

$$R_0u(t,\tau)=\int\limits_0^t G(t,s)u_0(s)ds,$$

$$R_{m+1}u(t,\tau)=(-1)^m\sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{n}[(I_{jk}^m(G(t,s)u_{jk}(s))_{s=t}e^{\tau_{jk}}-(I_{jk}^m(G(t,s)u_{jk}(s))_{s=0}]+$$

$$+(-1)^m\sum_{j=1}^{n}(I_{j3}^m(G(t,s)u_{j3}(s))_{s=t}e^{\tau_{j3}}-(I_{j3}^m(G(t,s)u_{j3}(s))_{s=0}e^{\frac{\psi_{j3}(0)}{\varepsilon}}],m\geq 0.$$

Тогда задача

$$\varepsilon\frac{\partial\tilde{u}}{\partial t}+\sum_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{n}\mu_{jk}(t)\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\tau_{jk}}-A(t)\tilde{u}-\tilde{I}\tilde{u}(t,\tau,\varepsilon)=H(t),l\tilde{u}(t,\tau,\varepsilon)=u^0\tag{11}$$

будет расширенной по отношению к исходной задаче (6).

Будем искать решение задачи (11) в виде ряда (10). Подставляя (10) в (11) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $\varepsilon$, получим следующие задачи для коэффициентов $u_k(t,\tau)$ этого ряда:

$$Lu_{-2}(t,\tau) \equiv (L_0 - R_0)u_{-2} = 0, \quad lu_{-2}(t,\tau) = \{0; h(0); 0\}; \tag{12}$$

$$Lu_{-1}(t,\tau) = -\frac{\partial u_{-2}}{\partial t} + R_1 u_{-2}, \quad lu_{-1}(t,\tau) = \{0; 0; \dot{h}(0)\}; \tag{13}$$

$$Lu_0(t,\tau) = -\frac{\partial u_{-1}}{\partial t} + H(t) + R_1 u_{-1} + R_2 u_{-2}, lu_0(t,\tau) = \{y^0; 0; 0\}; \tag{14}$$

$$Lu_k(t,\tau) = -\frac{\partial u_{k-1}}{\partial t} + R_1 u_{k-1} + R_2 u_{k-2} + \cdots + R_{k+2} u_{k-2},$$
$$lu_k(t,\tau) = \{0; 0; 0\}, k \geq 0, \tag{15}$$

где $L_0 \equiv \sum_{k=1}^{3} \sum_{j=1}^{n} \mu_{jk}(t) \frac{\partial}{\partial \tau_{jk}} - A(t)$.

Для вычисления решений итерационных задач (11) - (15) нам потребуется изучить разрешимость общей итерационной системы

$$Lu(t,\tau) \equiv (L_0 - R_0)u = P(t,\tau) \tag{16}$$

в пространстве $U$. Имеет места следующее утверждение.

**Теорема 1.** *Пусть выполнены условия 1), 2) и вектор - функция*

$$P(t,\tau) = \sum\nolimits_{k=1}^{3} \sum\nolimits_{j=1}^{n} P_{jk}(t) e^{\tau_{jk}} + P_0(t)$$

*принадлежит пространству $U$. Тогда для разрешимости системы (16) в пространстве $U$ необходимо и достаточно, чтобы*

$$< P(t,\tau), \chi_{jk}(t) e^{\tau_{jk}} > \equiv 0 \forall t \in [0,1], k = 1,2,3, j = \overline{1,n}, \tag{17}$$

*Здесь $\{\chi_{jk}(t)\}$ - собственный вектор матрицы $A^*(t)$, соответствующий собственному значению $\mu_{jk}(t), j = \overline{1,n}, k = 1,2,3$.*

Это утверждение доказывается так же, как и аналогичное утверждение в [2]. Однако нам потребуется явная форма решения системы (16), поэтому мы воспроизведем основные штрихи доказательства теоремы 1. Сначала заметим, что скалярное произведение в $U$ определяется по формуле

$$< u_1(t,\tau), u_2(t,\tau) > \equiv < \sum_{k=1}^{3} \sum_{j=1}^{n} u_{jk}^{(1)}(t) e^{\tau_{jk}} + u_0^{(1)}(t),$$

$$\sum_{k=1}^{3} \sum_{j=1}^{n} u_{jk}^{(2)}(t) e^{\tau_{jk}} + u_0^{(2)}(t) > \equiv \sum_{k=0}^{3} \sum_{j=1}^{n} (u_{jk}^{(1)}(t), u_{jk}^{(2)}(t))$$

где (,) - обычное скалярное произведение в комплексном пространстве $C^{3n}$.

Определяя решение системы (16) в виде элемента (8) пространства $U$, получим следующие системы для вычисления коэффициентов $u_{jk}(t)$ этого элемента

$$-A(t)u_0(t) - \int\limits_0^t G(t,s)u_0(s)ds = P_0(t), \tag{18}$$

$$[\mu_{jk}(t)I - A(t)]u_{jk}(t) = P_{jk}(t), k = 1,2,3, j = \overline{1,n}.(19)$$

Система (18) имеет единственное решение в виде вектор - функции

$$u_0(t) = -A^{-1}(t)P_0(t) - \int\limits_0^t R(t,s)A^{-1}(s)P_0(s)ds, \tag{20}$$

где $R(t,s)$ - резольвента ядра $-A^{-1}(t)G(t,s)$. Для вычисления решения системы (19) сделаем в ней преобразование $u_{jk}(t) = \Phi(t)\xi_{jk}$; получим систему

$$[\mu_{jk}(t)I - \Lambda(t)]\xi_{jk}(t) = \Phi^{-1}(t)P_{jk}(t) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\mu_{jk}(t) - \mu_{s1}(t))\xi_{jks1}(t) = (P_{jk}(t), \chi_{s1}(t)), \quad s = \overline{1,n} \\ (\mu_{jk}(t) - \mu_{s2}(t))\xi_{jks2}(t) = (P_{jk}(t), \chi_{s2}(t)), s = \overline{1,n} \end{cases}$$

$$(\mu_{jk}(t) - \mu_{s3}(t))\xi_{jks3}(t) = (P_{jk}(t), \chi_{s3}(t)), s = \overline{1,n}, \quad k = 1,2,3, j = \overline{1,n}$$

Здесь $j,k$ - фиксированы. Если $s = j,\ k = 1,2,3$, то $(P_{jk}(t), \chi_{s1}(t))$. Отсюда видно, что для разрешимости системы (19) в классе $C^\infty([0,1], C^{3n})$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (17). Заметим, что при выполнении условий (17) система (16) имеет следующее решение в пространстве $U$:

$$\hat{u}(t,\tau) = u_0(t) + \sum_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{n} \alpha_{jk}(t)\varphi_{jk}(t)e^{\tau_{jk}} + \sum_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{n} \hat{u}_{jk}(t)e^{\tau_{jk}}, \tag{22}$$

где $\alpha_{jk}(t) \in C^\infty([0,1], C^{3n})$ - произвольные скалярные функции, вектор - функция $\hat{u}_{jk}(t)$ имеет вид

$$u(t,\tau) = \sum_{s=1}^{n} \sum_{(s,i)\neq(j,k), i=1}^{3} \frac{(P_{jk}(t), \chi_{si}(t))}{\mu_{jk}(t) - \mu_{si}(t)}\varphi_{si}(t), \tag{23}$$

где $\varphi_{jk}(t) = colon\{\mu_{jk}^2(t)\varphi_j(t), \mu_{jk}(t)\varphi_j(t), \varphi_j(t)\}$. Здесь $\varphi_j(t)$ - собственный вектор матрицы $K(t,t)$, соответствующий собственному значению $\lambda_j(t), j = \overline{1,n}$.

Перейдем теперь к изучению условий однозначной разрешимости системы (16).

**Теорема 2.** *Пусть выполнены требования теоремы 1 и правая часть $P(t,\tau) \in U$ системы (16) удовлетворяет условиям ортогональности (17). Тогда система (16) при дополнительных условиях*

$$< -\frac{\partial u}{\partial t} + R_1 u + Q_1(t,\tau), \chi_{jk}(t) e^{\tau_{jk}} > \equiv 0 \forall t \in [0,1], k = 1,2,3, j = \overline{1,n}.$$

$$lu(t,\tau) = u^*, \tag{24}$$

*где $Q(t,\tau) \in U$ - известная вектор - функция, $u^* \in C^{3n}$ - известный постоянный вектор, имеет единственное решение в пространстве $U$.*

Доказательство. Так как выполнены условия (17), то система (16) имеет решение (22) в пространстве $U$, где функции $\alpha_{jk}(t)$ пока не определены. Подчиним (22) условиям (24). Для этого вычислим

$$-\frac{\partial u}{\partial t} + R_1 u + Q_1(t,\tau) \equiv -\sum_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{n} (\alpha_{jk}(t)\varphi_{jk}(t))^{\cdot} e^{\tau_{jk}} -$$

$$-\sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{n} [\frac{G(t,t)\alpha_{jk}(t)\varphi_{jk}(t)}{\mu_{jk}(t)} e^{\tau_{jk}} - \frac{G(t,0)(\alpha_{jk}(0)\varphi_{jk}(0)}{\mu_{jk}(0)}] -$$

$$-\sum_{j=1}^{n} [\frac{G(t,t)(\alpha_{j3}(t)\varphi_{j3}(t)}{\mu_{j3}(t)} e^{\tau_{jk}} - \frac{G(t,0)(\alpha_{j3}(0)\varphi_{j3}(0)}{\mu_{j3}(0)} e^{\frac{\psi_{jk}(0)}{\varepsilon}}] + Q_2(t,\tau),$$

$$Q_2(t,\tau) \equiv -\sum_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{n} \hat{u}'_{jk}(t) e^{\tau_{jk}} - \dot{u}_0(t) - \sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{n} [\frac{G(t,t)\hat{u}_{jk}(t)}{\mu_{jk}(t)} e^{\tau_{jk}} -$$

$$-\frac{G(t,0)\hat{u}_{jk}(0)}{\mu_{jk}(0)}] - \sum_{j=1}^{n} [\frac{G(t,t)\hat{u}_{j3}(t)}{\mu_{j3}(t)} e^{\tau_{jk}} - \frac{G(t,0)\hat{u}_{j3}(0)}{\mu_{j3}(0)} e^{\frac{\psi_{jk}(0)}{\varepsilon}}] + Q_1(t,\tau) \equiv$$

$$\equiv \sum_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{n} q_{jk}(t) e^{\tau_{jk}} + q_0(t).$$

Здесь $q_{jk}(t)$ и $q_0(t)$ - известные функции. Тогда условия (24) принимают вид

$$(-(\dot{\alpha}_{jk}(t)\varphi_{jk}(t))^{\bullet} - \frac{G(t,t)\varphi_{jk}(t)}{\mu_{jk}(t)} \alpha_{jk}(t) + q_{jk}(t), \chi_{jk}(t)) \equiv 0$$

или

$$-\dot{\alpha}_{jk}(t) - (\dot{\varphi}_{jk}(t) + \frac{G(t,t)\varphi_{jk}(t)}{\mu_{jk}(t)}, \chi_{jk}(t))\alpha_{jk}(t) + (q_{jk}(t), \chi_{jk}(t)) \equiv 0,$$

$$k=1,2,3, j=\overline{1,n}.$$

Отсюда находим функции $\alpha_{jk}(t)$:

$$\alpha_{jk}(t)=e^{\int\limits_0^t p_{jk}(\theta)d\theta}\alpha_{jk}(0)+e^{\int\limits_0^t p_{jk}(\theta)d\theta}\int\limits_0^t e^{-\int\limits_0^s p_{jk}(\theta)d\theta}(q_{jk}(s),\chi_{jk}(s))ds, \quad (25)$$

где $p_{jk}(t)\equiv-(\dot{\varphi}_{jk}(t)+\frac{G(t,t)\varphi_{jk}(t)}{\mu_{jk}(t)},\chi_{jk}(t)), k=1,2,3, j=\overline{1,n}$. Однако в (25) не найдены значения $\alpha_{jk}(0)$. Воспользуемся для их вычисления граничным условием $lu(t,\tau)\equiv Mu(0,\varepsilon)+Nu(1,\varepsilon)=u^*$, $M=\begin{pmatrix} I_{2n} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$. Учитывая вид (22) функции $u(t,\tau)$, будем иметь

$$\sum_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{n}[M(\alpha_{jk}(0)\varphi_{jk}(0))e^{\frac{\psi_{jk}(0)}{\varepsilon}}+N(\alpha_{jk}(1)\varphi_{jk}(1))e^{\frac{\psi_{jk}(1)}{\varepsilon}}]=u^*-\gamma(\varepsilon),$$

или

$$\sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{n}[\alpha_{jk}(0)M\varphi_{jk}(0)+\alpha_{jk}(1)N\varphi_{jk}(1)e^{\frac{\psi_{jk}(1)}{\varepsilon}}]+$$

$$+\sum_{j=1}^{n}[\alpha_{j3}(0)e^{\frac{\psi_{j3}(0)}{\varepsilon}}M\varphi_{j3}(0)+\alpha_{j3}(1)N\varphi_{jk}(1)]=u^*-\gamma(\varepsilon),$$

где

$$\gamma(\varepsilon)=l[u_0(t)+\hat{u}_{jk}(t)]\equiv l\left[\sum_{s=1}^{n}\sum_{(s,i)\neq(j,k),i=1}^{3}\frac{(P_{jk}(t),\chi_{si}(t))}{\mu_{jk}(t)-\mu_{si}(t)}\varphi_{si}(t)-u_0(t)\right].$$

Подставляя сюда (25), получим равенство

$$\sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{n}[\alpha_{jk}(0)M\varphi_{jk}(0)+e^{\int\limits_0^1 p_{jk}(\theta)d\theta}\alpha_{jk}(0)N\varphi_{jk}(1)e^{\frac{\psi_{jk}(1)}{\varepsilon}}]+$$

$$+\sum_{j=1}^{n}[\alpha_{j3}(0)e^{\frac{\psi_{j3}(0)}{\varepsilon}}M\varphi_{j3}(0)+e^{\int\limits_0^1 p_{j3}(\theta)d\theta}\alpha_{j3}(0)N\varphi_{j3}(1)]=\gamma_1(\varepsilon), \quad (26)$$

где

$$\gamma_1(\varepsilon)=u^*-\gamma(\varepsilon)-$$

$$-e^{\frac{\psi_{jk}(1)}{\varepsilon}}N\varphi_{jk}(1)\left[\sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{n}e^{\int\limits_0^1 p_{jk}(\theta)d\theta}\int\limits_0^1 e^{-\int\limits_0^s p_{jk}(\theta)d\theta}(q_{jk}(s),\chi_{jk}(s))ds\right]-$$

$$-\sum_{j=1}^{n} e^{\int\limits_0^1 p_{j3}(\theta)d\theta} \int\limits_0^1 e^{-\int\limits_0^s p_{j3}(\theta)d\theta}(q_{j3}(s), \chi_{j3}(s))dsN\varphi_{j3}(1).$$

Определитель этой системы

$$\Delta(\varepsilon) = \left| \begin{array}{ccc} \bar{M}\varphi_{11}(0), \dots, \bar{M}\varphi_{n1}(0), \bar{M}\varphi_{12}(0), & \dots, & \bar{M}\varphi_{n2}(0) \\ \bar{\bar{N}}\varphi_{11}(1)e^{\int\limits_0^1 p_{11}d\theta + \frac{\psi_{11}(1)}{\varepsilon}}, & \dots, & \bar{\bar{N}}\varphi_{n2}(1)e^{\int\limits_0^1 p_{n2}d\theta + \frac{\psi_{n2}(1)}{\varepsilon}} \end{array}\right.$$

$$\left. \begin{array}{ccc} \bar{M}\varphi_{13}(0)e^{\frac{\psi_{n1}(1)}{\varepsilon}}, & \dots, & \bar{M}\varphi_{n3}(0)e^{\frac{\psi_{n1}(1)}{\varepsilon}} \\ \bar{\bar{N}}\varphi_{13}(1), & \dots, & \bar{\bar{N}}\varphi_{13}(1), \end{array} \right|$$

при $\varepsilon \to +0$ стремится к определителю

$$\Delta(+0) = \left| \begin{array}{c} \bar{M}\varphi_{11}(0), \dots, \bar{M}\varphi_{n1}(0), \bar{M}\varphi_{12}(0), \dots, \bar{M}\varphi_{n2}(0) \\ 0, \dots, 0, \dots, \ \ 0 \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{c} 0, \dots, 0 \\ \bar{\bar{N}}\varphi_{13}(1)e^{\int\limits_0^1 p_{13}d\theta}, \dots, \ \ \bar{\bar{N}}\varphi_{n3}(1)e^{\int\limits_0^1 p_{n3}d\theta} \end{array} \right| =$$

$$= \det(\bar{M}\varphi_{11}(0), \dots, \bar{M}\varphi_{n1}(0), \bar{M}\varphi_{12}(0), \dots, \bar{M}\varphi_{n2}(0)) \times$$

$$\times \det[\bar{\bar{N}}\varphi_{12}(0), \dots, \bar{\bar{N}}\varphi_{n2}(0)]e^{\int\limits_0^1 (p_{13} + \cdots, + p_{n3})d\theta},$$

где $\bar{M} = (I_{2n}, 0) - 2n \times 3n$ - матрица, $\bar{\bar{N}} = (0, I_n) - n \times 3n$ матрица.

Имеем

$$\Delta_1 = \det(\bar{M}\varphi_{11}(0), \dots, \bar{M}\varphi_{n1}(0), \bar{M}\varphi_{12}(0), \dots, \bar{M}\varphi_{n2}(0)) =$$

$$= |colon\{\ \mu_{11}^2(0)\varphi_1(0), \mu_{11}(0)\varphi_1(0)\}, \dots, colon\{\mu_{n1}^2(0)\varphi_n(0), \mu_{n1}(0)\varphi_n(0)\};$$

$$colon\{\mu_{12}^2(0)\varphi_n(0), \mu_{n1}(0)\varphi_n(0)\}, \dots, colon\{\mu_{n2}^2(0)\varphi_n(0), \mu_{n2}(0)\varphi_n(0)\}|.$$

Так как $\varphi_1(0), \dots, \varphi_n(0)$ - линейно независимы, то из этих равенств следует что

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^2 \beta_{jk}\mu_{jk}^2(0) = 0, \\ \sum_{k=1}^2 \beta_{jk}\mu_{jk}(0) = 0, \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mu_{jk}^2(0)\beta_{j1} + \mu_{j2}^2(0)\beta_{j2} = 0, \\ \mu_{j1}(0)\beta_{j1} + \mu_{j2}(0)\beta_{j2} = 0, j = \overline{1, n} \end{array} \right. \qquad (27)$$

Так как $\mu_{j1}(0) \neq 0$ и $\mu_{j1}(0) \neq \mu_{j2}(0)$, то определитель этой системы

$$\left| \begin{array}{cc} \mu_{j1}^2(0) & \mu_{j2}^2(0) \\ \mu_{j1}(0) & \mu_{j2}(0) \end{array} \right| = (\mu_{j1}(0)\mu_{j2}(0)) \times$$

$$\times \begin{vmatrix} \mu_{j1}(0) & \mu_{j2}(0) \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \mu_{j1}(0)\mu_{j2}(0)(\mu_{j1}(0) - \mu_{j2}(0))$$

не равен нулю, поэтому (27) имеет только нулевое решение $\beta_{j1}(0) = \beta_{j2}(0) = 0$. Это означает, что столбцы определителя $\Delta_1$ линейно независимы, а значить, $\Delta_1 \neq 0$. Точно также $\Delta_2 = \det(\bar{N}\varphi_{13}(0), \ldots, \bar{N}\varphi_{n3}(0)) \neq 0$. Поэтому $\Delta(0) \neq 0$, а значить, $|\Delta(\varepsilon)| \geq c_0 > 0$ при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, где $\varepsilon_0 > 0$ - достаточно мало. Следовательно, системы (26) имеет единственное решение $\alpha_{jk}(0) = \alpha_{jk}(0, \varepsilon)$, причем это решение ограничено при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$. Подставляя найденные $\alpha_{jk}$ в (25), вычислим однозначно функции $\alpha_{jk}(t)$, а значит, найден решение (22) системы (16) в пространстве $U$ единственным образом. Теорема доказана.

Обозначим через $u_{\varepsilon N}(t)$ - сужение N - й частичной суммы $S_N(t, \tau, \varepsilon)$ ряда (10) на регуляризирующих функциях (5). Имеет место следующее утверждение.

**Лемма 1.** *Пусть выполнены условия 1), 2). Тогда при достаточно малых $\varepsilon (0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0)$ функция $u_{\varepsilon N}(t)$ удовлетворяет задаче*

$$\varepsilon \frac{du_{\varepsilon N}(t)}{dt} = A(t) u_{\varepsilon N}(t) + \int\limits_0^t G(t,s) u_{\varepsilon N}(s) ds + H(t) +$$

$$+ \varepsilon^{N+1} R_N(t, \varepsilon), l u_{\varepsilon N}(t) = u^0(\varepsilon),$$

*где*

$$\|R_N(t, \varepsilon)\|_{C[0,1]} \leq \bar{R}_N, \bar{R}_N > 0$$

*- постоянная, не зависящая от $\varepsilon$ при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.*

Доказательство. Вычислив решения $u_{-2}(t, \tau), u_{-1}(t, \tau), \ldots, u_N(t, \tau)$, подставим их в итерационные задачи (12), (13), (14), (15); получим тождества. Умножим последние на $\varepsilon^{-2}, \varepsilon^{-1}, 1, \varepsilon, \ldots, \varepsilon^N$ соответственно и просуммируем полученные равенства. Будем иметь тождество

$$L_0 S_N(t, \tau, \varepsilon) - R_0 S_N(t, \tau, \varepsilon) \equiv H(t) - \varepsilon \frac{\partial S_N(t, \tau, \varepsilon)}{\partial t} +$$

$$+ \varepsilon^{N+1} \frac{\partial u_N(t, \tau)}{\partial t} + \varepsilon^{-1} R_1 u_{-2}(t, \tau) + (R_1 u_{-1} + R_2 u_2) + \ldots$$

$$\ldots + \varepsilon^N (R_1 u_{N-1} + R_2 u_{N-2} + \ldots + R_{N+2} u_{-2}),$$

или

$$L_0 S_N(t, \tau, \varepsilon) + \varepsilon \frac{\partial S_N(t, \tau, \varepsilon)}{\partial t} \equiv$$

$$\equiv H(t) + \varepsilon^{N+1} \frac{\partial S_N(t, \tau)}{\partial t} + \varepsilon^{-2} R_0 u_{-2} + \varepsilon^{-1} (R_0 u_{-1} + R_1 u_{-2}) +$$

$+(R_0u_0+R_1u_{-1}+R_2u_{N-2})+\ldots+\varepsilon^N(R_0u_N+R_1u_{N-1}+R_1u_{N-2}+\ldots+R_{N+2}u_{-2})$.

Вычитая из обеих частей этого тождества $IS_N(t,\tau,\varepsilon)\equiv Iu_{\varepsilon N}(t)$, а затем производя сужение при $\tau=\psi(t)/\varepsilon$, будем иметь

$$\varepsilon\frac{du_{\varepsilon N}(t)}{dt}-A(t)u_{\varepsilon N}-Iu_{\varepsilon N}(t)\equiv H(t)+\varepsilon^{N+1}\frac{\partial u_N(t,\frac{\phi}{\varepsilon})}{\partial t}-$$

$$-[Iu_N(t,\tau,\varepsilon)-\sum_{r=0}^{N}\varepsilon^r\sum_{s=0,r-s\geq 0}^{r}R_{r-s}u_s(t,\tau)|_{\tau=\frac{\psi(t)}{\varepsilon}}].$$

По определению операторов $R_m$ выражение в квадратной скобке представляется в виде $\varepsilon^{N+1}m_N(t,\varepsilon)$, причем $\|m_N(t,\varepsilon)\|_{C[0,T]}\leq\bar{m}_N=const$. Следовательно,

$$\varepsilon\frac{du_{\varepsilon N}(t)}{dt}-A(t)u_{\varepsilon N}-Iu_{\varepsilon N}(t)\equiv H(t)+\varepsilon^{N+1}R_N(t,\varepsilon),$$

где обозначено: $R_N(t,\varepsilon)\equiv\frac{\partial u_N(t,\phi/\varepsilon)}{\partial t}-m_N(t,\varepsilon)$. В силу условий 1) -2) вектор - функция $R_N(t,\varepsilon)$ равномерно ограничена, т.е.

$$\|R_N(t,\varepsilon)\|_{C[0,T]}\leq\bar{R}_N=const\forall(t,\varepsilon)\in[0,T]\times(0,\varepsilon_0],$$

где $\varepsilon_0>0$ - достаточно мало. Равенство $lu_{\varepsilon N}(t)=u^0(\varepsilon)$ очевидно. Лемма доказана.

Используя идее работы [2] и [4], нетрудно доказать следующий результат.

**Теорема 3.** *Пусть выполнены условия 1), 2). Тогда при достаточно малых $\varepsilon(0<\varepsilon\leq\varepsilon_0)$ задача (3) однозначно разрешима в классе $C^1[0,1]$ и имеет место оценка*

$$\|u(t,\varepsilon)-u_{\varepsilon N}(t)\|_{C[0,1]}\leq C_N\varepsilon^{N+1}, N=-2,-1,0,1,\cdots,$$

*где $u(t,\varepsilon)$ - точное решение задачи (3), $C_N>0$ - постоянная, не зависящая от $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$.*

**Литература**

1. Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Наука, 1981.- 400 с.

2. Бободжанов А.А., Сафонов В.Ф. Внутренный переходной слой в линейной задаче оптимального управления // Диф. уравн.- 2001.- Т. 37, №3.- С. 310 - 322.

3. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973.- 272 с.

4. Сафонов В.Ф., Туйчиев О.Д. Регуляризация сингулярно возмущенных интегральных уравнений с быстро изменяющимся ядром// Диф. уравн.- 1997.- Т. 33, №9.- С. 1199 - 1211.


Московский энергетический институт
Институт математики
им. В.И.Романовского АН РУз

Дата поступления
13.03.05

Uzbek Mathematical
Journal, 2005,№4, pp.49-54

УДК 517

# Некоторые кубатурные формулы для вычисления двойных интегралов

**Г.П.Исматуллаев**

Maqolada integrallash sohasi $R_2 : \{-\infty < x, y < \infty\}$ va vazn funksiyasi $p(x) = e^{-x^2-y^2}$ bo‘lganda, algebraik aniqlik darajasi olti, sakkiz, to‘qqiz va o‘n birga teng bo‘lgan kubatur formulalar keltirilgan. Formulalar noma’lum parametrlar usuli bilan qurilgan. Keltirilgan kubatur formulalar tugun nuqtalari soni quyi chegaraga yaqin, o‘n birinchi algebraik aniqlik darajada esa tugun nuqtalar soni minimal.

In the present paper are offered cubatur formulas of the sixth, eighth, ninth and eleventh degrees of accuracy when area of integration is $R_2 : \{-\infty < x, y < \infty\}$ and weight function $p(x, y) = e^{-x^2-y^2}$. Formulas are constructed by a method of indefinite parameters. Number of nodes of the offered formulas are close to the lower border, and in case of the eleventh degree of accuracy number of nodes are minimally.

Построение формул приближенного интегрирования с наименьшим числом узлов, при заданной алгебраической степени точности, является актуальной задачей как с точки зрении теории так и практики. Такими вопросами занимались И.П.Мысовских [1], Г.Георгиев [2], Moller [3], H.J.Schmid [4] и др.

В настоящей работе предложены кубатурные формулы шестой, восьмой, девятой и одиннадцатой степеней точности для случая, когда областью интегрирования является $R_2 : \{-\infty < x, y < \infty\}$ и весовая функция $p(x, y) = e^{-x^2-y^2}$.

**1. Формула шестой степени точности**

Узлами кубатурной формулы являются начало координат и вершины двух правильных пятиугольников с центром в начале координат. Каждой группе узлов соотнесем одно значения коэффициента. Напишем кубатурную формулу

$$\iint\limits_{R_2} e^{-x^2-y^2} f(x,y)dxdy \cong Af(0,0) + B\sum_{j=0}^{4} f(r_1 \cos\frac{2\pi}{5}j, r_1 \sin\frac{2\pi}{5}j) +$$

$$+C\sum_{j=0}^{4} f(r_2\cos\frac{\pi}{5}(2j+1), r_2\sin\frac{\pi}{5}(2j+1)). \qquad (1)$$

По расположении узлов видно, что кубатурная формула (1) автоматически точна для одночленов $x^k y^l$, когда $l$ нечетное. Неизвестные параметры кубатурной формулы (1) определим из условии, что она точна для всех одночленов вида $x^k y^{2l}$, $0 \le k+2l \le 6$, $k=0,1,...,$ $l=0,1,2,3.$ Нетрудно убедиться, что для определения параметров кубатурной формулы (1) получим следующую систему уравнений

$$\begin{array}{l} A+5B+5C=\pi, \\ Br_1^2+Cr_2^2=\frac{\pi}{5}, \\ Br_1^4+Cr_2^4=\frac{2\pi}{5}, \\ Br_1^5-Cr_2^5=0, \\ Br_1^6+Cr_2^6=\frac{6\pi}{5}. \end{array} \qquad (2)$$

Приведем решение системы (2)

$$r_1^2=1,5;\quad r_2^2=6;\quad A=\frac{7\pi}{18};\quad B=\frac{16\pi}{135};\quad C=\frac{\pi}{270}.$$

Кубатурная формула

$$\iint\limits_{R_2} e^{-x^2-y^2} f(x,y)dxdy \cong \frac{7\pi}{18}f(0,0)+\frac{16\pi}{135}\sum_{j=0}^{4} f\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\cos\frac{2\pi}{5}j, \sqrt{\frac{3}{2}}\sin\frac{2\pi}{5}j\right)+$$

$$+\frac{\pi}{270}\sum_{j=0}^{4} f(\sqrt{6}\cos\frac{\pi}{5}(2j+1), \sqrt{6}\sin\frac{\pi}{5}(2j+1)) \qquad (3)$$

точна для всех многочленов не выше шестой степени и имеет одиннадцать узлов.

**2. Формула восьмой степени точности**

В качестве узлов возьмем начало координат и вершины трех правильных пятиугольников с центром в начале координат.

Кубатурная формула имеет вид:

$$\iint\limits_{R_2} e^{-x^2-y^2} f(x,y)dxdy \cong A_0 f(0,0)+\sum_{i=1}^{2} A_i\sum_{j=0}^{4} f(r_i\cos\frac{2\pi}{5}j, r_i\sin\frac{2\pi}{5}j)+$$

$$+A_3\sum_{j=0}^{4} f(r_3\cos\frac{\pi}{5}(2j+1), r_3\sin\frac{\pi}{5}(2j+1)). \qquad (4)$$

Требование, что кубатурная формула (4) должна быть точна для многочленов не выше восьмой степени приведет к решению следующей нелинейной системы уравнений

$$\begin{aligned}
&A_0 + 5A_1 + 5A_2 + 5A_3 = \pi,\\
&5A_1 r_1^2 + 5A_2 r_2^2 + 5A_3 r_3^2 = \pi,\\
&5A_1 r_1^4 + 5A_2 r_2^4 + 5A_3 r_3^4 = 2\pi,\\
&5A_1 r_1^5 + 5A_2 r_2^5 - 5A_3 r_3^5 = 0,\\
&5A_1 r_1^6 + 5A_2 r_2^6 + 5A_3 r_3^6 = 6\pi,\\
&5A_1 r_1^7 + 5A_2 r_2^7 - 5A_3 r_3^7 = 0,\\
&5A_1 r_1^8 + 5A_2 r_2^8 + 5A_3 r_3^8 = 24\pi
\end{aligned} \tag{5}$$

При решении системы уравнений (5) получим следующие соотношении между неизвестными $r_1, r_2, r_3$ :

$$\begin{aligned}
&r_1 r_3 - r_1 r_2 + r_2 r_3 = 4,\\
&3\left(r_1 + r_2 - r_3\right) = r_1 r_2 r_3,\\
&r_1^2 r_2^2 r_3^2 - 2\left(r_1^2 r_2^2 + r_1^2 r_3^2 + r_2^2 r_3^2\right) + 6\left(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2\right) = 24.
\end{aligned}$$

Кроме этого предполагая, что $r_1,\ r_2 - r_3$ является корнями некоторого алгебраического уравнения третьего порядка $t^3 + at^2 + bt + c = 0$ и зная соотношения между коэффициентами и корнями этого уравнения, получим

$$r_1 = \sqrt{6}, \quad r_2 = \frac{\sqrt{78} - \sqrt{6}}{6}, \quad r_3 = \frac{\sqrt{78} + \sqrt{6}}{6}.$$

Приведем значение коэффициентов:

$$A_0 = \frac{11\pi}{36}, \quad A_1 = \frac{\pi}{15 \cdot 36}, \quad A_2 = \frac{481 + 106\sqrt{13}}{130 \cdot 54}\pi, \quad A_3 = \frac{481 - 106\sqrt{13}}{130 \cdot 54}\pi$$

Кубатурная формула

$$\iint\limits_{R_2} e^{-x^2-y^2} f(x,y)dxdy \cong \frac{11\pi}{36} f(0,0) + \frac{\pi}{15 \cdot 36} \sum_{j=0}^{4} f(\sqrt{6}\cos\frac{2\pi}{5}j, \sqrt{6}\sin\frac{2\pi}{5}j) +$$

$$+ \frac{481 + 106\sqrt{13}}{130 \cdot 54}\pi \sum_{j=0}^{4} f(\frac{\sqrt{78} - \sqrt{6}}{6}\cos\frac{5\pi}{5}j, \frac{\sqrt{78} - \sqrt{6}}{6}\sin\frac{2\pi}{5}j) +$$

$$+ \frac{481 - 106\sqrt{13}}{130 \cdot 54}\pi \sum_{j=0}^{4} f(\frac{\sqrt{78} + \sqrt{6}}{6}\cos\frac{\pi}{5}(2j+1), \frac{\sqrt{78} + \sqrt{6}}{6}\sin\frac{\pi}{5}(2j+1)).$$

точна для многочленов не выше восьмой степени и имеет 16 узлов, все коэффициенты положительны.

**3. Формула девятой степени точности**

Узлами искомой кубатурной формулы являются начало координат и вершины трех правильных шестиугольников с центром в начале координат. Напишем кубатурную формулу

$$\iint\limits_{R_2} e^{-x^2-y^2} f(x,y)dxdy \cong A_0 f(0,0) + \sum_{i=1}^{2} A_i \sum_{j=0}^{5} f(r_i \cos\frac{\pi}{3}j, r_i \sin\frac{\pi}{3}j) +$$

$$+A_3 \sum_{j=0}^{5} f(r_3 \cos\frac{\pi}{6}(2j+1), r_3 \sin\frac{\pi}{6}(2j+1)). \qquad (6)$$

Из расположении узлов ясно, что для одночленов $x^k y^l$ кубатурная формула (6) точна, если хоть одно из чисел $k$ или $l$ нечетное. Теперь, требуя точности формулы (6) к 1, $x^2$, $x^2y^2$, $x^4y^2+x^2y^4$, $x^4y^2-x^2y^4$, $x^6y^2-x^2y^6$, $x^6y^2+x^2y^6$ получим следующую систему нелинейных уравнений относительно неизвестных параметров кубатурной формулы (6)

$$\begin{aligned}
&A_0 + 6A_1 + 6A_2 + 6A_3 = \pi,\\
&6A_1r_1^2 + 6A_2r_2^2 + 6A_3r_3^2 = \pi,\\
&6A_1r_1^4 + 6A_2r_2^4 + 6A_3r_3^4 = 2\pi,\\
&6A_1r_1^6 + 6A_2r_2^6 - 6A_3r_3^6 = 0,\\
&6A_1r_1^6 + 6A_2r_2^6 + 6A_3r_3^6 = 6\pi,\\
&6A_1r_1^8 + 6A_2r_2^8 - 6A_3r_3^8 = 0,\\
&6A_1r_1^8 + 6A_2r_2^8 + 6A_3r_3^8 = 24\pi.
\end{aligned}$$

Выпишем решение этой системы

$$r_1^2 = \frac{4}{7}\left(6+\sqrt{15}\right), \quad r_2^2 = \frac{4}{7}\left(6-\sqrt{15}\right), \quad r_3^2 = 4$$

$$A_0 = \frac{31\pi}{96}, \quad A_1 = \frac{605-151\sqrt{15}}{256\cdot 45}\pi, \quad A_2 = \frac{605+151\sqrt{15}}{256\cdot 45}\pi, \quad A_1 = \frac{\pi}{128}. \quad (7)$$

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться в том, что кубатурная формула (6) со значениями параметров (7) точна для всех одночленов не выше девятой степени.

**4. Формула одиннадцатой степени точности**

Узлы кубатурной формулы: начало координат и вершины четырех правильных шестиугольников с центром в начале координат.

Кубатурная формула имеет вид

$$\iint\limits_{R_2} e^{-x^2-y^2} f(x,y)dxdy \cong A_0 f(0,0) + \sum_{i=1}^{2} A_i \sum_{j=0}^{5} f(r_i \cos\frac{\pi}{3}j, r_i \sin\frac{\pi}{3}j) +$$

$$+\sum_{i=3}^{4} A_3 \sum_{j=0}^{5} f(r_i \cos\frac{\pi}{6}(2j+1), r_i \sin\frac{\pi}{6}(2j+1)). \qquad (8)$$

Кубатурная формула (8) точна для одночленов $x^k y^l$, если хоть одно из чисел $k$ или $l$ нечетное. Это является следствием симметрии области и весовой функции, также симметрией расположении узлов. Неизвестные параметры формулы (8) найдем из следующей системы нелинейных уравнений, которая получается требованием точности (8) к 1, $x^2$, $x^4$, $x^4y^2+x^2y^4$, $x^4y^2-x^2y^4$, $x^6y^2+x^2y^6$, $x^6y^2-x^2y^6$, $x^6y^4+x^4y^6$, $x^6y^4-x^4y^6$.

$$\begin{aligned}
&A_0 + 6A_1 + 6A_2 + 6A_3 + 6A_4 = \pi,\\
&A_1r_1^2 + A_2r_2^2 + A_3r_3^2 + A_4r_4^2 = \tfrac{\pi}{6},\\
&A_1r_1^4 + A_2r_2^4 + A_3r_3^4 + A_4r_4^4 = \tfrac{\pi}{3},\\
&A_1r_1^6 + A_2r_2^6 + A_3r_3^6 + A_4r_4^6 = \pi,\\
&A_1r_1^6 + A_2r_2^6 - A_3r_3^6 - A_4r_4^6 = 0,\\
&A_1r_1^8 + A_2r_2^8 + A_3r_3^8 + A_4r_4^8 = 4\pi,\\
&A_1r_1^8 + A_2r_2^8 - A_3r_3^8 - A_4r_4^8 = 0,\\
&A_1r_1^{10} + A_2r_2^{10} + A_3r_3^{10} + A_4r_4^{10} = 20\pi,\\
&A_1r_1^{10} + A_2r_2^{10} - A_3r_3^{10} - A_4r_4^{10} = 0.
\end{aligned}$$

Приведем решение этой системы

$$r_1^2 = 10 - 3\sqrt{5} - \sqrt{85 - 36\sqrt{5}}, \quad r_2^2 = 10 - 3\sqrt{5} + \sqrt{85 - 36\sqrt{5}},$$

$$r_3^2 = 10 + 3\sqrt{5} - \sqrt{85 + 36\sqrt{5}}, \quad r_4^2 = 10 + 3\sqrt{5} + \sqrt{85 + 36\sqrt{5}},$$

$$A_1 = \frac{(15+4\sqrt{5})r_2^2 - (30+3\sqrt{5})}{180r_1^2(r_2^2 - r_1^2)}\pi; \quad A_2 = \frac{-(15+4\sqrt{5})r_1^2 + (30+3\sqrt{5})}{180r_2^2(r_2^2 - r_1^2)}\pi;$$

$$A_3 = \frac{(15-4\sqrt{5})r_4^2 - (30-3\sqrt{5})}{180r_3^2(r_4^2 - r_3^2)}\pi; \quad A_4 = \frac{-(15-4\sqrt{5})r_3^2 + (30-3\sqrt{5})}{180r_4^2(r_4^2 - r_3^2)}\pi;$$

$$A_0 = \frac{14}{45}\pi.$$

Отметим, что число узлов кубатурной формулы шестой и восьмой степеней точности отличаются от нижней границы на единицу, а у кубатурной формулы (6) лишь на две единицы. Число узлов кубатурной формулы (8) минимально в классе кубатурных формул, у которых алгебраическая степень точности одиннадцать и среди узлов имеется начало координат [1].

Укажем еще кубатурную формулу содержащую значения производных подынтегральной функции, которая точна для многочленов не выше девятой степени.

$$\iint\limits_{R_2} e^{-x^2-y^2} f(x,y)dxdy \cong \frac{116\pi}{128} f(0,0) + \frac{22\pi}{128} \Delta f(0,0) + \frac{\pi}{128} \Delta^2 f(0,0) +$$

$$+ \frac{\pi}{128} \sum_{j=0}^{12} f(2\cos\frac{\pi}{6} j, 2\sin\frac{\pi}{6} j).$$

**Литература**

1. Мысовских И.П. Интерполяционные кубатурные формулы. -М:. Наука, 1981 г.

2. Георгиев Г. Формулы механической квадратуры с минимальным числом членов при многократных интегралах. -ДАН СССР, 1952, 83, $\epsilon$4.

3. Moller H.M. Kubaturformeln mit minimaler Knotenzahl. -Numer. Math., 1976,25, $\epsilon$2. 4. Schmid H.J. On cubature formulae with a minimal number of knots. - Numer. Math., 1978, 31.

Национальный Университет
Узбекистана им. М.Улугбека

Дата поступления
13.06.05

Uzbek Mathematical
Journal, 2005,№4, pp.55-60

УДК 517.96

# Предельный переход в системе интегральных уравнений с диагональным вырождением ядра

**Б.Т.Калимбетов**

Maqolada integral sistemaning asimptotik yechimini limit sistemaning yechimiga tekis yaqinlashishi isbotlangan

In the paper the uniformly convergence of asymptotic solutions of the integral system to solution of limit system is proved.

Рассмотрим систему интегральных уравнений

$$\varepsilon^2 y = \int\limits_t^1 (t-s)K(t,s)y(s,\varepsilon)ds + h(t), \tag{1}$$

причем будем предполагать, что $\det K(t,t) \neq 0 \forall t \in [0,1]$. Более точно, будем считать выполненными следующие условия:
1) $K(t,s) \in C^\infty(0 \leq s \leq t \leq 1, C^{n^2}), h(t) \in C^\infty([0,1], C^n)$;
2) спектр $\{\lambda_j(t)\}(n \times n)$ - матрицы $K(t,t)$ удовлетворяет требованиям:
 а) $\lambda_j(t) > 0, i = \overline{1,n}, \forall t \in [0,1]$;
 б) $\lambda_i(t) \neq \lambda_j(t), i \neq j, i,j = \overline{1,n}, \forall t \in [0,1]$.

Вместо неизвестной функции $y = y(t,\varepsilon)$ введем новую вектор - функцию

$$z = \int\limits_t^1 (t-s)K(t,s)y(s,\varepsilon)ds$$

Дифференцируя ее по $t$ и учитывая, что $\varepsilon^2 y = z + h(t)$, будем иметь

$$\varepsilon^2 \frac{dz}{dt} = \int\limits_t^1 G(t,s)z(s,\varepsilon)ds + g(t), \quad z(1,\varepsilon) = 0, \tag{2}$$

где обозначено: $G(t,s) \equiv K(t,s) + (t-s)\frac{\partial K(t,s)}{\partial t}$, $g(t) \equiv \int\limits_t^1 G(t,s)h(s)ds$. Решение системы (1) связано с решением системы (2) равенством $y = \varepsilon^{-2}(z + h(t))$. Поэтому, построив асимптотическое решение системы (2), легко вычислим асимптотическое решение системы (1). В работе [1] обсуждалась проблема регуляризации скалярных интегральных уравнений типа (1) и зависимость ее от характера вырождения. Целью нашей работы являются изучение предельного перехода в системе (1). Предположим, что предельная система

$$0=\int_t^1 (t-s)K(t,s)\overline{y}(s)+h(t), \tag{3}$$

имеют решения $y\equiv\overline{y}(t)\in C^\infty([0,1],C^n)$. Тогда необходимо выполнение условий $h(1)=\dot{h}(1)=0$. Действительно, полагаем в (3) $t=1$ получаем $h(1)=0$. Дифференцируя (3) по $t$, получим

$$0=\int_t^1 \left(K(t,s)+(t-s)\frac{\partial K(t,s)}{\partial t}\right)\overline{y}(s)ds+\dot{h}(t).$$

При $t=1$ будем иметь $\dot{h}(1)=0$. Дальнейшее дифференцирование приведет к интегральному уравнению Вольтера второго рода, которое при $K(t,s)\in C^2(0\leq s\leq t\leq 1,C^n)$ имеет решение $y=\overline{y}(t)\in C^\infty([0,1],C^n)$. Обратные преобразования с учетом условий $h(1)=\dot{h}(1)=0$ является (при наличии гладкости $K(t,s)$ и $h(t)$) необходимым и достаточным для существования решения предельной системы (3). Покажем, что в этом случае решение $y(t,\varepsilon)$ задачи (1) не обязательно сходится при $\varepsilon\to+0$ к решению $\overline{y}(t)$ предельной системы (3).

Обратимся к формуле

$$y_{\varepsilon N}(t)=\frac{1}{\varepsilon^2}\left(h(t)+z_0\left(t,\frac{\varphi(t)}{\varepsilon}\right)\right)+\frac{1}{\varepsilon}z_1\left(t,\frac{\varphi(t)}{\varepsilon}\right)+\sum_{j=2}^{N+2}\varepsilon^{j-2}z_j\left(t,\frac{\varphi(t)}{\varepsilon}\right),$$

где $\frac{\varphi(t)}{\varepsilon}=\frac{1}{\varepsilon}\int_t^1\mu_j(\theta)d\theta, j=\overline{1,2n}, \mu_{2j-1}(t)\equiv -i\sqrt{\lambda_j(t)}, \mu_{2j}(t)\equiv +i\sqrt{\lambda_j(t)}, j=\overline{1,n}$, $\lambda_j(t)$ - корни характеристического уравнения $\varepsilon^2\lambda_j(t)+K(t,t)=0$, $j=\overline{1,n}$, $z_k(t,\frac{\varphi(t)}{\varepsilon})\in$ U - решение итерационных задач (см., например [2,3]), $k=\overline{0,N+2}$.

Из нее вытекает, что

$$\|y(t,\varepsilon)-y_{\varepsilon o}(t)\|_{C[0,1]}\leq C_0\varepsilon, \tag{4}$$

где обозначено:

$$y_{\varepsilon 0}(t)=\frac{h(t)+z_0\left(t,\frac{\varphi(t)}{\varepsilon}\right)}{\varepsilon^2}+\frac{z_1\left(t,\frac{\varphi(t)}{\varepsilon}\right)}{\varepsilon}+z_2\left(t,\frac{\varphi(t)}{\varepsilon}\right). \tag{5}$$

Пусть теперь выполнены условия $h(1) = \dot{h}(1) = 0$. При $h(1) = 0$ получаем, что $z_0(t, \varphi(t)/\varepsilon) \equiv -h(t)$. При этом итерационные задачи, из которых вычисляются функции $z_1(t, \varphi(t)/\varepsilon)$ и $z_2(t, \varphi(t)/\varepsilon)$, принимают вид

$$-R_0 z_1 = 0, \quad z_1(1,0) = 0; \tag{6}$$

$$\begin{aligned} &-R_0 z_2 = \dot{h}(t) - L z_1 + R_1 z_1, \quad z_2(1,0) = 0;\\ &-R_0 z_3 = -\tfrac{\partial z_1}{\partial t} - L z_2 + R_1 z_2 + R_2 z_1, \quad z_3(1,0) = 0, \end{aligned} \tag{7}$$

где $R_0 z_1 = \int\limits_t^1 G(t,s) z_0(s) ds$, $L \equiv \sum\limits_{j=1}^{2n} \left[ \left(-i\sqrt{\lambda_j(t)}\right) \frac{\partial}{\partial \tau_j} + \left(i\sqrt{\lambda_j(t)}\right) \frac{\partial}{\partial \tau_j} \right]$, $\tau_j = \frac{\varphi_j(t)}{\varepsilon}$, $j = \overline{1,n}$, $R_1$, $R_2$ - интегральные операторы.

Применяя процедуру развитую при построении решения системы (6) (см. [3] ), найдем, что

$$z_1(t,\tau) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left( e^{-\int\limits_t^1 p_k(\theta) d\theta + \tau_{2k-1}} + e^{-\int\limits_t^1 q_k(\theta) d\theta + \tau_{2k}} \right) \cdot \frac{(\dot{h}(1), d_k(1))}{\mu_{2k-1}(1)},$$

где $p_k(t)$ и $q_k(t)$ - действительные функции класса $C^{\infty}([0,T], C^n)$, $k = \overline{1,n}$, так как $\dot{h}(1) = 0$, $z_1(t,\tau) \equiv 0$. Но тогда решение $z_2(t,\tau)$ задачи (7) определяется из тройки систем

$$\begin{aligned} &-R_0 z_2 = \dot{h}(t), && z_2(1,0) = 0;\\ &-R_0 z_3 = -L z_2 + R_1 z_2, && z_3(1,0) = 0;\\ &-R_0 z_4 = -\tfrac{\partial z_2}{\partial t} - L z_3 + R_1 z_3 + R_2 z_2, && z_4(1,0) = 0, \end{aligned}$$

Решение $z_2(t,\tau)$ задачи (7) имеет вид

$$z_2(t,\tau) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left( e^{-\int\limits_t^1 p_k(\theta) d\theta + \tau_{2k-1}} + e^{-\int\limits_t^1 q_k(\theta) d\theta + \tau_{2k}} \right) (-z_2^{(0)}(1), d_k(1)) c_k(t) + z_2^{(0)}(t), \tag{8}$$

где $z_2^{(0)}(t)$ - решение интегральной системы

$$-\int\limits_t^1 G(t,s) z_2^{(0)}(s) ds = \dot{h}(t)$$

или эквивалентной ей системы (3). Дифференцируя последнюю систему по $t$, получаем уравнение

$$-K(t,t) z_2^{(0)}(t) - \int\limits_t^1 \frac{\partial G(t,s)}{\partial t} z_2^{(0)}(s) ds = \ddot{h}(t).$$

Отсюда видно, что $z_2^{(0)}(1) = -K^{-1}(1,1)\ddot{h}(1)$, поэтому, если $\ddot{h}(1) \neq 0$, то в функции $z_2\left(t, \frac{\varphi(t)}{\varepsilon}\right)$ (см. (8)) присутствует по крайней мере один из множителей

$$e^{-\int\limits_t^1 p_k(\theta)d\theta + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_t^1 \mu_{2k-1}(\theta)d\theta} + e^{-\int\limits_t^1 q_k(\theta)d\theta + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_t^1 \mu_{2k}(\theta)d\theta},$$

причем $p_k(t)$ и $q_k(t)$ - действительные функции. Этот множитель быстро осциллирует при $\varepsilon \to +0$ и поскольку $y_{\varepsilon o}(t) \equiv z_2\left(t, \frac{\varphi(t)}{\varepsilon}\right)$, то предельный переход $y(t,\varepsilon) \overset{\rightarrow}{\longrightarrow} z_2^{(0)}(t) \equiv \overline{y}(t)$ при $\varepsilon \to +0 (\forall t \in [0,1])$ невозможен. Если же $\ddot{h}(1) = 0$, то $z_2(t,\tau) \equiv z_2^{(0)}(t)$ и указанный предельный переход имеет место. Очевидно и обратное: если $y(t,\tau) \overset{\rightarrow}{\longrightarrow} \overline{y}(t)(\varepsilon \to +0)$ на [0,1], то $\ddot{h}(1) = 0$. Доказан следующий результат.

**Теорема.** *Пусть выполнены условия 1) и 2) и $h(1) = \dot{h}(1) = 0$. Для того чтобы решение $y(t,\varepsilon)$ задач (1) сходилось при $\varepsilon \to +0$ к решению $y = \overline{y}(t)$ предельной системы (3) (равномерно по $t \in [0,1]$), необходимо и достаточно, чтобы $\ddot{h}(1) = 0$.*

В качестве примера рассмотрим скалярное уравнения

$$\varepsilon^2 y = \int\limits_t^1 (t-s)y(s)ds + h(t), \quad t \in [0,1] \tag{9}$$

Это уравнение легко решается. Действительно, дифференцируя ее дважды будем иметь

$$\varepsilon^2 \frac{d^2y}{dt^2} + y = \ddot{h}(t), \quad y(1,\varepsilon) = \frac{h(1)}{\varepsilon^2}, \dot{y}(1,\varepsilon) = \frac{\dot{h}(1)}{\varepsilon^2}.$$

Решением этой задачи является функция

$$y(t,\varepsilon) = \left[\left(\frac{h(1)}{\varepsilon^2}\cos\frac{1}{\varepsilon} - \frac{\dot{h}(1)}{\varepsilon}\sin\frac{1}{\varepsilon}\right) - \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_t^1 \ddot{h}(\theta)\sin\frac{\theta}{\varepsilon}d\theta\right]\cos\frac{t}{\varepsilon} +$$

$$+\left[\left(\frac{h(1)}{\varepsilon^2}\sin\frac{1}{\varepsilon} - \frac{\dot{h}(1)}{\varepsilon}\cos\frac{1}{\varepsilon}\right) + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_t^1 \ddot{h}(\theta)\cos\frac{\theta}{\varepsilon}d\theta\right]\sin\frac{t}{\varepsilon},$$

которую после интегрирования по частям можно записать в форме

$$y(t,\varepsilon) = \left(\frac{h(1)}{\varepsilon^2}\cos\frac{1}{\varepsilon} - \frac{\dot{h}(1)}{\varepsilon}\sin\frac{1}{\varepsilon}\right)\cos\frac{t}{\varepsilon} + \left(\frac{h(1)}{\varepsilon^2}\sin\frac{1}{\varepsilon} - \frac{\dot{h}(1)}{\varepsilon}\cos\frac{1}{\varepsilon}\right)\sin\frac{t}{\varepsilon} +$$

$$+\ddot{h}(t) - \ddot{h}(1)\cos(\frac{t}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon}) +$$

$$\cos\frac{t}{\varepsilon}\int_t^1 (\theta)\cos\frac{\theta}{\varepsilon}d\theta + \sin\frac{t}{\varepsilon}\int_t^1 (\theta)\sin\frac{\theta}{\varepsilon}d\theta. \qquad (10)$$

Предельное уравнение по отношению к (9) будет таким:

$$\int_t^1 (t-s)\bar{y}(s)ds + h(t) = 0.$$

Оно имеет решение $\bar{y} = \ddot{h}(t)$ при условиях $h(1) = \dot{h}(1) = 0$. При этих же условиях (10) принимает вид

$$y(t,\varepsilon) = \ddot{h}(t) - \ddot{h}(1)\cos(\frac{t}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon}) + (\int_t^1 (\theta)\sin\frac{\theta}{\varepsilon}d\theta)\cos\frac{t}{\varepsilon} + (\int_t^1 (\theta)\cos\frac{\theta}{\varepsilon}d\theta)\sin\frac{t}{\varepsilon} + \ddot{h}(t), \qquad (11)$$

Еще одно интегрирования по частям показывает, что

$$(\int_t^1 (\theta)\sin\frac{\theta}{\varepsilon}d\theta)\sin\frac{t}{\varepsilon} + (\int_t^1 (\theta)\cos\frac{\theta}{\varepsilon}d\theta)\cos\frac{t}{\varepsilon} \to 0$$

(при $\varepsilon \to +0$) равномерно по $t \in [0,1]$. Однако, если $\ddot{h}(1) = 0$, то в (11) слагаемое $-\ddot{h}(1)\cos(\frac{t}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon})$ не имеет предела при $\varepsilon \to +0$ и $t \in [0,1]$. Таким образом, условие $\ddot{h}(1) = 0$ является необходимым и достаточным для наличия предельного перехода $y(t,\varepsilon) \to \bar{y}(t)$ при $\varepsilon \to +0$ на отрезке $t \in [0,1]$. Если же $\ddot{h}(1) \neq 0$, то точное решение $y(t,\varepsilon)$ уравнения (9) сходится при $\varepsilon \to +0$ к предельному $\bar{y}(t)$ неравномерно, а в норме $L_1[0,1]$. При этом $y(t,\varepsilon)$ совершает около предельного решения $\bar{y}(t)$ быстрые осцилляции. Нарушение же хотя бы одного из условий h(1)=0 или $\dot{h}(1) = 0$ приводит к тому, что указанные осцилляции имеют при $\varepsilon \to +0$ бесконечную амплитуду, в частности при t = 1 она равно $h(1)/\varepsilon^2$, что можно установить и непосредственно из уравнения (9).

**Литература**

1. Бободжанов А.А., Туйчиев О.Д. Сингулярно возмущенные интегральные уравнения с вырожденным ядром// Дифф. уравнен. - 1997. Т. 33. №11.- С. 1537 - 1542.

2. Бободжанов А.А., Калимбетов Б.Т., Сафонов В.Ф. Асимптотика решений сингулярно возмущенных интегральных уравнений с диагональным вырождением ядра// Вестник МЭИ.- 2001, №6.- С. 10 - 24.

3. Калимбетов Б.Т., Сафонов В.Ф. Построение асимптотических решений для систем интегральных уравнений с диагональным вырождением ядра// Труд. Межд. конф. "Дифференциальные уравнения с частными производными и родственные проблемы анализа и информатики", Ташкент, 2004, Т. II. - С. 57 - 63.

Институт математики
им. В.И.Романовского АН РУз

Дата поступления
10.03.05

Uzbek Mathematical
Journal, 2005,№4, pp.61-71

УДК: 517.956

# Спектральные свойства решений одной нелокальной задачи для уравнения смешанного типа с негладкими линиями изменения типа

**Ж.Д.Мамажонов**

Ushbu maqolada turining o'zgarish chizig'i silliq bo'lmagan spektral parametrli Lavrent'yev-Bitsadze tenglamasi uchun nolokal masala yechimining yagonaligi integral energiya usuli yordamida isbotlangan. Qo'yilgan masalaning xos sonlari va ularga mos xos funksiyalari sistemasi topilib, ularning $L_2$ da to'laligi isbotlangan.

In this work one non-local problem for the Lavrent'ev-Bitsadze equation with non-smooth line of degeneration and with spectral parameter is considered and the uniqueness of the solution is proved by the method of energy integrals. Eigenvalues and eigenfunctions of the stated problem are found and completeness of these eigenfunctions is proved.

В работе доказана теорема единственности решения одной спектральной нелокальной задачи для уравнения смешанного типа с двумя линиями изменения типа. В случае когда не имеет место теорема единственности найдены собственные значения и собственные функции, доказана полнота системы собственных функций этой задачи.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv Signx\, u_{xx} + Signy\, u_{yy} + \lambda^2 u = 0, \tag{1}$$

где $\lambda$ - заданный комплексный параметр, в конечной односвязной области $\Omega$, плоскости переменных $x$ и $y$, ограниченной при $x > 0$, $y > 0$ линией $\sigma_0 : x^2 + y^2 = 1$ и при $x > 0$, $y < 0$ характеристиками $OD : x + y = 0$, $AD : x - y = 1$, при $x < 0$, $y > 0$ характеристиками $OC : x + y = 0$, $BC : x - y = -1$ уравнения (1).

Введем обозначения: $\Omega_0 = \Omega \cap (x > 0, y > 0)$, $\Omega_1 = \Omega \cap (x > 0, y < 0)$, $\Omega_2 = \Omega \cap (x < 0, y > 0)$; $OA = \{(x, y) : 0 < x < 1, y = 0\}$, $OB = \{(x, y) : x = 0, 0 < y < 1\}$; $\theta_{x0} = \left(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2}\right)$ и $\theta_{y0} = \left(-\frac{y}{2}, \frac{y}{2}\right)$.

**Задача** $A_\lambda^0$ **.** Найти значения комплексного параметра $\lambda$ и соответствующие им функции $u(x,y,\lambda)$, удовлетворяющие условиям:

$$u(x,y) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega \cup \sigma_0) \cap C^2(\Omega_0 \cup \Omega_1 \cup \Omega_2), \tag{2}$$

$$Lu(x,y) = 0, \quad (x,y) \in (\Omega_0 \cup \Omega_1 \cup \Omega_2), \tag{3}$$

$$\alpha u(x,y) + \beta \frac{\partial u(x,y)}{\partial n} = \varphi(x,y), \qquad (x,y) \in \sigma_0, \tag{4}$$

$$A_{0x}^{0,\lambda}\left[u(\theta_{x0})\right] + \gamma_1 u(x,0) = 0, \quad (x,o) \in \overline{OA}, \tag{5}$$

$$A_{0y}^{0,\lambda}\left[u(\theta_{y0})\right] + \gamma_2 u(0,y) = 0, \quad (x,o) \in \overline{OB}, \tag{6}$$

где $\alpha$, $\beta$, $\gamma_1$, $\gamma_2$ - заданные действительные числа, причем $\alpha^2+\beta^2 \neq 0$; $n-$ внешняя нормаль к $\sigma_0$ а $\varphi(x,y)-$ заданная вообще говоря комплекснозначная функция,

$$A_{0x}^{0,\lambda}\left[f(x)\right] \equiv f(x) - \int\limits_0^x f(x)\frac{\partial}{\partial t} J_0\left[\lambda\sqrt{x(x-t)}\right]dt,$$

$J_n(z)-$ функция Бесселя первого рода порядка $n$.

Отметим, что в работе [4] найдены собственные числа и собственные функции задачи Трикоми, указаны условия, которые обеспечивают единственность решения задачи, исследовано на полноту системы собственных функций и с помощью этой системы построено решение задачи для тех значений, при которых справедлива теорема единственности.

**2. Единственность решение.** Используя формулу Римана [5], которая дает решения задачи Коши для уравнения (1) в областях $\Omega_1$, $\Omega_2$, и условия (5), (6), находим

$$(1+2\gamma_j)\tau_j(x) = \int\limits_0^x \nu_j(t) J_0[\lambda(x-t)]dt, \quad 0 \leq x \leq 1 \tag{$7_j$}$$

где $\tau_1(x) = u(x,0)$, $\nu_1(x) = u_y(x,0)$, $\tau_2(y) = u(0,y)$, $\nu_2(y) = u_x(0,y)$.

Равенства $(7_j)$ являются основными функциональными соотношениями между $\tau_j(x)$ и $\nu_j(x)$ на отрезках $OA$ и $OB$, принесенными из гиперболических частей смешанной области $\Omega$. Этим задача $A_\lambda^0$ эквивалентно сведена к следующей эллиптической задаче в $\Omega_0$ :

**Задача** $C_\lambda^0$. Найти функцию $u(x,y) \in C(\overline{\Omega}_o) \cap C^1(\Omega_0 \cup OA \cup OB \cup \sigma_0) \cap C^2(\Omega_0)$, удовлетворяющую уравнению (1) и условиям (4), $(7_1)$, $(7_2)$.

**Теорема 1.** *При выполнение условия* $\alpha \cdot \beta \geq 0$, $\gamma_j \geq -1/2$ $(j=1,2)$ *и* $Re\lambda = 0$, *задача* $C_\lambda^0$ $(A_\lambda^0\ )$ *имеет только тривиальное решение.*

Утверждение теоремы 1 следует из следующих лемм.

**Лемма 1.** *Пусть* $u(x,y)-$ *решение однородной задачи* $C^0_\lambda$, *тогда справедливо равенство*

$$(-Re\lambda^2-\delta^2)\left[\iint\limits_{\Omega_0'}|\vartheta|^2dxdy+\iint\limits_{\Omega_0''}|\omega|^2dxdy\right]+$$

$$+\iint\limits_{\Omega_0'}|\nabla\vartheta|^2dxdy+\iint\limits_{\Omega_0''}|\nabla\omega|^2dxdy+\int\limits_{\sigma_0}w(x,y)ds+$$

$$+Re\int\limits_0^1 e^{2\delta x}\tau_1(x)\nu_1(x)dx+Re\int\limits_0^1 e^{2\delta y}\tau_2(y)\nu_2(y)dy=0, \tag{8}$$

*где* $w(x,y)\equiv 0$, *если* $\alpha=0$ *или* $\beta=0$, *и* $w(x,y)=(\alpha/\beta)\left(|\vartheta|^2+|\omega|^2\right)$, *если* $\alpha\cdot\beta\neq 0$; $\vartheta(x,y)=e^{\delta x}u(x,y)$ *в* $\Omega_0'=\Omega_0\cap(x>y)$; $\omega(x,y)=e^{\delta y}u(x,y)$ *в* $\Omega_0''=\Omega_0\cap(x<y)$. *Причем* $\vartheta(x,y)=\omega(x,y)$ *на* $OK: y=x$ *и* $\bar\tau_1(x)=\overline{u}(x,0)$, $\nu_1(x)=u_y(x,0)$, $\bar\tau_2(y)=\overline{u}(0,y)$, $\nu_2(y)=u_x(0,y)$.

**Лемма 2.** *Пусть* $(-\delta)\geq|\mathrm{Im}\lambda|$ *и выполнены условия* $\gamma_j\geq -1/2$. *Тогда справедливо неравенство* $I_j=\int\limits_0^1 e^{2\delta x}\overline{\tau_j}(x)\nu_j(x)dx\geq 0$ $(j=1,2)$.

**3. Исследование на полноту системы собственных функций.**

Переходя к полярным координатам $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $0\leq r\leq 1$, $\varphi=arctg\frac{y}{x}$, $0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2}$ и разыскивая решения в виде $u(x,y)=R(r)\Phi(\varphi)$ нетрудно доказать [6], что собственные значениями задачи $C^0_\lambda$ $(A^0_\lambda)$ являются $\alpha_m^{(\mu_n)}$, $(m,n=1,2,...)$, где

$$\mu_n=\begin{cases}2n-1, & \text{если}\quad \gamma_1+\gamma_2+2\gamma_1\gamma_2=0,\\ 2n-\frac{2}{\pi}arctg\gamma, & \text{если}\quad \gamma_1+\gamma_2+2\gamma_1\gamma_2\neq 0,\quad \gamma\geq 0,\\ 2(n-1)-\frac{2}{\pi}arctg\gamma, & \text{если}\quad \gamma_1+\gamma_2+2\gamma_1\gamma_2\neq 0,\quad \gamma<0,\end{cases} \tag{9}$$

$\gamma=(1+\gamma_1+\gamma_2)/(\gamma_1+\gamma_2+2\gamma_1\gamma_2)$, $n=1,2,...$, $\alpha_m^{(\mu_n)}$ - $m$ -й корень уравнения $\alpha J_{\mu_n}(\lambda)+\beta\lambda J'_{\mu_n}(\lambda)=0$ (если $\beta=0$ то оно имеет только вещественные нули, если $\alpha/\beta\geq 0$, $\mu_n>0$ $(n=1,2,...)$ то это уравнение имеет четное число действительных корней), а соответствующие им собственные функции в $\Omega_0$ определяются равенствами

$$u_{n,m}(x,y)=c_{n,m}J_{\mu_n}\left(\alpha_m^{(\mu_n)}r\right)Sin(\mu_n\varphi+\varphi_0),\quad n,m=1,2,..., \tag{10}$$

где $\varphi_0=arcctg(1+2\gamma_1)$ а $c_{n,m}\neq 0-$ постоянные числа.

Для того чтобы найти собственные функции задачи $A^0_\lambda$ в $\Omega_1$ из (10) находим

$$u_{n,m}(x,0) = k^1_{n,m} J_{\mu_n}\left[\alpha^{(\mu_n)}_m x\right], \tag{11}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} u_{n,m}(x,0) = k^1_{n,m}(1+2\gamma_1)\mu_n x^{-1} J_{\mu_n}\left[\alpha^{(\mu_n)}_m x\right], \tag{12}$$

где $k^1_{n,m} = c_{n,m}/\sqrt{2+4\gamma_1+4\gamma_1^2}$.

Известно, что общее решение уравнения (1) в области $\Omega_1$ имеет вид [4]

$$u(x,y) = \left[\chi_1\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^{\rho/2} + \chi_2\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{\rho/2}\right] J_\rho\left[\lambda\sqrt{x^2-y^2}\right] \tag{13}$$

где $\mathrm{Re}\rho \geq 0$, $\chi_1$ и $\chi_2$– произвольные постоянные.

Требуя выполнения условий (11) и (12), находим, что собственные функции задачи $A^0_\lambda$ в области $\Omega_1$ определяются формулами

$u_{n,m}(x,y) =$

$$= k^1_{n,m}\left[(1+\gamma_1)\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{\mu_n/2} - \gamma_1\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^{\mu_n/2}\right] J_{\mu_n}\left[\alpha^{(\mu_n)}_m\sqrt{x^2-y^2}\right]. \tag{14}$$

где $n,m = 1,2,....$

Для получения общего решения уравнения (1) в области $\Omega_2$ в (13) заменим $x$ на $y$, $y$ на $x$ в силу симметричности коэффициентов уравнения (1),

$$u(x,y) = \left[\chi_3\left(\frac{y-x}{y+x}\right)^{\rho/2} + \chi_4\left(\frac{y+x}{y-x}\right)^{\rho/2}\right] J_\rho\left[\lambda\sqrt{y^2-x^2}\right] \tag{15}$$

где $\mathrm{Re}\rho \geq 0$, $\chi_3$ и $\chi_4$– произвольные постоянные.

Из (10) находим

$$u_{n,m}(0,y) = (-1)^n k^2_{n,m} J_{\mu_n}\left[\alpha^{(\mu_n)}_m y\right], \tag{16}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} u_{n,m}(0,y) = (-1)^n k^2_{n,m}(1+2\gamma_2)\mu_n y^{-1} J_{\mu_n}\left[\alpha^{(\mu_n)}_m y\right], \tag{17}$$

где $k^2_{n,m} = c_{n,m}/\sqrt{2+4\gamma_2+4\gamma_2^2}$.

Здесь также требуя выполнения условий (16) и (17) в области $\Omega_2$ находим собственные функции задачи $A^0_\lambda$, которые определяются формулами

$$u_{n,m}(x,y) =$$
$$= (-1)^n k^2_{n,m} \left[ (1+\gamma_2)\left(\frac{y+x}{y-x}\right)^{\mu_n/2} - \gamma_2 \left(\frac{y-x}{y+x}\right)^{\mu_n/2}\right] J_{\mu_n}\left[\alpha_m^{(\mu_n)}\sqrt{y^2-x^2}\right], \tag{18}$$

где $n, m = 1, 2, ....$

Нетрудно доказать, что функции (14) и (18) удовлетворяют условию (5) и (6) соответственно. При этом используется тождество

$$\int\limits_0^x t^n \frac{\partial}{\partial t} J_0\left[\lambda\sqrt{x(x-t)}\right] dt = x^n \left[1 - \overline{J}_n(\lambda x)\right], \quad n \in R,$$

в справедливости которого при $x > 0$ можно убедится с помощью разложения функции Бесселя в степенной ряд. Здесь $\overline{J_n}(z) = \Gamma(n+1)(z/2)^{-k} J_n(z)$.

Следовательно, объединяя формулы (10), (14) и (18), получим систему собственных функций задачи $A_\lambda^0$ в смешанной области $\Omega$

$$u_{n,m}(x,y) = \begin{cases} c_{n,m} J_{\mu_n}\left[\alpha_m^{(\mu_n)}\sqrt{x^2+y^2}\right] Sin(\mu_n\varphi + \varphi_0), & (x,y) \in \Omega_0, \\ k^1_{n,m}\left[(1+\gamma_1)\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{\mu_n/2} - \gamma_1\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^{\mu_n/2}\right] \times & \\ \qquad \times J_{\mu_n}\left[\alpha_m^{(\mu_n)}\sqrt{x^2-y^2}\right], & (x,y) \in \Omega_1, \\ (-1)^n k^2_{n,m}\left[(1+\gamma_2)\left(\frac{y+x}{y-x}\right)^{\mu_n/2} - \gamma_2\left(\frac{y-x}{y+x}\right)^{\mu_n/2}\right] \times & \\ \qquad \times J_{\mu_n}\left[\alpha_m^{(\mu_n)}\sqrt{y^2-x^2}\right], & (x,y) \in \Omega_2. \end{cases} \tag{19}$$

Если переходить к координатам $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $0 \le r \le 1$, $\varphi_1 = arctg\frac{x}{y}$, $0 \le \varphi_1 \le \frac{\pi}{2}$, то получим второй вид системы собственных функций

$$u_{n,m}(x,y) = \begin{cases} (-1)^n c_{n,m} J_{\mu_n}\left[\alpha_m^{(\mu_n)}\sqrt{x^2+y^2}\right] Sin(\mu_n\varphi_1 + \varphi_0^1), & (x,y) \in \Omega_0, \\ (-1)^n k^1_{n,m}\left[(1+\gamma_1)\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{\mu_n/2} - \gamma_1\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^{\mu_n/2}\right] \times & \\ \qquad \times J_{\mu_n}\left[\alpha_m^{(\mu_n)}\sqrt{x^2-y^2}\right], & (x,y) \in \Omega_1, \\ k^2_{n,m}\left[(1+\gamma_2)\left(\frac{y+x}{y-x}\right)^{\mu_n/2} - \gamma_2\left(\frac{y-x}{y+x}\right)^{\mu_n/2}\right] \times & \\ \qquad \times J_{\mu_n}\left[\alpha_m^{(\mu_n)}\sqrt{y^2-x^2}\right], & (x,y) \in \Omega_2. \end{cases} \tag{20}$$

где $\varphi_0^1 = arcctg(1+2\gamma_2)$.

В плоскости $\gamma_1 O \gamma_2$ введем обозначение

$$G_0 = \{(\gamma_1, \gamma_2) : \ \gamma_1 > -1, \ \gamma_2 > -1, \ \gamma_1 + \gamma_2 > -1\},$$

$$G_{ks}=\{(\gamma_1,\gamma_2):\ \gamma_k>-1,\ \gamma_s<-1,\ \gamma_1+\gamma_2<-1\},\quad k,s=1,2,\quad k\neq s$$

.

**Лемма 3.** *Система синусов*

$$\{Sin\,(\mu_n\theta/2+\varphi_0)\}_{n=1}^{+\infty}\qquad и\qquad \left\{Sin\left(\mu_n\theta_1/2+\varphi_0^1\right)\right\}_{n=1}^{+\infty}$$

*образует базис Рисса, если* $(\gamma_1,\gamma_2)\in G_0\cup G_{12}$ *и* $(\gamma_1,\gamma_2)\in G_0\cup G_{21}$ *соответственно.*

Это лемма доказывается с помощью теоремы 1 работы [2].

**Лемма 4.** *При выполнение одного из условий* $\gamma_1+\gamma_2+2\gamma_1\gamma_2=0$*;* $\gamma\geq 0$ *и* $\gamma<-1$*, система функций* $\left\{x^{\mu_n-1}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ *полна в* $L_2\,[0,1]$ *, где* $\gamma=(1+\gamma_1+\gamma_2)/(\gamma_1+\gamma_2+2\gamma_1\gamma_2)$.

Это лемма доказывается по теореме Мюнца, о полноте системы функций $\{x^{m_n}\}_{n=1}^{+\infty}$ в $L_p\,[a,b]\,,\ \ 0\leq a<b,\ \ p>1$.

**Теорема 2.** *Если* $(\gamma_1,\gamma_2)\in G_0\cup G_{12}$ $((\gamma_1,\gamma_2)\in G_0\cup G_{21})$ *то система собственных функций (19) ((20)) задачи* $A_\lambda^0$ *полна в* $L_2(\Omega_0)$.

Приведем доказательство для системы (19), а для системы (20) доказывается аналогично. Предположим, что в $L_2(\Omega_0)$ существует функция $F_0(x,y)$ такая, что

$$\iint\limits_{\Omega_0} F_0(x,y)u_{n,m}(x,y)dxdy=0 \tag{21}$$

для всех $n,m\in N$ . Покажем, что функция $F_0(x,y)=0$ почти всюду в $\Omega_0$ . Переходя в полярную систему координат $x=rCos\varphi$ , $y=rSin\varphi$ и учитывая (19), из (21) имеем

$$0=\int\limits_0^1\int\limits_0^{\pi/2} f_0(r,\varphi)J_{\mu_n}\left[\alpha_m^{(\mu_n)}r\right]\,[Sin\,(\mu_n\varphi+\varphi_0)]\,rd\varphi dr=$$

$$=\int\limits_0^1 F_n(r)J_{\mu_n}\left[\alpha_m^{(\mu_n)}r\right]rdr, \tag{22}$$

где

$$f_0(r,\varphi)=F_0(x,y),\qquad F_n(r)=\int\limits_0^{\pi/2} f_0(r,\varphi)\,Sin\,(\mu_n\varphi+\varphi_0)\,d\varphi.$$

Используя неравенство Коши-Буняковского, нетрудно доказать, что интеграл $\int\limits_0^1\sqrt{r}\,|F_n(r)|\,dr$ существует и абсолютно сходится. Тогда для функции $F_n(r)$ все коэффициенты ряда Дини равны нулю, поэтому из теоремы Юнга [1] следует, что $F_n(r) \equiv 0$ $(n = 1, 2, ...)$. Так что

$$\int\limits_0^{\pi/2} f_0(r,\varphi) Sin\,(\mu_n\varphi + \varphi_0)\,d\varphi = 0 \tag{23}$$

для всех $n = 1, 2, ...$ при любом $r \in (0,1)$. Тогда в силу леммы 3, система синусов
$\{Sin\,(\mu_n\theta/2 + \varphi_0)\}_{n=1}^{\infty}$ полна в $L_2(0,\pi)$. Поэтому из (22) получаем, что при каждом $r$ множество тех $\varphi$, где $f_0(r,\varphi) \neq 0$, имеет меру нуль. В силу теоремы Фубини, это означает, что $f_0(r,\varphi) = 0$ почти всюду в $\Omega_0$. Отсюда следует утверждение теоремы.

**Теорема 3.** *Если $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ , то система собственных функций (19) ((20)) задачи $A_\lambda^0$ полна в $L_2(\Omega_1)$ и $L_2(\Omega_2)$.*

Проведем доказательство для области $\Omega_1$, а для области $\Omega_2$ доказывается аналогично. Пусть $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ и предположим, что существует функция $F_1(x,y) \in L_2(\Omega_1)$ , такая, что

$$\iint\limits_{\Omega_0} F_0(x,y) u_{n,m}(x,y) dxdy = 0, \quad n,m \in N. \tag{24}$$

Покажем, что $F_1(x,y) = 0$ почти всюду в $\Omega_1$. Проводя замену переменных $\xi = x + y,\ \eta = x - y$ и учитывая (19), из (24) имеем

$$\int\limits_0^1 d\eta \int\limits_0^\eta f_1(\xi,\eta) \left(\frac{\xi}{\eta}\right)^{\mu_n/2} J_{\mu_n}\left(\alpha_m^{(\mu_n)}\sqrt{\xi\eta}\right) d\xi = 0, \qquad n,m = 1,2,...$$

где $f_1(\xi,\eta) = F_1(x,y)$.

Полагая во внутреннем интеграле $\xi = t\eta$, меняя порядок интегрирование, а затем выполнив замену $\eta s = r$, $t = s^2$, получим

$$\int\limits_0^1 J_{\mu_n}\left(\alpha_m^{(\mu_n)} r\right) r dr \int\limits_r^1 s^{\mu_n - 1} f_1\left(rs, \frac{r}{s}\right) ds = 0.$$

Отсюда следует, что для функции

$$F_n(r) = \int\limits_r^1 s^{\mu_n - 1} f_1\left(rs, \frac{r}{s}\right) ds, \quad 0 \le r \le 1, \ \ n \in N,$$

все коэффициенты ряда Дини равны нулю, поэтому из теоремы Юнга следует, что $F_n(r) = 0$ для всех $n \in N$ при каждом $r \in [0,1]$. Тогда в силу лемму 4 при каждом $r$ множество тех $s$, где $f_1(rs, r/s) \neq 0$ имеет меру нуль. Поэтому согласно теореме Фубини $f_1(rs, r/s) = 0$ почти всюду в $\Omega_1^* = \{(s,r) : r < s < 1,\ 0 < r < 1\}$, следовательно, в $\Omega_1$. Теорема доказано.

**Теорема 4.** *Если $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ , то система собственных функций (19) ((20)) задачи $A_\lambda^0$ не полна в $L_2(\Omega)$.*

Доказательство. В области $\Omega$ рассмотрим функцию

$$F(x,y) = \begin{cases} F_0(x,y), & (x,y) \in \Omega_0, \\ F_1(x,y), & (x,y) \in \Omega_1, \\ F_2(x,y), & (x,y) \in \Omega_2 \end{cases} \tag{25}$$

из $L_2(\Omega)$ и интеграл

$$P = \iint\limits_{\Omega} F(x,y) u_{n,m}(x,y)dxdy = \iint\limits_{\Omega_0} F_0(x,y) u_{n,m}(x,y)dxdy +$$

$$+ \iint\limits_{\Omega_1} F_1(x,y) u_{n,m}(x,y)dxdy + \iint\limits_{\Omega_2} F_2(x,y) u_{n,m}(x,y)dxdy. \tag{26}$$

Учитывая (19) и выполнив те же замены, что и в доказательстве теоремы 2 и 3 соответственно, имеем

$$P = \frac{c_{m,n}}{\sqrt{2}} \int\limits_0^1 J_{\mu_n}\left[\alpha_m^{(\mu_n)} r\right] r \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \int\limits_0^\pi f_0\left(r, \frac{\theta}{2}\right) Sin\left(\mu_n \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) d\theta + \right.$$

$$\left. + \int\limits_r^1 s^{\mu_n - 1} f_1\left(rs, \frac{r}{s}\right) ds + (-1)^n \int\limits_r^1 s^{\mu_n - 1} f_2\left(rs, \frac{r}{s}\right) ds \right] dr. \tag{27}$$

Следуя [3], рассмотрим функции

$$f_0\left(r, \frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(2k+1)(2k+2)} + \frac{(-1)^k}{(2k+3)(2k+4)} - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{r^{2k+1}}{2k+1} - \frac{r^{2k+2}}{2k+2}\right) + (-1)^k \left(\frac{r^{2k+3}}{2k+3} - \frac{r^{2k+4}}{2k+4}\right)\right] h_k(\theta), \tag{28}$$

$$f_1\left(rs, \frac{r}{s}\right) = -s^2(1-s), \qquad f_2\left(rs, \frac{r}{s}\right) = -s^4(1-s)$$

где $\{h_k(\theta)\}_{k=1}^\infty$ – система, биортогонально сопряженная к системе синусов $\{Sin\,[(\mu_n\theta/2 + \pi/4]\}_{k=1}^\infty$ :

$$h_n(\varphi) = \frac{2}{\pi} \frac{(2\cos\varphi/2)^{-1}}{(tg\varphi/2)^{1/2}} \sum_{k=1}^{n} (\sin k\varphi) B_{n-k},$$

$$B_l = \sum_{m=0}^{l} C_{1/2}^{l-m} C_{1/2}^{m} (-1)^{l-m}, \quad C_l^n = \frac{l(l-1)\cdots(l-n+1)}{n!}.$$

Поскольку $h_k(\varphi)$ равномерно ограничена по номеру [2], ряд (28) при любом $0 \le r \le 1,\ 0 \le \theta \le \pi$ равномерно сходится, и функция $f_0$ непрерывна в $\Omega_0$.

Подставляя функции $f_0,\ f_1,\ f_2$ в (27), получим что существует функция $F(x,y) \in L_2(\Omega)$ и $F(x,y) \neq 0$ в $\Omega$, такая, что интеграл $P = 0$ . Теорема доказана.

**4. Построение решения задачи $A_\lambda^0$.** Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда $\lambda \neq \alpha_m^{(\mu_n)}$ . Для этих значений $\lambda$ решения задачи $A_\lambda^0$ в области $\Omega_0$ ищем в виде суммы ряда

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \frac{J_{\mu_n}(\lambda r)}{\alpha J_{\mu_n}(\lambda) + \beta \lambda J'_{\mu_n}(\lambda)} Sin(\mu_n \varphi + \varphi_0). \tag{29}$$

Предположим, что ряд (29) допускает почленное двукратное дифференцирование по переменным $r$ и $\varphi$ на множестве $0 < r \le 1,\ \ 0 < \varphi < \pi$ . Тогда его сумма удовлетворяет уравнению (1). Удовлетворяя (29) граничному условию (4), получим

$$f(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n Sin(\mu_n \varphi + \varphi_0), \qquad 0 \le \varphi \le \pi/2. \tag{30}$$

Если функция $f(\varphi) \in C^\delta[0,\pi/2],\ \delta \in (0,1]$, то в силу результатов работы [2], ряд (30) сходится равномерно на $[0,\pi/2]$ и коэффициенты определяются равенствами

$$f_n = \int_0^\pi f\left(\frac{\theta}{2}\right) h_n(\theta) d\theta, \qquad n = 1, 2, .... \tag{31}$$

Так как $h_n(\theta)$ равномерно ограничены по номеру, то $|f_n| \le M$ , $n = 1, 2, \ldots$ , $M = const > 0$ . В силу формул

$$J_n(z) = \frac{1}{n!}\left(\frac{z}{2}\right)^n \quad \text{при}, \quad n \to \infty,$$

$$x J'_\nu(x) = \nu J_\nu(x) - x J_{\nu+1}(x)$$

ряд (29) при любом $r \le r_0 < 1$ сходится равномерно, так как при больших $n$ справедлива оценка

$$\left| f_n \frac{J_{\mu_n}(\lambda r) Sin(\mu_n \varphi + \varphi_0)}{\alpha J_{\mu_n}(\lambda r) + \beta \lambda J'_{\mu_n}(\lambda r)} \right| \le M_1 = const > 0.$$

Аналогично можно показать, что ряд (29), коэффициенты который определяются формулой (31), на $\Omega_0$ допускает двукратное дифференцирования по переменным $r$ и $\varphi$.

Пользуясь рядом (29), как и в пункте 3, имеем решение задачи $A^0_\lambda$ в области $\Omega_1$ и $\Omega_2$

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n}{\sqrt{2+4\gamma_1+4\gamma_1^2}}\left[(1+\gamma_1)\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{\mu_n/2}-\gamma_1\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^{\mu_n/2}\right]\times$$
$$\times\frac{J_{\mu_n}\left[\lambda\sqrt{x^2-y^2}\right]}{\alpha J_{\mu_n}(\lambda)+\beta\lambda J'_{\mu_n}(\lambda)} \quad \text{в } \Omega_1, \tag{32}$$

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n f_n}{\sqrt{2+4\gamma_2+4\gamma_2^2}}\left[(1+\gamma_2)\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{\mu_n/2}-\gamma_2\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^{\mu_n/2}\right]\times$$
$$\times\frac{J_{\mu_n}\left[\lambda\sqrt{y^2-x^2}\right]}{\alpha J_{\mu_n}(\lambda)+\beta\lambda J'_{\mu_n}(\lambda)} \quad \text{в } \Omega_2. \tag{33}$$

Нетрудно доказать, что ряд (32) в $\overline{\Omega}_1$ и ряд (33) в $\overline{\Omega}_2$ равномерно сходится, допускает двукратное дифференцирование по $x$ , $y$ в $\Omega_1$ , $\Omega_2$ и удовлетворяет условиям (5) и (6) соответственно.

Таким образом доказана следующая

**Теорема 5.** *Если* $\alpha\cdot\beta\geq 0$, $\gamma_j\geq -1/2$ $(j=1,2)$, $\mathrm{Re}\lambda=0$, $f(\varphi)\in C^\delta[0,\pi/2]$, $\delta\in(0,1]$, *то задача* $A^0_\lambda$ *имеет единственное решение, и оно представляется формулой*

$$u(x,y)=\begin{cases}\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n\frac{J_{\mu_n}(\lambda r)}{\alpha J_{\mu_n}(\lambda)+\beta\lambda J'_{\mu_n}(\lambda)}Sin(\mu_n\varphi+\varphi_0), & (x,y)\in\Omega_0,\\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{f_n}{\sqrt{2+4\gamma_1+4\gamma_1^2}}\left[(1+\gamma_1)\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{\mu_n/2}-\gamma_1\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^{\mu_n/2}\right]\times & \\ \quad\times\frac{J_{\mu_n}\left[\lambda\sqrt{x^2-y^2}\right]}{\alpha J_{\mu_n}(\lambda)+\beta\lambda J'_{\mu_n}(\lambda)}, & (x,y)\in\Omega_1,\\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n f_n}{\sqrt{2+4\gamma_2+4\gamma_2^2}}\left[(1+\gamma_2)\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{\mu_n/2}-\gamma_2\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^{\mu_n/2}\right]\times & \\ \quad\times\frac{J_{\mu_n}\left[\lambda\sqrt{y^2-x^2}\right]}{\alpha J_{\mu_n}(\lambda)+\beta\lambda J'_{\mu_n}(\lambda)}, & (x,y)\in\Omega_2.\end{cases}$$

**Литература.**

1. Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций. т. I, Изд. ИЛ. М. 1949. 798 с.

2. Моисеев Е.И. О базисности одной системы синусов // Дифференц. уравнения. 1987, т. 23, №1, с. 177-179.

3. Пономарев С.М. Спектральная теория основной краевой задачи для уравнения смешанного типа Лаврентьева-Бицадзе. Дисс. д-ра физ.-мат. Наук. М., 1981.

4. Сабитов К.Б., Карамова А.А. Спектральные свойства решений задачи Трикоми для уравнения смешанного типа с двумя линиями изменения типа и их применения. // Изв. АН, сер. "Математика", 2001, Т.65. №4, с. 133-150.

5. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М., Наука, 1966.

6. Тожибоев И. О некоторых задачах на собственные значения для уравнения смешанного типа с двумя линиями изменения типа. // Изв. вузов. Материалы международной научной конференции "Актуальные проблемы современной математической науки". Ош, 26 февраль 2005. с. 80-84.

Институт математики<br>им. В.И.Романовского АН РУз

Дата поступления<br>15.10.05

Uzbek Mathematical
Journal, 2005,№4, pp.72-86

УДК 517.96

# Нелокальная краевая задача для уравнения параболо-гиперболического типа с двумя перпендикулярными линиями и различными порядками вырождения

**Н.К.Очилова**

Maqolada turli xil tartibda ikkita perpendikulyar buzilish chizigiga ega bo‘lgan parabolik-giperbolik tipdagi tenglama uchun qo’yilgan nolokal chegaraviy masalaning echimini mavjudligi va yagonaligi isbotlangan.

In the paper, existence and uniqueness of the solution of the non-local boundary value problem are proved for the parabolic-hyperbolic equation with two perpendicular lines and different order of degeneration.

Рассмотрим уравнение

$$0=\begin{cases} y^{m_0}u_{xx}-x^{n_0}u_y & \text{в } D_0, \\ y^{m_1}u_{xx}-(-x)^{n_1}u_{yy} & \text{в } D_1, \\ -(-y)^{m_2}u_{xx}+x^{n_2}u_{yy} & \text{в } D_2, \end{cases} \tag{1}$$

где $m_j,\ n_j=const$, $j=0,1,2$, $D_0$ – область, ограниченная отрезками $AB$, $BB_0$, $B_0A_0$, $A_0A$ прямых $y=0$, $x=h_2$, $x=0$, $y=h_1$, соответственно при $x>0$, $y>0$ $D_1$ $(D_2)$ – характеристический треугольник, ограниченный отрезком $AA_0$ $(AB)$ оси $Oy$ $(Ox)$ и двумя характеристиками

$$AC_1:\ \frac{1}{p_1}y^{p_1}-\frac{1}{q_1}(-x)^{q_1}=0,\quad A_0C_1:\ \frac{1}{p_1}y^{p_1}+\frac{1}{q_1}(-x)^{q_1}=1$$

$$\left(AC_2:\ \frac{1}{q_2}x^{q_2}-\frac{1}{p_2}(-y)^{p_2}=0,\quad BC_2:\ \frac{1}{q_2}x^{q_2}+\frac{1}{p_2}(-y)^{p_2}=1\right)$$

уравнения (1) при $x<0$, $y>0$ $(x>0,\ y<0)$,
здесь $h_1=p_1^{1/p_1}$, $h_2=q_2^{1/q_2}$, $2q_1=n_1+2$, $2q_2=n_2+2$, $2p_1=m_1+2$, $2p_2=m_2+2$,
где

$$m_0>0, n_1>m_1>0,\ m_2>n_2>0, \tag{2}$$

причем
$$1)\ n_0 > n_1 \text{ при } m_0 = m_1 + 1, \qquad (3_1)$$

$$2)\ n_0 > \max\left\{\frac{n_2+2}{m_2+2}; \frac{m_0+1}{m_1+1}(n_1+2)-1\right\} - 1 \ \text{ при } \ m_0 \neq m_1 + 1. \quad (3_2)$$

Введем обозначения

$$I_1 = \{(x,y):\ x = 0,\ 0 < y < h_1\}, \quad I_2 = \{(x,y):\ 0 < x < h_2,\ y = 0\},$$

$$D = D_0 \cup D_1 \cup D_2 \cup I_1 \cup I_2,$$

$$\alpha_0 = \frac{n_0+1}{n_0+2},\ 2\alpha_1 = \frac{n_1}{n_1+2},\ 2\alpha_2 = \frac{n_2}{n_2+2},\ 2\beta_1 = \frac{m_1}{m_1+2},\ 2\beta_2 = \frac{m_2}{m_2+2},$$

причем

$$0 < \beta_1 < \alpha_1 < \frac{1}{2}, \quad 0 < \alpha_2 < \beta_2 < \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2} < \alpha_0 < 1, \qquad (4)$$

$$F_{0x}\left[\begin{array}{c} a, b \\ c, x^k \end{array}\right] f(x) = \frac{1}{\Gamma(c)} \int\limits_0^x f(t)(x^k - t^k)^{c-1} F\left(a, b, c; \frac{x^k - t^k}{x^k}\right) k t^{k-1} dt,$$

$$k > 0, \quad c > 0,$$

где $\Gamma(z)$ – гамма функция, $F(a,b,c;z)$ – гипергеометрическая функция Гаусса [1], $F_{0x}[\cdot]$ – известный оператор, введенный в [2], а

$$\theta_1(y) = -\left(\frac{y^{p_1}}{2}\frac{q_1}{p_1}\right)^{1/q_1} + i\left(\frac{y^{p_1}}{2}\right)^{1/p_1}, \qquad (5)$$

$$\theta_2(x) = \left(\frac{x^{q_2}}{2}\right)^{1/q_2} - i\left(\frac{p_2}{q_2}\frac{x^{q_2}}{2}\right)^{1/p_2} \qquad (6)$$

– аффиксы точек пересечения характеристик уравнения (1), выходящих из точек $(0,y) \in I_1$ и $(x,0) \in I_2$, с характеристиками $AC_1$ и $AC_2$, соответственно.

**Задача БС.** Найти в области $D$ функцию $u(x,y)$, обладающую следующими свойствами:

1) $u(x,y) \in C\left(\overline{D}\right) \cap C^{2;1}(D_0) \cap C^{2;2}(D_1 \cup D_2)$;

2) $u(x,y)$ удовлетворяет уравнению (1) в областях $D_0$, $D_1$ и $D_2$;

3) $u_x, u_y \in C(I_1)$, $u_x, y^{-m_0}u_y \in C(I_2)$, причем $u_y(+0,y)$ $(u_x(x,+0))$ может иметь особенность порядка меньше единицы при $y \to 0$ и $y \to 1$ $(x \to 0$ и $x \to 1)$, а $u_x(+0,y)$ $\left(\lim\limits_{y\to+0} y^{-m_0}u_y(x,y)\right)$ может иметь особенность порядка меньше $\dfrac{m_0+1}{n_0+2}$ $\left(\dfrac{1-2\beta_2}{1-2\alpha_2}\right)$ при $y \to 0$ $(x \to 0)$ и ограничена при $y \to 1$ $(x \to 1)$;

4) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям:

$$u|_{BB_0} = \varphi_0(y), \quad 0 \le y \le h_1, \tag{7}$$

$$\frac{d}{dy^{2p_1}}\left(y^{2p_1}\right)^{\frac{\alpha_1-\beta_1}{2}} F_{0y}\left[\begin{array}{cc} \beta_1-\alpha_1, & \beta_1-\alpha_1+1 \\ 1-\alpha_1, & y^{2p_1} \end{array}\right]\left(y^{2p_1}\right)^{\alpha_1+\beta_1-1} u[\theta_1(y)] =$$

$$= a_1(y)u(0,y) + b_1(y), \quad (0,y) \in \overline{I}_1; \tag{8}$$

$$\frac{d}{dx^{2q_2}}\left(x^{2q_2}\right)^{\frac{1-\alpha_2-\beta_2}{2}} F_{0x}\left[\begin{array}{cc} \dfrac{\alpha_2+\beta_2-1}{2}, & \dfrac{\alpha_2+\beta_2}{2} \\ \beta_2, & x^{2q_2} \end{array}\right]\left(x^{2q_2}\right)^{\frac{2\alpha_2-1}{2}} u[\theta_2(x)] =$$

$$= a_2(x)u_y(x,0) + b_2(x), \quad (x,0) \in I_2; \tag{9}$$

5) на линии параболического вырождения выполняются условия склеивания:

$$\lim_{y\to+0} y^{-m_0}u_y(x,y) = \lim_{y\to-0} u_y(x,y), \quad (x,0) \in I_2, \tag{10}$$

$$\lim_{x\to+0} u_x(x,y) = \lim_{x\to-0} u_x(x,y), \quad (0,y) \in I_1, \tag{11}$$

где $\varphi_0(y)$, $a_i(t)$, $b_i(t)$ $(i=1,2)$ – заданные непрерывные функции, причем

$$\varphi_0(y) \in C[0,h_1] \cap C^2(0,h_1), \tag{12}$$

$$a_1(y), b_1(y) \in C^1\left[0, p_1^{1/p_1}\right] \cap C^3\left(0, p_1^{1/p_1}\right), \tag{13}$$

$$a_2(x) \in C\left(\overline{I}_2\right) \cap C^2(I_2), \quad b_2(x) \in C^2(I_2), \tag{14}$$

причем $b_2(x)$ может иметь особенность порядка меньше $\dfrac{2-\alpha_2+\beta_2}{1-2\alpha_2}$ при $x \to 0$ и ограничена при $x \to h_2$.

Имеет место

**Теорема 1.** *Если выполнены условия* (4), $a_1(y) \ge 0$, $(0,y) \in I_1$,

$$\overline{a}_2(x) \equiv \left(x^{2q_2}\right)^{\frac{1-\alpha_2+\beta_2}{2}} a_2(x) + \gamma_2 > 0, \quad \forall (x,0) \in \overline{I}_2,$$

*то решение задачи БС в области $D$ единственно.*
*Здесь* $\gamma_2 = \dfrac{\Gamma(2-2\beta_2)}{\Gamma(1-\beta_2)} 2^{\alpha_2+3\beta_2-2}\left(\dfrac{p_2}{q_2}\right)^{1-2\beta_2}$.

Теорема 1 доказывается точно также, как в работе [3].

**Теорема 2.** *Если выполнены условия* $(3_1)$, $(3_2)$, (4), (12), (13), (14), *то решение задачи БС существует.*

Доказательство. Решение первой краевой задачи с условиями (7), $\tau_1^+(y) = u(+0,y)$, $(+0,y) \in \overline{I}_1$ и $\tau_2^+(x) = u(x,+0)$, $(x,+0) \in \overline{I}_2$ для уравнения (1) в области $D_0$ единственно и представимо в виде [4, с.4-13], [7]:

$$u(x,y) = \int\limits_0^{h_0} G(x,\xi,y;\alpha_0)\tau_2^+(\xi)\xi^{n_0}d\xi + y^{-m_0}\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_0^y G^{(1)}(x,y-t,\alpha_0)\tau_1^+(t)t^{m_0}dt +$$

$$+y^{-m_0}\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_0^y G^{(2)}(x,y-t;\alpha_0)\varphi_0(t)t^{m_0}dt, \qquad (15)$$

здесь

$$G^{(1)}(x,y;\alpha_0) = 1-(1-\alpha_0)^{2(1-\alpha_0)}x - \int\limits_0^{h_0} G_1(x,\xi,y;\alpha_0)\left[1-(1-\alpha_0)^{2(1-\alpha_0)}\xi\right]\xi^{n_0}d\xi,$$

$$G^{(2)}(x,y;\alpha_0) = (1-\alpha_0)^{2(1-\alpha_0)}x - \int\limits_0^{h_0} G_1(x,\xi,y;\alpha_0)(1-\alpha_0)^{2(1-\alpha_0)}\xi^{n_0}d\xi,$$

а $G_1(x,\xi,y;\alpha_0)$ – функция Грина первой краевой задачи для уравнения (1) в области $D_0$ и имеет вид [4], [7]:

$$G_1(x,\xi,y;\alpha_0) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\frac{\lambda_k^2 y^{m_0+1}}{4(m_0+1)}}(1-\alpha_0)\sqrt{x\xi}\,\cdot$$

$$\cdot\frac{J_{1-\alpha_0}\left(\lambda_k(1-\alpha_0)\left(\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{1-\alpha_0}}\right)J_{1-\alpha_0}\left(\lambda_k(1-\alpha_0)\left(\sqrt{\xi}\right)^{\frac{1}{1-\alpha_0}}\right)}{J_{2-\alpha_0}^2(\lambda_k)},$$

$J_\nu(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k\left(\dfrac{z}{k}\right)^{\nu+2k}}{k!\Gamma(k+\nu+1)}$ – функция Бесселя первого рода, $\lambda_k$ – положительные корни уравнения $J_{1-\alpha_0}(\lambda_k) = 0$, $k = 0,1,2,\ldots$.

Дифференцируя (15) по $x$ и переходя к пределу при $x \to 0$, получим функциональное соотношение между $\tau_1^+(y)$ и $\nu_1^+(y)$, принесенное на $I_1$ из области $D_0$ :

$$\nu_1^+(y) = y^{-m_0}\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_0^y z(y-t)\tau_1^+(t)t^{m_0}dt + F(y,\tau_2^+), \qquad (16)$$

где

$$F(y,\tau_2^+) = \lim_{x\to 0}\frac{\partial}{\partial x}\left\{\int\limits_0^{h_0} G_1(x,\xi,y;\alpha_0)\tau_2^+(\xi)\xi^{n_0}d\xi\right\} +$$

$$+y^{-m_0}\frac{\partial}{\partial y}\left\{\int\limits_0^y G^{(2)}(x,y-t;\alpha_0)\varphi_0(t)t^{m_0}dt\right\}, \tag{17}$$

$$z(y-t)\equiv(1-\alpha_0)^{2\alpha_0-1}\lim_{x\to 0}\frac{\partial}{\partial x}G^{(1)}(x,y-t;\alpha_0)=$$

$$=-(1-\alpha_0)-\sum_{k=0}^{\infty}e^{-\frac{\lambda_k^2\left(y^{m_0+1}-t^{m_0+1}\right)}{4(m_0+1)}}\cdot\frac{2^{2\alpha_0}\lambda_k^{-2\alpha_0}}{\Gamma^2(1-\alpha_0)J^2_{1-\alpha_0}\lambda_k}.$$

На основании свойств функции $J_\nu(z)$ функция $z(y-t)$ представима в виде [4, стр.12]:

$$z(y-t)=-\frac{1}{\Gamma(1-\alpha_0)}\left[\frac{y^{m_0+1}}{m_0+1}-\frac{t^{m_0+1}}{m_0+1}\right]^{\alpha_0-1}+B(y-t),$$

где $B(y-t)$ – непрерывно дифференцируемая функция при $y\geq t$.

Согласно условиям задачи БС, при $y\to+0$ из уравнения (1) получаем

$$\tau_2''^{+}(x)-x^{n_0}\nu_2^+(x)=0,\quad (x,+0)\in I_2, \tag{18}$$

$$\tau_2^+(0)=\tau_1^-(0),\quad \tau_2^+(h_2)=\varphi_0(0), \tag{19}$$

где $\tau_1^-(0)=u(0,0)$, $\nu_2^+(x)=\lim\limits_{y\to+0}y^{-m_0}u_y(x,y)$.

Решая задачу (18), (19), получим функциональное соотношение между $\tau_2^+(x)$ и $\nu_2^+(x)$, принесенное на $I_2$ из области $D_0$ :

$$\tau_2^+(x)=\int\limits_0^{h_2}G(x,t)t^{n_0}\nu_2^+(t)dt+f(x), \tag{20}$$

где

$$G(x,t)=\begin{cases} x-t, & 0\leq t\leq x,\\ \dfrac{x}{h_2}(x-h_2), & 0\leq t\leq h_2,\end{cases}$$

$$f(x)=\frac{\tau_1^-(0)+x(\varphi_0(0)-\tau_1^-(0))}{h_2}.$$

Решение задачи Коши для уравнения (1) в области $D_2$ с начальными данными $\tau_2^-(x)=u(x,-0)$, $(x,-0)\in\overline{I}_2$ и $\nu_2^-(x)=u_y(x,-0)$, $(x,-0)\in I_2$ дается формулой [5], [6]:

$$u(x,y)=\frac{\Gamma\left(\dfrac{1}{2}+\beta_2\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\beta_2)}2^{\beta_2-1}\left(\frac{1}{q_2}x^{q_2}\right)^{-\alpha_2}\int\limits_0^1\left[\frac{1}{q_2}x^{q_2}+\frac{1}{p_2}(-y)^{p_2}(2z-1)\right]^{\alpha_2}\cdot$$

$$\cdot[z(1-z)]^{\beta_2-1}\tau_2^-\left\{\left[x^{q_2}+\frac{p_2}{q_2}(-y)^{p_2}(2z-1)\right]^{1/q_2}\right\}\cdot$$

$$\cdot F(\alpha_2,1-\alpha_2,\beta_2;\rho_2)dz-\frac{\Gamma\left(\dfrac{3}{2}-\beta_2\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma(1-\beta_2)}(2p_2)^{1-2\beta_2}\left(\frac{1}{q_2}x^{q_2}\right)^{-\alpha_2}\cdot$$

$$\cdot\left[\frac{1}{p_2}(-y)^{p_2}\right]^{1-2\beta_2}\int\limits_0^1\left[\frac{1}{q_2}x^{q_2}+\frac{1}{p_2}(-y)^{p_2}(2z-1)\right]^{\alpha_2}[z(1-z)]^{-\beta_2}\cdot$$

$$\cdot\nu_2^-\left\{\left[x^{2q_2}+\frac{q_2}{p_2}(-y)^{p_2}(2z-1)\right]^{\frac{1}{q_2}}\right\}F(\alpha_2,1-\alpha_2,1-\beta_2,\rho_2)dz, \qquad (21)$$

где

$$\rho_2=\frac{q_2(-y)^{2p_2}z(1-z)}{p_2^2x^{q_2}\left[\dfrac{1}{q_2}x^{q_2}+\dfrac{1}{p_2}(-y)^{p_2}(2z-1)\right]}.$$

В силу (6) из (21) имеем

$$u[\theta_2(x)]=\gamma_1\left(x^{2q_2}\right)^{\frac{2-\alpha_2-3\beta_2}{2}}F_{0x}\left[\begin{array}{cc}\beta_2-\alpha_2, & \dfrac{\alpha_2+\beta_2-1}{2}\\ \beta_2, & x^{2q_2}\end{array}\right]\left(x^{2q_2}\right)^{\frac{\alpha_2+\beta_2-2}{2}}\tau_2^-(x)-$$

$$-\gamma_2\left(x^{2q_2}\right)^{\frac{\beta_2-\alpha_2}{2}}F_{0x}\left[\begin{array}{cc}\dfrac{1-\alpha_2-\beta_2}{2}, & \dfrac{\alpha_2-\beta_2}{2}\\ 1-\beta_2, & x^{2q_2}\end{array}\right]\left(x^{2q_2}\right)^{\frac{\alpha_2-\beta_2-1}{2}}\nu_2^-(x), \qquad (22)$$

где

$$\gamma_1=\frac{\Gamma(2\beta_2)}{\Gamma(\beta_2)}2^{\alpha_2-\beta_2},\quad \gamma_2=\frac{\Gamma(2-2\beta_2)}{\Gamma(1-\beta_2)}\left(\frac{p_2}{q_2}\right)^{1-2\beta_2}2^{\alpha_2+3\beta_2-2}.$$

Подставляя (22) в (9), получим соотношение между $\tau_2^-(x)$ и $\nu_2^-(x)$ на отрезке $I_2$, принесенное из области $D_2$ :

$$\overline{a}_2(x)\nu_2^-(x)=\gamma_1\left(x^{2q_2}\right)^{\frac{1-2\alpha_2}{2}}\frac{d}{dx^{2q_2}}\left(x^{2q_2}\right)^{\frac{1-2\beta_2}{2}}F_{0x}\left[\begin{array}{cc}\alpha_2+\beta_2, & \dfrac{2\beta_2-1}{2}\\ 2\beta_2, & x^{2q_2}\end{array}\right]\cdot$$

$$\cdot\left(x^{2q_2}\right)^{\frac{2\alpha_2-1}{2}}\tau_2^-(x)-\left(x^{2q_2}\right)^{\frac{1-\alpha_2+\beta_2}{2}}b_2(x). \qquad (23)$$

Используя решение задачи Коши [7] для уравнения (1) в области $D_1$, с учетом (5), точно также как в [7] получим функциональное соотношение между $\tau_1^-(y)$ и $\nu_1^-(y)$ на отрезке $I_1$, принесенное из области $D_1$ :

$$\overline{a}_1(y)\tau_1^-(y) = \gamma_4\left(y^{2p_1}\right)^{\alpha_1-\beta_1} F_{0y}\left[\begin{array}{ll}\beta_1-\alpha_1, & \dfrac{1-2\alpha_1}{2} \\ 1-2\alpha_1, & y^{2p_1}\end{array}\right]\left(y^{2p_1}\right)^{\frac{2\beta_1-1}{2}}\nu_1^-(y)-$$

$$-b_1(y)\left(y^{2p_1}\right)^{\frac{2-\alpha_1-\beta_1}{2}}, \quad (-0,y)\in\overline{I}_1. \tag{24}$$

где

$$\nu_1^-(y)=u_x(-0,y), \quad (0,y)\in I_1, \quad \overline{a}_1(y)\equiv\gamma_3-a_1(y)\left(y^{2p_1}\right)^{\frac{2-\alpha_1-\beta_1}{2}},$$

$$\gamma_3=\frac{\Gamma(2\alpha_1)}{\Gamma(\alpha_1)}2^{\beta_1-\alpha_1}, \qquad \gamma_4=\frac{\Gamma(1-2\alpha_1)}{\Gamma(1-\alpha_1)}\left(\frac{q_1}{p_1}\right)^{1-2\alpha_1}2^{\beta_1+3\alpha_1-2}.$$

Исключая $\tau_2^+(x)$ из соотношений (23) и (20) с учетом (10) и условия 1) задачи БС, получаем интегральное уравнение

$$\nu_2^-(x)-\int\limits_0^{h_2}K_2(x,z)\nu_2^-(z)dz=\Phi(x), \tag{25}$$

где

$$K_2(x,z)=\frac{\gamma_1 2q_2}{\Gamma(2\beta_2)}\left(x^{2q_2}\right)^{\frac{1-2\alpha_2}{2}}\frac{z^{n_0}}{\overline{a}_2(x)}\frac{d}{dx^{2q_2}}\left(x^{2q_2}\right)^{\frac{1-2\beta_2}{2}}\int\limits_0^x\left(x^{2q_2}-t^{2q_2}\right)^{2\beta_2-1}\cdot$$

$$\cdot\left(t^{2q_2}\right)^{\frac{2\alpha_2-1}{2}+\frac{2q_2-1}{2q_2}}F\left(\alpha_2+\beta_2,\frac{2\beta_2-1}{2},2\beta_2;\frac{x^{2q_2}-t^{2q_2}}{x^{2q_2}}\right)G(t,z)dt, \tag{26}$$

$$\Phi(x)=\frac{\gamma_1}{\Gamma(2\beta_2)}\frac{\left(x^{2q_2}\right)^{1-2\alpha_2}}{\overline{a}_2(x)}\frac{d}{dx^{2q_2}}\left(x^{2q_2}\right)^{\frac{1-2\beta_2}{2}}\int\limits_0^x\left(x^{2q_2}-t^{2q_2}\right)^{2\beta_2-1}\cdot$$

$$\cdot\left(t^{2q_2}\right)^{\frac{2\alpha_2-1}{2}}f(x,\tau_1^-(0))-\left(x^{2q_2}\right)^{\frac{1-\alpha_2+\beta_2}{2}}b_2(x). \tag{27}$$

Выполнив замену $z=\left(q_2^2\sigma\right)^{1/2q_2}$, $x=(q_2^2x_1)^{1/2q_2}$, и поменяя $x_1$ на $x$ из (25) имеем:

$$\widetilde{\nu}_2^-(x)-\int\limits_0^1\widetilde{K}_2(x,\sigma)\widetilde{\nu}_2^-(\sigma)d\sigma=\widetilde{\Phi}(x), \tag{28}$$

где

$$\widetilde{K}_2(x,\sigma)=\frac{1}{2}q_2^{1/2q_2}\sigma^{\frac{1}{2q_2}-1}K_2\left[\left(q_2^2x_1\right)^{1/2q_2},\left(q_2^2\sigma\right)^{1/2q_2}\right], \tag{29}$$

$$\widetilde{\Phi}(x)=\Phi\left[\left(q_2^2x_1\right)^{1/2q_2}\right], \tag{30}$$

$$\widetilde{\nu}_2^-(x)=\nu_2^-\left[\left(q_2^2x_1\right)^{1/2q_2}\right],\quad \widetilde{b}_2(x)=b_2\left[\left(q_2^2x_1\right)^{1/2q_2}\right].$$

В силу $(3_1)$, $(3_2)$, (4), (12)-(14), из (29) и (30) с учетом (26) и (27) получим оценки

$$\left|\widetilde{K}_2(x,\sigma)\right|\leq c_1\sigma^{\frac{n_0-n_2-1}{n_2+2}}x^{\frac{2\beta_2-1}{2}} \tag{31}$$

и

$$\left|\widetilde{\Phi}(x)\right|\leq c_2x^{\beta_2-\frac{1}{2}}.$$

Таким образом, в силу (31), с учетом $(3_1)$, $(3_2)$, (4), заключаем, что интегральное уравнение (28) является интегральным уравнением Фредгольма второго рода со слабой особенностью, разрешимость которого следует из единственности решения задачи БС, и решение принадлежит классу: $\widetilde{\nu}_2^-(x)\in C^2(0,1)$, причем $\widetilde{\nu}_2^-(x)$ может иметь особенность порядка меньше $\dfrac{1-2\beta_2}{2}$ при $x\to 0$, а при $x\to 1$ ограничено.

После определения $\widetilde{\nu}_2^-(x)$, с учетом (10), из (20) находим

$$\tau_2^+(x)=\int\limits_0^{h_2}z^{n_0}G(x,t)\Psi(t)dt+f(x,\tau_1^-(0)), \tag{32}$$

где

$$\Psi(t)=\Phi(t)+\int\limits_0^{h_2}\Phi(z)R(t,z)dz,$$

а $R(t,z)$ – резольвента $K_2(x,\sigma)$, здесь $K_2(x,\sigma)$ – определяется из (26).

В силу (12)-(14), (27) и с учетом вид функции $G(x,t)$, $f(x,\tau_1^-(0))$ из (32) следует, что

$$\tau_2^+(x)\in C[0,h_2]\cap C^2(0,h_2). \tag{33}$$

Заменяя $y$ на $\left(p_1^{\frac{2p_0-1}{p_1}}y\right)^{\frac{1}{2p_0-1}}$ в (24), (16), получим

$$\tau_1^-\left[\left(p_1^{\frac{2p_0-1}{p_1}}y\right)^{\frac{1}{2p_0-1}}\right]=\frac{\gamma_4p_1^{1-2\alpha_1}\left(y^{\frac{2p_1}{2p_0-1}}\right)^{\alpha_1-\beta_1}}{\overline{a}_1\left[\left(p_1^{\frac{2p_0-1}{p_1}}y\right)^{\frac{1}{2p_0-1}}\right]}\cdot F_{0y}\left[\begin{matrix}\beta_1-\alpha_1, & \dfrac{1-2\alpha_1}{2}\\ 1-2\alpha_1, & y^{\frac{2p_1}{2p_0-1}}\end{matrix}\right]\cdot$$

$$\cdot\left(y^{\frac{2p_1}{2p_0-1}}\right)^{\frac{2\beta_1-1}{2}}\nu_1^-\left[\left(p_1^{\frac{2p_0-1}{p_1}}y\right)^{\frac{1}{2p_0-1}}\right]-\frac{b_1\left[\left(p_1^{\frac{2p_0-1}{p_1}}y\right)^{\frac{1}{2p_0-1}}\right]\left(y^{\frac{2p_1}{2p_0-1}}\right)^{\frac{2-\alpha_1-\beta_1}{2}}}{p_1^{\alpha_1+\beta_1-2}\overline{a}_1\left[\left(p_1^{\frac{2p_0-1}{p_1}}y\right)^{\frac{1}{2p_0-1}}\right]}, \tag{34}$$

$$\nu_1^+\left[\left(p_1^{\frac{2p_0-1}{p_1}}y\right)^{\frac{1}{2p_0-1}}\right]=\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_0^y \widetilde{z}(y-t)\tau_1^+\left[\left(p_1^{\frac{2p_0-1}{p_1}}y\right)^{\frac{1}{2p_0-1}}\right]dt+$$

$$+F\left[\left(p_1^{\frac{2p_0-1}{p_1}}y\right)^{\frac{1}{2p_0-1}},\tau_2^+(x)\right], \qquad (35)$$

где

$$\widetilde{z}(y-t)=-\frac{1}{\Gamma(1-\alpha_0)}\left(\frac{h_1^{m_0+1}}{m_0+1}\right)^{\alpha_0-1}(y-t)^{\alpha_0-1}+B\left[h_1\left(y^{\frac{1}{2p_0-1}}-t^{\frac{1}{2p_0-1}}\right)\right].$$

Рассмотрим следующие случаи:

**I.** Пусть $m_0>m_1+1$ (т.е. $2p_0-1>2p_1$). Тогда, исключив $\nu_1^+\left[\left(p_1^{\frac{2p_0-1}{p_1}}y\right)^{\frac{1}{2p_0-1}}\right]$, с учетом (11) и условия 1) задачи БС, из соотношений (34), (35) имеем:

$$\overline{\tau}_1^-(y)=\gamma_2 p_1^{1-2\alpha_1}\frac{\left(y^{\frac{2p_1}{2p_0-1}}\right)^{\alpha_1-\beta_1}}{\overline{\overline{a}}_1(y)}\left\{-\frac{1}{\Gamma(1-\alpha_0)}\left(\frac{h_1^{m_0+1}}{m_0+1}\right)^{\alpha_0-1}\cdot\right.$$

$$\cdot F_{0y}\left[\begin{array}{cc}\beta_1-\alpha_1, & \frac{1-2\alpha_1}{2}\\ 1-2\alpha_1, & y^{\frac{2p_1}{2p_0-1}}\end{array}\right]\left(y^{\frac{2p_1}{2p_0-1}}\right)^{\frac{2\beta_1-1}{2}}\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_0^y(y-t)^{\alpha_0-1}\overline{\tau}_1^-(t)dt+$$

$$\left.+F_{0y}\left[\begin{array}{cc}\beta_1-\alpha_1, & \frac{1-2\alpha_1}{2}\\ 1-2\alpha_1, & y^{\frac{2p_1}{2p_0-1}}\end{array}\right]\left(y^{\frac{2p_1}{2p_0-1}}\right)^{\frac{2\beta_1-1}{2}}\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_0^y\widetilde{B}(y-t)\overline{\tau}_1^-(t)dt\right\}+$$

$$+\overline{f}_1(y), \qquad (36)$$

где

$$\overline{\tau}_1^-(y)\equiv\tau_1^-\left[\left(p_1^{\frac{2p_0-1}{p_1}}y\right)^{\frac{1}{2p_0-1}}\right],\quad \overline{\overline{a}}_1(y)=\overline{a}_1\left[\left(p_1^{\frac{2p_0-1}{p_1}}y\right)^{\frac{1}{2p_0-1}}\right],$$

$$\overline{f}_1(y)=f_1\left[\left(p_1^{\frac{2p_0-1}{p_1}}y\right)^{\frac{1}{2p_0-1}}\right]=\gamma_2 p_1^{1-2\alpha_1}\frac{\left(y^{\frac{2p_1}{2p_0-1}}\right)^{\alpha_1-\beta_1}}{\overline{\overline{a}}_1(y)}\cdot$$

$$\cdot F_{0y}\left[\begin{array}{cc}\beta_1-\alpha_1, & \frac{1-2\alpha_1}{2}\\ 1-2\alpha_1, & y^{\frac{2p_1}{2p_0-1}}\end{array}\right]\left(y^{\frac{2p_1}{2p_0-1}}\right)^{\frac{2\beta_1-1}{2}}\overline{F}(y,\tau_2^+)+\frac{\overline{b}_1(y)}{\overline{\overline{a}}_1(y)}\left(y^{\frac{2p_1}{2p_0-1}}\right)^{\frac{2-\alpha_1-\beta_1}{2}},$$

$$(37)$$

здесь

$$\overline{F}(y,\tau_2^+)\equiv F\left[\left(p_1^{\frac{2p_0-1}{p_1}}y\right)^{\frac{1}{2p_0-1}};\tau_2^+(x)\right],$$

$$\bar{b}_1(y)\equiv b_1\left[\left(p_1^{\frac{2p_0-1}{p_1}}y\right)^{\frac{1}{2p_0-1}}\right]p_1^{2-\alpha_1-\beta_1},$$

а $F(y,\tau_2^+)$ определяется из (17).

Интегрируя по частям с учетом $\tau_1^-(0)=0$ (это, следует из (34) с учетом условия 3) задачи БС) в первом и втором внутреннем интеграле уравнения (36), а затем меняя порядок интегрирования, получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$\overline{\tau}_1^-(y)=\int\limits_0^y K_1(y,t)\overline{\tau}_1^-(t)dt+\overline{f}_1(y),\quad 0\le y\le h_1, \tag{38}$$

где

$$K_1(y,t)=K_{11}(y,t)+K_{12}(y,t), \tag{39}$$

$$K_{11}(y,t)=\gamma_5\frac{\left(y^{\frac{2p_1}{2p_0-1}}\right)^{\alpha_1-\beta_1}}{\overline{a}_1(y)}\;\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_t^y \xi^{\frac{2p_1}{2p_0-1}\left(\beta_1+\frac{1}{2}\right)-1}\left(y^{\frac{2p_1}{2p_0-1}}-\xi^{\frac{2p_1}{2p_0-1}}\right)^{-2\alpha_1}\cdot$$

$$\cdot F\left(\beta_1-\alpha_1,\frac{1-2\alpha_1}{2},1-2\alpha_1;1-\left(\frac{\xi}{y}\right)^{\frac{2p_1}{2p_0-1}}\right)(\xi-t)^{\alpha_0-1}d\xi, \tag{40}$$

$$K_{12}(y,t)=\gamma_6\frac{\left(y^{\frac{2p_1}{2p_0-1}}\right)^{\alpha_1-\beta_1}}{\overline{a}_1(y)}\left\{\int\limits_t^y \xi^{\frac{2p_1}{2p_0-1}\left(\beta_1+\frac{1}{2}\right)-1}\left(y^{\frac{2p_1}{2p_0-1}}-\xi^{\frac{2p_1}{2p_0-1}}\right)^{-2\alpha_1}\cdot\right.$$

$$\cdot F\left(\beta_1-\alpha_1,\frac{1-2\alpha_1}{2},1-2\alpha_1;1-\left(\frac{\xi}{y}\right)^{\frac{2p_1}{2p_0-1}}\right)\widetilde{B}'(\xi-t)d\xi+$$

$$+\widetilde{B}(0)\cdot t^{\frac{2p_1}{2p_0-1}\left(\beta_1+\frac{1}{2}\right)-1}\left(y^{\frac{2p_1}{2p_0-1}}-t^{\frac{2p_1}{2p_0-1}}\right)^{-2\alpha_1}\cdot$$

$$\left.\cdot F\left(\beta_1-\alpha_1,\frac{1-2\alpha_1}{2},1-2\alpha_1;\,1-\left(\frac{t}{y}\right)^{\frac{2p_1}{2p_0-1}}\right)\right\}, \tag{41}$$

$$\gamma_5=\frac{\gamma_6}{\Gamma(1-\alpha_0)}\left(\frac{h_1^{m_0+1}}{m_0+1}\right)^{\alpha_0-1},\quad \gamma_6=\frac{2\gamma_2}{2p_0-1}p_1^{2-2\alpha_1}.$$

Исследуем ядро интегрального уравнения (38). Из (39) следует, что нам достаточно оценить первое слагаемое ядра $K_1(y,t)$.

С этой целью, заменив $\xi$ на $y\xi$, из (40) получим

$$K_{11}(y,t) = -\frac{\gamma_5}{\overline{a}_1(y)} y^{\frac{2p_1}{2p_0-1}\left(\frac{1}{2}-\alpha_1\right)+\alpha_0} t^{-2} \frac{d}{d\mu} K(\mu), \tag{42}$$

где

$$K(\mu) = \mu^{1-\alpha_0} \int\limits_0^\infty \eta^{\frac{2p_1}{2p_0-1}\left(\beta_1+\frac{1}{2}\right)-1} f_1(\mu\eta) f_2(\eta) d\eta, \tag{43}$$

$$f_1(\eta) = (\eta-1)_+^{\alpha_0-1}, \quad \mu = \frac{y}{z}, \quad z_+^l = \begin{cases} z^l, & z>0, \\ 0, & z<0. \end{cases}$$

$$f_2(\eta) = \left(1-\eta^{\frac{2p_1}{2p_0-1}}\right)_+^{-2\alpha_1} F\left(\beta_1-\alpha_1, \frac{1-2\alpha_1}{2}, 1-2\alpha_1; 1-\eta^{\frac{2p_1}{2p_0-1}}\right).$$

Воспользовавшись формулами ([8], стр.630 (6), стр.631 (4)), имеем

$$f_1(s) \longleftrightarrow \Gamma(\alpha_1)\Gamma\left[\begin{array}{c} 1-\alpha_1-s \\ 1-s \end{array}\right], \quad s<1-\alpha_1, \tag{44}$$

$$f_2(s) \longleftrightarrow \frac{2p_0-1}{2p_1}\,\Gamma(1-2\alpha_1)\cdot$$

$$\cdot\,\Gamma\left[\begin{array}{cc} \frac{2p_0-1}{2p_1}s, & \frac{1-2\beta_1}{2}+\frac{2p_0-1}{2p_1}s \\ 1-\alpha_1-\beta_1+\frac{2p_0-1}{2p_1}s, & \frac{1-2\alpha_1}{2}+\frac{2p_0-1}{2p_1}s \end{array}\right], \quad s>0. \tag{45}$$

Далее, применив формулу

$$x^\alpha \int\limits_0^\infty \xi^\beta g_1(x\xi) g_2(\xi) d\xi \longleftrightarrow g_1^*(z+\alpha) g_2^*(1-z-\alpha+\beta),$$

в (43) с учетом (44), (45) получаем

$$K(\mu) \longleftrightarrow \Gamma(\alpha_1)\,\Gamma(1-2\alpha_1)\,\frac{2p_0-1}{2p_1}\,\cdot$$

$$\cdot\Gamma\left[\begin{array}{cc} -s, & \frac{2\beta_1+1}{2}-\frac{2p_0-1}{2p_1}(1-\alpha_0)-\frac{2p_0-1}{2p_1}s, \\ \alpha_0-s, & \frac{3-2\alpha_1}{2}-\frac{2p_0-1}{2p_1}(1-\alpha_0)-\frac{2p_0-1}{2p_1}s, \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{c} 1-\frac{2p_0-1}{2p_1}(1-\alpha_0)-\frac{2p_0-1}{2p_1}s \\ 1-\alpha_1+\beta_1-\frac{2p_0-1}{2p_1}(1-\alpha_1)-\frac{2p_0-1}{2p_1}s, \end{array}\right], \quad s<0.$$

Отсюда, учитывая ([8], стр.628 (8.3.1)), находим

$$K(\mu)=\frac{2p_1}{2p_0-1}\;\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(1-2\alpha_1)}\cdot$$

$$\cdot\, H^{03}_{33}\left[\mu\left|\begin{array}{ll}(1,1), & \left(\dfrac{1-2\beta_1}{2}+\dfrac{2p_0-1}{2p_1}(1-\alpha_0),\dfrac{2p_0-1}{2p_1}\right),\\ (1-\alpha_0,1), & \left(\dfrac{2\alpha_1-1}{2}+\dfrac{2p_0-1}{2p_1}(1-\alpha_0),\dfrac{2p_0-1}{2p_1}\right),\end{array}\right.\right.$$

$$\left.\begin{array}{c}\left((1-\alpha_0)\dfrac{2p_0-1}{2p_1},\dfrac{2p_0-1}{2p_1}\right)\\ \left(\alpha_1-\beta_1+\dfrac{2p_0-1}{2p_1}(1-\alpha_0),\dfrac{2p_0-1}{2p_1}\right)\end{array}\right] \tag{46}$$

где $H^{03}_{33}$ – функция Фокса [8].

Подставляя (46) в (42) и используя формулу ([8], стр.629 (18)), получим

$$K_{11}(y,t)=-\frac{2p_1}{2p_0-1}\;\frac{\gamma_5}{\Gamma(\alpha_0)\Gamma(1-2\alpha_1)\overline{a}_1(y)}y^{\frac{2p_1}{2p_0-1}\left(\frac{1}{2}-\alpha_1\right)+\alpha_0-1}t^{-1}\cdot$$

$$\cdot\, H^{04}_{44}\left[\mu\left|\begin{array}{ll}(0,1),\ (1,1), & \left(\dfrac{1-2\beta_1}{2}+\dfrac{2p_0-1}{2p_1}(1-\alpha_0),\dfrac{2p_0-1}{2p_1}\right),\\ (1-\alpha_0,1), & \left(\dfrac{2\alpha_1-1}{2}+\dfrac{2p_0-1}{2p_1}(1-\alpha_0),\dfrac{2p_0-1}{2p_1}\right),\end{array}\right.\right.$$

$$\left.\begin{array}{c}\left(\dfrac{2p_0-1}{2p_1}(1-\alpha_0),\dfrac{2p_0-1}{2p_1}\right)\\ \left(\alpha_1-\beta_1+\dfrac{2p_0-1}{2p_1}(1-\alpha_0),\dfrac{2p_0-1}{2p_1}\right),\ (1,1)\end{array}\right].$$

Отсюда в силу формулы ([8], стр.629 (22)) имеем

$$K_{11}(y,t)=-\left(\frac{2p_1}{2p_0-1}\right)^{2\alpha_1}\frac{\gamma_5 k^{2\alpha_1-\alpha_0+1}}{\Gamma(\alpha_0)\Gamma(1-2\alpha_1)\overline{a}_1(y)}\cdot y^{\frac{2p_1}{2p_0-1}\left(\frac{1}{2}-\alpha_1\right)+\alpha_0-1}t^{-1}\cdot$$

$$\cdot\, G^{\widetilde{m}\widetilde{n}}_{\widetilde{p}\,\widetilde{q}}\left(\mu^k\left|\begin{array}{cccc}\Delta(k_1,a_1), & \Delta(k_2,a_2), & \Delta(k_3,a_3), & \Delta(k_4,a_4)\\ \Delta(l_1,b_1), & \Delta(l_2,b_2), & \Delta(l_3,b_3), & \Delta(l_4,b_4)\end{array}\right.\right), \tag{47}$$

где $G^{\widetilde{m}\widetilde{n}}_{\widetilde{p}\,\widetilde{q}}$ – функция Мейера [8], а $k$ – знаменатель числа $\dfrac{2p_0-1}{2p_1}$,

$\widetilde{n}=\widetilde{p}=\widetilde{q}=2k+2k\dfrac{2p_0-1}{2p_1}$, $\widetilde{m}=0$,

$$\Delta(k_1,a_1)=0,\ \frac{1}{k},\ \ldots,\ \frac{k-1}{k},\quad \Delta(k_2,a_2)=\frac{1}{k},\ \frac{2}{k},\ \ldots,\ \frac{1+k-1}{k},$$

$$\Delta(k_3,a_3)=\frac{\frac{1-2\beta_1}{2}+\frac{2p_0-1}{2p_1}(1-\alpha_1)}{\frac{2p_0-1}{2p_1}k},\ \ldots,\ \frac{\frac{1-2\beta_1}{2}+\frac{2p_0-1}{2p_1}(1-\alpha_0)+\frac{2p_0-1}{2p_1}+k-1}{\frac{2p_0-1}{2p_1}k},$$

$$\Delta(k_4,a_4)=\frac{\frac{2p_0-1}{2p_1}(1-\alpha_0)}{\frac{2p_0-1}{2p_1}k},\ \ldots,\ \frac{\frac{2p_0-1}{2p_1}(1-\alpha_0)+\frac{2p_0-1}{2p_1}k-1}{\frac{2p_0-1}{2p_1}k},$$

$$\Delta(l_1,b_1)=\frac{1-\alpha_0}{k},\ \frac{2-\alpha_0}{k},\ \ldots,\ \frac{1-\alpha_0+k-1}{k},$$

$$\Delta(l_2,b_2)=\frac{\frac{2\alpha_1-1}{2}+\frac{2p_0-1}{2p_1}(1-\alpha_0)}{\frac{2p_0-1}{2p_1}k},\ldots,\frac{\frac{2\alpha_1-1}{2}+\frac{2p_0-1}{2p_1}(1-\alpha_0)+\frac{2p_0-1}{2p_1}k-1}{\frac{2p_0-1}{2p_1}k},$$

$$\Delta(l_3,b_3)=\frac{\alpha_1-\beta_1+\frac{2p_0-1}{2p_1}(1-\alpha_0)}{\frac{2p_0-1}{2p_1}k},\ldots,\frac{\alpha_1-\beta_1+\frac{2p_0-1}{2p_1}(1-\alpha_0)+\frac{2p_0-1}{2p_1}k-1}{\frac{2p_0-1}{2p_1}k},$$

$$\Delta(l_4,b_4)=\frac{1}{k},\ \frac{2}{k},\ \ldots,\ \frac{1+k-1}{k}.$$

1) Если $\frac{2p_0-1}{2p_1}$ – дробное число, то используя оценки функции Мейера ([9] стр. 204), с учетом $\widetilde{m}+\widetilde{n}-\widetilde{q}=0$ и $\psi_q=\alpha_0-2\alpha_1-1<0$, из (47) имеем

$$|K_{11}(y,t)|\ \le c_1y^{\frac{2p_1}{2p_0-1}\left(\frac{1}{2}-\alpha_1\right)+\alpha_0-1}t^{k(1-\alpha_0+2\alpha_1)-1}(y^k-t^k)^{\alpha_0-2\alpha_1-1}. \quad (48)$$

Точно также оценивая $K_{12}(y,t)$, имеем

$$|K_{12}(y,t)|\le c_2y^{\frac{2p_1}{2p_0-1}(\alpha_1-\beta_1)}t^{\frac{2p_1}{2p_0-1}\left(\beta_1+\frac{1}{2}\right)-1}\left(y^{\frac{2p_1}{2p_0-1}}-t^{\frac{2p_1}{2p_0-1}}\right)^{-2\alpha_1}. \quad (49)$$

В силу (48), (49), из (39) получим

$$|K_1(y,t)|\ \le c_1y^{\frac{2p_1}{2p_0-1}\left(\frac{1}{2}-\alpha_1\right)+\alpha_0-1}t^{k(1-\alpha_0+2\alpha_1)-1}(y^k-t^k)^{\alpha_0-2\alpha_1-1}+$$
$$+c_2y^{\frac{2p_1}{2p_0-1}(\alpha_1-\beta_1)}t^{\frac{2p_1}{2p_0-1}\left(\beta_1+\frac{1}{2}\right)-1}\left(y^{\frac{2p_1}{2p_0-1}}-t^{\frac{2p_1}{2p_0-1}}\right)^{-2\alpha_1}. \quad (50)$$

2) Если $\frac{2p_0-1}{2p_1}$ – натуральное число, то из (39) с учетом (41), (47) имеем

$$|K_1(y,t)|\ \le c_1y^{\frac{2p_1}{2p_0-1}\left(\frac{1}{2}-\alpha_1\right)+\alpha_0-1}t^{2\alpha_1-\alpha_0}(y-t)^{\alpha_0-2\alpha_1-1}+$$
$$+c_2y^{\frac{2p_1}{2p_0-1}(\alpha_1-\beta_1)}t^{\frac{2p_1}{2p_0-1}\left(\beta_1+\frac{1}{2}\right)-1}\left(y^{\frac{2p_1}{2p_0-1}}-t^{\frac{2p_1}{2p_0-1}}\right)^{-2\alpha_1}. \quad (51)$$

Так как $-1<\dfrac{2p_1}{2p_0-1}\left(\dfrac{1}{2}-\alpha_1\right)+\alpha_0-2<0$, то из оценок (50), (51) с учетом ($3_2$), (4) следует, что ядро $K_1(y,t)$ (см. (39)) имеет слабую особенность.

Принимая во внимание (12), (33), из (17) следует, что $\overline{F}(y,\tau_2^+) \in C^2(0,1)$, причем функция $\overline{F}(y,\tau_2^+)$ может иметь особенность порядка меньше $1-\alpha_0$ при $y\to 0$, а при $y \to 1$ ограничена.

Отсюда учитывая (13), $(3_1)$, $(3_2)$, (4), из (37) имеем

$$\left|\overline{f}_1(y)\right| \leq c_3 y^{\frac{2p_1}{2p_0-1}\left(\frac{1}{2}-\alpha_1\right)+\alpha_0-1}.$$

Следовательно, $\overline{f}_1(y) \in C[0,1]\cap C^2(0,1)$.

Таким образом, из (50) и (51) заключаем, что интегральное уравнение (38) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода со слабой особенностью, и его однозначная разрешимость следует из теории интегральных уравнений Вольтерра второго рода [10].

Отсюда, учитывая однозначную разрешимость уравнения (28), заключаем, что задача БС однозначна разрешима при $m_0 > m_1+1$.

**II.** Пусть $m_0 < m_1+1$ (т.е. $2p_0-1 < 2p_1$). Тогда, исключив $\tau_1^-(y)$ из соотношений (34), (35), получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$\overline{\nu}_1^+(y) = \int\limits_0^y K_2(y,z)\overline{\nu}_1^+(z)dz + \overline{f}_2(z). \tag{52}$$

Аналогичным методом как в пункте I можно доказать, что ядро $K_2(y,z)$ правая часть $\overline{f}_2(y)$ допускают оценки:

$$\begin{aligned}|K_2(y,z)| \ &\leq c_1 z^{\gamma\left(\frac{3}{2}+\alpha_1-\alpha_0\right)+\alpha_0-2}(y^\gamma - z^\gamma)^{\alpha_0-2\alpha_1-1}+\\ &+c_2 z^{\gamma\left(\beta_1+\frac{1}{2}\right)-1}(y^\gamma-z^\gamma)^{-2\alpha_1} y^{\gamma(\alpha_1-\beta_1)}\end{aligned} \tag{53}$$

и

$$\left|\overline{f}_2(y)\right| \leq c_3 y^{\alpha_0-1}, \text{ здесь } \gamma = \frac{2p_1}{2p_0-1}.$$

Следовательно, из теории интегральных уравнений Вольтерра второго рода [10] следует, что уравнение (52) имеет единственное решение, которое принадлежит классу: $\overline{\nu}_1^+(y) \in C^2(0,1)$, причем $\overline{\nu}_1^+(y)$ допускает особенность порядка меньше $1-\alpha_0$ при $y \to 0$, а при $y\to 1$ ограничено.

Отсюда с учетом однозначной разрешимости уравнения (28) заключаем, что задача БС однозначно разрешима при $m_0 < m_1+1$.

Нетрудно доказать однозначную разрешимость задачи БС при $m_0 = m_1+1$.

После нахождения $\tau_1^{\mp}(y)$, $\left[\nu_2^{\pm}(x)\right]$ из (34) и (35) [из (20) и (23)] находим $\nu_1^{\pm}(y) \in C^2(I_1)$, $\left[\tau_2^{\pm}(x) \in C\left(\overline{I}_2\right)\cap C^2(I_2)\right]$.

Следовательно, решение задачи БС в области $D_0$ находится как решение первой краевой задачи (15), а в областях $D_2$ и $D_1$ – как решение задачи Коши (21) и [7], соответственно. Теорема 2 доказана.

**Литература**

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, Т.1, 1965, 296 с.

2. Салахитдинов М.С., Хасанов А. – Дифференциальные уравнения. 1983. Т.19, № 1, с.110-119.

3. Исломов Б., Очилова Н. О единственности решения нелокальной задачи для уравнения параболо-гиперболического типа с двумя внутренними линиями и различными порядками вырождения. – Труды меж. конф. "Современные проблемы математической физики и информационных технологий". Т.1, с.280-284.

4. Терсенов С.А. Первая краевая задача для уравнения параболического типа с меняющимся направлением времени. Новосибирск, 1978. 53 с.

5. Гордеев А.М. Некоторые краевые задачи для обобщенного уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу. – Волжский математический сборник. 1968, Вып. 6, с.56-61.

6. Пестун Л.В. Решение задачи Коши для уравнения $y^{\beta}u_{xx} - x^{\alpha}u_{yy} = 0$. – Волжский математический сборник. 1965, Вып. 3, с.289-295.

7. Акбарова С.Х. Аналоги задачи Трикоми для уравнения параболо-гиперболического типа с двумя линиями и различными порядками вырождения. – ДАН РУз, 1991, № 11, с.3-5.

8. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Дополнительные главы. М.: Наука, 1986.

9. Исломов Б. К теории уравнений смешанного типа с двумя линиями и различными порядками вырождения. – Дис. на соиск. уч. ст. д-ра физ.-мат. наук. Ташкент, ин-т математики им. В.И. Романовского, 1999. 227 с.

10. Михлин С.Г. Интегральные уравнения. М.-Л.: ГИТЛ, 1947. 304 с.

Институт математики
им. В.И.Романовского АН РУз

Дата поступления
10.09.05

Uzbek Mathematical
Journal, 2005,№4, pp.87-93

УДК 519.6

# Дифференциалные игры сближения со многими преследующими в плоскости Лобачевского

**Б.Б.Рихсиев, А.Ш.Кучкаров**

Lobachevskiy tekisligida oddiy harakatli koʻp quvlovchilar bilan yaqinlashish masalasi oʻrganiladi. Ishning birinchi qismida tutish masalasi (ya'ni oʻyinning toʻlovi kamida bitta quvlovchining holati qochuvchining holati bilan ustma-ust tushish vaqtiga teng) qaralgan. Ikkinchi qismida esa oʻyinning toʻlovi fiksirlangan momentda qochuvchi bilan unga eng yaqin boʻlgan quvlovchi orasidagi masofaga teng boʻlgan oʻyin oʻrganiladi. Oʻyinning bahosi dasturlangan maksiminga teng boʻlishi uchun yetarli shartlar topilgan.

It is investigated simple-motion differential games of approach with many Pursuers on the plane of Lobachevski. In the first part it is considered the game of catching, i.e. pay of function of the game is the time when position at least one of the Pursuer is coincided with one of the Evader. In the second part of the work it is considered the game with payoff function being the distance between Evader and Pursuer closest to it at fixed instance of time. It is founded sufficient conditions when they are fulfilled, value of the game is the same as program maximin.

Изучению дифференциальных игр многих лиц в пространстве с простыми движениями посвящено много работ. Фундаментальные результаты получены в [1-5]. Особый интерес при рассмотрении дифференциальных игр с простыми движениями представляют собой игры, в которых на движения ее участников наложены фазовые ограничения, а также игры на многообразиях (см.[6-8]). В [9] рассматривается дифференциальная игра преследования и убегания в плоскости Лобачевсного (в модели Пуанкаре) в случае, когда объекты имеют одинаковые динамические возможности.

Настоящая работа примыкает к этим исследованиям. В ней исследуются дифференциальные игры в классе позиционных стратегий в плоскости Лобачевского в ее реализации на евклидовой полуплоскости по метрике Пуанкаре. В первой части расматривается игра поимки, т.е. платой игры является момент времени, когда положение хотя бы однодного из преследователей совпадает с положением убегающего. Во второй части работы изучается игра с платой, являющейся расстоянием между убегающим и ближайшим к нему преследователем в фиксированный момент времени. Найдены достаточные условия, при выполнении которых цена игры совпадает с программным максимином. Совпадение цены игры с программным максимином доказывается путем устанавления $u$ - стабильности последного.

Пусть $R_+^2 = \{x = (x^{(1)}, x^{(2)}) \in R^2 | x^{(2)} > 0\}$ - евклидова полуплоскость в $R^2$. Движения преследующих объектов $x_1, x_2, ..., x_m$ и убегающего объекта $y$ в $R_+^2$ описываются уравнениями

$$x_i = u_i, x_i(0) = x_{i0}, y(0) = y_o, \tag{1}$$

где $x_i, y \in R_+^2, u_i, \nu \in R^2, u_i, \nu$ - векторы управления, $i = 1, 2, ..., m$.

**Определение 1.** *Измеримая функция* $\nu(\cdot) = \{\nu(t), t \geq 0\}$ *такая, что* $|\nu(t)|_{y(t)} \leq 1, t \geq 0$, *называется программным управлением убегающего объекта* $y$.

Здесь и далее $|\nu|_y = \frac{|\nu|}{y^{(2)}}$ - норма вектора $\nu$, отложенного от точки $y$ по метрике Пуанкаре, определенная на $R_+^2$, $|\nu|$ - евклидова норма вектора $\nu$.

**Определение 2.** *Измеримая функция* $u_i(\cdot) = \{u_i(t), t \geq 0\}$ *такая, что* $|u_i(t)|_{x_i(t)} \leq \rho_i$, $t \geq 0$ *называется программным управлением объекта* $x_i, i = 1, 2, ..., m$. *Здесь* $\rho_i, i = 1, 2, ..., m$ *- положительные числа.*

Выше $y(t)$ и $x_i(t), t \geq 0$ - решения системы уравнений (1), соответствующие управлениям $\nu(t)$ и $u_i(t), t \geq 0$.

Множество всех программных управлений объекта $y(x_i)$ обозначим через $V_0(V_i)$.

Аналогично [10] определяются понятия движений, позиционных и оптимальных стратегий объектов, а также платы и цены игры.

Пусть $d(x, y)$ - расстояние между точками $x, y \in R_+^2$ по метрике Пуанкаре,

$$\gamma_1(z(\cdot)) = \min_{i=1,m} \{t : x_i(t) = y(t)\}, \quad \gamma_2(z(\cdot)) = \min_{i=1,m} d(x_i(\theta), y(\theta)).$$

Здесь $z(\cdot) = (y(\cdot), x_1(\cdot), ..., x_m(\cdot)), \theta > 0$, - фиксированное число. Игру с платой $\gamma_1$ обозначим через $\Gamma_1(m)$, а игру с платой $\gamma_2$ - через $\Gamma_2(m)$.

Множеством достижимости $H_0(t)(H_i(t))$ объекта $y(x_i)$ в момент времени $t$ будет "круг" с центром в точке $y_0(x_{i0})$ и радиусом $t(\rho_i t)$, т.е.

$$\begin{aligned} &H_0(t) = \{y(t) | y(t) = y(t, \nu(\cdot)), \nu(\cdot) \in V_0\} = \{y | d(y, y_0) \leq t\} \\ &(H_i(t) = \{x_i(t) | x_i(t) = x_i(t, u_i(\cdot)), u_i(\cdot) \in V_i\} = \{x | d(x, x_{i0}) \leq \rho_i t\}) \end{aligned} \tag{2}$$

Пусть

$$T = \min_{i=1,m} \left\{ t | H_0(t) \subset \bigcup_{i=1}^{m} H_i(t) \right\} \tag{3}$$

Очевидно, что если $\rho_1 > 1$, то $T$ - конечное число, совпадающее с максимином в игре $\Gamma_1(m)$.

Как известно [11-12], в плоскости Лобачевского геометрическим местом точек, равноудаленных от двух точек, является геодезическая (евклидова полуокружность), и все круги выпуклы. Отсюда легко следует, что множество $H = \bigcap_{i=1}^{m} \partial H_i(T)$, где $\partial M$ означает границу множества $M$, содержит не более двух точек. С другой стороны, из (3) следует, что $H$ непустое, если $T$-конечное число.

**Теорема 1.** *Если $\rho_i > 1$, то цена игры $\Gamma_1(2)$ совпадает с програмным максимином, т.е. число*

$$\max_{\nu(\cdot)} \min_{u(\cdot)} \gamma_1(z(\cdot)) \quad (\nu(\cdot) \in V_0,\ u(\cdot) = (u_1(\cdot), u_2(\cdot)) \in V_1 \times V_2)$$

*равно цене игры.*

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно доказать $u$ - стабилность программного максимина [10]. Возможны два случая: 1) $H = \{w_1\}$; 2) $H = \{w_1, w_2\}$. В случае 1) либо $H_0(T) \subset H_i(T), i \in \{1,2\}$, либо $y_0$ лежит внутри геодезического треугольника с вершинами $x_{10}, x_{20}, w_1$. Пусть $H_0(T) \subset H_1(T)$. Тогда из выпуклости шаров вытекает, что точки $x_{10}, y_0, w_1$ лежат на одной геодезической.

Движение объекта $x_1$ на достаточно малом отрезке времени $[0,\ \varepsilon]$ вдоль этой геодезической со скоростью $\rho_1$ покажет $u$ - стабильность программного максимина. Если $y_0$ лежит внутри геодезического треугольника с вершинами $x_{10}, x_{20}, w_1$, то, аналогично, движения объектов $x_1, x_2$ на достаточна малом отрезке времени $[0, \varepsilon]$ вдоль геодезического $[x_1, w_1)$, $[x_2, w_1)$ с максимальными скоростями покажет, что программный максимин для позиций $(x_1(\varepsilon), x_2(\varepsilon), y(\varepsilon))$ не больше $T - \varepsilon$, т.е. программный максимин $u$ - стабилен.

Расмотрим случай 2). Тогда точки $x_{10}, x_{20}$ и $y_0$ лежат на геодезической $\gamma_0$, каждая точка которой равноудалена от $w_1$ и $w_2$. Геодезическую, проходящую через точки $w_1$ и $w_2$, обозначим $\varphi_0$, и введем полугеодезическую систему координат, в которой первые координатные линии являются геодезическими, ортогональными к $\varphi_0$, а вторые координатные линии - их ортогональными троекторями. Эти геодезическое линии расходятся друг от друга при удалении от $\gamma_0$, т.к. кривизна пространства отрицательна. Используя этот факт, в этой координатной системе аналогично

[13], доказывается $u$ - стабильность программного максимина. Теорема доказана.

Отметим, что если $\rho_i \leq 1, i = 1, 2$, то в игре $\Gamma_1(2)$ цена игры не ограничена [9] и если $\rho_1 = 1 < \rho_2$, то теорема 1 остается в силе. Кроме того, если $\rho_i = 1, i = \overline{1, m,}$ и $y_0 \in intco(x_{10}, x_{20}, ..., x_{m0})$, то цена игры конечна; здесь и в дальнейшем операция $co$ берется по метрике Пуанкаре.

**Лемма.** *Пусть* $y_0 \notin intco(x_{10}, x_{20}, ..., x_{mo})$, $\rho_i \geq 1$ *и число* $T$ *определено равенством (3). Тогда существуют* $i_1, i_2 \in \{1, ..., m\}$ *такие, что*

$$H_0(T) \subset H_{i_1}(T) \cup H_{i_2}(T).$$

Доказательство. Из первого условия леммы следует существование геодезической $\gamma_0$, проходящей через точку $y_0$ такой, что точки $x_{10}$, $x_{20}$, ..., $x_{m0}$ лежат по одну сторону от $\gamma_0$; пусть $\alpha, \beta$ - (открытые) части, на которые $\gamma_0$ делит плоскость Лобачевского, и $x_{10}, x_{20}, ..., x_{m0} \in \overline{\alpha}$ ($\overline{\alpha}$ означает замыкание $\alpha$).

Пусть $x_*$ - точка "круга" $H_0(T)$, покрываемая множеством $\bigcup\limits_{i=1}^{m} H_i(t)$ в момент $t = T$, т.е., $x_* \in H_0(T) \cap \bigcup\limits_{i=1}^{m} H_i(T)$, $x_* \notin \bigcup\limits_{i=1}^{m} H_i(t)$, $0 \leq t < T$. Очевидно, что такая точка существует и $x_*^1 \in \partial H_0(T)$, симметричная точке $x_*$ относительно геодезической $\gamma_0$. Тогда $x_*^1 \in H_i(T)$ при некотором $i \in \{1, ..., m\}$ и т.к., очевидно, $d(x_*, x_{i0}) < d(x_*^1, x_{i0})$, то $x_* \in intH_i(T)$, что противоречит $x_* \in \bigcup\limits_{i=1}^{m} \partial(H_i(t))$. Значит $x_* \in \overline{\beta}$.

Разобьем множество $\{1, ..., m\}$ на две части:

$$I = \{i \in \{1, ..., m\} | x_* \in H_i(T)\}, \quad J = \{j \in \{1, ..., m\} | x_* \notin H_j(T)\}.$$

Проведем через $x_*$ и $y_0$ геодезическую $\gamma_1$. Геодизические $\gamma_0, \gamma_1$ делят плоскость Лобачевского на четыре открытые области, которые мы запишем в порядке $\alpha_1, \alpha_2, \beta_2, \beta_1 (\alpha_1, \alpha_2 \subset \alpha; \beta_2, \beta_1 \subset \beta)$.

Возможны следующие случаи:

1) Существует точка $x_{i0} \in \gamma_1, i \in I$. Тогда круг $H_i(T)$ (один!) покрывает $H_0(T)$.

2) Существуют точки $x_{i_1 0} \in \alpha_1, x_{i_2 0} \in \alpha_2, i_1, i_2 \in I$. Тогда $H_0(T) \subset H_{i_1}(T) \bigcup H_{i_2}(T)$.

3) Все точки $x_{i_0} (i \in I)$ лежат по одну сторону от $\gamma_1$, скажем, в части $\alpha_1$. Тогда, очевидно, существует достаточно малое $\varepsilon > 0$ такое, что дуга $\Gamma_\varepsilon = S_\varepsilon(x_*) \bigcap \partial H_0(T) \bigcap \beta_2$ (где $S_\varepsilon(x_*)$ - круг радиуса $\varepsilon$ с центром в $x_*$) не пересекается с $\bigcup\limits_{i \in I} H_i(T)$; т.к. $x_* \notin H_j(T), j \in J$, то, уменьшив,

если нужно, $\varepsilon > 0$, можно добиться, чтобы $\Gamma_\varepsilon$ не пересекалась также и с $\bigcup\limits_{j\in J} H_j(T)$. Но тогда $\Gamma_\varepsilon$ не пересекается и с $\bigcup\limits_{i=1}^{m} H_i(T)$, что противоречит условию $H_0(T) \subset \bigcup\limits_{i=1}^{m} H_i(T)$. Значит, третий случай невозможен. Лемма доказана.

**Теорема 2.** *Пусть* $\rho_i \geq 1, i = \overline{1,m}$, *и хотя бы одно из этих неравенств строгое. Тогда если* $y_0 \notin intco(x_{10}, x_{20}, ..., x_{m0})$, *то цена игры совпадает с программным максимином.*

Доказательство. Из леммы следует, что существуют индексы $i_1$ и $i_2$ (скажем 1 и 2) такие, что $\max\{\rho_1, \rho_2\} > 1$

$$\min\left\{t|H_0(t) \subset \bigcup_{i=1}^{m} H_i(t)\right\} = \min\{t|H_0(t) \subset H_1(t) \cap H_2(t)\}.$$

Далее, аналогично теореме 1, доказывается $u$ - стабильность программного максимина.

**Теорема 3.** *Пусть* $\rho_i \geq 1, i = \overline{1,m}$, $y_0 \notin intco(x_{10}, x_{20}, ..., x_{m0})$. *Тогда цена* $\Gamma_{2(m)}$ *совпадает с программным максимином.*

Доказательство. Очевидно, что программный максимин равен числу

$$l_0 = \min\left\{l \geq 0|\{y|d(y, y_0) = \theta\} \subset \bigcup_{i=1}^{m}\{x|d(x, x_{i0}) \leq \rho_i\theta + l\}\right\}.$$

Введем фиктивных преследователей $z_1, z_2, ..., z_m$, движения которых описывается уравнениями

$$\dot{z}_i = w_i, \|w_i\|_{z_i} \leq \sigma_i, z_i(0) = x_{i0}; \sigma_i = \frac{\rho_i\theta + l_0}{\theta} \tag{4}$$

Рассмотрим игру $\Gamma_1(m)$ между фиктивными преследователями $z_1, z_2, ..., z_m$ и убегающим $y$. Тогда из (1)-(4) вытекает, что

$$\theta = \min\left\{t|H_0(t) \subset \bigcup_{i=1}^{m}\{z|d(x_{i0}, z) \leq \sigma_i t\}\right\},$$

т.е., $\theta$ является ценой игры $\Gamma_1(m)$, или цена игры $\Gamma_2(m)$ между этими объектами равна нулю (см.(2),(4)).

Если зная стратегию $w_i$ объекта $z_i$ определить стратегию $u_i$ объекта $x_i$ равенством $u_i = \frac{\rho_i}{\theta_i} w_i$, то имеем

$$z_i(\theta) - x_i(\theta) = \int\limits_0^\theta (w_i(t) - u_i(t))dt = \left(\frac{\rho_i}{\sigma_i} - 1\right)\int\limits_0^\theta w_i(t)dt.$$

Отсюда в силу (4) получим

$$d(z_i(\theta), x_i(\theta)) \leq \left(\frac{\rho_i}{\sigma_i} - 1\right) \int\limits_0^\theta \|w_i(t)\| dt \leq \left(\frac{\rho_i}{\sigma_i} - 1\right) \cdot \sigma_i \theta = (\rho_i - \sigma_i) \cdot \theta = l_0.$$

Тогда

$$\min_{i=\overline{1,m}} \{d(x_i(\theta), y(\theta))\} \leq \min_{i=\overline{1,m}} \{d(x_i(\theta), z_i(\theta)) + d(z_i(\theta), y(\theta))\} \leq$$

$$\leq \min_{i=\overline{1,m}} \{l_0 + d(z_i(\theta), y(\theta))\} = l_0.$$

Теорема доказана.

**Литература**


1. Айзекс Р.Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967, 480 с.
2. Петров Н.Н. Об одной задаче группового преследования с фазовыми ограничениями. // ПММ, 1988, Т.52. Вып.6, С.1030-1033.
3. Петросян Л.С. Дифференциалное игры преслодования. Л.; Изд-во ЛГУ, 1977, 224 с.
4. Пшеничный Б.Н. Простое преследование несколькими объектами.// Кибернетика. 1976 , No 3, С. 145-146.
5. Черноусько Ф.П. Одно задача уклонения от многих преследователей.// ПММ, 1976, Т.40, Вып.1, С. 14-24.
6. Меликян А.А. Дифференциальная игра простого сближения на м ногообразиях.// ПММ, 1991, Т.55, №1. С. 54-62.
7. Меликян А.А. Дифференциальная игра простого сближения на многообразиях.// ПММ, 1993, Т.57, №1 С. 41-51.
8. Кучкаров А.Ш., Рихсиев Б.Б. О решении одной задачи преследования с фазовыми ограничениями.// Автоматика и телемеханика, 2001, №8, С. 41-45.
9. Кучкаров А.Ш. Дифференциальная игра преследования - убегания многих лиц в пространстве Лобачевского. Сбор.трудов межд. науч. конф. "Дифференциальные уравненияи их приложения", Самара, 2002 г, С. 202-207.

10. Субботин А.А., Ченцов А.Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981, 187 с.

11. Буземан Г. Геометрия геодезических. М., Гос.издат.физ.-ма т.лит., 1962, 503 с.

12. Бишоп Р., Криттенден Р. Геометрия многообразий. М., Мир, 1967, 336 с.

13. Кучкаров А.Ш. Оптимальное сближение двух объектов к одному объекту. ДАН РУз, 1993, №4, С. 6-8.

Институт математики
им. В.И.Романовского АН РУз

Дата поступления
29.09.05

Uzbek Mathematical
Journal, 2005,№4, pp.94-101

УДК. 517.946

# Единственность решения задачи Трикоми для одного класса уравнения смешанного типа

**М.С.Салахитдинов, А.Хасанов**

Bu maqolada chegarada buziluvchi $|x|^n\,|y|^m\,u_{xx}+sign(xy)u_{yy}=0,\quad (0<n<1,\, m>0)$ ikkinchi tartibli differensial tenglama uchun Trikomi masalasi yechimi yagona ekanligi koʻrsatiladi. Qoʻyilgan masala yechimi yagonaligi integral energiya usulida isbotlangan.

In this work the Tricomi problem for $|x|^n\,|y|^m\,u_{xx}+sign(xy)u_{yy}=0,\quad (0<n<1, m>0)$ the second order differential equation degenerating on border is considered. Uniqueness of the solution is proved by the method of integral energy.

**1. Введение.** Нарастающей интерес к теории краевых задач для вырождающихся уравнений в частных производных, обусловлен тем, что многие задачи прикладного характера, сводяться к решению краевых задач для вырождающихся уравнений в частных производных второго порядка. Например, задача адиабатических плоскопараллельных безвихренных течений газа, задача истечения сверхзвуковой струи из сосуда с плоскими стенками, задача о набегании сверхзвукового потока на клин, когда между головной волной и клином образуется зона до звуковых скоростей, а также задачи околозвуковых течений газа [1,2].

Существует ряд работ, например работы [3-7,10,11], в которых рассмотрены краевые задачи для дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с двумя линиями параболического вырождения. В этих работах исследуемые дифференциальные уравнения в области гиперболичности принадлежат первому роду, причем порядок вырождения на линии параболичности равны. Отметим работы [8,9,12], где рассматривалась задача Трикоми для уравнения в частных производных второго порядка с двумя линиями вырождения, причем с разными порядками вырождения на линии параболичности.

Впервые нами исследуется единственность решения краевой задачи Трикоми для вырождающихся дифференциального уравнения в частных производных второго порядка, когда рассматриваемое уравнение в области гиперболичности принадлежит разным родам.

**2. Постановка задачи Трикоми**

Рассмотрим уравнение

$$|x|^n\,|y|^m\,u_{xx}+sign(xy)u_{yy}=0,\qquad (0<n<1,\ m>0)\,. \tag{1}$$

Пусть $\Omega-$ конечная односвязная область плоскости $(x,y)$, ограниченная кривой жордана $\sigma$ с концами в точках $A(1,0)$, $B(0,1)$, лежащей на первом квадранте $x>0,\ y>0$ и характеристиками:

$$OD:\ \frac{1}{q}x^q-\frac{1}{p}(-y)^p=0,\quad OC:\ \frac{1}{p}y^p-\frac{1}{q}(-x)^q=0,$$

$$AD:\ \frac{1}{q}x^q+\frac{1}{p}(-y)^p=\frac{1}{q},\quad BC:\ \frac{1}{p}y^p+\frac{1}{q}(-x)^q=\frac{1}{p},$$

уравнения (1), причем $2q=2-n,\ 2p=2+m$. Эллиптическую часть области $\Omega$ обозначим через $\Omega_1$ а гиперболические части $\Omega_2$ и $\Omega_2$ соответственно при $x>0,\ x<0$.

**Задача** $T_1$. Найти решение уравнения (1) в области $\Omega$ при $xy\neq 0$, обладающие следующими свойствами:

1. $u\,(x,y)=C\left(\overline{\Omega}\right)\cap C^1\left(\Omega\backslash\overline{OB}\right)\cap C^2\left(\Omega_1\cap\Omega_2\cap\Omega_2\right),$ (2)

2. $u\,(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u\,(x,y)\,|_\sigma=f\,(x,y)\,,\quad (x,y)\in\sigma, \tag{3}$$

$$u\,(x,y)\,|_{OD}=\varphi_1\,(x)\,,\quad 0\leq x\leq\left[\frac{1}{2}\right]^{\frac{1}{q}}, \tag{4}$$

$$u\,(x,y)\,|_{OC}=\varphi_2\,(y)\,,\quad 0\leq y\leq\left[\frac{1}{2}\right]^{\frac{1}{p}}, \tag{5}$$

3. $u\,(x,y)$ на отрезке $OB$ удовлетворяет условию разрывности Франкля [2],

$$\frac{\partial}{\partial x}u(-0,y)=-\frac{\partial}{\partial x}u(+0,y). \tag{6}$$

**Задача** $T_2$**.** Найти решение уравнения (1) в области $\Omega$ при $xy\neq 0$, обладающие следующими свойствами:

1. $u\,(x,y)=C\left(\bar{\Omega}\right)\cap C^1\left(\Omega\backslash\overline{OB}\right)\cap C^2\left(\Omega_1\cap\Omega_2\cap\Omega_2\right),$ (7)

2. $u\,(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u\,(x,y)\,|_\sigma=f\,(x,y)\,,\quad (x,y)\in\sigma, \tag{8}$$

$$u\,(x,y)\,|_{AD}=\varphi_1\,(x)\,,\qquad 0\leq x\leq\left[\frac{1}{2}\right]^{\frac{1}{q}},\tag{9}$$

$$u\,(x,y)\,|_{BC}=\varphi_2\,(y)\,,\qquad 0\leq y\leq\left[\frac{1}{2}\right]^{\frac{1}{p}},\tag{10}$$

3. $u\,(x,y)$ на отрезке $OB$ удовлетворяет условию разрывности Франкля [2],

$$\frac{\partial}{\partial x}u(-0,y)=-\frac{\partial}{\partial x}u(+0,y).\tag{11}$$

В задачах $T_1$ и $T_2$ $f\,(x,y)\,,\ \varphi_1\,(x)\,,\ \varphi_2\,(y)-$ заданные функции, где $(-x)^{-\frac{n}{2}}f^2(B)=0$.

**3. Доказательство единственности решения задачи Трикоми**

В области $\Omega_1$ дифференциальное уравнение разного рода (1) имеет вид

$$y^m u_{xx}+x^{-n}u_{yy}=0$$

Пользуясь тождеством

$$u[y^m u_{xx}+x^{-n}u_{yy}]=\frac{\partial}{\partial x}\left[y^m u u_x\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[x^{-n}uu_y\right]-y^m u_x^2-x^{-n}u_y^2$$

имеем

$$\int\limits_0^1 x^{-n}\tau_1(x)\nu_1(x)dx+\int\limits_0^1 y^m\tau_2(y)\nu_2(y)dy+\iint\limits_{\Omega_1}\left[y^m u_x^2+x^{-n}u_y^2\right]dxdy=0.\tag{12}$$

Предварительно покажем, что если $u(x,y)$ есть решение уравнения (1), обращающийся в нуль на характеристиках $OD$ и $OC$ , то

$$\int\limits_0^1 x^{-n}\tau_1(x)\nu_1(x)dx\geq 0,\tag{13}$$

$$\int\limits_0^1 y^m\tau_2(y)\nu_2\,(y)dy\geq 0,\tag{14}$$

где $\tau_1(x)=u(x,0),\quad \tau_2(y)=u\,(0,y)\,,\quad \nu_1(x)=u_y(x,o),\quad \nu_2(y)=u_x(o,y).$

В самом деле, в области $\Omega_2$ имеет место, следующее тождество

$$0=\left[(-y)^m u_{xx}-x^{-n}u_{yy}\right]dxdy=\int\limits_{ODAO}x^{-n}uu_y dx+(-y)^m uu_x dy+$$

$$+\iint\limits_{\Omega_2}\left[x^{-n}u_y^2-(-y)^m u_x^2\right]dxdy.$$

Отсюда, учитывая $u\left(x,y\right)\big|_D=0$, получаем

$$\int\limits_0^1 x^{-n}\tau_1(x)\nu_1(x)dx=\int\limits_D^A u\left[x^{-n}u_y dx+(-y)^m u_x dy\right]+$$

$$\iint\limits_{\Omega_2}\left[x^{-n}u_y^2-(-y)^m u_x^2\right]dxdy. \tag{15}$$

На характеристике $AD$ имеем $x^{q-1}dx=(-y)^{p-1}\,dy$. Тогда

$$\int\limits_D^A u\left[x^{-n}u_y dx+(-y)^m u_x dy\right]=$$

$$=\frac{p}{q}(1-q)\int\limits_D^A\frac{u^2}{2}x^{q-2}\left[\frac{p}{q}(1-x^q)\right]^{-\frac{1}{p}}\left[1-x^q-\frac{q(p-1)}{p(q-1)}x^q\right]dx\geq 0. \tag{16}$$

Покажем, что второй интеграл в правой части равенства (15) неотрицателен. Для этого перейдем к характеристическим координатам

$$\xi=\frac{1}{q}x^q-\frac{1}{p}(-y)^p,\quad \eta=\frac{1}{q}x^q+\frac{1}{p}(-y)^p, \tag{17}$$

тогда находим

$$\iint\limits_{\Omega_2}\left[x^{-n}u_y^2-(-y)^m u_x^2\right]dxdy=$$

$$=-2^{1-2\alpha-2\beta}q^{2\alpha}p^{2\beta}\iint\limits_{\Delta_1}(\eta+\xi)^{2\alpha}(\eta-\xi)^{2\beta}u_\xi u_\eta d\xi d\eta, \tag{18}$$

где

$$\alpha=-\frac{n}{2(2-n)},\quad \beta=\frac{m}{2(m+2)}.$$

В гиперболической области $\Omega_2$ уравнение (1) принимает вид

$$u_{\xi\eta}+\left[\frac{\alpha}{\eta+\xi}+\frac{\beta}{\eta-\xi}\right]u_\xi+\left[\frac{\alpha}{\eta+\xi}-\frac{\beta}{\eta-\xi}\right]u_\eta=0.$$

Из этого уравнения находим

$$(\eta+\xi)^{2\alpha}(\eta-\xi)^{2\beta}u_\xi u_\eta=-\frac{\partial}{\partial\eta}\frac{(\eta+\xi)^{1+2\alpha}(\eta-\xi)^{1+2\beta}}{\beta(\eta+\xi)-\alpha(\eta-\xi)}\frac{u_\xi^2}{2}-$$

$$-(\eta+\xi)^{2\alpha}(\eta-\xi)^{2\beta}\frac{\beta(\eta+\xi)^2-\alpha(\eta-\xi)^2}{\left[\alpha(\eta-\xi)-\beta(\eta+\xi)\right]^2}\frac{u_\xi^2}{2} \tag{19}$$

Подставив выражение (19) в (18), получаем

$$\iint\limits_{\Omega_2}\left[x^{-n}u_y^2-(-y)^m u_x^2\right]dxdy=2^{-2\alpha-2\beta}q^{2\alpha}p^{2\beta}\iint\limits_{\Delta_1}(\eta+\xi)^{2\alpha}(\eta-\xi)^{2\beta}\times$$

$$\times\frac{\beta(\eta+\xi)^2-\alpha(\eta-\xi)^2}{\left[\alpha(\eta-\xi)-\beta(\eta+\xi)\right]^2}u_\xi^2 d\xi d\eta+$$

$$+2^{-2\alpha-2\beta}q^{2\alpha}p^{2\beta}\iint\limits_{\Delta_1}\frac{\partial}{\partial\eta}\frac{(\eta+\xi)^{1+2\alpha}(\eta-\xi)^{1+2\beta}}{\left[\beta(\eta+\xi)-\alpha(\eta-\xi)\right]}u_\xi^2 d\xi d\eta$$

и, проинтегрировав по частям последний интеграл, имеем следующее неравенство

$$\iint\limits_{\Omega_2}\left[x^{-n}u_y^2-(-y)^m u_x^2\right]dxdy=$$

$$=2^{-2\alpha-2\beta}q^{2\alpha}p^{2\beta}+\iint\limits_{\Delta_1}(\eta+\xi)^{2\alpha}(\eta-\xi)^{2\beta}\frac{\beta(\eta+\xi)^2-\alpha(\eta-\xi)^2}{\left[\alpha(\eta-\xi)-\beta(\eta+\xi)\right]^2}u_\xi^2 d\xi d\eta+$$

$$+2^{-2\alpha-2\beta}q^{2\alpha}p^{2\beta}\int\limits_0^{\frac{1}{q}}\frac{(\frac{1}{q}+\xi)^{1+2\alpha}(\frac{1}{q}-\xi)^{1+2\beta}}{\beta(\frac{1}{q}+\xi)-\alpha(\frac{1}{q}-\xi)}u_\xi^2(\xi,\frac{1}{q})d\xi\geq 0. \tag{20}$$

Учитывая неравенства (16) и (20) , в силу тождества (15) получаем неравенство (13). Покажем справедливость неравенства (14). Для этой цели, в гиперболической области $\Omega_3$ напишем уравнение (1) в виде

$$y^m u_{xx}-x^{-n}u_{yy}=0.$$

Пользуясь тождеством

$$0=\iint\limits_{\Omega_3}u\left[y^m u_{xx}-(-x)^{-n}u_{yy}\right]dxdy=$$

$$=\int\limits_{OBCO}(-x)^{-n}uu_y dx+y^m uu_x dy+\iint\limits_{\Omega_3}\left[(-x)^{-n}u_y^2-(y)^m u_x^2\right]dxdy \tag{21}$$

и, учитывая, что $u|_{OC}=0$, а также условие Франкля (6), находим

$$\int\limits_0^1 y^m\tau_2(y)\nu_2(y)dy=\int\limits_B^C u\left[(-x)^{-n}u_y dx+y^m u_x dy\right]+$$

$$+\iint\limits_{\Omega_3}\left[(-x)^{-n}u_y^2-(y)^m u_x^2\right]dxdy. \tag{22}$$

На характеристике $BC$ имеет место равенства $(-x)^{q-1}\,dx = y^{p-1}dy$. Тогда не трудно убедиться, что имеет место неравенства

$$\int\limits_B^C u\left[(-x)^{-n}u_y dx + y^m u_x dy\right] =$$

$$= \frac{q(p-1)}{p}\int\limits_C^B \frac{u^2}{2}y^{p-2}\left[\frac{q}{p}(1-y^p)\right]^{-\frac{1}{q}}\left[1-y^p-\frac{p(q-1)}{q(p-1)}y^p\right]dy \geq 0 \tag{23}$$

Переходим к характеристическим координатам

$$\xi = \frac{1}{p}y^p - \frac{1}{q}(-x)^q, \quad \eta = \frac{1}{p}y^p + \frac{1}{q}(-x)^q,$$

в области $\Omega_3$. Тогда для второго интеграла в правой части равенства (22) справедливо тождество

$$\iint\limits_{\Omega_3}\left[(-x)^{-n}u_y^2 - y^m u_x^2\right]dxdy =$$

$$= 2^{1-2\alpha-2\beta}q^{2\alpha}p^{2\beta}\iint\limits_{\Delta_2}(\eta-\xi)^{2\alpha}(\eta+\xi)^{2\beta}u_\xi u_\eta d\xi d\eta. \tag{24}$$

Уравнение (1) в области $\Omega_3$ имеет вид

$$u_{\xi\eta} + \left[\frac{\beta}{\eta+\xi}+\frac{\alpha}{\eta-\xi}\right]u_\xi + \left[\frac{\beta}{\eta+\xi}-\frac{\alpha}{\eta-\xi}\right]u_\eta = 0$$

Используя это уравнение, находим

$$(\eta+\xi)^{2\beta}(\eta-\xi)^{2\alpha}u_\xi u_\eta = -\frac{\partial}{\partial\eta}\frac{(\eta+\xi)^{1+2\beta}(\eta-\xi)^{1+2\alpha}}{\alpha(\eta+\xi)-\beta(\eta-\xi)}\frac{u_\xi^2}{2} -$$

$$-(\eta+\xi)^{2\beta}(\eta-\xi)^{2\alpha}\frac{\alpha(\eta+\xi)^2-\beta(\eta-\xi)^2}{\left[\beta(\eta-\xi)-\alpha(\eta+\xi)\right]^2}\frac{u_\xi^2}{2}. \tag{25}$$

Подставляя выражение (25) в равенство (24) и интегрируя по частям, находим

$$\iint\limits_{\Omega_3}\left[(-x)^{-n}u_y^2 - y^m u_x^2\right]dxdy =$$

$$= 2^{-2\alpha-2\beta}q^{2\alpha}p^{2\beta} + \iint\limits_{\Delta_2}(\eta+\xi)^{2\beta}(\eta-\xi)^{2\alpha}\frac{\beta(\eta-\xi)^2-\alpha(\eta+\xi)^2}{\left[\beta(\eta-\xi)-\alpha(\eta+\xi)\right]^2}u_\xi^2 d\xi d\eta +$$

$$+2^{-2\alpha-2\beta}q^{2\alpha}p^{2\beta}\int\limits_0^{\frac{1}{p}}\frac{(\frac{1}{p}+\xi)^{1+2\beta}(\frac{1}{p}-\xi)^{1+2\alpha}}{\beta(\frac{1}{p}-\xi)-\alpha(\frac{1}{p}+\xi)}u_\xi^2(\xi,\frac{1}{p})d\xi \geq 0. \qquad (26)$$

В силу неравенств (23), (26) и из тождества (22) получаем неравенство (14).

Таким образом, на основании неравенств (13) и (14) из тождества (12) заключаем, что $u(x,y)\equiv 0$ в области $\Omega$.

**Заключение.** Аналогичным образом можно доказать единственность решения задачи $T_2$, когда носителем данных является характеристики $AD$ и $BC$.

**Литература**

1. Лыков А. В. Применение методов термодинамики необратимых процессов к исследованию тепло и массообмена. Инж. физ. журнал. 1965, т.9, №3, с. 287- 304.

2. Франкль Ф.И. Избранные труды по газовой динамике М., 1973.

3. Зайнулабидов М. М. О некоторых краевых задачах для уравнений смешанного типа с двумя перпендикулярными линиями вырождения. Дифференциальные уравнения. 1969, том 5, №1, с. 91-99.

4. Маричев О.И. Краевые задачи для уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения. Известия АН БССР, сер. Физ.-мат. Наук, №5, 1970, с. 21-29.

5. Маричев О.И. Сингулярные краевые задачи для обобщенного двуосесимметрического уравнения Гельмгольца. Доклады АН СССР. 1976. том 230, №3, с. 523-526.

6. Салахитдинов М.С., Толипов А. О некоторых краевых задачах для уравнений смешанного типа с одной и двумя линиями вырождения. Дифференциальные уравнения. 1972, том 8, №1, с. 134-142.

7. Салахитдинов М.С., Менгзияев Б. Об одной краевой задаче со смещением для уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения. Дифференциальные уравнения. 1977, том 13, №1, с. 133-139.

8. Хасанов А. Об одной смешанной задаче для уравнения $signy\,|y|^m\,u_{xx} + x^n u_{yy} = 0.$, Известия Академии наук Уз ССР, сер. физ.-мат. наук., №2, 1982, с. 28-32.

9. Салахитдинов М.С., Хасанов А. Задача Трикоми для уравнения смешанного типа с негладкой линией вырождения, Дифференциальные уравнения, Минск, 1983. Т.19, №1, с. 110-119.

10. Салахитдинов М.С., Уринов А. К. Об одной краевой задаче для уравнения смешанного типа с негладкими линиями вырождения. Доклады СССР, 1982, Том 262, №3, с. 539-541.

11. Исамухамедов С. С., Оразов Ж. О краевых задачах для уравнения смешанного типа второго рода с негладкой линией вырождения. Дифференциальные уравнения. 1982, том 18, №2, с. 324-334.

12. Салахитдинов М.С., Аманов Д. Нелокальная краевая задача для уравнения $Sgny\,|y|^m\,u_{xx} + x^n u_{yy} = 0$ в неограниченной области. Известия АН УзССР, 1986, сер. Физ. - мат наук, №1, с. 18-21.

Институт математики
им. В.И.Романовского АН РУз

Дата поступления
12.09.05

Uzbek Mathematical
Journal, 2005,№4, pp.102-110

УДК 517.956.6

# Нелокальная краевая задача со смещением для одного вырождающегося гиперболического уравнения

**А.К.Уринов, А.Т.Абдукодиров**

Bu maqolada buziladigan giperbolik tipdagi tenglama uchun bir nolokal masala yechimining mavjudligi va yagonaligi isbotlangan.

In this work existence and uniqueness of the solution of one non-local problem for the hyperbolic type equation are proved.

Рассмотрим уравнение

$$|y|^n U_{xx} - |y| U_{yy} - \alpha \cdot signy \cdot U_y + \lambda^2 |y|^n U = 0 \tag{1}$$

в области $D$, ограниченной характеристиками

$$AC_j : x - \frac{2}{n+1} |y|^{\frac{n+1}{2}} = 0, \qquad BC_j : x + \frac{2}{n+1} |y|^{\frac{n+1}{2}} = 1,$$

уравнения (1), где $n \geq 1$, $\alpha \in \left(\frac{1-n}{2}, 1\right)$, $\lambda \in R$, причем $y < 0, y > 0$ при $j = 1$ и $j = 2$ соответственно.

Введем следующие обозначения:

$$D_1 = D \cap \{y < 0\}, \; D_2 = D \cap \{y > 0\}, \; AB = \{(x, y) : y = 0, \, 0 < x < 1\}.$$

**Задача** $\Gamma_\beta^{1-\beta}$. Найти функцию $U(x,y)$ со следующими свойствами:

1) $U(x,y) \in C\left(\overline{D}\right) \cap C^2(D_1 \cup D_2)$, $|y|^\alpha U_y(x,y) \in C(D_j \cup AB)$, $j = 1, 2$;

2) на отрезке $AB$ выполняются условия сопряжения

$$\lim_{y \to -0} U(x,y) = \lim_{y \to +0} U(x,y) \quad (= \tau(x)), \quad 0 \leq x \leq 1;$$

$$\lim_{y \to -0} (-y)^\alpha U_y(x,y) = \lim_{y \to +0} y^\alpha U_y(x,y) \quad (= \nu(x)), \quad 0 < x < 1. \tag{2}$$

3) $U(x,y)$ в областях $D_1$ и $D_2$ удовлетворяет уравнению (1);

4)$U(x,y)$ – удовлетворяет краевые условия

$$a_1(x)\,A_{0x}^{1,\lambda}\left\{D_{0x}^{\beta}\left[x^{2\beta-1}U(\theta_{01})\right]\right\}+$$

$$+b_1(x)\,A_{1x}^{1,\lambda}\left\{D_{1x}^{\beta}\left[(1-x)^{2\beta-1}U(\theta_{11})\right]\right\}=d_1(x),\qquad 0\le x\le 1\,;\qquad(3)$$

$$a_2(x)\,A_{0x}^{1,\lambda}\left\{D_{0x}^{1-\beta}\left[U(\theta_{02})\right]\right\}+b_2(x)\,A_{1x}^{1,\lambda}\left\{D_{1x}^{1-\beta}\left[U(\theta_{12})\right]\right\}=d_2(x),\ 0<x<1,$$

где $a_j(x), b_j(x), d_j(x)\ \in C^{4-j}\,[0,1]$ - заданные функции, причем $a_j^2(x)+b_j^2(x)\neq 0$,

$$\theta_{0j}\left(\frac{x}{2};(-1)^j\left(\frac{n+1}{4}x\right)^{\frac{2}{n+1}}\right)\ ,\ \theta_{1j}\left(\frac{x+1}{2};(-1)^j\left(\frac{n+1}{4}(1-x)\right)^{\frac{2}{n+1}}\right),$$

$$j=1,2$$

$$A_{kx}^{1,\lambda}\left[f\left(x\right)\right]\equiv f\left(x\right)-\int\limits_{k}^{x}f\left(t\right)\frac{t-k}{x-k}\frac{\partial}{\partial t}\,J_0\left[\lambda\sqrt{\left(x-k\right)\left(x-t\right)}\right]dt;$$

$$D_{kx}^{\gamma}\left[f\left(x\right)\right]\equiv\frac{1}{\Gamma\left(1-\gamma\right)}\frac{d}{dx}\int\limits_{k}^{x}\left|x-t\right|^{-\gamma}f\left(t\right)dt,\ \ 0<\gamma<1,$$

$\overline{J}_{-\gamma}(z)=\Gamma(1-\gamma)\cdot\left(\frac{z}{2}\right)^{\gamma}J_{-\gamma}(z), J_{-\gamma}(z)$ функция Бесселя первого рода порядка $(-\gamma);\Gamma(z)$ – гамма функция Эйлера , $\beta=\left(n-1+2\alpha\right)/(2n+2)$.

Непосредственной проверкой, нетрудно убедиться в том, что решения видоизмененная задача Коши для уравнения (1) в $D_j$ представима в виде

$$U\left(x,y\right)=\gamma_1\int\limits_{0}^{1}\frac{\tau\left[x+\sigma\left(2z-1\right)\right]}{\left[z\left(1-z\right)\right]^{1-\beta}}\bar{I}_{\beta-1}\left[2\sigma\lambda\sqrt{z\left(1-z\right)}\right]dz\ +$$

$$+\left(-1\right)^j\left|y\right|^{1-\alpha}\gamma_2\int\limits_{0}^{1}\frac{\nu\left[x+\sigma\left(2z-1\right)\right]}{\left[z\left(1-z\right)\right]^{\beta}}\bar{I}_{-\beta}\left[2\sigma\lambda\sqrt{z\left(1-z\right)}\right]dz,\qquad(4)$$

где $\gamma_1=\frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)}$, $\gamma_2=(1-\alpha)^{2\beta-1}\frac{\Gamma(2-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)}$, $\sigma=\frac{2}{n+1}\left|y\right|^{\frac{n+1}{2}}$, причем $\tau\left(x\right)\in C\left[0,1\right]\cap C^2\left(0,1\right)$, $\nu\left(x\right)\in C^2\left(0,1\right)$ -можеть обращаться в бесконечность порядка меньше $1-2\beta$ при $x\to 0$ и $x\to 1$, $\bar{I}_{-\gamma}\left(z\right)=\Gamma\left(1-\gamma\right)\cdot\left(\frac{z}{2}\right)^{\gamma}I_{-\gamma}\left(z\right)$, $I_{-\gamma}\left(z\right)$ – модифицированная функция Бесселя порядка $(-\gamma)$.

Пользуясь условиям (3) и формулой (4), аналогично в [1] находим функциональные соотношения между $\tau(x)$ и $\nu(x)$ на AB, принесенные из $D_j$

$$P_1\left(x\right)\tau\left(x\right) = \quad a_1(x)(1-x)^{1-\beta}k_1\int\limits_0^x \nu\left(t\right)\left(x-t\right)^{-2\beta}\bar{J}_{-\beta}\left[\lambda\left(x-t\right)\right]dt+$$

$$+\,b_1(x)x^{1-\beta}k_1\int\limits_x^1 \nu\left(t\right)\left(t-x\right)^{-2\beta}\bar{J}_{-\beta}\left[\lambda\left(t-x\right)\right]dt+\frac{\left[x(1-x)\right]^{1-\beta}\Gamma(\beta)}{\Gamma(2\beta)}d_1(x),$$

$$0\leq x\leq 1. \quad (5)$$

$$P_2(x)\nu(x) = -k_2\Gamma(2\beta)a_2(x)(1-x)^{\beta}C_{0x}^{1,\lambda}\left[\tau(x)\right] - k_2\Gamma(2\beta)b_2(x)x^{\beta}C_{1x}^{1,\lambda}\left[\tau(x)\right]+$$

$$+k_2(\beta)\left[x(1-x)\right]^{\beta}d_2(x),\;\; 0<x<1, \quad (6)$$

где$C_{mx}^{1,\lambda}\left[\tau(x)\right]$ – интегро-дифференциальный оператор, введенный в [1]

$$\Gamma(2\beta)C_{mx}^{1,\lambda}\left[\tau\left(x\right)\right] = \frac{d}{dx}\int\limits_m^x \tau\left(t\right)\left|x-t\right|^{2\beta-1}\bar{J}_{\beta}\left[\lambda\left(x-t\right)\right]dt+$$

$$+\frac{\lambda^2 sign(x-m)}{4\beta(1+\beta)}\int\limits_m^x \tau\left(t\right)\left|x-t\right|^{2\beta}\bar{J}_{\beta+1}\left[\lambda\left(x-t\right)\right]dt$$

$$P_1\left(x\right) = a_1(x)(1-x)^{1-\beta}+b_1(x)x^{1-\beta}, \qquad P_2\left(x\right) = (1-x)^{\beta}a_2(x)+x^{\beta}b_2(x),$$

$$k_1 = \frac{(2-4\beta)^{2\beta}\cdot\Gamma(\beta)}{2\Gamma(1-\beta)\cdot\Gamma(2\beta)}, \quad k_2 = \frac{\sin 2\beta\pi}{\pi k_1}.$$

**Теорема.** *Пусть выполнена одна из следующих групп условий:*
*1)* $a_1(x)\neq 0, b_1(x)\neq 0, P_1(x)\neq 0, 0\leq x\leq 1;$

$$g_1'(x) = \left[\frac{(1-x)^{1-\beta}a_1(x)}{P_1(x)}\right]'\leq 0, \qquad q_1'(x) = \left[\frac{x^{1-\beta}b_1(x)}{P_1(x)}\right]'\geq 0, \quad 0\leq x\leq 1; \quad (7)$$

$$a_2(x) = x^{\beta}a_3(x), \quad b_2(x) = (1-x)^{\beta}b_3(x),$$

$$a_3(x)\cdot b_3(x)>0, \qquad a_3'(x)\cdot b_3'(x)\leq 0. \quad (8)$$

*2)* $a_1(x) = x^{1-\beta}a_4(x), \quad b_1(x) = (1-x)^{1-\beta}b_4(x),$
$a_4(x)\cdot b_4(x)>0, \quad a_4'(x)\cdot b_4'(x)\leq 0, \quad a_2(x)\equiv 0($ *или* $b_2(x)\equiv 0).$
*3)* $a_j(x)\equiv 0, \quad b_k(x)\equiv 0, \quad j\neq k, \quad j,k=1,2;$

*4)* $a_j(x) \equiv 0, \quad ($ *или* $b_j(x) \equiv 0), \quad j = 1, 2.$

*Тогда существует единственное решение задачи* $\Gamma_\beta^{1-\beta}$.

Доказательство. Сперва докажем единственность решения задачи. Пусть $U(x, y)$ решение однородной задачи и выполнено условие 1) теоремы.

Докажем, что

$$l = \int\limits_0^1 \tau(x)\nu(x)dx = 0. \tag{9}$$

В силу $d_1(x) \equiv 0$, из (5) следует

$$\tau(x) = k_1 g_1(x) \int\limits_0^x \nu(t)(x-t)^{-2\beta} \bar{J}_{-\beta}\left[\lambda\left(x-t\right)\right] dt +$$

$$+ k_1 q_1(x) \int\limits_x^1 \nu(t)(t-x)^{-2\beta} \bar{J}_{-\beta}\left[\lambda(t-x)\right] dt, \quad 0 \le x \le 1 \tag{10}$$

Подставим (10) в (9) и заменим функции $|x-t|^{-2\beta}$, $J_{-\beta}\left[\lambda(x-t)\right]$ по формуле [2,3]:

$$|x-t|^{-2\beta} = \frac{1}{\Gamma\left(2\beta\right) \cdot \cos\beta\pi} \int\limits_0^\infty z^{2\beta-1} \cos z\left(x-t\right) dz,$$

$$J_{-\beta}\left[\lambda\left(x-t\right)\right] = \frac{\left[\lambda\left(x-t\right)/2\right]^{-\beta}}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{2}-\beta\right)} \int\limits_{-1}^1 \left(1-\xi^2\right)^{-\beta-\frac{1}{2}} \cos\lambda\xi\left(x-t\right) d\xi.$$

Тогда, после некоторых преобразований, (9) принимает вид

$$\ell = \gamma_3 \int\limits_0^\infty z^{2\beta-1} dz \int\limits_{-1}^1 (1-\xi^2)^{-\frac{1+2\beta}{2}} d\xi \times$$

$$\times \int\limits_0^1 \left\{ \left[-g_1'(x)\right] \sum_{i,k=1}^2 \left( \int\limits_0^x \nu_{i,k}(t,z,\xi)dt \right)^2 + q_1'(x) \sum_{i,k=1}^2 \left( \int\limits_x^1 \nu_{i,k}(t,z,\xi)dt \right)^2 \right\} dx, \tag{11}$$

где $\gamma_3 = (2-4\beta)^{2\beta}\Gamma\left(\beta\right) / \left[4\sqrt{\pi} \cdot \cos\beta\pi \cdot \Gamma^2\left(2\beta\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\beta\right)\right]$,

$$\nu_{11}(x,z,\xi) = \nu\left(x\right) \cdot \cos zx \cdot \cos\lambda\xi x, \quad \nu_{12}(x,z,\xi) = \nu\left(x\right) \cdot \cos zx \cdot \sin\lambda\xi x$$

$$\nu_{21}(x,z,\xi) = \nu\left(x\right) \cdot \sin zx \cdot \cos\lambda\xi x, \quad \nu_{22}(x,z,\xi) = \nu\left(x\right) \cdot \sin zx \cdot \sin\lambda\xi x.$$

При $d_2(x)\equiv 0$ из (6) находим

$$\nu(x)=-k_2\left\{\Gamma(2\beta)g_2(x)C_{0x}^{1,\lambda}[\tau(x)]-\Gamma(2\beta)q_2(x)C_{1x}^{1,\lambda}[\tau(x)]\right\},\quad 0<x<1, \tag{12}$$

где $g_2\left(x\right)=a_3\left(x\right)/P_3\left(x\right),\quad q_2\left(x\right)=b_3\left(x\right)/P_3\left(x\right),\quad P_3\left(x\right)=a_3\left(x\right)+b_3\left(x\right).$

Подставляя (12) в (9), имеем

$$l=-k_2\Gamma(2\beta)\left\{\int\limits_0^1\tau\left(x\right)g_2(x)C_{0x}^{1,\lambda}\left[\tau(x)\right]dx+\int\limits_0^1\tau\left(x\right)q_2(x)C_{1x}^{1,\lambda}\left[\tau(x)\right]dx\right\} \tag{13}$$

Введем здесь следующие обозначения

$$h(x)=\Gamma^{-1}(1-2\beta)C_{0x}^{1,\lambda}\left[\tau(x)\right];\quad w(x)=\Gamma^{-1}(1-2\beta)C_{1x}^{1,\lambda}\left[\tau(x)\right]. \tag{14}$$

Отсюда используя теорему 1.21[1],находим выражения функции $\tau(x)$ через $h(x)$ и $w(x)$

$$\tau\left(x\right)=\int\limits_0^x h\left(t\right)\left(x-t\right)^{-2\beta}\bar{J}_{-\beta}\left[\lambda\left(x-t\right)\right]dt;$$

$$\tau\left(x\right)=\int\limits_x^1 w\left(t\right)\left(x-t\right)^{-2\beta}\bar{J}_{-\beta}\left[\lambda\left(x-t\right)\right]dt. \tag{15}$$

Подставляя (14) и (15) в (13), аналогично (11), находим

$$\ell=-\gamma_4\int\limits_0^\infty z^{2\beta-1}dz\int\limits_{-1}^1(1-\xi^2)^{-\frac{1+2\beta}{2}}d\xi\times\left\{\sum_{i,k=1}^2 g_2\left(1\right)\left(\int\limits_0^1 h_{i,k}(t,z,\xi)dt\right)^2+\right.$$

$$+\sum_{i,k=1}^2 q_2\left(0\right)\left(\int\limits_0^1 w_{i,k}(t,z,\xi)dt\right)^2+\int\limits_0^1\left[q_2'(x)\right]\sum_{i,k=1}^2\left(\int\limits_x^1 w_{i,k}(t,z,\xi)dt\right)^2dx+$$

$$\left.+\int\limits_0^1\left[-g_2'(x)\right]\sum_{i,k=1}^2\left(\int\limits_0^x h_{i,k}(t,z,\xi)dt\right)^2dx\right\}, \tag{16}$$

где $\gamma_4=2\sqrt{\pi}\Gamma(1-\beta)(2-4\beta)^{-2\beta}/\left[\Gamma^2(\beta)\Gamma(\frac{1}{2}-\beta)\sin\beta\pi\right]$,

$$h_{11}(x,z,\xi)=h(x)\cdot\cos zx\cdot\cos\lambda\xi x,\quad h_{12}(x,z,\xi)=h(x)\cdot\cos zx\cdot\sin\lambda\xi x,$$

$$h_{21}(x,z,\xi)=h(x)\cdot\sin zx\cdot\cos\lambda\xi x,\quad h_{22}(x,z,\xi)=h(x)\cdot\sin zx\cdot\sin\lambda\xi x,$$

$$w_{11}(x,z,\xi)=w(x)\cdot\cos zx\cdot\cos\lambda\xi x,\quad w_{12}(x,z,\xi)=w(x)\cdot\cos zx\cdot\sin\lambda\xi x,$$

$$w_{21}(x,z,\xi)=w(x)\cdot\sin zx\cdot\cos\lambda\xi x,\quad w_{22}(x,z,\xi)=w(x)\cdot\sin zx\cdot\sin\lambda\xi x.$$

В силу (7) и (8), из (11) и (16) вытекает что, при $j=1$, $l\geq 0$, а при $j=2$, $l\leq 0$. Следовательно, $l=0$.

Если учесть это, из (16) следует, что

$$\int\limits_0^1 h(t)\cos\lambda\xi t\cos ztdt=0,\quad \int\limits_0^1 h(t)\sin\lambda\xi\, t\cdot\cos ztdt=0,$$

$$\int\limits_0^1 h(t)\cos\lambda\xi\, t\cdot\sin ztdt=0,\quad \int\limits_0^1 h(t)\sin\lambda\xi\, t\cdot\sin ztdt=0, \tag{17}$$

Отсюда , легко следует

$$\int\limits_0^1 h(t)\cos\left(\lambda\xi-z\right)tdt=0,\quad \int\limits_0^1 h(t)\sin\left(\lambda\xi-z\right)tdt=0, \tag{18}$$

для всех значений $(\lambda\xi-z)\in(-\infty;+\infty)$, и в частности, при $\lambda\xi-z=m\pi$ $(m=0,1,2,...)$.

При этих значениях $(\lambda\xi-z)$ функции $\cos(\lambda\xi-z)t$ и $\sin(\lambda\xi-z)t$ образует полную ортогональную систему в $L_2[0;1]$, а из (18) следует, что коэффициенты Фурье (по этой системе) функции $h(x)$ равны нулю. Тогда по формуле замкнутости, справедливо равенство $\int\limits_0^1 h^2(t)dt=0$, откуда следует, что $h(x)\equiv 0, x\in(0,1)$. Тогда, из (15) следует, что $\tau(x)\equiv 0, x\in[0,1]$. Подставляя это в (12), находим, что $\nu(x)\equiv 0, x\in[0;1]$. Тогда, из (4) следует, что $U(x,y)\equiv 0$ в $\overline{D_1}$ и $\overline{D}_2$, и следовательно в $\overline{D}$. Отсюда следует единственность решения задачи при выполнении условие 1) .

Теперь переходим к доказательству существования решения задачи.

Разделяя обе части (5) и (6) на $P_1(x)$ и $[x\,(1-x)]^{\beta}$ соответственно и принимая во внимание

$$\bar{J}_s(z)=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma(s+1)(z/2)^{2k}}{\Gamma(s+1+k)\Gamma(k+1)},$$

перепишем (5) и (6) в виде

$$\tau(x)=f_1(x)+\int\limits_0^1 \nu(x)K_1(x,t)dt+$$

$$+k_1\Gamma(1-2\beta)g_1(x)D_{0x}^{2\beta-1}\nu(x)+k_1\Gamma(1-2\beta)q_1(x)D_{x1}^{2\beta-1}\nu(x), \qquad (19)$$

$$P_3\left(x\right)\nu(x)=f_2\left(x\right)-\int\limits_0^1\tau\left(x\right)K_2\left(x,t\right)dt-$$

$$-k_2\Gamma(2\beta)a_3(x)D_{0x}^{1-2\beta}\tau(x)-k_2\Gamma(2\beta)b_3(x)D_{x1}^{1-2\beta}\tau(x), \qquad (20)$$

где

$$f_1(x)=\Gamma(\beta)\left[x(1-x)\right]^{1-\beta}d_1(x)/[\Gamma(2\beta)P_1(x)], f_2(x)=k_2\Gamma(2\beta)d_2(x);$$

$$K_1(x,t)=\begin{cases} k_3g_1(x)(x-t)^{-2\beta}\left\{\bar{J}_{-\beta}\left[\lambda\left(x-t\right)\right]-1\right\}, & t\leq x,\\ k_3q_1(x)(t-x)^{-2\beta}\left\{\bar{J}_{-\beta}\left[\lambda\left(t-x\right)\right]-1\right\}, & t\geq x;\end{cases}$$

$$K_1(x,t)=\begin{cases} k_2a_3(x)K_0(x,t), & t\leq x,\\ k_2b_3(x)K_0(x,t), & t\geq x;\end{cases}$$

$$K_0(x,t)=\frac{d}{dx}\left\{|x-t|^{2\beta-1}\left[\bar{J}_\beta\left[\lambda\left(x-t\right)\right]-1\right]\right\}+$$

$$+\frac{\lambda^2 sign(x-t)}{4\beta(1+\beta)}\left|x-t\right|^{2\beta}\bar{J}_{\beta+1}\left[\lambda\left|x-t\right|\right].$$

Подставляя (19) в (20), после некоторых преобразований, имеем

$$P_3(x)\nu(x)=f_3(x)+\int\limits_0^1\nu(t)K_3(x,t)dt-$$

$$-a_3(x)\left[J_1(x)+J_2(x)\right]-b_3(x)\left[J_3(x)+J_4(x)\right],\ \ 0<x<1, \qquad (21)$$

где

$$J_1(x)=D_{0x}^{1-2\beta}g_1(x)D_{0x}^{2\beta-1}\nu(x)\ \ J_2(x)=D_{0x}^{1-2\beta}q_1(x)D_{x1}^{2\beta-1}\nu(x),$$

$$J_3(x)=D_{x1}^{1-2\beta}g_1(x)D_{0x}^{2\beta-1}\nu(x)\ ,\ J_4(x)=D_{x1}^{1-2\beta}q_1(x)D_{x1}^{2\beta-1}\nu(x),$$

$$f_3(x)=f_2(x)-\int\limits_0^1 f_1(x)K_2(x,t)dt-$$

$$-k_2\Gamma(2\beta)a_3(x)D_{0x}^{1-2\beta}f_1(x)-k_2\Gamma(2\beta)b_3(x)D_{x1}^{1-2\beta}f_1(x),$$

причем $f_3(x)\in C[0,1]\cap C^2(0,1]$; $K_3(x,t)\in C(0\leq x,t\leq 1)$ и дважды непрерывно дифференцируемая по $x$ в $0<x,t<1$ при $t\neq x$ функция, зависящая от заданных функций $a_1(x),b_1(x),a_3(x),b_3(x)$.

Аналогично в [4],[5], можно доказать, что

$$J_1(x) = g_1(x)\nu(x) + \int\limits_0^x \nu(t)K_4(x,t)dt,$$

$J_2(x) = -\cos 2\beta\pi q_1(x)\nu(x)+$

$$+\frac{\sin 2\beta\pi}{\pi}q_1(x)\int\limits_0^1\left(\frac{t}{x}\right)^{1-2\beta}\frac{\nu(t)}{t-x}dt-\int\limits_0^1\left(\frac{t}{x}\right)^{1-2\beta}\frac{K_5(x,t)\,\nu(t)}{|t-x|^{\beta}}dt, \qquad (22)$$

$J_3(x) = -\cos 2\beta\pi g_1(x)\,\nu(x) -$

$$-\frac{\sin 2\beta\pi}{\pi}g_1(x)\int\limits_0^1\left(\frac{1-t}{1-x}\right)^{1-2\beta}\frac{\nu(t)}{t-x}dt+\int\limits_0^1\left(\frac{1-t}{1-x}\right)^{1-2\beta}\frac{K_6(x,t)\,\nu(t)}{|t-x|^{\beta}}dt,$$

$J_4(x) = q_1(x)\,\nu(x) + \int\limits_x^1 \nu(t)\,K_7(x,t)\,dt,$

$K_j(x,t), j = \overline{4,7}$,-функции, обладающие свойствами $K_3(x,t)$.

В силу (22) из (21) получим сингулярное интегральное уравнение относительно $\nu(x)$

$$A(x)\nu(x) + \frac{B(x)}{\pi}\int\limits_0^1\frac{\nu(t)}{t-x}dt + \int\limits_0^1 L(x,t)\nu(t)dt = f_3(x), \qquad (23)$$

где

$A(x) = P_3(x)+a_3(x)g_1(x)+b_3(x)q_1(x)-\cos 2\beta\pi\left[a_3(x)q_1(x) + b_3(x)g_1(x)\right],$

$B(x) = \sin 2\beta\pi\left[a_3(x)q_1(x) - b_3(x)g_1(x)\right],$

$L(x,t) = |t-x|^{\beta-1}o(1)$ и дважды непрерывно дифференцируема по $x$ в квадрате $0 < x, t < 1$ при $t \neq x$.

В силу условий наложенных на заданные функции $A^2(x) + B^2(x) \neq 0,\ x \in [0,1]$, и поэтому (23) является сингулярным интегральным уравнением нормального типа и его индекс в классе функций, которые могут обращаться в бесконечность порядка менше единицы при $x \to 0,\ x \to 1$, равно нулю.

Регуляризируя [6] уравнение (23), получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода относительно $\nu(x)$, безусловная разрешимость, которого следует из единственности решения задачи.

После того как найдена $\nu(x)$, функция $\tau(x)$ находится из (5), а решения задачи в $D_j, j = 1,2$ определяется по формуле (4).

Этим и завершается доказательство теоремы, в том случае , когда выполнено условие 1).

Аналогично доказывается теорема и в остальных случаях.

**Замечание.** Аналогичным методом можно исследовать задачу $\Gamma_{\beta}^{1-\beta}$ и в том случае, когда $n = n_j, \alpha = \alpha_j, \lambda = \lambda_j$ в $D_j, j = 1, 2$ и при разрывных условиях склеивания на линии $y = 0$.

**Литература**

1. Уринов А.К. Узбекский математический журнал, 1993 г., №3, с.83-91.

2. Трикоми Ф. Лекции по уравнениям в частных производных. М., ИЛ, 1957, 440 с.

3. Кузнецов Д.С. Специальные функции. М., Высшая школа, 1969, 424 с.

4. Салахитдинов М.С. Мирсабуров М. В сб. Краевые задачи для уравнений математический физики и их приложения. Тошкент."Фан". 1983. с.3-17.

5. Кумыкова С.К., Дифференциалные уравнения.,1980. т. 16. №1.

6. Мусхелишвили Н.И. Сингулярние интегралние уравнения. М. "Наука",1962.

Ферганский госуниверситет
Ферганский научный центр АН РУз

Дата поступления
13.03.05

Uzbek Mathematical
Journal, 2005,№4, pp.111-113

УДК 519.644

# Об одной кубатурной формуле типа Чебышева

**Э.А.Шамсиев**

Maqolada bir singulyar integralni doirada taqribiy hisoblash uchun kubatur formula qurilgan bo'lib, uning parametrlari to'g'ri to'rtburchaklar va Meller kvadratur formulalarining parametrlari orqali ifodalanadi.

This article is devoted to construction of cubature formula for calculation of singular integral on unit circle. The parameters of obtained formula are connected with parametrs of quadrature formulas of rectangulars and Meller.

Известно [1], что группа $G_{4m}$ преобразований правильного $4m$-угольника порождена отражениями и кольцо ее инвариантных форм порождается базисными инвариантными формами степеней 2 и $4m$. Ввиду ортогональности группы $G_{4m}$, очевидно, что инвариантная форма степени 2 есть $r^2 = x^2 + y^2$. Выпишем линейно независимые инвариантные многочлены группы $G_{4m}$, степени которых не превышают $4m - 1$

$$1,\, r^2,\, r^4,\, ...,\, r^{4m-2}. \tag{1}$$

Их число равно $2m$, поэтому кубатурную формулу $(4m-1)$-й степени точности, инвариантную относительно группы $G_{4m}$ [2, стр.129], будем искать в виде

$$\int\limits_{B_2} \frac{f\,(x,\, y)\, dxdy}{\sqrt{r^2\,(1-r^2)}} \cong \sum_{j=1}^{m} A_j \sum_{k=1}^{4m} f\left(\lambda_j a^{(k)}\right), \tag{2}$$

где $B_2$ единичный круг с центром в начале координат,

$$a^{(k)} = \left(\cos\frac{k\pi}{2m},\, \sin\frac{k\pi}{2m}\right),$$

$k = 1,\, 2,\, 3,\, ...,\, 4m$ -вершины правильного $4m$-угольника.

Требование точности кубатурной формулы (2) для многочленов (1) приводит к следующей системе нелинейных алгебраических уравнений

$$4m\sum_{j=1}^{m} \lambda_j^{2p} A_j = 2\pi \int\limits_0^1 \frac{r^{2p}dr}{\sqrt{1-r^2}}, \quad p = 0,\, 1,\, 2,\, ...,\, 2m-1.$$

Напомним, что $\int\limits_{B_2} \frac{r^{2p}dxdy}{\sqrt{r^2(1-r^2)}} = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \frac{r^{2p}rdr}{\sqrt{r^2(1-r^2)}}$.

Осуществляя подстановку $T_j = \frac{2m}{\pi} A_j$, приходим к системе уравнений

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j^{2p} T_j = \int\limits_0^1 \frac{r^{2p}dr}{\sqrt{1-r^2}}, \quad p = 0,\, 1,\, 2,\, ...,\, 2m-1.$$

Положим $T_{m+j} = T_j, \quad \lambda_{m+j} = -\lambda_j$. Тогда получаем систему

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{2m} \lambda_j^{2p} T_j = \int\limits_{-1}^{1} \frac{r^{2p}dr}{\sqrt{1-r^2}}, \quad p = 0,\, 1,\, 2,\, ...,\, 2m-1\,, \\ \sum\limits_{j=1}^{2m} \lambda_j^{2p-1} T_j = 0, \quad p = 1,\, 2,\, 3,\, ...,\, 2m\,, \end{cases}$$

откуда следует что $\lambda_j$ и $T_j$ являются узлами и весами квадратурной формулы Меллера [3, стр. 199]

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{\varphi\,(t)\,dt}{\sqrt{1-t^2}} \cong \frac{\pi}{2m} \sum_{j=1}^{2m} f\left(\cos\frac{(2j-1)\,\pi}{4m}\right).$$

Поскольку кубатурная формула (2) точна для одночленов нечетной степени до $4m-1$ за счет формулы прямоугольников, возьмем для $\lambda_j$ только положительные значения:

$$\lambda_j = \cos\frac{(2j-1)\,\pi}{4m}, \quad j = 1,\, 2,\, ...,\, m.$$

Таким образом, мы получили следующую кубатурную формулу типа Чебышева $(4m-1)$-й степени точности, инвариантную относительно группы $G_{4m}$:

$$\int\limits_{B_2} \frac{f\,(x,\, y)\,dxdy}{\sqrt{(x^2+y^2)\,(1-x^2-y^2)}} \cong$$

$$\cong \frac{\pi^2}{4m^2} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{4m} f\left(\cos\frac{(2j-1)\,\pi}{4m} \cdot \cos\frac{k\pi}{2m},\, \cos\frac{(2j-1)\,\pi}{4m} \cdot \sin\frac{k\pi}{2m}\right) \qquad (3)$$

**Теорема 1.** *Не существует инвариантной относительно группы $G_{4m}$ кубатурной формулы вида (3), имеющей алгебраическую степень точности выше чем $4m-1$.*

Доказательство. Вершины правильного $4m$-угольника лежат на следующих прямых (оси симметрии группы $G_{2m}$) $n_k = x\sin\frac{k\pi}{2m} - y\cos\frac{k\pi}{2m} = 0$, $k = 0,\, 1,\, 2,\, ...,\, 2m-1$, [4].

Перемножая левые части этих уравнений и возводя в квадрат полученное выражение, получаем многочлен $P_2(x, y)$ степени $4m$.

Этот многочлен неотрицателен в $B_2$ и поэтому, интеграл от него по этой области положителен. С другой стороны, подставляя $P_2(x, y)$ в кубатурную формулу (3), получаем нулевое значение. Отсюда следует, сколь бы мы не увеличивали количество множеств вершин 4m-угольника в построенной формуле, она не будет давать точное значение многочлена $P_2(x, y)$. Теорема доказана.

**Теорема 2.** *Узлами кубатурной формулы (3) служат общие нули ортогональных многочленов* $P(x, y)$ *и* $Q\,(x,\, y) \;=\; r^{2m} + a_1 r^{2m-2} + a_2 r^{2m-4} + ... + a_m$. *Здесь* $P(x, y)$ *тот же, что и в теореме 1,* $a_1$, $a_2$, ..., $a_m$ *-коэффициенты многочлена* $t^m + a_1 t^{m-1} + a_2 t^{m-2} + ... + a_m$*, ортогонального с весом* $\frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}$ *на отрезке* [0, 1].

Доказательство. Многочлен $P(x, y)$ есть многочлен деления окружности и с точностью до постоянного множителя совпадает с якобианом базисных инвариантных форм группы $G_{2m}$ [5]. Как отмечалось выше, узлы кубатурной формулы (3) являются нулями $P(x, y)$. Нетрудно убедиться, что они являются и нулями многочлена $Q(x, y)$. Согласно теореме 11.3 [2, стр. 230] существует кубатурная формула $(4m-1)$-й степени точности с $4m^2$ узлами. Это и есть формула (3). Теорема доказана.

*Примечание.* Многочлены $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ инвариантны относительно группы вращений $\widetilde{G}_{2m}$ -подгруппы индекса два группы $G_{2m}$.

**Литература**

1. Coxeter H-S.M. The product of the generators of a finite group generated by reflections. Duke Math.J., vol. 18, є4, p. 765-782.

2. Мысовских И.П. Интерполяционные кубатурные формулы. М.: Наука, 1981, 336 с.

3. Мысовских И.П. Лекции по методам вычислений. М.: Физ.-матгиз, 1962, 334 с.

4. Игнатенко В.Ф. О плоских алгебраических кривых с осями симметрии. Укр.: Геомет.сбор., 1978, вып. 21. С 31-33.

5. Шамсиев Э.А. О связи между инвариантными и ортогональными многочленами. В.кн. Неклассические уравнения метаматематической физики и задачи теории ветвления. Ташкент: Фан, 1988, С. 171-177.

Ташкентский Государственный
Технический университет им. А.Беруни

Дата поступления
14.04.05

# Математическая жизнь

## ***Расул Набиевич Ганиходжаев***

(к 60-летию со дня рождения)

19 ноября исполнилось 60 лет со для рождения известного ученого математика доктора физико-математических наук профессора Ганиходжаева Расула Набиевича.

Р.Н.Ганиходжаев родился 1945 г. в Ташкенте, в семье служащих. В 1963 г. он поступил на механико-математический факультет ТашГУ. С 1964 г. по 1967 г. служил в армии. После демобилизации продолжил учебу и закончил ее в 1971 г. Заметив его склонность к научной работе, кафедра функционального анализа рекомендовала его в аспирантуру. Под руководством академиков Т.А.Сарымсакова и Дж.Х.Хаджиева он защитил кандидатскую диссертацию на тему "О решении квадратных операторных уравнений", в которой были детально изучены необходимые и достаточные условия существования решений уравнения с равномерно выпуклым оператором, действующим в гильбертовом пространстве. Одновременно началась и активная учебно-педагогическая деятельность Р.Н. Ганиходжаева на кафедре функцинального анаизализа ТашГУ. Под влиянием академика Т.А.Сарымсакова научные интересы ученого стали приобретать стохастическую направленность. Успехи биологической науки, теория универсальности Фейгенбаума, проблемы порядка и хаоса требовали математической формализации и обоснования. Одной из таких проблем - теорией квадратичных стохастических операторов - и начал заниматься Р.Н.Ганиходжаев при поддержке акад. Т.А.Сарымсакова. В частности, им получено полное описание квадратичных автоморфизмов симплекса.

Предложенный Р.Н.Ганиходжаевым оригинальный подход по применению теории графов в изучении дискретных динамических систем оказался эффективным и был впоследствии подхвачен другими специалистами. Итогом этих исследований явилась докторская диссертация "Исследования по теории квадратичных стохастических операторов", успешно защищенная на Специализированном Совете Института Математики АН РУз им. В.И.Романовского (1995 г.). Результаты научных исследований Р.Н. Ганиходжаева были достойно оценены Нью-йоркской Академией Наук, действительным членом которой он является с 1993 г.

Р.Н.Ганиходжаев активно участвует в популяризации математических знаний среди студентов и школьников, в проведении математических олимпиад. Им опубликовано около 50 научных и научно-популярных статей, подготовлено 4 кандидата наук.

Расул Набиевич сейчас полон творческой энергии и продолжает активно занятся каучной и педагогической деятельностью.

Режакционная коллегия "Узбекского математического журнала" поздравляет юбиляра и желает ему здоровья и еще долгих лет творческой активности.

## Содержание

**О.Х.Абдуллаев.** *Краевая задача для уравнения эллиптико-гиперболического типа третьего порядка с двумя перпендикулярными линиями вырождения в двусвязной области* ............ 3

**Ш.Алимов.** *О задаче быстродействия в управлении процессом теплообмена* ............ 13

**А.С.Бердышев, Э.Т.Каримов.** *Нелокальные задачи для уравнений параболо-гиперболического типа со спектральным параметром* .......... 22

**А.А.Бободжанов, Б.Т.Калимбетов.** *Регуляризованная асимптотика решений сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных систем с обратным временем* ............ 37

**Г.П.Исматуллаев.** *Некоторые кубатурные формулы для вычисления двойных интегралов* ............ 49

**Б.Т.Калимбетов.** *Предельный переход в системе интегральных уравнений с диагональным вырождением ядра* ............ 55

**Ж.Д.Мамажонов.** *Спектральные свойства решений одной нелокальной задачи для уравнения смешанного типа с негладкими линиями изменения типа* ............ 61

**Н.К.Очилова.** *Нелокальная краевая задача для уравнения параболо-гиперболического типа с двумя перпендикулярными линиями и различными порядками вырождения* ............ 72

**Б.Б.Рихсиев, А.Ш.Кучкаров.** *Дифференциалные игры сближения со многими преследующими в плоскости Лобачевского* ............ 87

**М.С.Салахитдинов, А.Хасанов.** *Единственность решения задачи Трикоми для одного класса уравнения смешанного типа* ............ 94

**А.К.Уринов, А.Т.Абдукодиров.** *Нелокальная краевая задача со смещением для одного вырождающегося гиперболического уравнения* ........ 102

**Э.А.Шамсиев.** *Об одной кубатурной формуле типа Чебышева* ........ 111

## Математическая жизнь

**Расул Набиевич Ганиходжаев** *(к 60 - летию со дня рождения)* ..... 114

## Mundarija

**O.X.Abdullayev.** *Ikkita perpendikulyar buzilish chizig'iga ega bo'lgan uchinchi tartibli elliptiko-giperbolik tipdagi tenglama uchun ikki bog'lamli sohada chegaraviy masala* . . . . . 3
**Sh.Alimov.** *Issiqlik almashuvini boshqarishda tezkorlik masalasi haqida* . . . . . 13
**A.S.Berdishev, E.T.Karimov.** *Spektral parametrli parabolo-giperbolik tipdagi tenglamalar uchun nolokal masalalar* . . . . . 22
**A.A.Bobojonov, B.T.Kalimbetov.** *Teskari vaqtli singulyar g'alayonlangan integro-diferensial sistemalarning yechimlari regulyatsiyalashgan asimptotasi* 37
**G'.P.Ismatullayev** *Ikkinchi tartibli integrallarni hisoblash uchun ba'zi kubatur formulalar* . . . . . 49
**B.T.Kalimbetov.** *Diagonalda buzilgan yadroli integral tenglamalar sistemasida limitga o'tish* . . . . . 55
**Ж.Д.Мамажонов.** *O'zgarish tipi silliq bo'lmagan aralash tipdagi trnglamalar uchun bir nolocal masala yechimlari spektrining xossalari* . . . . . 61
**N.K. Ochilova.** *Turli xil tartibda ikkita perpendikulyar buzilish chizigiga ega bo'lgan parabolik-giperbolik tipdagi tenglama uchun nolokal chegaraviy masala* 72
**B.B.Rixsiyev, O.Sh.Kuchqarov.** *Lobachevsliy tekisligida ko'p quvlovchilar bilan yaqinlashish differensial o'yini* . . . . . 87
**M.S.Saloxitdinov, A.Hasanov.** *Bir aralash tenglamalar sinfi uchun Trikomi masalasi yechimi yagonaligi* . . . . . 94
**A.K.O'rinov, A.T,Abduqodirov.** *Buziladigan giperbolik tenglama uchun nolokal chegaraviy masala* . . . . . 102
**E.A.Shamsiyev.** *Chebishev tipidagi bir kubatur formula haqida* . . . . . 111

## Matematika hayotidan

**Rasul Nabiyevich G'anixo'jayev** *(tavalludining 70 yilligiga)* . . . . . 114

Изд. №М-22. Сдано в набор 1.11.05г. Подписано к печати 13.11.05 г.
Формат 60×90 1/16. Гарнитура литературная. Печать офсетная.
Усл.-печ.л. 7,0. Тираж 200. Заказ №

Издательство "Фан"АН РУз: 700047, Ташкент, ул. акад. Я.Гулямова, 70
Отпечатано в ООО "Арнапринт"
Институт математики им. В.И.Романовского АН РУз: 700125,
Ташкент, Академгородок, ул. Ф.Ходжаева, 29.